



UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

**“CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS DEL PROCESO DE
INVERSIONES Y EL ANÁLISIS DEL FACTOR RIESGO”**

PRESENTADO POR:

ROSA ITZEL BARRÍA MIRANDA

**Tesis Presentada como uno de los requisitos para optar al grado de Maestro en
Ciencias, con Especialización en Investigación de Operaciones.**

Panamá, República de Panamá

2002

TH

24 JUN 2002

APROBADO POR:

Eloy B. Rico R.
M. en I O Eloy B. Rico
PRESIDENTE

Eyda N. Jiménez
M. en C. Eyda N. Jiménez
MIEMBRO

Iveth V. Martínez
M. en C. Iveth V. Martínez
MIEMBRO

Jaime Suárez
REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA
DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

FECHA: 19/ABRIL/2002

act. del senar

6019

ÍNDICE GENERAL

SECCIÓN	CONTENIDO	Página
	Dedicatoria	i
	Agradecimiento.....	ii
	Resumen.....	1
	Summary.....	1
	Introducción.....	2
CAPITULO I		
	ENFOQUE TRADICIONAL DEL PROCESO DE TOMA DE DECISIONES EN LAS INVERSIONES DE CAPITAL	6
1.1	Definición de Proyecto de Inversión.....	8
	Marco Referencial de un proceso de inversión.....	10
1.2	Componentes o Partes de un Proyecto de Inversión.....	11
	1.2.1 Propuesta de Inversión.....	11
	1.2.2 Capital.....	12
	1.2.3 Costo de Capital o Tasa de Interés.....	12
	1.2.4 Tiempo.....	13
	1.2.5 Flujo de Efectivo.....	14
	1.2.6 Decisión a Invertir.....	15
	1.2.7 Certidumbre.....	18
	1.2.8 Incertidumbre.....	19
	1.2.9 Riesgo.....	20
1.3	Métodos para Evaluar Proyectos de Inversión	21
	1.3.1 Método de Periodo de Recuperación o Payback.....	23

Ejemplo Propuesta A.....	24
Ejemplo Propuesta B.....	25
1.3.2 Método de la Tasa de Rendimiento Contable.....	27
1.3.3 Valor Presente Neto.....	29
Ventajas y Desventajas.....	33
1.3.4 Método de la Tasa Interna de Retorno (TIR).....	34
Observaciones.....	37
Ventajas y Desventajas.....	38
1.3.5 Índice de Utilidad Productiva.....	39
1.3.6 Método de Valor Anual Equivalente.....	39
1.3.7 Método de Valor Futuro Neto.....	40
1.3.8 Método de Periodo de Recuperación Descontado.....	40
1.3.9 Método de Beneficios Costos (B/C).....	41
1.4 Árbol de Decisión como otra Alternativa en la toma de decisiones.....	43
en el Proceso de Invertir.	
1.5 Importancia de las Decisiones de Inversión.....	46
1.6 Clasificación de los Proyectos de Inversión.....	47
1.6.1 Clasificación de los Proyectos de Inversión de acuerdo a la	
Organización de las Naciones Unidas (ONU).....	48
1.6.2 Proyectos de Inversión Económicamente Independientes.....	49
1.6.3 Proyectos de Inversión Económicamente Dependientes.....	49
1.6.4 Proyectos Complementarios.....	50
1.6.5 Proyectos Sustitutos.....	50
1.6.6 Proyectos Mutuamente Excluyentes.....	50

1.6.7	Proyectos de Inversión Contingentes o de Prerrequisito.....	50
-------	---	----

CAPITULO II

	ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE LA TEORIA DEL RIESGO.....	52
--	--	-----------

2.1	El riesgo en su concepto más general.....	55
-----	---	----

2.2	El riesgo en la actualidad.....	56
-----	---------------------------------	----

2.3	Concepción moderna del riesgo.....	58
-----	------------------------------------	----

2.4	Aportes de Grandes Matemáticos a la Teoría del Riesgo durante el Renacimiento.....	61
-----	---	----

2.4.1	Leonardo de Pisa.....	62
-------	-----------------------	----

2.4.2	Girolamo Cardano.....	62
-------	-----------------------	----

2.4.3	Pierre de Fermat.....	62
-------	-----------------------	----

2.4.4	Blaise Pascal.....	63
-------	--------------------	----

2.4.5	Gottfried Von Leibniz.....	65
-------	----------------------------	----

2.4.6	Jacob Bernoulli.....	66
-------	----------------------	----

2.4.7	Abraham de Moivre.....	67
-------	------------------------	----

2.4.8	Thomas Bayes.....	67
-------	-------------------	----

2.5	La Teoría del Riesgo Durante los Siglos XIX y XX.....	68
-----	---	----

2.5.1	Simeón Denis Poisson.....	69
-------	---------------------------	----

2.5.2	Francis Galton	69
-------	----------------------	----

2.5.3	John Mayard Keynes.....	70
-------	-------------------------	----

2.5.4	Harry Markowitz	70
-------	-----------------------	----

2.5.4.1	Hipótesis del Modelo de Markowitz	73
---------	---	----

CAPITULO III

VALORACIÓN DEL RIESGO.....	82
3.1 La Administración del Riesgo como un Sistema Operativo.....	83
3.2 Etapas del Proceso Operativo de la Administración del Riesgo.....	84
3.2.1 Identificación del Riesgo.....	84
3.2.2 Política del Riesgo.....	86
3.2.3 Valoración del Riesgo en el Proceso Operativo de la Administración del Riesgo.	87
3.2.4 Control del Riesgo.....	88
3.3 Definición de Valor en Riesgo.....	89
3.4 Valoración del Riesgo (VaR).....	92
3.4.1 El VaR con media esperada como un punto de referencia (VaR_e)	97
3.4.2 El criterio de medida VaR_e	97
3.4.3 El VaR con un punto de referencia constante (VaR_t)....	99
3.4.4 El VaR acumulado (AVaR)	102
3.4.5 El AAVaR	106
3.4.6 Análisis de la Eficiencia de la Medida VaR para distribuciones específicas.	107
3.5 El VaR y medidas tradicionales de Riesgo.....	114
3.5.1 Medidas de Dispersión.	114
3.5.1.1 Medida de Riesgo de Desviación Estándar.....	114
3.5.1.2 Medida de Riesgo de Coeficiente de Variación.....	115

3.5.1.3	Medida de Riesgo de Entropía.	116
3.5.1.4	Medida de Riesgo de Desviación Media Absoluta.....	116
3.5.1.5	Medida de Riesgo de Diferencia Media de Gini.	117
3.6	Medida de Riesgo por Debajo de un Punto de Referencia.....	118
3.6.1	Medida de Riesgo de Fishburn " $\alpha - t$ "	119
3.6.1.1	Medida de Riesgo. Seguridad Primera de Roy's (S.F.).....	119
	(fishburn $\alpha \rightarrow 0$).	
3.6.1.2	Medida de Riesgo de Domar y Musgrave (fishburn $\alpha = 1$).....	120
3.6.1.3	Medida de Riesgo de Semi – Varianza de Markowitz .	
	(fishburn $\alpha = 2$).	120
3.6.1.4	El escenario del peor caso . (WCS). ($\alpha \rightarrow \infty$).	121
3.7	La medida de Riesgo de Baumol.	121
3.8	Medidas de Riesgo VaR.	122
3.9	Medidas de VaR y Teoría de Utilidad.....	123
3.9.1	Congruencia de la Medida del VaR con la Utilidad Esperada.....	124
3.9.2	El enfoque de utilidad lexicográfica.....	128
	Tabla de resumen de las medidas de Riesgo.....	133
	Apéndice A. Teoría de Utilidad.	134
	Apéndice B. Dominancia Estocástica.	137
	Índice de ecuaciones.....	142
	Índice de figuras	145
	Conclusiones.	146
	Recomendaciones.....	148
	Bibliografía Consultada.	149

DEDICATORIA

Este Trabajo lo dedico con mucho amor a mi familia, en especial a mis dos hijas, Karen y Katrina; quienes en todo momento me dieron su apoyo moral y comprensión, para llegar a la feliz culminación del mismo.

AGRADECIMIENTO

Me siento complacida de haber culminado este trabajo, que sin el esfuerzo y la cooperación de muchas personas no hubiese sido posible. Es por ello que deseo agradecer primeramente, a Dios, por su guía en todo momento.

Además, deseo agradecerle al Profesor Eloy Rico, por su colaboración y asesoría. A todos mis profesores del programa de Maestría de Matemática, opción Investigación de Operaciones, y en especial a todos mis amigos y compañeros que me dieron siempre una voz de aliento para que éste trabajo fuese una realidad.

Mil Gracias

Rosy

RESUMEN

Nuestro objetivo es presentar algunas consideraciones metodológicas del proceso de inversión y el análisis del factor de riesgo, en consecuencia este trabajo está fundamentado en la consulta de la literatura actualizada sobre la Teoría de Riesgo, sus orígenes, evolución y aplicaciones en los tiempos modernos. Se enfatiza la importancia de la Administración del Riesgo como un proceso operativo en la toma de decisiones en proyectos de inversión, no sin antes discutir sus fundamentos teóricos, sus componentes, clasificación y los correspondientes métodos de evaluación. Presentamos diferentes alternativas de medición del riesgo, sus relaciones con la teoría de utilidad esperada y los principios de dominancia estocástica.

A través de este estudio ha sido posible reafirmar el valor y utilidad de la Matemática en el quehacer diario, poniendo de manifiesto la trascendencia de la Teoría de Probabilidad en el origen y establecimiento de una nueva concepción y actitud frente a los eventos futuros. Desde de esta perspectiva, se resumen los aportes de científicos de diversas áreas a la construcción del nuevo paradigma " Descubrir métodos para poner el futuro al servicio del presente, reemplazando la desesperanza ante el destino por la elección y decisión "

SUMMARY

Our objective is to present some methodologic considerations of the process of investments and the analysis of the factor risk, consequently this work is based on the consultation of the literature updated on the Theory of Risk, its origins, evolution and applications in the modern times. It is emphasized the importance of the Administration of the Risk as an operative process for **making- decisions** in projects of investment, not without before to discuss theoretical foundations projects of investment, its components, classification and the corresponding methods of evaluation. We present different alternatives of measurement of the risk, and its relations with the theory of expected utility and the principles of stochastic dominance.

Across this study it has been possible to reaffirm the value and usefulness of the Mathematics in the daily occupation. For example we discuss the transcendence of Theory of the Probability in the origin and establishment of a new conception and attitude towards the future events, as well as its role in the establishment of a new paradigm " To discover methods to put the future to the service of the present, replacing the hopelessness before the destiny by the election and decision "

From of this perspective, are summarized the contributions of remarkable scientists to the construction of this new paradigm.

INTRODUCCIÓN

En nuestra vida existen situaciones que por simples que parezcan nos imponen la necesidad de evaluar y tomar decisiones. Aunque algunas veces, para la toma de decisiones, no se requieren de procedimientos lógicos o de tipo formal. Al tomar una decisión importante es recomendable no guiarse sólo por nuestra intuición, sino establecer algún mecanismo o patrón que nos permita seleccionar las decisiones que representen los mejores rendimientos o beneficios individuales o sociales, según el contexto.

Obviamente, un elemento vital en todo proceso de toma de decisión es el riesgo, en la actualidad es notoria la aplicación de métodos matemáticos y operacionales cuyo primordial objetivo es la Teoría de Riesgo. La aplicación de la Teoría de Riesgo se extiende a diversas actividades del quehacer humano, principalmente en Economía. En países más desarrollados existen organismos especializados en la administración y control del riesgo. Sin embargo, en nuestro medio esta tendencia no ha recibido aún una aceptación importante, en parte se debe en parte a la falta de personas interesadas en el desarrollo y aplicación de esta teoría y a la concepción enraizada de administrar el riesgo de forma empírica, ignorando la necesidad de identificar, clasificar, valorar y controlar el riesgo en el marco de una política de riesgo coherente con las necesidades y objetivos de la empresa, país o región. La principal motivación en la elección del tema "Consideraciones Metodológicas del Proceso de Inversión y el Análisis del Factor

Riesgo”, radica en el hecho constatado de que herramientas y métodos matemáticos han encontrado valiosas aplicaciones en este ámbito, reafirmando el papel de la Matemática como lenguaje de la ciencia y de la sociedad

Aún hasta este momento, a través de la historia la gente ha apostado y jugado juegos de azar sin tener un sistema de apuestas que determine ganancias y pérdidas. Es por ello que el acto de toma de riesgo flota libremente, indiferente de la teoría de la administración del riesgo, pero las poderosas herramientas del riesgo disponibles hoy permiten a la humanidad liberarse de las creencias del pasado, descubrir métodos modernos que ponen al futuro al servicio del presente en las medidas de las posibilidades, reemplazando la desesperanza ante el destino por la elección y decisión

Nuestro principal objetivo, con este trabajo, es el estudio de la toma de decisiones en el proceso de inversión, considerando el riesgo como un factor decisivo, sustentar la importancia de administrar el riesgo como un proceso operativo

Con el ánimo de facilitar la lectura del trabajo, hemos considerado conveniente dividirlo en tres capítulos, dos apéndices, una guía de figuras y una guía de ecuaciones. A continuación, se detallan los contenidos y descripciones de cada sección

En el primer capítulo titulado “Enfoque tradicional del Proceso de toma de decisiones en las Inversiones de Capital” se establecen aspectos metodológicos y conceptuales del proceso de inversión tales como componentes de un proyecto de inversión, el capital, costo de capital o tasa de interés, el tiempo, flujo de efectivo, decisión a invertir, la certidumbre, la incertidumbre y el riesgo. Además, de todo lo antes mencionado este primer capítulo contiene los métodos para evaluar propuestas de inversión como por ejemplo método de periodo de recuperación o “payback” y ejemplos relacionados al

mismo, método de la tasa de rendimiento contable, el valor presente neto (VPN) sus ventajas y desventajas, método de la tasa interna de retorno o rendimiento (TIR) las ventajas y desventajas de éste método, índice de utilidad productiva, método de valor anual equivalente, método de valor futuro neto, método de recuperación descontado y el método de beneficios-costos (B/C) Se Incluye también el árbol de decisión como otra alternativa en la toma de decisión en el Proceso de Inversión y su importancia, además, la clasificación de los proyectos de inversión es otro de los puntos tratados en el capítulo

En el segundo capítulo titulado “Aspectos Históricos sobre la Teoría del Riesgo”, está basado en la historia del riesgo desde sus inicios cuando la gente sentía estar a merced de la arbitrariedad de los dioses o fuerzas sobrenaturales

La historia del riesgo nos permite plantearnos algunas interrogantes ¿ Por qué el dominio del riesgo es un concepto moderno único? ¿Por qué la humanidad esperó miles de años, hasta el Renacimiento antes del derribo de las barreras que impedían el camino a la medida y control del riesgo? Se presenta en este capítulo las inquietudes que inspiraron a Fermat y Pascal a proponer los fundamentos de la teoría de la probabilidad, lo cual representa el corazón del concepto del riesgo Estimamos importante la discusión del acertijo de Luca de Paccioli y su solución según Fermat y Pascal Resumimos los aportes de gran interés señalados por Jacob Bernoulli, Leibniz, Thomas Bayes, Abraham de Moivre entre otros, presentamos la teoría del riesgo durante los siglos XIX y XX y los puntos relacionados con el riesgo de Simeón Denis Poisson, Francis Galton, John Keynes, Harry Markowitz , así como también la hipótesis del Modelo de Harry Markowitz, son estimadas al final del capítulo

Para juzgar el grado en que los modelos o métodos debe ocuparse de la administración del riesgo son ventajas o una amenaza, se deberá conocer la historia del riesgo, su cuantificación y valorización del mismo, para eso tratamos en el tercer capítulo la administración del riesgo como un Sistema Operativo y sus valoraciones. Para finalizar se estudia la congruencia de la teoría de utilidad esperada con las medidas de valor en riesgo (VaR).

Este trabajo fue realizado a través de una consulta de la bibliografía disponible en forma impresa y por Internet, apoyada en las consultas, investigaciones e intercambio de opiniones con personas que se dedican a actividades financieras.

Esperamos que este aporte despierte el interés de matemáticos y profesionales de las ciencias económicas y financieras, de tal forma que podamos dar los primeros pasos en el establecimiento de una cultura de administración del riesgo.

CAPITULO I

**“ENFOQUE TRADICIONAL DEL PROCESO DE TOMA DE DECISIONES EN
LAS INVERSIONES DE CAPITAL.”**

El hecho que a través del tiempo de nuestra vida se tenga que tomar múltiples decisiones, nos conduce a mirar hacia el pasado, tomar en cuenta el presente y prepararnos para el futuro. Sin embargo, la mayor parte de estas decisiones son triviales, pues no requieren de ningún procedimiento de tipo formal o estructurado, para llegar a tomarlas. Aún, cuando las decisiones son triviales, las consecuencias de no tomar la mejor nos lleva a problemas muy serios. Al tener que tomar una decisión, no debe guiarse sólo por la intuición, es importante establecer un procedimiento lógico general que nos ayude a seleccionar las decisiones que nos representen los mejores beneficios.

Cuando se enfrenta a una decisión, lo primero que se tiene que hacer es determinar los posibles cursos de acción que se pueden seguir. La existencia de diferentes cursos de acción es un requisito indispensable en el proceso de toma de decisiones. Cuando sólo se tiene una alternativa de decisión, no es necesario efectuar un análisis de cómo proceder. se deberá seguir la única alternativa existente, de ese modo se ahorraría tiempo.

Si se dispone de varias alternativas, el proceso de toma de decisiones requiere que se generen las alternativas disponibles. Sin embargo, esto no significa que siempre se este generando nuevas alternativas, y postergando por consiguiente la decisión, sino por el contrario, también vale la pena contar con un medio de generar las alternativas mas significativas, ya que de otra manera el proceso de toma de decisiones sería lento o no acabaría.

Este capítulo, establece definiciones importantes, así como, las partes o componentes de un proyecto de inversión, su clasificación, sus métodos de evaluación, y otros. Toda

vez que nuestro interés radica en el enfoque tradicional del proceso de toma de decisiones en las inversiones de capital, de forma que sirva de marco general al desarrollo del trabajo

1.1 Definición de Proyecto de Inversión

Un proyecto de inversión es el desembolso de recursos financieros destinados a la adquisición de otros activos con la finalidad de obtener rentas y/o servicios, durante un periodo establecido

También, podemos decir que un proyecto de inversión, es la colocación de capital en el presente con el propósito de obtener dinero adicional en el futuro de acuerdo a ciertas condiciones

La capacidad de inversión en una empresa, puede definirse como la disposición de sus recursos, con el fin de adquirir mayores beneficios o rentabilidad durante uno o mas periodos de tiempo

Dentro de la política económica de un país, podemos definir los proyectos de inversión como las actividades financieras publicas y privadas, en el cual se nutren, el abastecimiento y disponibilidad de mano de obra, recursos, materiales y, desde luego recursos financieros, todas las actividades primarias, industriales y de servicios, que al llevarlas a cabo generan efectos que impartan en mayor o menor medida, positiva o negativamente, al sistema económico general del país

En algunas empresas bien organizadas, medianas y grandes, el problema de inversión está enfocado en la búsqueda de alternativas que garantice, la rentabilidad de la empresa ya existente, estudiando si el proyecto contiene toda la información satisfactoria respecto al plan de inversiones, a la producción, a las proyecciones financieras, al mercado, y finalmente, se analizan otros datos que se requieran para asegurarse su rentabilidad. Pero, el principal objetivo de una empresa es maximizar sus beneficios, los cuales se traducen en términos de rentabilidad o riqueza.

Existen algunos ejemplos de proyectos de inversión dentro de empresas ya establecidas, que analizan la posibilidad de ampliar sus instalaciones, creación de nuevas líneas de producción, modificación de los procesos ya existentes, etc. Sin embargo, todo esto está orientado en los intereses de la empresa, tomando en cuenta la alternativa más ventajosa de acuerdo al rendimiento esperado.

Al llevar a cabo los proyectos de inversiones, toda empresa debe considerar el siguiente marco referencial que presentamos a continuación. El mismo tiene la secuencia lógica de un diagrama de flujo.

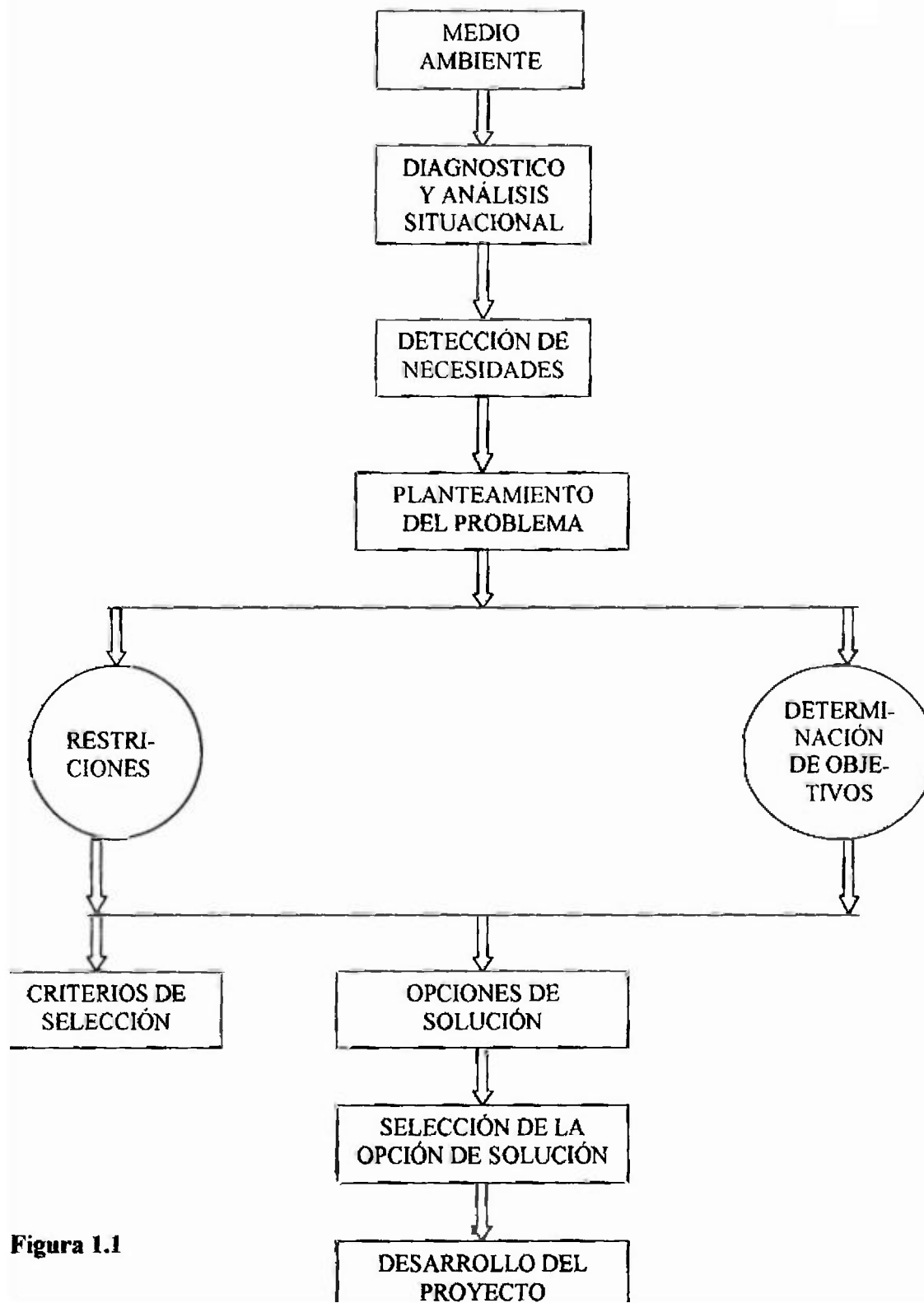


Figura 1.1

Existen proyectos de inversión, que no necesariamente son medibles en unidades monetarias, este es el caso típico de las inversiones de carácter social, políticas, culturales, etc , donde es importante medir su rentabilidad, de acuerdo a la satisfacción Colectiva de las personas beneficiadas con la inversión

1.2 Componentes o partes de un Proyecto de Inversión

En todo proyecto de inversión, pueden identificarse diversos componentes o elementos que participan en mayor o menor grado en la selección de las diferentes alternativas que se tiene. Los componentes básicos que se tomarán en cuenta en un problema de inversión son los siguientes: capital (dinero), costo de capital o tasa de interés, el tiempo, rendimiento o beneficios, flujos de efectivos, la decisión a invertir, la certeza, riesgo e incertidumbre.

A continuación se describen de manera breve cada uno de los componentes básicos del problema de inversión.

1.2.1 Propuesta de Inversión

Una propuesta de inversión es un proyecto único considerado como posibilidad de inversión. Es una posible opción de decisión. Así, toda propuesta puede ser una alternativa de inversión, sin embargo, una alternativa de inversión puede estar formada por un grupo de propuesta de inversión.

1.2.2 Capital

El capital tiene que ver con las fuentes de financiamiento, que la empresa utiliza para emprender sus proyectos de inversión. Es importante conocer de donde provienen estas fuentes de financiamiento, pues, permite tomar mejores decisiones en cuanto a la estructura financiera de la empresa.

El dinero o capital que se empleará para llevar a cabo un proyecto de inversión, pueden provenir de fuentes externas o internas. Son de fuentes externas las líneas de crédito (préstamos bancarios), ventas de acciones, ventas de activos, y son de fuentes internas las ganancias retenidas o reinversión, etc. La utilización de fuentes externas, puede significar una desventaja para la empresa, porque la empresa tendrá una carga nueva a sus obligaciones monetarias fijas, como es el caso de tener que pagar intereses por préstamos bancarios a largo plazo. Sin embargo, con frecuencia se usan estas fuentes externas de financiamiento, cuando no se dispone de capital para llevar a cabo el proyecto de inversión.

1.2.3 Costo de Capital o Tasa de interés

El concepto de tasa de interés o costo de capital, aparece relacionado con la preferencia que expresan las personas por recibir dinero ahora en lugar de obtenerlo más tarde, y la clave para comprender este concepto es reconocer que el dinero tiene un valor en el tiempo.

Por ejemplo si se dispone de B/ 1 000 en la actualidad y se guardan en una caja fuerte durante un mes, al final de ese periodo se tendrá lo mismo B/ 1 000 que poseía al comienzo. Por el contrario, si se invierte los B/ 1 000 y al cabo de un mes se obtiene B/ 1 100, la suma inicial habrá crecido un 10 %

Al primer inversionista lo tendrá sin cuidado que le den el dinero ahora o dentro de un mes, ya que sus recursos lo dejará inactivos. Por el contrario, el inversionista que sigue el segundo camino se beneficia con el crecimiento que experimenta los B/ 1 000 al invertirlo, y por este motivo preferirá recibirlos ahora.

La preferencia por recibir el dinero antes y no después, se incorpora a través del concepto de *tasa de interés* para cuantificar la oportunidad que el dinero tiene de crecer. Se debe observar que la *tasa de interés* es un concepto relativo a quien posee o controla el dinero, pues, el crecimiento que éste pueda experimentar depende de las oportunidades de inversión de un individuo en un proyecto de inversión. Como estas oportunidades varían de una persona a otra o de un proyecto a otro, de la misma forma cambiará la tasa de interés.

1.2.4 Tiempo

El tiempo en las decisiones de inversión puede ser visto de dos maneras

Un periodo o de varios periodos. Si es de un periodo, la toma de decisiones se hace en un solo punto del tiempo, el cual se conoce como tiempo estático. Cuando la toma de decisiones de inversión se ejecutan en varios periodos, ya sea al comienzo o al final, se dice que las inversiones se hacen en multiperiodo.

El periodo o periodos tomados en cuenta para llevar a cabo los proyectos de inversión, se conocen como horizonte de planeación. Este horizonte de planeación constituye la amplitud de visión del proyecto en el tiempo.

Un horizonte de planeación demasiado amplio trae consigo pérdida de confianza en el proyecto de inversión, y un horizonte de planeación corto corre el peligro de no registrar quizás los movimientos del flujo de efectivo más importante en un proyecto.

Es un hecho que la selección del horizonte de planeación de algunos proyectos de inversión obedecerá a los flujos de costos y en otros a los flujos de ingresos, o bien a una combinación de ambos, esto es, en algunos proyectos un indicador podría ser la vida económicamente útil de los activos físicos, mientras que en otros su fijación deberá depender de sus periodos de maduración, o una combinación de ambos factores.

1.2.5 Flujo de Efectivo

Dentro de un proceso de toma de decisiones en una empresa, todas las ventajas y desventajas económicas existentes, se definen a través de la corriente de beneficios y gastos que se generen en un horizonte de planeación dado, siendo éste el flujo de efectivo, el cual está representado por un vector de cantidades de dinero ordenadas en el tiempo.

Esta situación significa que ese vector de dinero en el tiempo es el modelo económico, que representará todas las decisiones técnicas, financieras, sociales, políticas de una

alternativa de inversión, el modelo será tan bueno de acuerdo a que tan bien represente los beneficios y gastos de cada alternativa

Además, en todo proyecto de inversión, se tienen beneficios (entradas) y gastos (salidas) de dinero, a lo largo de un tiempo. La diferencia de estas entradas y salidas de dinero en un periodo determinado de tiempo se conoce como componente del flujo de efectivo. Una componente de flujo de efectivo positivo indica una entrada neta de dinero en un periodo dado, mientras que un flujo negativo implica un desembolso neto en ese intervalo de tiempo.

La representación de los flujos de caja o flujo de efectivo de un proyecto de inversión, se hacen mediante un diagrama, donde estarán graficadas las entradas (ingresos) y salidas netas (gastos) de dinero en una escala de tiempo, como se indica en la siguiente figura

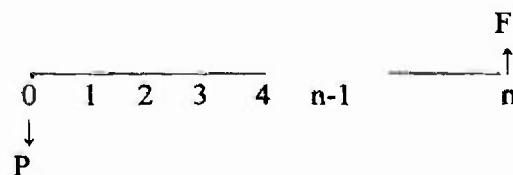


Figura 1.2

1.2.6 Decisión a invertir

La toma de decisiones en nuestra vida es una actividad inherente al comportamiento de los individuos, organizaciones, asociaciones, etc. Se le considera una característica de los sistemas sociales, donde la extensión e importancia de la actividad de toma de decisiones dependerá de la motivación con la cual se busca alcanzar los objetivos o

metas. Evidentemente dentro de un sistema, compuesto por personas que no poseen propósitos no tiene problemas de toma de decisiones.

Como se ha observado antes, *invertir*, significa destinar bienes con el propósito de adquirir un conjunto de activos reales o financieros, tendientes a proporcionar rentas y/o servicios en el futuro, durante un periodo establecido. Es un acto que para ser llevado a cabo requiere de una decisión.

La decisión de invertir es similar a otras decisiones que se consideran en nuestra vida cotidiana, como por ejemplo comprar un carro o comprar una casa o una póliza de seguro, estas pueden ser de carácter social, militar, personal, administrativa, etc., las cuales requieren de alternativas para su ejecución.

El punto inicial de cualquier intento para la toma de decisión a invertir, debe ser el reconocimiento de que existe un problema u oportunidad. En situaciones comunes, el reconocimiento de un problema es obvio e inmediato. Por ejemplo, una máquina descompuesta o una máquina de producción inadecuada se notan con mucha facilidad. Pero en general existen numerosas oportunidades que no son de fácil reconocimiento.

Una vez que se tiene conciencia del problema u oportunidad de invertir, pueden realizarse acciones para solucionarlo o aprovecharlo.

El éxito futuro de una empresa depende de las decisiones de inversión tomadas ahora. Muchos de los inversionistas están conscientes de esto, pero algunos métodos utilizados por la administración de la empresa, a veces no son los correctos, lo que será prudente tomar la mejor decisión a invertir, consultando con los directivos en términos de los servicios o beneficios que el proyecto de inversión genera.

Al enfrentarse a un problema de toma de decisión a invertir, debe tomarse en cuenta los siguientes elementos básicos

Las diferentes estrategias o alternativas, indicadas por S_i ($i = 1, 2, \dots, n$), las cuales reflejan distintas combinaciones de las variables controlables, esto es, distintas formas de actuar o cursos de acción factibles entre los cuales el decisor debe elegir

- Los estados de la naturaleza, entornos o escenarios, señalados por E_j (con $j = 1, 2, \dots, m$) reflejan las diferentes combinaciones de variables no controlables, es decir, son todos aquellos eventos futuros que escapan al control del decisor y que influyen en la toma de decisiones
- Los resultados o desenlace, presentados por R_{ij} (con $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$), son las consecuencias que se obtienen si se selecciona S_i bajo cada uno de los posibles estados de la naturaleza E_j . Son las consecuencias relacionadas con la elección de cada una de las alternativas
- Los criterios de decisión o regla de decisión, son criterios que permiten evaluar y seleccionar mediante un procedimiento establecido, la mejor alternativa en un problema de decisión en función del nivel de información disponible

Los primeros tres elementos del problema de decisión se pueden expresar en una matriz de decisión, como sigue

Figura 1.3

		Estados de la naturaleza			
		E_1	E_2	E_j	E_m
Estrategias	S_1	R_{11}	R_{12}	R_{1j}	R_{1m}
	S_2	R_{21}	R_{22}	R_{2j}	R_{2m}
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	S_i	R_{i1}	R_{i2}	R_{ij}	R_{im}
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	S_n	R_{n1}	R_{n2}	R_{nj}	R_{nm}

1.2.7 Certidumbre

Dentro del ámbito de las decisiones de inversión existen decisiones tomadas bajo condiciones de certeza, las cuales constituyen modelos determinísticos, donde se supone que el verdadero estado de la naturaleza es conocido por el decisor antes de realizar su elección, es decir, puede predecir con certeza total las consecuencias de sus acciones

La mayoría de las decisiones de financiamiento constituyen modelos determinísticos, pues se conoce con certeza el dinero que se recibirá y los pagos periódicos que se harán para cubrir la amortización del capital insoluto y pago de intereses

Las decisiones de inversión bajo certidumbre comprenden aquellas situaciones en que todos los elementos que actúan directamente en las decisiones de inversión son conocidos

con anterioridad. Por ejemplo si la empresa ya ha planeado de antemano cambiar la máquina procesadora con el fin de que sea más productiva. Son raras las veces en que los proyectos de inversión se conocen sus elementos que actúan sobre ellos.

1.2.7 Incertidumbre

En los procesos de toma de decisión bajo *incertidumbre*, el decisor conoce cuáles son los posibles estados de la naturaleza, aunque no dispone de información alguna sobre cuál de ellos ocurrirá. No sólo es incapaz de predecir el estado real que se presentará, sino que además no puede cuantificar de ninguna forma esta incertidumbre.

Es decir, en problemas de decisión bajo condiciones de incertidumbre, no se conocen las probabilidades de ocurrencia de los estados naturales, por lo tanto, hay que recurrir a criterios empíricos para tomar la decisión, como los siguientes:

- Principios Maximin y Minimax
- Principio de Hurwics
- Criterio de Laplace
- Criterio de Savage

1.2.9 Riesgo

La mayoría de las decisiones de inversión se toman bajo condiciones de riesgo. Muchas veces se confunde el riesgo con la incertidumbre. Si se tiene antecedentes o se

posee una estadística que nos permita asignar una probabilidad de ocurrencia a cada uno de ellos, nos encontramos con un caso típico de riesgo. Por el contrario, si es imposible atribuir algún valor probabilístico a los posibles resultados, estamos en un caso de incertidumbre. George Philippatos en su libro “Essentials of Financial Management”, señala “El riesgo es una modalidad de la incertidumbre, es una incertidumbre en menor escala, con las probabilidades de los diferentes resultados de alternativas o cursos de acción que se conocen”

Además, Bierman y Smidt señalan con respecto a esta diferenciación “Para que un evento se considere sujeto a riesgo y no a la incertidumbre, será necesario que sea repetitivo en cuanto a su naturaleza, o sea que no se refiera a un evento que sólo ocurre una sola vez”

Los diferentes criterios de decisión para proyectos de inversión, tomadas en ambiente de riesgo se basan en estadísticas asociadas a la distribución de probabilidad de los resultados. Algunos de estos criterios se aplican sobre la totalidad de las alternativas, mientras que otros sólo tienen en cuenta un subconjunto de ellas, considerando las restantes como malas, por lo que no están presentes en el proceso de toma de decisiones.

Los principales criterios de decisión aplicados a proyectos de inversión en ambiente de riesgo son

- Criterio del valor esperado
- Criterio de mínima varianza con media acotada
- Criterio de la media con varianza acotada
- Criterio de la dispersión

- Criterio de la probabilidad máxima

De acuerdo al nivel de riesgo o preferencias que el inversionista o decisor esté dispuesto asumir, se tendrá cuatro categorías según la relación riesgo-rendimiento, siendo estas preferencias más adverso al riesgo, moderadamente averso al riesgo, menos averso al riesgo y preferente al riesgo. Para cada uno de estos inversionista se tendrá una función de utilidad, llamadas curvas de indiferencias, la cual puede elaborarse partiendo de cada una de estas categorías. Las mismas relacionan la tasa de rendimiento esperado y el riesgo aceptado.

La función de utilidad aparece en el apéndice A, y en los próximos dos capítulos el concepto de riesgo se desarrollará más ampliamente.

1.3 Métodos para Evaluar Proyectos de Inversión

El análisis económico para proyectos de inversión se realiza por medio de procedimientos técnicos para hacer comparaciones entre opciones selectivas y tomar decisiones al respecto, sobre la base de las ventajas monetarias o económicas que ofrecen.

A causa de la complejidad, siempre en aumento, de nuestra tecnología industrial, las formulaciones de orden económico presentan cada vez más dificultades y reviste al mismo tiempo importancia más vital. Los análisis económicos sirven para cuantificar las diferencias entre las opciones selectivas, reduciéndolas a bases que faciliten la comparación de los proyectos. En general, la aplicación de estas técnicas reviste una considerable importancia porque la empresa podría ahorrar el uso de recursos en la selección adecuada de los proyectos de inversión.

Al evaluar un proyecto de inversión, éste se juzga si un proyecto es viable, contemplando aspectos como su rentabilidad, así como su pronta recuperación a un límite de tiempo establecido o definido previamente

El interés en la evaluación de proyectos de inversión, radica en saber cuál alternativa es la mejor. La parte más difícil al evaluar un proyecto se haya primeramente en ponderar las cantidades pertinentes para el futuro, ya que ningún análisis es mejor que los presupuestos contenidos en él

El objetivo primordial de los métodos de evaluación de proyectos de inversión es el de proporcionar un medio sistemático al inversionista de evaluar y/o seleccionar las inversiones propuestas y la más adecuada. El método escogido en un momento determinado, debe ser tal que pueda ser aplicado consistente y uniformemente sobre cada uno de los proyectos en estudio

En todos los criterios de decisión, se utiliza alguna clase de índice, medida de equivalencia o base de comparación capaz de resumir las diferencias de importancia que existen entre las distintas alternativas de inversión. Es importante distinguir entre criterio de decisión y una base de comparación. Esta última es un índice que contiene cierta clase de información sobre la serie de ingresos y gastos que da lugar a una oportunidad de inversión

En este caso mencionaremos los dos tipos genéricos de métodos para evaluar proyectos de inversión: los métodos que no consideran el valor del dinero en el tiempo y los métodos que sí consideran el valor del dinero en el tiempo, estos últimos son llamados *métodos de flujo de efectivos descontados*.

Dentro de los métodos de evaluación de proyectos que no consideran el valor del dinero en el tiempo, se incluyen

- 1 Método de Periodo de Recuperación o Periodo de Pago (Payback)
- 2 Método de Tasa de Rendimiento Contable (TRC)

Por otro lado, los métodos de evaluación de proyectos de inversión que consideran el valor del dinero en el tiempo están

- 3 Método del Valor Presente Neto (VPN)
- 4 Método de Tasa Interna de Retorno o Rendimiento (TIR)
- 5 Método de Valor Anual Equivalente
- 6 Método de Valor Futuro Neto
- 7 Método de Período de Recuperación Descontado
- 8 Método de Beneficios/Costos (B/C)

A continuación veremos cada uno de ellos, sus ventajas y desventajas

1.3.1 Método de Período de Recuperación o Periodo de Pago (*Pay back*)

Este método se utiliza para conocer el número de periodos en que se recuperará la inversión inicial

El periodo de recuperación representa, por ejemplo, el número de años en que la inversión inicial se recuperará vía cobranza o utilidades. Debe recordarse que en este caso el término inversión considera la suma total de activos de la propuesta

Las propuestas de inversión implican una serie de riesgos, la evaluación por éste método es recomendable para casos en que las empresas tratan de reducir el tiempo de recuperación de su inversión

Tiene la ventaja de rapidez en la interpretación Sin embargo, no toma en cuenta la vida probable de la inversión y tampoco refleja ninguna base de comparación con los índices de la rentabilidad del proyecto

El *pay back o periodo de recuperación* se determina al aplicar la siguiente fórmula

$$\text{Periodo de recuperación} = \frac{\text{inversión total}}{\text{utilidad promedio anual}}$$

Véase el siguiente ejemplo

Considere los siguientes dos proyectos de inversión y sus respectivas utilidades en cada uno de los periodos, los cuales serán comparados, y así observar cual de los dos proyectos recuperará más pronto su inversión

Propuesta A

Vida útil (años)	Inversión	Utilidad
1	400 000	40 000
2		80 000
3		120 000
4		160 000
5		160 000
6		160 000
7		120 000
8		80 000
9		40 000
Total	400 000	960 000

$$\begin{aligned} \text{Utilidad promedio anual} &= \sum_{i=1}^9 \text{utilidades} / n = 960\,000 / 9 \\ &= 106\,666\,67 \end{aligned}$$

donde n = número de años

De esta forma el periodo de recuperación para la inversión A es

$$\begin{aligned} PR_A &= \frac{\text{inversión total}}{\text{utilidad promedio anual}} = \frac{400\,000}{106\,666\,67} \\ &= 3.75 \text{ años} = 3 \text{ años y } 9 \text{ meses} \end{aligned}$$

Como se puede observar, la propuesta de inversión A recuperará la inversión de 400 000 en 3 años y 9 meses

Propuesta B

Vida útil (años)	Inversión	Utilidad
1	20 000	32 000
2	30 000	64 000
3	40 000	96 000
4	50 000	128 000
5	60 000	160 000
Total	200 000	480 000

$$\begin{aligned} \text{Utilidad promedio anual} &= \sum_{i=1}^5 \text{utilidades} / n = 480\,000 / 5 \\ &= 96\,000 \end{aligned}$$

$$\text{Periodo de recuperación} = \frac{\text{inversión total}}{\text{utilidad promedio anual}} = \frac{200\,000}{96\,000}$$

$$= 2.1 \text{ años}$$

Si se considera el periodo de recuperación de la inversión como criterio de selección, la propuesta de inversión recomendable es la B, sin embargo, debe tomarse en cuenta que la vida probable de la inversión es mayor en la propuesta A. Además, es conveniente porque la inversión inicial es recuperada en menor tiempo que el horizonte económico planeado.

En el siguiente cuadro comparamos el tiempo de recuperación de la inversión inicial de cada una de las propuestas, en la cual la propuesta B se recupera en dos años y un mes (2.1 años).

Periodo de recuperación de la Propuesta A y B	
PR _A	PR _B
3.75 = 3 años y 9 meses	2.1 años = 2 años y un mes

El método de periodo de recuperación hace caso omiso de la rentabilidad de la propuesta de inversión a través del tiempo. Sólo se preocupa que el dinero regrese pronto, pero es excelente cuando se utiliza como una primera barrera para evaluar proyectos.

Cuando se utilice este método, será necesario que se establezca el plazo máximo de tiempo que se requiera para que los proyectos se recuperen. Por ejemplo si el límite es de 5 años, sólo los proyectos que se recuperen en menos de ese tiempo serán aceptados.

1.3.2 Método de Tasa de Rendimiento Contable (TRC)

Este método para evaluar proyectos de inversión considera la utilidad anual promedio esperada del proyecto, respecto a la inversión promedio. Este método a veces no es recomendable, ya que no considera los flujos de efectivo, sino las utilidades.

Por otro lado, el método de la tasa de rendimiento de la inversión establece el porcentaje que utiliza la utilidad promedio, sin reducir la amortización sobre la inversión. Además, puede obtenerse sobre la inversión total o bien, sobre la inversión promedio.

Debido a que ésta se amortiza durante su vida estimada, se considera a la inversión promedio como la mitad del total invertido.

La recuperación de la inversión se calcula mediante la aplicación de las siguientes fórmulas:

Opción de la Inversión total

$$TRC_T = \frac{\text{utilidad anual} - \text{inversión} / \text{vida probable}}{\text{inversión}}$$

Opción de inversión promedio

$$TRC_P = \frac{\text{utilidad anual} - \text{inversión} / \text{vida probable}}{\text{inversión} / 2}$$

La utilidad anual menos la amortización de la inversión inicial dividida entre la vida estimada, se dividirá entre la inversión inicial o la inversión promedio.

Cualquiera de estos métodos es usado actualmente, pero podría no resultar satisfactorio en caso de no tomar en cuenta otros factores, como es el periodo de recuperación de la inversión

Aplicando la opción primera del **TRC** a los dos proyectos de inversión del ejemplo anterior, se tiene

Proyecto A

$$TRC_T = \frac{960 - 400/9}{400} = 22.9\%$$

Proyecto B

$$TRC_T = \frac{480 - 200/5}{200} = 23.8\%$$

Utilizando este criterio sobre la base de la inversión total, se puede observar que la tasa de rendimiento contable es mayor para el proyecto B

Reconociendo la necesidad de determinar una medida de rentabilidad para evaluar los proyectos de inversión, pero sin llegar al grado de sofisticación que poseen los métodos que si consideran los flujos de efectivos descontados, se ha ideado éste método de la tasa de rendimiento contable

En las decisiones de inversión a largo plazo lo que interesa son los flujos de efectivo, y no las utilidades, lo cual es una desventaja de este método. Si bien se habla de utilidades reinvertidas, la realidad es que las nuevas inversiones se hacen con efectivo, generando éste bien sea por las operaciones, o bien, obteniendo mediante otras fuentes de

financiamiento Cuántas veces no ha sucedido que empresas con elevadas utilidades netas resultan insolventes técnicamente al no tener efectivo disponible para liquidar los pasivos que han vencido

La tasa de rendimiento contable de un proyecto de inversión puede alejarse mucho de la “verdadera” tasa del proyecto que se determina utilizando flujos de efectivos descontados. Ya que, podrá decirse que científicamente es mejor criterio de evaluación el método de la tasa de rendimiento descontada, o sea aquella que sí considera el valor del dinero en el tiempo, pero si el proyecto se le evalúa conforme a resultados contables, se tendrá que tomar muy en cuenta este método

Es un método muy utilizado para evaluar proyectos de inversión, por su fácil comprensión

1.3.3 Valor presente Neto (VPN)

El Valor Presente Neto (VPN) de un proyecto de inversión no es otra cosa que su *valor medido en dinero hoy*, es el equivalente en unidades monetarias (dinero) actuales de todos los ingresos y egresos, presentes y futuros, que constituyen el proyecto

El método del Valor Presente Neto (VPN) de un proyecto de inversión se fundamenta en el concepto del valor presente (VP) del mismo. Este puede definirse como la cantidad máxima que podría pagar una empresa por la oportunidad de hacer la inversión sin afectar su situación financiera es decir, es la suma de dinero requerida en el inicio del periodo de la inversión, con el fin de recibir una cantidad específica de beneficio

Esta cantidad se origina de la fórmula de interés compuesto. Si denotamos por P , el capital inicial o valor presente, el valor A , será la cantidad capitalizable a una tasa dada en un periodo determinado, i es la tasa de interés dada y n el número de periodos (años, meses, etc.) de vida del proyecto.

De esta forma se tiene

$$A = P(1+i)^n$$

si $VP = P$, entonces

$$VP = A(1+i)^{-n}$$

En muchas situaciones, la cantidad A de efectivo será recibida al final de cada período sobre el horizonte de vida de la inversión. Si deseamos calcular el valor presente de esta serie de pagos, a una misma tasa de interés, se tiene que

$$VP = A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-2} + \dots + A_n(1+i)^{-n}$$

o bien,

$$VP = \sum_{t=1}^n A_t(1+i)^{-t}$$

en donde las cantidades A_t , $t = 1, 2, \dots, n$ son los pagos en cada período. Si todos los periodos son constantes o iguales a un valor A , entonces

$$VP = \sum_{t=1}^n A(1+i)^{-t}$$

El valor presente neto (VPN) para un proyecto de inversión será la diferencia del valor presente de los flujos de efectivo de la inversión (VP), y la inversión inicial A_0 (gastos o desembolsos iniciales), esto es

$$\text{VPN} = \sum_{t=1}^n A_t (1+i)^{-t} - A_0 = -A_0 + \sum_{t=1}^n A (1+i)^{-t}$$

Observamos que A_0 es negativo, puesto que representa una inversión o aportación monetaria o en cualquier otro tipo de desembolso, mientras que el resto de los términos son positivos ya que representan las utilidades que produce dicha inversión

El uso del *valor presente neto* (VPN) como criterio para evaluar proyectos de inversión, es considerar el “signo” del mismo, es decir, si $\text{VPN} > 0$ se recomienda la inversión, se rechaza si $\text{VPN} \leq 0$

En conclusión, se puede afirmar las siguientes observaciones con respecto al valor presente neto (VPN) de un proyecto de inversión, como índice para evaluar la bondad económica del proyecto

- 1 El valor del VPN depende de la tasa de interés que se emplea para determinarlo

Esta tasa puede estar afectada por la *inflación*, que es el fenómeno de elevación de los precios en bienes y servicios, que produce una reducción en el poder adquisitivo de una determinada unidad monetaria, por la *deflación*, inverso a la inflación, lo cual es el aumento en el valor real del poder adquisitivo del dinero, dicha tasa también puede estar afectada por la *depreciación*, los *impuestos* de mercado, etc Todos estos factores tienen un

impacto negativo en la evaluación de proyectos de inversión, ya que los flujos de efectivo futuros no tendrían el mismo poder adquisitivo del año cero

- 2 Si i es la tasa de interés que **se utiliza** en el cálculo del valor presente neto, entonces **se tiene** las siguientes observaciones
 - Si $VPN(i) > 0$, indica que los dineros invertidos en el proyecto rinden más que i ,
 - Si $VPN(i) = 0$, señala que los dineros invertidos en el proyecto rinden exactamente i ,
 - $VPN(i) < 0$, muestra que los dineros invertidos en el proyecto rinden menos que i
- 3 Además si i es la tasa de interés de oportunidad, entonces
 - Si $VPN(i) > 0$ señala que el proyecto es conveniente
 - Si $VPN(i) = 0$ indica que no hay decisión (hay indiferencia)
 - Si $VPN(i) < 0$ muestra que el proyecto no conviene
- 4 El VPN está condicionado a la determinación de los flujos de efectivos periódicos
 - Además, si el $VPN \leq 0$ las inversiones no necesariamente se rechazan, se suspende temporalmente la decisión a invertir

Ejemplo 4

Suponga que se desea invertir un millón de dólares, y los flujos de $B/100,000$ 00 mensuales durante dos años a una tasa de interés del 8 % El valor presente neto de esta

inversión se determina así. Convirtiendo los dos (2) años a meses, se tiene que $n = 24$, entonces

$$VPN = -A_0 + \sum_{t=1}^n A(1+i)^{-t}$$

$$VPN = -10^6 + 10^5(1 + 0.08)^{-1} + 10^5(1 + 0.08)^{-2} + 10^5(1 + 0.08)^{-3} + \dots + 10^5(1 + 0.08)^{-24}$$

$$\begin{aligned} VPN &= -10^6 + \sum_{t=1}^{24} 10^5(1.08)^{-t} \\ &= \underline{\underline{\$52,875.00}} \end{aligned}$$

Ventajas:

Este método considera el valor del dinero a través del tiempo

Es el mejor criterio de decisión mundialmente y el más recomendado por los analistas financieros

Desventajas de este criterio:

Se necesita conocer la tasa de descuento para poder proceder a evaluar los proyectos

Un error en la determinación de esta tasa de descuento repercute en la evaluación de los proyectos. Además, un aumento o disminución de la tasa de descuento puede cambiar la jerarquización entre varios proyectos

El proyecto se considerará aceptado, si el valor de los flujos descontados que hayan de ser generados supera el valor de la inversión

1.3.4 Método de la Tasa Interna de Retorno o Tasa Interna de Rendimiento (TIR)

Algunos inversionistas calculan la rentabilidad de sus proyectos de la siguiente manera

El procedimiento más inmediato de calcular la rentabilidad consiste en sumar todos los ingresos, dividir este resultado por la suma de todos los egresos, y a éste cociente restarle la unidad, esto es

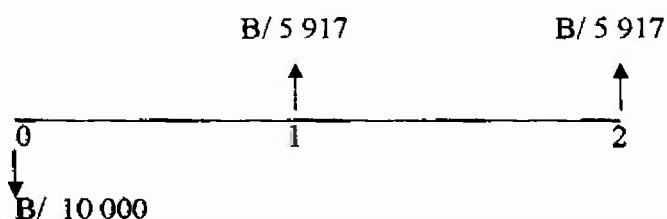
$$\text{Rentabilidad} = \frac{\sum \text{ingresos}}{\sum \text{egresos}} - 1$$

Este procedimiento equivale a dividir las **ganancias** del proyecto por la inversión requerida

$$\text{Rentabilidad} = \frac{\text{ganancias}}{\text{inversión}} = \frac{\sum \text{ingresos} - \sum \text{egresos}}{\sum \text{egresos}} \times 100\%$$

Ejemplo 5

Para ilustrar este procedimiento, considere el siguiente gráfico



Las cantidades colocadas en la parte superior son los ingresos B/. 5 917 y la cantidad colocada en la parte inferior izquierda será la inversión B/.10 000. En este proyecto de inversión ilustrado su rentabilidad será

$$\begin{aligned} \text{Rentabilidad} &= \frac{B/. 5\ 917 + B/. 5\ 917 - 1}{B/. 10\ 000} = 1.1834 - 1 \\ &= 18.34 \% \text{ en un término de dos años.} \end{aligned}$$

Como se observa 18.34 % es la rentabilidad o la tasa de interés al final del periodo para el ejemplo anterior.

Frente a estos resultados, es necesario precisar y utilizar un concepto más amplio que permita medir el rendimiento que produce un proyecto. Como el índice de rendimiento que se busca debe discriminar entre cantidades que aparecen separadas en el tiempo, éste debe tener en cuenta únicamente las partidas que conforman el flujo de caja y debe referirse a la rentabilidad o rendimiento de la inversión. Esto nos obliga a recurrir a la *tasa interna de rendimiento o retorno (TIR)*.

Cuando se explicó el método del valor presente se hizo énfasis en que su valor depende de la tasa de interés que se usa para calcularlo. Cuando, el VPN es igual a cero, evidencia que los dineros invertidos en el proyecto ganan un interés idéntico a la tasa de descuento utilizada. Por ejemplo, si el $VPN(0.15) = 0$, significa que las sumas invertidas en el proyecto ganan un 15%.

El procedimiento para hallar la TIR, consiste en encontrar una tasa de interés que iguale el valor presente de los flujos de caja esperado de una inversión con el valor presente de los desembolsos de efectivos requeridos por la inversión, es decir:

$$-A_0 + \sum_{t=1}^n A_t (1+i)^{-t} = 0$$

donde “i” es la tasa interna de rendimiento, llamada TIR. Esta tasa de interés puede interpretarse como la tasa más alta que un inversionista podría pagar sin perder dinero.

Además, la tasa interna de retorno, como también se llama, representa un índice de rentabilidad ampliamente aceptado entre los inversionistas y los tomadores de decisiones. Ella se puede interpretar como la tasa de interés que reduce a cero el valor presente, el valor futuro, o el valor anual equivalente de una serie de ingresos y egresos. Es decir, la TIR de una inversión, es aquella tasa de interés i que satisface cualquiera de las siguientes ecuaciones:

1	$\sum_{t=1}^n A_t (1+i)^{-t} = 0$	Valor presente
2	$\sum_{t=1}^n A_t (1+i)^{n-t} = 0$	Valor Futuro
3	$\sum_{t=1}^n A_t (P/F, i, t) (A/P, i, n) = 0$	Valor Anual Equivalente

donde

P = valor presente,

F = valor futuro,

A = valor anual,

A_t = flujo de efectivo neto del periodo t ,

n = vida de la propuesta de inversión

En la mayoría de las situaciones prácticas es suficiente considerar el intervalo $-1 < i < \infty$ como aquel intervalo donde se define la tasa interna de rendimiento, ya que es muy poco probable que en un proyecto de inversión se pierda más de la cantidad que se invirtió

Observaciones:

En términos de la tasa interna de retorno representa el porcentaje o la tasa de interés que se gana sobre el saldo no recuperado de una inversión. El saldo no recuperado de una inversión en cualquier punto del tiempo de vida del proyecto, puede ser visto como la porción de la inversión original que aún permanece sin recuperar en ese tiempo. El saldo no recuperado de un proyecto de inversión al tiempo t , se evalúa de acuerdo a la siguiente expresión

$$F_t = \sum_{t=1}^n A_t (1+i)^{n-t}$$

Es decir, el saldo no recuperado del proyecto de inversión en el tiempo t , es el valor futuro de dicho proyecto en ese tiempo

El saldo no recuperado de una inversión en el tiempo t , también se puede encontrar de acuerdo a la siguiente expresión

$$F_t = A_t + F_{t-1} (1+i)$$

Unos de los errores más comunes que se cometen con el significado de la TIR, es considerarla como la tasa de interés que se gana sobre la inversión inicial requerida por el proyecto

Sin embargo, lo anterior es correcto solamente en el caso de proyectos de inversión cuya vida sean de un solo periodo

En conclusión, el significado fundamental de la TIR sería “Es la tasa de interés que se gana sobre el saldo no recuperado de una inversión, de tal modo que el saldo al final de la vida del proyecto de inversión sea cero”

Ventajas:

- 1 Considera el valor del dinero a través del tiempo
- 2 Jerarquiza los proyectos de inversión de acuerdo a su rendimiento
- 3 Representa una de las técnicas más populares dentro del mundo de los inversionistas

Desventajas:

- 1 Se requieren de cálculos tediosos para determinar la tasa interna de rendimiento
Sin embargo, esto podría obviarse usando algún paquete computacional
- 2 La TIR favorece a los proyectos de cantidades bajas También conduce a conclusiones erróneas cuando los flujos del proyecto cambian o son inestables a través de los distintos periodos
- 3 También conduce a conclusiones erróneas cuando los flujos del proyecto cambian o son inestables a través de los distintos periodos

A continuación presentamos otros métodos para evaluar proyectos de inversión

1.3.5 Índice de Utilidad Productiva

Este método es conocido también como el índice del valor presente neto y se define como la razón del valor presente de los flujos de efectivo al valor presente de los gastos (inversión inicial). Mide la utilidad de la propuesta de inversión por unidad monetaria (U M) invertida. Se denota por IP de la siguiente manera

$$IP = \frac{\sum_{t=1}^n A_t (1+i)^{-t}}{A_0}$$

Si el índice de utilidad productiva es mayor o igual a uno ($IP \geq 1$), indica que la propuesta de inversión tiene una utilidad mayor o igual a la tasa propuesta, si $IP < 1$, se tendrá todo lo contrario. Este índice además es usado como una técnica de jerarquización de selección de inversiones.

1.3.6 Método de Valor Anual Equivalente

Con el método del Valor Anual Equivalente, todos los ingresos y gastos que ocurren durante un periodo son convertidos a una anualidad equivalente (uniforme). El objetivo de este método es el de convertir el dinero en costo o beneficio anual uniforme. Cuando dicha anualidad es positiva, entonces, es recomendable que el proyecto sea aceptado.

Este método es popular porque la mayoría de los ingresos y gastos que origina una inversión son medidos en base anual

1.3.7 Método de Valor Futuro Neto

Este método consiste en una cantidad de dinero en cierta fecha de término o culminación, que es equivalente a un programa particular de ingresos y/o desembolsos bajo consideración. Si sólo se consideran desembolsos, el término se expresa mejor como costo de valor futuro o simplemente costo futuro.

Cuando se conocen las cifras de ingresos y desembolsos de más de un proyecto, en la cual uno no tiene que ver con el otro, debe elegirse aquel proyecto que tiene el valor futuro más alto, siempre y cuando tal valor sea mayor o igual a cero.

1.3.8 Método de Período de Recuperación Descontado

Es similar al periodo de recuperación común excepto porque los flujos de efectivo esperados se descuentan a través del costo de capital de la inversión. De tal forma, que el periodo de recuperación descontado se define como el número de años para recuperar una inversión a partir de los flujos netos de efectivo descontado.

Para obtener una base significativa a fin de elegir cuál método es el mejor, deben jerarquizarse los resultados de cada método utilizando un ordenamiento de acuerdo a los cálculos matemáticos obtenidos. La manera como se haga esta fuera del alcance de esta tesis.

1.3.9 Método de Beneficios-Costos (B/C)

Este índice cuya relación es muy frecuente en estudios de grandes proyectos públicos de inversión, se apoyan en el método del valor presente neto, aunque esto no impide que en ocasiones, produzcan resultados inconsistentes con lo que se obtienen con el valor presente neto

La relación beneficio – costo (B/C), se calcula de la siguiente manera

- 1) Se calcula el valor presente neto de los ingresos asociados con el proyecto en cuestión
- 2) Se calcula el valor presente neto de los egresos del proyecto
- 3) Se establece una relación entre el valor presente neto de los ingresos y el valor presente de los egresos, al dividir la primera cantidad por la segunda, el resultado de tal división es la relación beneficio-costo

En términos simbólicos se tiene

$$B/C (i) = \frac{VPN \text{ ingresos } (i)}{VPN \text{ egresos } (i)}$$

Se debe observar que la relación beneficio-costo es una función de la tasa de interés que se emplea en los cálculos del VPN de los ingresos y egresos, de modo que al calcularse este índice con propósitos decisorios, es menester utilizar la tasa de interés de oportunidad

La relación beneficio-costo puede asumir los siguientes valores

$$B/C(i) = \begin{cases} > 1 \\ 1 \\ < 1 \end{cases}$$

Cuando el valor de la relación $B/C(i)$ es superior a la unidad, significa que el VPN de los ingresos es superior al de los egresos, es decir que el VPN de todo proyecto es positivo y en consecuencia el proyecto es atractivo

Cuando la relación beneficio-costos es igual a 1, el VPN de los ingresos es igual al de los egresos, cuando esto acontece, el VPN de todo el proyecto es igual a cero. Por consiguiente, en tales circunstancias el proyecto es indiferente y la tasa de interés utilizada representa la tasa de retorno o TIR del proyecto

Finalmente, cuando el valor de esta relación es negativo, tenemos un proyecto en el cual el VPN de los ingresos es menor que los egresos, lo cual señala que el VPN de todo el proyecto es negativo, es decir, que el proyecto no es atractivo

La relación beneficio-costos se utiliza especialmente en proyectos relacionados con obras públicas o con inversiones financiadas por organismos internacionales como el Banco Interamericano de Desarrollo (BID) o el Banco Mundial. Estas instituciones han establecido el uso de éste índice como resultado de la práctica en las agencias gubernamentales de los Estados Unidos que exigen por ley, una comparación explícita de los beneficios y de los costos. **La relación beneficio-costos es útil para adelantar la evaluación económico-social del proyecto**

1.4 El Árbol de decisión como otra alternativa en la toma de decisiones en el proceso de inversión.

El árbol de decisión es una técnica que permite representar y analizar una serie de decisiones futuras de carácter secuencial a través del tiempo

Es habitual representar cada decisión por un cuadrado con un número dispuesto en una bifurcación del árbol de decisión. Por tanto, cada rama que se origina de este punto representa una alternativa de acción

Además de los puntos de decisión, en este árbol se identifican mediante círculos, los sucesos aleatorios que influyen en los resultados. A cada rama que parte de estos sucesos se le asigna una probabilidad de ocurrencia. De esta forma, el árbol representa todas las combinaciones posibles de decisiones y sucesos permitiendo un valor esperado del resultado final, como un valor presente neto, ganancias o beneficios, rendimiento esperado u otro

Los árboles de decisión son de gran utilidad en la práctica, debido a que simplifican un problema grande y complicado en términos de una serie de problemas más sencillos y pequeños, al igual que hacen posible un análisis objetivo y una toma de decisiones que incluyan la consideración explícita del riesgo y efecto del futuro

Las decisiones de inversión son probablemente las decisiones más difíciles y las más importantes que enfrenta la alta administración de una compañía, por varias razones. Primero, estas decisiones generalmente demandan grandes cantidades de dinero. Segundo, los efectos de una decisión de inversión no son inmediatos. A diferencia de una mala decisión con respecto a una política de inventarios, los efectos negativos de una mala

decisión en proyectos de inversión, repercuten tremendamente en la posición financiera de la compañía y en las metas a largo plazo fijadas por la misma. Las inversiones son la implementación de una estrategia razonable de acuerdo a las políticas y meta trazada por la empresa.

Las decisiones de inversión son caracterizadas por un alto grado de incertidumbre. Las mismas generalmente se basan en predicciones acerca de lo que ocurrirá en el futuro, por lo que, absorben una gran cantidad de tiempo.

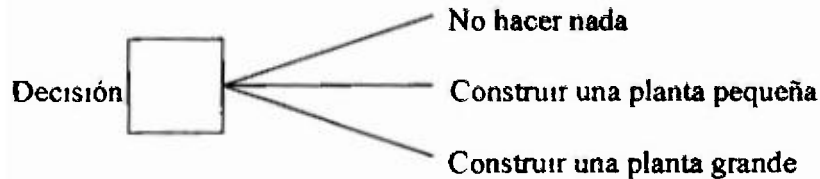
En el pasado se han desarrollado una gran cantidad de métodos sencillos y sofisticados para analizar decisiones de inversión. Sin embargo, uno de los problemas más importantes en decisiones de inversión es el manejo de la incertidumbre, la cual generalmente, existe en toda decisión de inversión.

Existen varias formas de manejar la incertidumbre. Una es a través de "árboles de decisión".

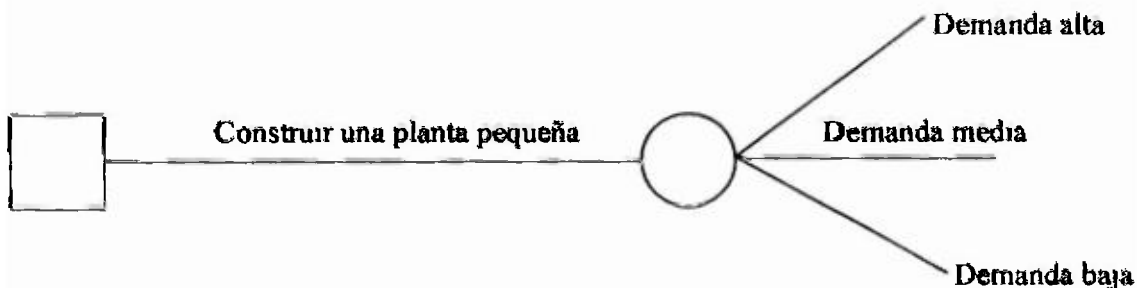
El enfoque de árboles de decisión, una técnica muy similar a la programación dinámica, es un método conveniente para representar y analizar una serie de inversiones hechas a través del tiempo. La técnica de árboles de decisión consiste básicamente de los siguientes pasos:

1. Construir el árbol de decisión. Para la construcción del árbol es necesario considerar las diferentes alternativas o cursos de acción y los posibles eventos asociados a un curso de acción. En la construcción del árbol, como ya señalamos, un cuadrado (\square) significa una alternativa o punto de decisión, es decir, en este punto un curso de acción (el más adecuado) debe ser seleccionado. Un círculo (O) representa los posibles eventos asociados a un curso de acción.

Por ejemplo, si actualmente se analiza la posibilidad de producir un nuevo producto el cual requiere de la construcción de una nueva planta, los posibles cursos de acción serían



Sin embargo, a cada curso de acción se le puede asociar una serie de eventos. Por ejemplo, es obvio que si se construye la planta pequeña, la demanda del producto puede ser baja, media o alta. Lo anterior se representa en árboles de decisión de la siguiente forma



- 2 Determinar los flujos de efectivo de cada una de las ramas del árbol
- 3 Evaluar las probabilidades de cada una de las ramas del árbol obtenido en el paso anterior
- 4 Determinar el valor presente neto (VPN) de cada una de las ramas del árbol
- 5 Resolver el árbol de decisión con el propósito de ver cual alternativa debe ser seleccionada. La técnica de solución es muy simple y similar a la programación dinámica para atrás (algunos autores de libros en inglés le llaman a esta técnica "rollback

procedure”, o rolling backward) Con esta técnica se comienza en los extremos de las ramas del árbol de decisión y se marcha hacia atrás hasta alcanzar el nodo inicial de decisión. A través de este recorrido, se deben utilizar las siguientes reglas

- Si el nodo es un nodo de posibilidad \bigcirc , se obtiene el valor esperado de los eventos asociados a este nodo
- Si el nodo es un nodo de decisión \square , entonces se selecciona la alternativa que maximiza los resultados que estén a la derecha de ese nodo

1.5 Importancia de las decisiones de Inversión

Una vez que se conozcan cuáles proyectos superan las barreras establecidas después de analizarlos, se procederá a seleccionar el que mejor se adapte a nuestro propósito

Hay proyectos de inversiones que la selección de uno de ellos implica la eliminación de los demás. En este caso, podrá tal vez existir problemas debido a que un proyecto puede ser mejor que otro utilizando un método de evaluación particular y ocurra todo lo contrario utilizando otro método de evaluación. También en los casos en donde los proyectos son independientes, puede haber problemas en la selección debido a que existe racionamiento de capital y estas compitan unos con otros por los recursos limitados

Es por ello, que las decisiones de inversiones son muy importantes, pues implican el compromiso de asignar grandes sumas de dinero por la empresa por un periodo largo. Estas decisiones pueden también implicar el éxito o el fracaso de la misma. Por otro lado, una mala decisión en el momento de invertir podrá no sólo afectarla desfavorablemente,

sino que su fracaso podría repercutir en sus proveedores, en sus clientes, en sus empleados y a la sociedad

1.6 Clasificación de Proyectos de Inversión

Al clasificar proyectos de inversión, hay que tomar en cuenta ciertas categorías lógicas y significativas. Los proyectos de inversión tienen tantas facetas de objetivos, formas y diseño competitivos que ningún plan de clasificación es conveniente para todos los propósitos. A continuación presentamos algunos criterios considerados al momento de clasificarlos.

- 1 Si los proyectos de inversión no constituye un alejamiento importante de lo que la empresa hizo en el pasado, o por otra parte, si los mismos provocan un alejamiento significativo de lo que la empresa realizó en el pasado, y por ende debe incurrir en gastos sumamente grandes
- 2 De acuerdo a la actividad que la empresa desarrolla, como por ejemplo comercialización, producción, línea de producción, manufactura, exportación, importación, servicios, etc
- 3 De acuerdo con el tipo de beneficios y como se esperan recibir, tales como mayor rentabilidad con menor riesgo o menor rentabilidad con mayor riesgo
- 4 De acuerdo como un proyecto afecta los beneficios de otros, por lo general ésta es una consideración muy importante, porque con mucha frecuencia existen interrelaciones o dependencias entre pares o grupos de proyectos de inversión

Según la Organización de las Naciones Unidas (ONU), los proyectos de inversión, se pueden agrupar de acuerdo a las áreas que estas pueden ser desarrolladas, como

a. Proyectos de inversión que tienen su origen en la realización de estudios sectoriales

- Sector Primario Agricultura, ganadería, selvicultura, caza, pesca, etc
- Sector Secundario industria básica (generación de energía eléctrica, explotación petrolera, industria de transformación, etc
- Sector Terciano Comunicaciones, transporte, servicios educativos, médicos, bancarios, etc

b. Proyectos de Expansión

Estos proyectos tienen por objeto aumentar la capacidad actual de la empresa. Para los proyectos de inversión de capital de este tipo, es conveniente estimar las utilidades futuras y el rendimiento de la inversión, también es importante reconocer el factor de riesgo que varía según la naturaleza del proyecto

c. Proyectos no Lucrativos

Estos proyectos implican gastos para su ejecución, y que surgen de requerimientos legislativos, contractuales, etc, y que una entidad está obligada a realizar, y cuyo objetivo no es la rentabilidad

d. Proyectos de Utilidad no Conmensurables o no Medibles

Estos proyectos de inversión incluyen inversiones, cuyo objetivo primordial es aumentar las utilidades, pero cuyas ganancias no pueden computarse con un grado razonable de exactitud. En esta categoría se consideran los gastos a largo plazo para promoción de productos, investigación y para mejorar el estado de ánimo de los

trabajadores. Puede suponerse que una compañía interesada en maximizar sus utilidades no realizará inversiones de este tipo, a menos que esté convencida de que en última instancia éstos rendirán una utilidad.

A continuación presentamos otras clasificaciones que se consideran también importantes.

e. Proyectos de Inversiones Económicamente Independientes

Se dice que dos proyectos de inversión son económicamente independientes, si los flujos de efectivo esperados (o más generalmente, los costos y beneficios) son iguales si se acepta o rechaza el otro. Para que esta independencia económica se dé, deben satisfacerse estas condiciones:

- Debe ser técnicamente posible realizar una, ya sea que se acepte o rechace el otro.
- Los beneficios netos esperados de la inversión A no deben ser afectados por la aceptación o el rechazo de la inversión B.

f. Proyectos de Inversión Económicamente Dependientes

Dos proyectos de inversión son económicamente dependientes, si los flujos de efectivo de uno influyen con respecto a los flujos de efectivo del otro. Esto es, si los flujos de efectivo correspondientes al primero se ven afectados por la decisión de aceptar o rechazar el segundo, entonces se dice que ambos proyectos poseen una dependencia económica.

De acuerdo al grado de dependencia o independencia entre sí de los proyectos, estos se clasifican en proyectos complementarios, sustitutos, mutuamente exclusivos,

proyectos independientes y de prerequisite. A continuación detallamos cada uno de ellos según el grado de dependencia.

g. Proyectos Complementarios

Dos proyectos de inversión son complementarios, si la ejecución del primero aumentará los beneficios esperados o disminuirá los costos de ejecución del segundo sin cambiar los flujos esperados, entonces se dice que el primero es complementario del segundo.

h. Proyectos Sustitutos

Cuando se tiene que la realización de una primera inversión produce la disminución en los beneficios esperados de la otra (o aumenta los costos de ejecución de la primera sin cambiar los beneficios), entonces encontramos que la primera alternativa de inversión es sustituta de la segunda.

i. Proyectos Mutuamente Excluyentes

Dos proyectos de inversión son mutuamente excluyentes, si la aceptación de uno impide la aceptación del otro, o si los beneficios generados del primero desaparecerán por completo si se acepta el segundo, es decir, es imposible que se llegue a realizar un proyecto de inversión cuando es aceptado el otro.

j. Proyectos de Inversión Contingentes o de Prerequisite

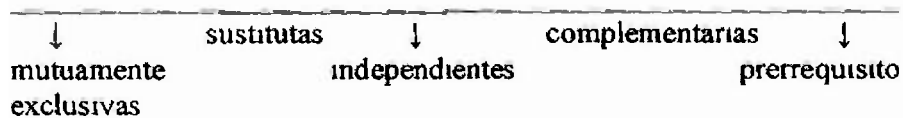
Dados dos proyectos de inversión, uno es prerequisite del otro, significa que cuando se acepta uno es porque ya ha sido aceptado el anterior, lo que la aceptación de uno depende de la aceptación del anterior, por lo que el primer proyecto de inversión debe ser prerequisite para la aceptación del siguiente. La contingencia es una dependencia en un solo sentido entre un grupo de proyectos, es decir, la aceptación de un proyecto

contingente depende de la aceptación de otro proyecto, pero la aceptación de este último puede ser independiente del proyecto contingente

Las interdependencias entre proyectos de inversión son generalmente muy complejas y suelen depender de la naturaleza del proyecto, del dinero disponible en ese instante y de las condiciones de mercado

Los grados de dependencia se pueden expresar en una escala, como se observa en la figura 1.3, en el centro están los proyectos independientes y hacia la derecha los proyectos de inversión complementarios y de prerequisite, y hacia la izquierda se encuentra los sustitutos y los mutuamente exclusivos

Fig. 1.4



Una vez que se conozcan cuáles proyectos de inversión superan las barreras fijadas, se procederá a seleccionar el que más se ajuste a nuestro criterio de decisión

Podemos decir, los criterios de decisión conjuntamente con las clasificaciones de los proyectos son importantes, porque nos permite establecer los siguientes parámetros,

- 1 La búsqueda de nuevos proyectos de inversión
 - 2 La evaluación entre varios proyectos de inversión
 - 3 La selección del proyecto de inversión que mejor se ajuste a nuestro propósito,
- etc

CAPITULO II

“ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA TEORÍA DEL RIESGO”

La historia del riesgo nos permite plantearnos las siguientes interrogantes ¿Por qué el dominio del riesgo es un concepto moderno único? ¿Por qué la humanidad tardó muchos miles de años, que conducen hasta el Renacimiento, antes del derribo de las barreras que impedían el camino a la medida y control del riesgo? Estas preguntas se resisten a admitir respuestas fáciles

Desde los principios de la historia, el juego de azar, fue la esencia misma de toma de riesgo. Fueron estos juegos que inspiraron a matemáticos como Pascal y Fermat y también a otros matemáticos a incursionar sobre la teoría de la probabilidad, lo cual representa el corazón matemático del concepto del riesgo

Aún hasta este momento, a través de la historia la gente ha apostado y jugado juegos de azar sin usar ningún sistema de apuestas que determinen ganancias y pérdidas. Es por ello que el acto de toma de riesgo flotaba libremente, indiferente de la teoría de la administración del riesgo, pero las poderosas herramientas de la administración del riesgo disponibles hoy permite a la humanidad liberarse de las creencias en oráculos, adivinadores y las ataduras del pasado, descubrir métodos modernos que ponen el futuro al servicio del presente, reemplazando la desesperanza ante el destino por la elección y decisión

Hoy día la gente es menos supersticiosa, no porque son más racionales si no porque el entendimiento del riesgo le permite tomar decisiones más racionales

La mejor decisión y administración del riesgo está basada en la cuantificación, determinado por los modelos del pasado ¿Pero hasta que grado nosotros deberíamos

confiar en el modelo del pasado para decirnos como será el futuro? ¿Qué importa más cuando enfrentamos un riesgo? ¿La administración del riesgo es una ciencia o un arte? Una cosa es establecer un Modelo Matemático que lo explique todo Pero cuando afrontamos la lucha diaria de la vida, de la constante prueba de ensayo y error, la ambigüedad de los hechos puede reducir el modelo

Para juzgar el grado en que los modelos o métodos de la administración del riesgo son ventajosos o son una amenaza, se deberá conocer la historia completa sobre el riesgo, desde sus inicios Debemos saber también, porqué las personas del pasado trataron de domesticar el riesgo, como ellas se acercaron a la tarea, que modos de pensamiento y lenguaje emergieron de sus experiencias y cómo sus actividades interactuaron con otros eventos, para cambiar el curso de la cultura Tal perspectiva nos traerá un entendimiento más profundo de donde estamos y hacia donde nos dirigimos

Por esta razón, estimamos conveniente dedicar este capítulo a la presentación del concepto de riesgo en su forma general, el riesgo en la antigüedad, la concepción moderna del riesgo, los aportes de grandes matemáticos a la teoría del riesgo durante el renacimiento, la solución del acertijo de Luca de Paccioli por Fermat y Pascal, la teoría del riesgo durante los siglos XIX y XX, así como también la hipótesis del modelo de Harry Markowitz

2.1 El riesgo en su concepto más general

El riesgo, en su forma más general significa “contingencia o proximidad de un daño”, con connotaciones de inseguridad y peligro, pudiendo definirse como la “posibilidad de que ocurra un evento desfavorable”

También, podemos definir el riesgo como una posibilidad latente de sufrir una pérdida a consecuencia de una eventualidad

Por otro lado, el término riesgo se deriva del vocablo italiano antiguo “risicare” que significa atreverse. En este caso el riesgo es una elección y no un hecho. Las acciones que nosotros nos atrevemos a tomar, las cuales dependen de nuestra libertad de tomar decisiones, es la historia del Riesgo

Los elementos que caracterizan toda situación de riesgo son

- **Possible:** Resalta el hecho de que el riesgo puede suceder, el incendio del agua por ejemplo no tiene el carácter de riesgo, ya que es un hecho imposible, lo que sí será **possible** es el incendio de una casa, un accidente automovilístico, caída de precios de activos en el mercado de valores, etc
- **Incierto:** Si tenemos la certeza de cuándo ocurrirá un evento, no se trataría de un riesgo, sino que sería la consecuencia lógica de una determinada acción. Por ejemplo, el fallecimiento de una persona es un riesgo, pues, no se sabe cuando puede ocurrir
- **Fortuito:** Debe ser **fortuito** o accidental, cuando es independiente de la voluntad de quien lo sufre, por ejemplo, un incendio provocado

intencionalmente por el asegurado, no será objeto de indemnización por el seguro, ya que no es considerado como riesgo

- **Desfavorable:** Debe generar una pérdida. Un seguro de jubilación, por ejemplo, compensa la pérdida de ingresos que se produce como consecuencia del cese en la actividad laboral

2.2 El riesgo en la Antigüedad

La historia del riesgo se adentra desde los tiempos antiguos, ha sido el orgullo del pecado de los hombres, como lo reflejan en sus escritos, tanto Maquiavelo como Galileo

En la antigüedad la gente sentía estar a merced de la arbitrariedad de los dioses o fuerzas sobrenaturales, los cuales podían actuar a favor o contra de una persona o grupo de personas

La humanidad en el pasado creía que su vida y toda sus actividades eran controladas por fuerzas ajenas a su voluntad. El riesgo presente en cada una de sus actividades debía ser dejada a merced del oráculo y de los adivinadores

Además, se pensaba que las cosas sucedían al estar permitido por Dios o por los dioses de su época o por el destino. Es decir, los accidentes que ocurrían “eran inevitables”, se achacaban a la voluntad de Dios “Dios lo ha querido”, “sea lo que Dios quiera”, “es obra de Dios”. Con el paso de los años, el concepto religioso se sustituye por el sociológico. La Sociología del riesgo reformula el problema, convirtiéndolo en elemento público

A continuación presentamos dos situaciones notables, que ejemplifican la actitud de la humanidad hacia el riesgo en la antigüedad

El año 429 A C fallece Pericles, gobernador de Atenas, víctima de la peste que asotaba la ciudad. Los atenienses se dirigen a Delos para consultar el oráculo de Apolo y detener la epidemia. La respuesta es que deben construir un nuevo altar en forma de cubo cuyo volumen duplique el del altar ya existente. Se inicia así la historia de uno de los problemas clásicos de las matemáticas: la duplicación del cubo, problema que debe resolverse mediante procedimientos geométricos con el uso exclusivo de la regla y el compás. Es importante señalar que matemáticamente es demostrable la imposibilidad de cumplir con las exigencias de Apolo.

En el libro segundo de Samuel, del Antiguo Testamento, encontramos el pasaje "Saúl y la adivina Endor", el cual señala " Samuel había muerto, y todos en Israel habían llorado su muerte, Saúl por su parte, había expulsado del país a los adivinos y a los que invocaban a los muertos. Pero cuando vio el campamento filisteo, tuvo miedo y se sintió dominado por el terror. Entonces consultó al Señor, pero el Señor no le respondió ni por sueños, ni por el Urim, ni por los profetas. Por eso ordenó a sus oficiales: Busquen alguna mujer que invoque a los muertos, para que yo vaya a hacerle una consulta y sus oficiales le respondieron: En Endor hay una mujer que invoca a sus muertos. Y Saúl le dijo: Te ruego que me adivines la suerte y que hagas venir el espíritu de quien yo te diga. "

2.3 Concepción moderna del riesgo

Peter Bernstein señala

“¿Qué es lo que distingue a los miles de años de historia de lo que nosotros pensamos como tiempos modernos? La respuesta va más allá del progreso, la tecnología, del capitalismo y de la democracia. El pasado también contó con científicos brillantes, matemáticos, inventores, tecnológicos y filósofos políticos. Cientos de años antes del nacimiento de Cristo, los cielos fueron dibujados, la gran biblioteca de Alejandría fue construida, y la geometría de Euclides fue enseñada. La demanda de la innovación tecnológica en la guerra era insaciable entonces, como lo es hoy día. El carbón, el aceite y el acero han estado en el servicio de seres humanos por milenios, y los viajes y la comunicación marcan los principios de la civilización. La idea revolucionaria que define la frontera entre tiempos modernos y antiguos es el dominio del riesgo: la noción de que el futuro es más que un capricho de los dioses y que los hombres y las mujeres no están pasivos ante la naturaleza. Hasta que los seres humanos descubrieron una forma a través de esta frontera, el futuro fue un espejo del pasado o el dominio de los oráculos y los adivinos, quienes sostuvieron un monopolio de los eventos futuros”

La noción de poner el riesgo bajo control es una de las ideas centrales que distingue los tiempos modernos del pasado distante, ya que el riesgo ha sido un compañero inevitable de la humanidad.

Durante el final del periodo medieval la humanidad y las sociedades campesinas lograron progresar, continuar el comercio, gracias al verdadero entendimiento del riesgo,

sus problemas y actividades ya no estaban a merced de los dioses, de los adivinadores o de los oráculos. La desesperanza ante el destino, estaba controlada por sus propias acciones y decisiones.

La gente aprendió a minimizar el riesgo en su entorno, tomar medidas para mitigarlo mediante sus propias evaluaciones y probabilidades.

Para administrar el riesgo, los negociantes de esa época empezaron a asociarse y contribuir con pequeñas sumas de dinero para pagarle a un miembro que sufriera algún percance. Los negociantes se beneficiaban con el negocio. En todo caso se perdería sólo una pequeña porción del beneficio del negocio ganado en la jornada. Si ocurría lo infortunado y se perdía el negocio, los miembros de la sociedad se mantendrían solvente. Los negociantes aprendieron a protegerse a sí mismos de la volatilidad de los eventos negativos, es así como surge la Administración y Manejo del riesgo. También, en esa época los granjeros estaban previamente indefensos contra ciertos mercados de precios por sus siembras, aprendieron a manejar el riesgo entrando en contacto con productores de alimentos, quienes acordaron comprar sus siembras a un precio fijo, obviando la futura apertura de precios de las cosechas. En el futuro los precios de las cosechas fueron bajando significativamente. Pero el granjero estaba protegido del peligro de tener que producir cosecha con ninguno o bajo valor del mercado, ya que aprendió a como administrar el riesgo de su cosecha. De hecho si el valor del mercado de la cosecha sube el granjero no recibirá el beneficio extra, pues él había acordado venderlo a un precio menor.

Similarmente, los productores de alimentos están protegidos contra un incremento significativo en precio. Al fin y al cabo la volatilidad de estos contratos protegían tanto los granjeros como a los productores de alimentos. Ambas partes se beneficiaron y aprendieron como manejar el riesgo para protegerse de cualquier eventualidad.

Se puede decir, que el estudio serio del riesgo comenzó durante el Renacimiento, cuando la gente se liberó de las ataduras del pasado y de las creencias, para abrirse paso hacia los retos. Este era el tiempo cuando la mayor parte del mundo estaba por descubrirse y sus recursos por explotar.

Fue un tiempo de confusión religiosa, capitalismo reciente, un vigoroso acercamiento hacia la ciencia y el futuro. Se estableció la redondez de la tierra, la pólvora reducía castillos, la impresión con caracteres tipográficos móviles había dejado de ser novedad, el artista era experto en el uso de la perspectiva, la riqueza fluía en Europa y la bolsa de Amsterdam, prosperaba.

Se conoce de la Estadística y Probabilidad, se descubre la discontinuidad en economía, lo que constituye avances importantes. La exploración de la incertidumbre es trasladada a la discusión de otros escenarios y la investigación de los matemáticos son utilizadas por los economistas.

Los economistas fueron cuidadosos en separar las probabilidades que pueden ser medidas (en el juego de azar por ejemplo) y las probabilidades que no pueden ser medidas (como eventos económicos futuros), estas últimas probabilidades concierne a la incertidumbre.

En este periodo, se elimina la suposición concebida por los economistas, donde las acciones generan reacciones en los jugadores, la cual se basa en la Teoría del Juego. La misma establece que la verdadera fuente de incertidumbre radica en las posibles acciones del otro.

La importancia de la Teoría de la Probabilidad durante el Renacimiento, consiste en ser una herramienta útil que ayudó a comprender y administrar el riesgo y la incertidumbre.

2.4 Aportes de Grandes Matemáticos a la Teoría del Riesgo Durante el Renacimiento

El final del periodo medieval y comienzos del Renacimiento se desarrollaron importantes estudios matemáticos, se puede decir que los grandes avances comenzaron al final del siglo XVI y durante el siglo XVII. Es por ello que este siglo se conoce como el siglo de los genios. Basta recordar que esta época se destacan Galileo, y Kepler a Newton, Leibnitz, pasando entre otros como Descartes, Fermat y Pascal.

La ciencia de la teoría de los números, había permanecido sin trascendencia durante la época medieval, al igual que otros aportes conocidos hoy día, pero durante el Renacimiento, se dio a conocer grandes teorías y leyes matemáticas que son la base de nuestros estudios científicos en la actualidad.

Es nuestro interés en este trabajo mostrar los aportes más notorios de algunos matemáticos como Leonardo de Pisa, Cardano, Fermat, Pascal, Jacob Bernoulli, Leibnitz,

Thomas Bayes, Abraham de Moivre, que contribuyeron con la Teoría y la Administración del Riesgo

2.4.1 Leonardo de Pisa (1175 – 1240)

Este celebre matemático es conocido como Fibonacci. Escribió una obra titulada “Liber Abaci” (conocido como el libro del ábaco), en el que se encuentran expuestos el cálculo de los números según el sistema de numeración posicional, operaciones con fracciones comunes y cálculos comerciales como la regla de tres simple y compuesta, la división proporcional, problemas sobre la determinación de calidad de las monedas, problemas de progresiones y ecuaciones con raíces cuadradas y cúbicas.

Así mismo, planteó la “sucesión de Fibonacci” uno de los grandes aportes del siglo XV.

2.4.2 Girolamo Cardano (1501 – 1576)

Matemático italiano, aplicó sus conocimientos matemáticos a los juegos de apuestas, De hecho puede ser considerado como el descubridor de la teoría de la probabilidad.

2.4.3 Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Era un abogado de profesión, no era matemático profesional pero, su pasatiempo favorito eran las matemáticas. Su amplia participación en las matemáticas de su tiempo

se hizo a través de correspondencia con matemáticos famosos como lo es Descartes y Pascal

Se destaca en la teoría de los números, aunque su conocimiento era elemental, rama de la matemática que estudia las propiedades y relaciones de los números. Por lo que se le atribuye “El padre de la teoría de los números”

Fermat, se dedicó al estudio de las probabilidades conjuntamente con Blaise Pascal

Además, presenta un problema de juego de azar, identificado como juego de dados, el cual se le conocía con el nombre de “problema de puntos”. Este trabajo no fue publicado pero llevó al científico holandés Christian Huygens a escribir un folleto sobre la probabilidad y juego con dados, que posteriormente publicó Jacob Bernoulli

En los tiempos que Fermat y Pascal hacen su incursión en el mundo de la probabilidad la sociedad experimentaba una extraordinaria ola de innovación y exploración

2.4.4 Blaise Pascal (1623 – 1662)

Este matemático inventó la primera calculadora digital en 1642, llamada Pascualine. Su principal contribución fue el triángulo el cual lleva su nombre, pero se conocía mucho antes y se le atribuye al matemático chino Yang Hui, del siglo XI

Conjuntamente con Fermat creó los conceptos fundamentales de la Teoría de Probabilidad, la cual representa el corazón matemático del concepto riesgo

Pascal encontró la solución con la ayuda de Pierre de Fermat, del acertijo de Luca de Paccioli. Este acertijo consistía en cómo dividir las ganancias de un juego de azar no

terminado entre dos jugadores con uno de ellos en ventaja. A continuación, por considerarlo de importancia presentamos el problema concreto, resumimos las soluciones hechas por Fermat y Pascal.

La solución de Pascal:

Partiendo de la reflexión de que el primer jugador debe obtener dos puntos y el segundo jugador 3 puntos, Pascal construyó el triángulo aritmético de los coeficientes numéricos del desarrollo de $(a + b)^n$.

n = 0				1			
n = 1			1		1		
n = 2			1	2		1	
n = 3			1	3	3	1	
n = 4		1	4	6	4	1	
n = 5		1	5	10	10	5	1

El juego concluye después de $2 + 3 - 1 = 4$ jugadas (a lo sumo), con un solo ganador. Ahora bien, si buscamos en la cuarta línea ($n = 4 = 2 + 3 - 1$), los coeficientes son 1 4 6 4 1. Adicionando el número de jugadas que faltan para la victoria de cada jugador $6 + 4 + 1 = 11$ se obtiene la proporción de la división del premio para un marcador 1 0. Luego, el que está más cerca de la victoria va a ganar $11/16$ y el otro $5/16$ del premio.

La solución de Fermat:

La reflexión de esta solución parte del hecho de que el juego finaliza a más tardar, después de cuatro jugadas. Para Fermat, se trata de un problema de disposición con repetición de dos elementos (dos jugadores) con las siguientes posibilidades

1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 1 1 2 2 1 2 1 2 1 2 2 1 1 2 2 2
 2 1 1 1 2 2 1 1 2 1 2 1 2 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2

El juego se decide a favor del primer jugador en todos los casos donde el uno (1) aparece más de una vez. Para ello se tienen once (11) posibilidades

En el caso del segundo jugador, son favorables, donde el 2 aparece más de dos veces. Estas son 5 posibilidades. Ahora bien, hay 16 posibilidades en total. El premio es distribuido en la siguiente proporción: $11/16$ para el jugador número uno (1) y $5/16$ para el jugador número dos (2).

La solución de este acertijo fue dinamita intelectual, y vino a hacer aparentemente una versión del juego de Búsqueda Trivial del siglo XVII. También, esta solución significó que la gente podría por primera vez tomar decisiones y pronosticar el futuro con la ayuda de los números.

2.4.5 Gottfried Von Leibniz (1646 – 1716)

Diplomático, filósofo y matemático fue el precursor de la lógica matemática, pero su aporte significativo a la teoría del riesgo es la siguiente

Comentó al científico suizo y matemático Jacob Bernoulli que la naturaleza ha establecido modelos que originan eventos de retornos, pero sólo en gran parte, incitó a Bernoulli para inventar la Ley de los Grandes Números y los métodos de probabilidad y estadística que conducen a actividades modernas. Las advertencias de Leibniz a Bernoulli, solo en gran parte, proporcionó la clave para explicar como existe el riesgo en primer lugar, ya que sin esta cuantificación todo será predecido y en un mundo donde todo evento es idéntico a un evento previo no ocurre cambio alguno.

La ley de los Grandes Números ideada por Leibniz se enuncia de la siguiente manera:

Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes todas con la misma distribución de probabilidad con valor esperado μ y varianza σ^2 entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \right) = \mu$$

2.4.6 Jacob Bernoulli (1654 – 1705)

Distinguido matemático y científico, definió por primera vez el proceso sistemático por la cual la mayoría de las personas hacen elecciones y toman la más importante. El propuso la idea que la satisfacción es el resultado de cualquier pequeño aumento de la riqueza y estará inversamente proporcional a la cantidad de bienes previamente poseídos.

Bernoulli explicó porqué la gente tiende a ser adverso al riesgo, y por qué los precios deben caer si los clientes son convencidos de comprar más. Esta declaración de Bernoulli

es considerada como el paradigma del comportamiento racional, y puso las bases para los principios modernos de la administración de la inversión

Su principal aporte fue el de escribir un artículo sobre probabilidad y juegos de dados publicado en su obra *Ars Coniectandi*

2.4.7 Abraham de Moivre (1667 – 1754)

Este famoso matemático sugirió la estructura de la distribución normal, también conocida como la curva de la campana, y descubrió el concepto de desviación estándar. Estos dos conceptos juntos se conocen como la ley de los promedios y son los ingredientes especiales en las técnicas modernas para cuantificar el riesgo.

La ley de los promedios establece que un resultado promedio en n intentos independientes converge a un límite cuando n aumenta.

2.4.8 Thomas Bayes (1702 – 1761)

Casi exactamente 100 años después de la colaboración de Fermat y Pascal, un ministro inglés disidente llamado Thomas Bayes hizo un avance asombroso en la estadística demostrando cómo tomar decisiones mejor informadas, mezclando matemáticamente la nueva información en la información vieja. Su aportación a la administración del riesgo está basada en un teorema que lleva su nombre, llamado “Teorema de Bayes”.

El teorema de Bayes se enfoca sobre las frecuencias cuando tenemos juicios intuitivos sobre la probabilidad de algún evento y queremos entender como alterar estos juicios por eventos por desarrollar Este teorema también es aplicado a problemas relacionados con la probabilidad condicionada y la probabilidad total

A continuación se presenta el teorema de Bayes

Sea $A_1, A_2, \dots, A_n \subset E$ un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos Sea $B \subset E$ un suceso del que conocemos todas las cantidades $P[B|A_i]$,

$i = 1, \dots, n$, a los que denominamos verosimilitudes, entonces se verifica

$$\forall j = 1, \dots, n, P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j]P[A_j]}{\sum_{i=1, i \neq j}^n P[B|A_i]P[A_i]}$$

Todas estas herramientas las usamos hoy en la Administración del Riesgo y en el análisis de toma de decisiones

2.5 La Teoría del Riesgo Durante los Siglos XIX y XX

Al transcurrir los años, nos percatamos que el factor tiempo es un elemento dominante del riesgo El riesgo y el tiempo son lados opuestos de una misma moneda, ya que si no hubiera mañana no habría riesgo El tiempo transforma el riesgo, y la naturaleza de riesgo es formada por el horizonte de tiempo

A continuación presentamos algunos aportes de grandes matemáticos del siglo XIX y XX, que han hecho aportes importantes a la Teoría y Administración del Riesgo

2.5.1 Simeón Denis Poisson (1781 – 1840)

Matemático que contribuyó a la teoría del riesgo fue Simeón Poisson, con un trabajo publicado el año de 1837. La mejor contribución de este trabajo es lo que conocemos como “distribución de Poisson”

$$P_k = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad \text{con } k \geq 0 \text{ y } t$$

2.5.2 Francis Galton (1822 - 1891)

En 1875, Francis Galton matemático aficionado quien fue primo de Charles Darwin, formuló la regresión a la media, enfrentándose al problema de variabilidad humana. Se preguntó de por qué los individuos diferían psicológicamente en inteligencia.

Su teoría se basa en la comparación de sujetos hábiles y no hábiles, estableciendo dos cualidades que los distinguen: su energía o capacidad y la sensibilidad.

En sus trabajos aplicó una metodología estadístico-matemática, utilizando los conceptos de los promedios y la curva gaussiana.

El núcleo fundamental de su trabajo metodológico fueron las desviaciones que se producen a partir de medidas de tendencia central, para ello aplicó la varianza y la desviación estándar o típica, así como también los percentiles y la regresión lineal.

Esto muestra que el campo de aplicación de la Teoría del Riesgo es verdaderamente amplio.

2.5.3 John Maynard Keynes (1883 - 1946)

Este matemático se especializa en economía. Trabaja en empresas de seguros e inversiones. Fue el economista más influyente del siglo XX. Formuló los principios de la Macroeconomía.

En 1936 publica su “Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero”. Esta obra fluyó de manera significativa en las sociedades industriales tras la Segunda Guerra Mundial.

Keynes enfatiza que las decisiones de ahorros las toman unos individuos en función de sus ingresos, mientras que las decisiones de inversión las toman los gerentes de las compañías o empresarios en función de sus expectativas.

Señala que no hay ninguna razón por la cual el ahorro e inversión deban coincidir. Cuando las expectativas de los empresarios son favorables, grandes volúmenes de inversión provocan una fase expansiva. Y cuando las expectativas son desfavorables hay una contracción de la demanda, la cual provocarían una depresión.

La frase célebre de Keynes fue “La dificultad no está en las nuevas ideas, sino en despegarse de las antiguas”.

2.5.4 Harry Markowitz

En 1952, Harry Markowitz, en su artículo “Portfolio Selection” partió de la premisa que, a partir de la observación y de la experiencia, se pueden establecer expectativas relevantes acerca de los rendimientos futuros que puede ofrecer una determinada inversión. Por esto, el análisis de la rentabilidad de una cartera comienza con el estudio

de las inversiones individuales que la conforman para, posteriormente y a partir de los convenientes desarrollos, terminar con la formación de una determinada cartera que el inversionista pueda considerar como óptima. Estas consideraciones las establece cuando era en ese entonces estudiante de Investigación de Operaciones en la Universidad de Chicago, demostró matemáticamente por qué “poner todos los huevos en una canasta” es un riesgo inaceptable. Esta revelación provocó el movimiento intelectual que revolucionó el *Wall Street, las finanzas corporativas y las decisiones de inversiones* en el mundo entero, las cuales se conocen hoy día

- Harry Markowitz diseña la teoría de selección de cartera y la consiguiente teoría de equilibrio en el mercado de capitales

A este trabajo de Markowitz se le presta escasa atención hasta que el mismo autor decide publicarlo en 1959 con mayor detalle

La principal aportación de Harry Markowitz se encuentra en recoger de forma explícita en su modelo los rasgos del inversionista racional, consistente en buscar aquella composición de cartera que haga la máxima rentabilidad para un nivel determinado de riesgo, o bien, un mínimo de riesgo para una rentabilidad dada de la cartera. Este modelo es considerado como el “Modelo óptimo de selección de carteras”, donde la rentabilidad es una variable deseada por el inversionista que, por tanto, deseará maximizar. Lo cual implica que intentará que el valor actual de los rendimientos futuros esperados tenga el mayor valor posible. Sin embargo, y como contraposición, las variaciones de estas

rentabilidades supone un componente de riesgo que, por tanto, no será deseado por el inversionista. En tal sentido, él se encuentra entre dos fuerzas de sentido opuesto

- 1 Deseabilidad de ganancias
- 2 Insatisfacción que le produce riesgo

Estas reflexiones llevan a la conclusión de que el inversionista o decisor financiero valorará mucho la posibilidad de obtener un determinado nivel de rentabilidad cuando éste sea lo bastante estable en el tiempo. O lo que es lo mismo, se crea un problema de selección de activos que conforman la cartera que debe contemplar estas dos cuestiones divergentes: rentabilidad y variación de esta rentabilidad.

Uno de los objetivos que se planteó Markowitz fue mostrar gráficamente la relación que existe entre las expectativas del inversionista y la posterior elección de la cartera de acuerdo con los parámetros rendimiento y riesgo considerado. Trató de crear un modelo de selección de cartera maximizando únicamente el valor actual de los rendimientos futuros. Rápidamente, rechazó esta hipótesis, puesto que solo contemplaba la variable rendimiento y, por tanto, no tomaba en cuenta la importancia de la componente riesgo.

En cada situación concreta tendrá que optar por una determinada estrategia "*Ganancia- Riesgo*", en función de sus preferencias personales.

Como medida de rentabilidad de la cartera propuesta por Harry Markowitz se utiliza la media o esperanza matemática de la rentabilidad que el inversionista espera obtener en el futuro, y que es posible conocer en términos de probabilidad, y como medida del riesgo,

la desviación estándar de estos rendimientos. De aquí que el modelo se conozca comúnmente con el nombre de *media-varianza*.

Por otro lado, se tiene que los rendimientos se comportan, por ende, de acuerdo a una distribución normal.

2.5.4.1 Hipótesis del Modelo de Harry Markowitz

El modelo de Markowitz se fundamenta en tres principios:

- La rentabilidad de cualquier cartera, es una variable aleatoria de carácter subjetivo, cuya distribución de probabilidad para el periodo de referencia es conocido por el inversionista.

El valor medio o esperanza matemática de dicha variable aleatoria se acepta como medida de la rentabilidad de la inversión.

- Se acepta como medida de riesgo la *dispersión*, medida por la varianza o la desviación estándar de la rentabilidad, ya sea de un valor o de una cartera.
- La conducta individual del inversionista le lleva a preferir aquellas carteras con una mayor rentabilidad y menor riesgo.

En la primera etapa se determina el conjunto de carteras eficientes cuando proporciona la máxima ganancia para un riesgo (medido por la varianza) dado, o bien, proporciona el mínimo riesgo para un valor dado de ganancia (esperanza matemática).

A continuación presentamos el problema de inversión que ha recibido considerable atención entre los investigadores, la que se denomina problema de “selección de

carteras” propuesta por Harry Markowitz, uno de los más tradicionales en el área de inversiones

El problema de selección de cartera, como ya se explicó, implica la selección de un conjunto óptimo de inversiones con base a los resultados esperados, los riesgos asociados con las inversiones y la utilidad del inversionista

Markowitz empleó la variación de la recuperación obtenida como un indicador del riesgo. Supuso que el objetivo del inversionista era la maximización de la utilidad esperada como una función del rendimiento esperado y la variación de la recuperación

Si se define X_i como el porcentaje de los fondos disponibles invertidos en la oportunidad de inversión i y R_i es una variable aleatoria que representa la recuperación de la oportunidad i , el valor esperado (esperanza matemática) “ μ ” y la variación de la recuperación “ σ ” (varianza) se obtienen mediante las siguientes fórmulas

$$E(R_i) = \mu$$

y

$$V(R_i) = \sigma_i^2$$

Siguiendo con los datos que definen el modelo de selección de cartera de Markowitz, es preciso determinar la covarianza que denotamos por σ_{ij} de los rendimientos i y j , los cuales definen los activos de la cartera

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j) = E[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))]$$

donde

$$\sigma_{ij} = \sigma_i^2 \text{ si } i = j$$

Igualmente, si conocemos el coeficiente de correlación de R_i y R_j , denotado por $\rho_{i,j}$, entonces la covarianza queda expresada de la siguiente manera

$$\sigma_{i,j} = \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

donde σ_i y σ_j son las desviaciones estándar de R_i y R_j , respectivamente

El problema que se plantea ahora es el de elegir la cartera de valores de la inversión

El inversionista planteará dos situaciones

- Minimizar el riesgo para una rentabilidad esperada
- Maximizar la rentabilidad esperada para un riesgo dado

El riesgo de una cartera se medirá a través de la varianza del rendimiento, por medio de la fórmula

$$\sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$$

donde σ_{ij}^2 es la covarianza del activo i con el activo j

Una vez que se tiene los valores de rendimiento y del riesgo de los diversos activos que componen la cartera, el problema consiste en determinar las carteras que proporcionan el mayor rendimiento para un riesgo determinado, y que al mismo tiempo aportan el mínimo riesgo para un rendimiento conocido. A estas carteras se las denomina carteras eficientes. Es claro que para determinar el conjunto de carteras eficientes es recomendable el uso de la Programación Lineal

A continuación presentamos dos problemas para ilustrar lo antes mencionado. El primero determina el máximo rendimiento esperado para un nivel de riesgo fijo, y el segundo determina el mínimo riesgo para un rendimiento esperado.

	Problema 1	Problema 2
Función Objetivo	$\text{Max } E(X) = \sum_{i=1}^n X_i E_i$	$\text{Min } \sigma^2(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$
Restricciones paramétricas	$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$	$E = \sum_{i=1}^n X_i E_i$
Restricciones presupuestarias	$\sum_{i=1}^n X_i = 1$	$\sum_{i=1}^n X_i = 1$
No negatividad	$\forall X_i \geq 0$	$\forall X_i \geq 0$

En ambos problemas se suponen las siguientes restricciones

- Se invierte el 100% del dinero disponible
- Ningún nivel de inversión puede ser negativo.

El resultado de ambos problemas se denomina el conjunto de carteras eficientes, o frontera eficiente, por estar formada por la totalidad de carteras eficientes

Por considerarlo de importancia, creemos conveniente discutir en detalle lo concerniente a las fases del modelo de Markowitz obviando los desarrollos analíticos del mismo

- 1) Determinación de la frontera eficiente, es decir, del conjunto de combinaciones de activos que maximizan los rendimientos esperados para un nivel determinado de riesgo o bien minimizar el riesgo soportado para un nivel determinado de

rendimiento esperado. Teniendo en cuenta las restricciones presupuestarias del inversionista racional.

- 2) Determinación del mapa de líneas de indiferencia, siendo tales los conjuntos rendimiento-riesgo, ya que de dicho comportamiento va a depender la forma de estas líneas.

Una manera de caracterizar las diferencias en la aversión al riesgo del inversionista es por medio de la curvatura de las líneas de iso-utilidad. La función que represente dicha utilidad, debe tener una propiedad esencial, la cual consiste en permitir que para niveles crecientes de rendimiento debe asumirse mayor riesgo. Gráficamente, tenemos la siguiente representación:

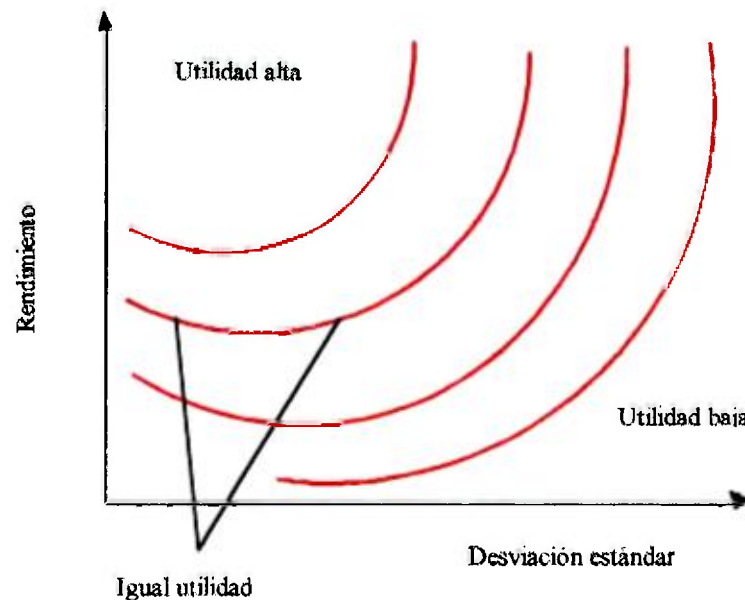


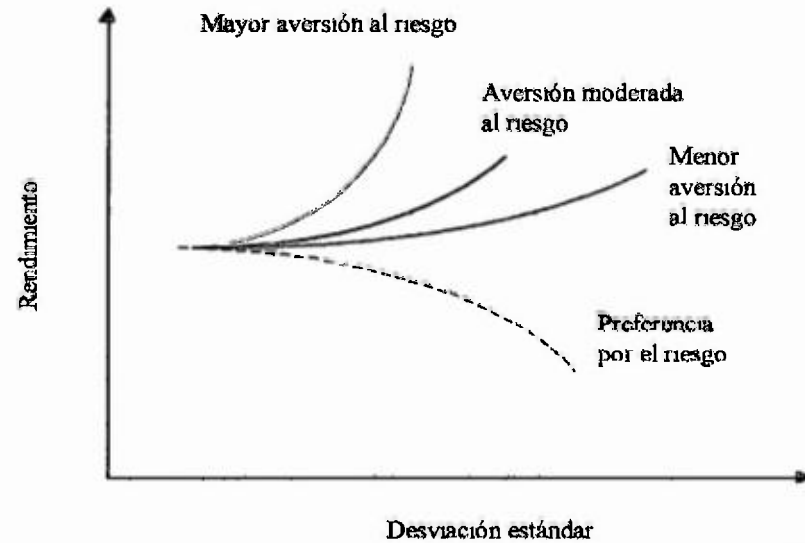
Figura 2.1

La posición del inversionista ante el riesgo es considerado como

- Más averso al riesgo.
- Moderadamente averso al riesgo
- Menos averso al riesgo
- Inversionista amante o preferente al riesgo.

La gráfica siguiente (2.2) muestra estas aptitudes del inversionista frente al riesgo, considerando el mismo nivel de utilidad

Figura 2.2



Note que el amante o preferente al riesgo demanda bajo rendimiento al aumentar el riesgo, con el fin de mantener el mismo nivel de utilidad, donde este nivel de utilidad se conoce como curvas de iso-utilidad, pues para cualquier nivel de riesgo la utilidad es la

misma. Por otro lado, el inversionista más averso al riesgo, cuando la volatilidad o riesgo aumenta, el demandara un rendimiento superior para mantener la cartera

De acuerdo con este aspecto, puede observarse que, en realidad, los postulados que son inherentes a estas líneas de indiferencia tienen las siguientes características

- Son crecientes, ya que un incremento del riesgo debe implicar necesariamente un incremento en el rendimiento esperado de la inversión
- Son curvas y convexas con respecto al eje de coordenadas, es decir, conforme aumenta el riesgo asociado a la inversión, el incremento del rendimiento que se le exige es proporcional
- Cada curva expresa un nivel distinto de satisfacción del inversionista. Dicho nivel será mayor cuanto más alejada esté la curva del eje de abscisas
- Todas las curvas del mapa cortan al eje de coordenadas en la zona positiva. Dichos cortes expresan el equivalente a la certeza de cada línea
- No se pueden cortar dos líneas entre sí, ya que de lo contrario el punto de corte expresaría distintos niveles de satisfacción para el inversionista, lo cual no puede aceptarse. O bien, manteniendo el supuesto de que la satisfacción que ofrece una combinación rendimiento-riesgo es igual a sí misma, entonces las dos curvas de indiferencia representarían el mismo nivel de satisfacción, lo cual tampoco es aceptable puesto que daría el caso de que, para cualquier nivel de riesgo se obtendría la misma satisfacción con dos niveles de rendimiento esperado diferentes e,

igualmente, para cualquier valor de rendimiento se obtendría una satisfacción igual para dos niveles de riesgo diferentes.

3) Determinación de la cartera óptima, es decir, de la combinación posible de activos representativo de la relación rendimiento-riesgo que maximice la satisfacción del inversionista. Esta cartera tal y como se muestra en la siguiente figura, es el resultado de encontrar el punto de tangencia que pertenezca a la frontera eficiente, donde ese punto esté más alejado de las abscisas; es decir, que represente el menor nivel de riesgo.

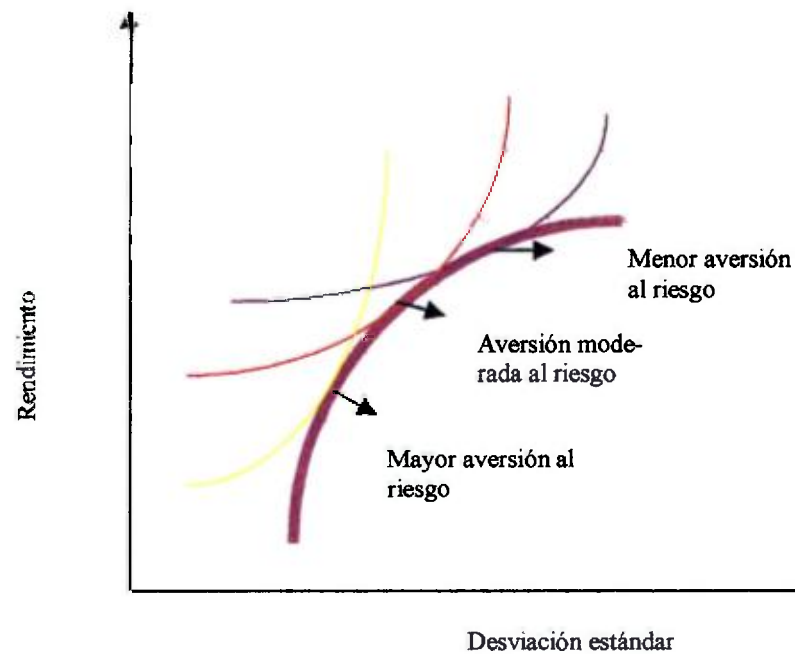


Figura 2.3

Luego, la solución del problema de cartera mediante el análisis de las curvas de indiferencia y aplicando el procedimiento de optimización conduce al inversionista a

encontrar el punto de tangencia que le proporcione el mayor nivel de rendimiento dentro de la curva de iso-utilidad, en otras palabras, debe encontrar la cartera óptima

En la siguiente gráfica se muestra el punto único, donde se señala la cartera óptima

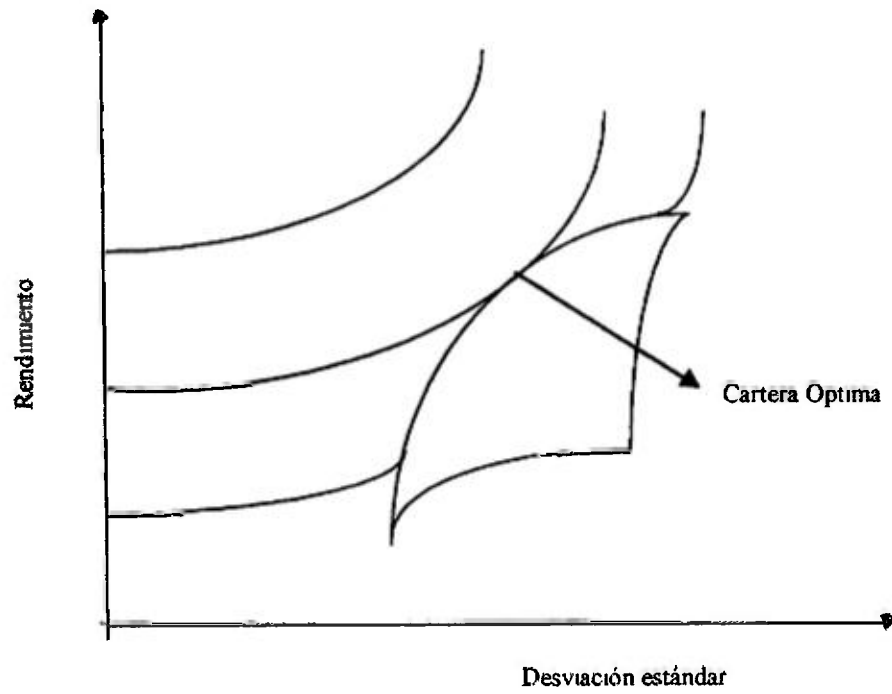


Figura 2.4

CAPITULO III

“VALORACIÓN DEL RIESGO”

Para que el inversionista pueda comprender y administrar el riesgo en el proceso de invertir, es necesario que identifique el riesgo implicado, defina la política a seguir, así como también su valoración y control

Existen diferentes formas para valorar el riesgo las hay desde en forma empírica, subjetiva, histórica, hasta los métodos más recientes y novedosos como es el caso del VaR (valor en riesgo, por sus siglas en Inglés), cuya medición se basa en fundamentos estadísticos

La idea clave ha desarrollar en este capítulo, se centra en el concepto del VaR, el cual es una técnica utilizada para medir la exposición al riesgo de mercado de una cartera La idea proviene de la necesidad de cuantificar con determinado nivel de confianza o incertidumbre el monto o porcentaje de pérdida que una cartera enfrentará en un periodo determinado de tiempo

3.1 Proceso Operativo de la administración del riesgo.

El proceso de la administración estratégica del riesgo constituye el fundamento y el paréntesis integrativo del proceso total de administración del riesgo Primero se debe establecer la política del riesgo del empresario Esto se sustenta a través de dos informaciones básicas

- 1) Los objetivos del inversionista
- 2) Los objetivos de la administración del riesgo

Los objetivos del inversionista están íntimamente relacionados básicamente con

- El rendimiento económico
- El producto

- Los objetivos tecnológicos
- Los objetivos de mercado
- Objetivos financieros

Por otro lado, los objetivos de la administración del riesgo son los siguientes

- Asegurar los objetivos del inversionista a través de la implementación de probabilidades cuantificables
- Asegurar los éxitos futuros del inversionista
- Disminuir los costos de riesgo

En el marco de la administración del riesgo, el inversionista debe estar conciente del riesgo que debe tomar, esto debe ser parte de su cultura en la administración del riesgo

3.2 Etapas del Proceso Operativo de la Administración del Riesgo

El proceso operativo de la administración del riesgo contempla cuatro etapas, las cuales presentamos a continuación

- 1) *La identificación del riesgo.***
- 2) *Política del riesgo.***
- 3) *La valoración del riesgo en el proceso operativo de administración del riesgo.***
- 4) *Control del riesgo.***

3.2.1 Identificación del Riesgo

Es pertinente, para la simplificación de los procesos de la administración del riesgo, clasificar o categorizar los riesgos, pero el primer nivel de identificación del riesgo

comienza con la comprensión de todos los riesgos que pueden afectar los objetivos del inversionista

A continuación se presenta una clasificación del riesgo que consideramos de interés

1) Riesgos Tecnológico

En los riesgos tecnológicos podemos considerar el riesgo que se enfrenta el inversionista frente a los cambios tecnológicos, a los cambios de procesos de producción ante la caída del sistema monetario, aplicación de la nueva tecnología a utilizar en la empresa, etc

2) Riesgo de Rendimiento Económico

Dentro del riesgo de rendimiento económico, podemos tomar en cuenta si la empresa tiene liquidez para continuar operando, si aplica instrumentos derivativos. También, debe considerar la variación de los valores del mercado y como estos pueden afectar su funcionamiento, así como los problemas que se refieren a la calidad del producto, por falta de insumos o por la calidad de los mismos

3) Riesgos Sociales

La empresa puede enfrentarse a ciertos problemas sociales como lo es un paro laboral, cambios de gobiernos, nuevas legislaciones, deslealtad, terrorismo, indiferencia, sabotaje, u otros

4) Riesgos Externos

Una empresa puede verse grandemente afectada en su rendimiento a causa de riesgos externos, producto de fenómenos climatológicos no controlables por el hombre como son los desastres naturales (inundaciones, terremotos, huracanes, tormentas) y que en gran medida pueden afectar los objetivos trazados por la empresa

La identificación del riesgo debe ser el resultado de un proceso orientado y dividido en diferentes ramas (liderazgo de la empresa, infraestructura, publicidad, control de calidad, seguros, defensa del medio ambiente, transporte, etc)

La técnica de identificación del riesgo debe determinarse sobre la base de situaciones de riesgos específicos de la empresa. En particular, debe incluir una lista, lo más completa posible, de los riesgos que puede enfrentar la empresa, para rápidamente precisar y evaluar resultados.

Luego de la identificación del riesgo, se debe clasificar todos los riesgos según los efectos financieros y su posibilidad de ocurrencia en un inventario de riesgo o bien en un mapa de riesgo.

3.2.2 Política del Riesgo

La tarea de la política del riesgo de una empresa consiste en asegurar los objetivos de la empresa (por ejemplo rendimiento económico, social y financiero)

Además, la política del riesgo debe asegurar el esfuerzo de la empresa con el fin de obtener mayor rendimiento con menor riesgo.

El principal objetivo de esta política es saber como administrar y controlar el riesgo, ya que, toda empresa debe diseñar y ejecutar una estrategia, con el fin de neutralizar o controlar el riesgo.

Si algunas de las actividades económicas son abandonadas con el objetivo de evitar los riesgos inherentes, entonces se habla de evitar el riesgo.

Para evitar el riesgo se pueden tomar medidas de regionalización, medidas técnicas u organizativas, o mediante la financiación del riesgo, lo cual puede ser posible a través del pago de una prima de seguro o ser asumidos por la misma empresa

3.2.3 Valoración del Riesgo en el Proceso Operativo de Administración del Riesgo

Después de realizada la identificación del riesgo y estructurada la política de riesgo, se procede a la valoración, es decir los riesgos reconocidos se cuantifican o por lo menos se pesan cualitativamente, atendiendo **la política de riesgo de la empresa**

Para la valoración del riesgo se aplican diversos métodos o instrumentos, algunos de los más utilizados, se enuncian a continuación

- *Técnicas del escenario*
- *Valores en riesgo (VAR)*
- *Equipo de monitoreo*
- *Análisis ABC*
- *El modelo de puntuación*
- *Análisis de sensibilidad*
- *Matemática Difusa*
- *PML (máxima pérdida posible) y MPL (máxima pérdida probable).*

Tales métodos se emplean atendiendo las necesidades y objetivos de la empresa, por ejemplo los métodos **PML Y MPL** se aplican a problemas de estimación de grandes pérdidas, pues para un inversionista puede resultar necesario conocer la probabilidad de ocurrencia de una pérdida considerable

En la práctica, la probabilidad de ocurrencia de una pérdida en términos cualitativos se clasifican por categorías, por ejemplo pueden ser muy baja, baja, media, alta y muy alta

La valoración del riesgo es parte del análisis del riesgo que se basan en datos estadísticos, análisis de sistemas, árbol de decisión, o análisis de desarrollo, que cuantifican los riesgos de la empresa

3.2.4 Control del Riesgo

Un punto clave en el proceso total de administración del riesgo es el control del riesgo, que consiste en si productos o actividades financieras son suspendidos con el objetivo de evitar los riesgos inherentes, entonces se habla de evitar el riesgo, y si los riesgos son controlados a través de restricciones de las funciones de la empresa, a través de medidas regionales u organizativas, se habla entonces de disminución del riesgo

El control del riesgo trata de determinar en qué medida los riesgos pueden ser externalizados, por ejemplo mediante el pago de una prima de seguro, o ser asumidos estos riesgos por la empresa

Si el análisis del riesgo no es debidamente realizado o es insuficiente, una gran parte del riesgo total no podría ser identificado, de tal forma que el beneficio del control del riesgo sería de poco valor

Como señala Peter Bernstein “ la noción de poner el riesgo bajo control es una de las ideas centrales que distingue los tiempos modernos del antiguo”

A continuación presentamos de manera gráfica el proceso de la administración estratégica del riesgo



Figura 3.1

Como se ha visto, la Administración Operativa del Riesgo comprende cuatro etapas bien definidas. De éstas, la Valoración del Riesgo está sustentada básicamente en métodos y herramientas matemáticos. Razón que fundamenta la elección de este tema como objeto de nuestra tesis de grado. A continuación introducimos las nociones fundamentales sobre el Valor en Riesgo que comúnmente se denota por VaR, sin embargo en la literatura en idioma español se emplea, frecuentemente, la notación VeR.

3.3 Definición de Valor en Riesgo (VaR).

El concepto del valor en riesgo es una técnica para medir la exposición al riesgo de mercado de una cartera. Nació en Estados Unidos, en la década de los 80's siendo utilizado por importantes bancos en el manejo del mercado de derivados. El nacimiento

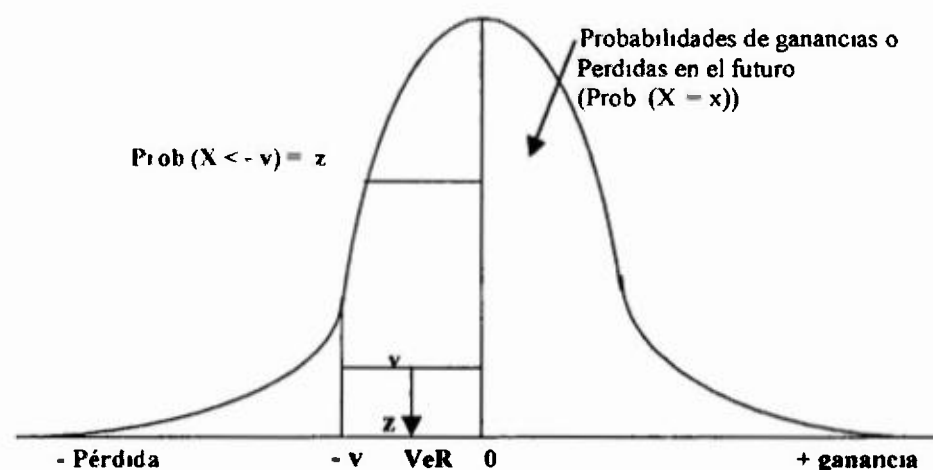
de los derivados representó un gran cambio en la administración del riesgo de las inversiones, ya que las tradicionales mediciones de exposición eran inadecuadas.

El primero en desarrollar esta metodología fue J.P Morgan, mediante la estimación de un Ingreso diario de Riesgo (Daily Earnings at Risk), lo cual es una medida de VaR definida como un intervalo de confianza.

Podemos definir el *VaR* de una cartera de inversión como la máxima pérdida esperada para un horizonte temporal de tiempo y nivel de confianza determinado, medido en moneda de referencia específica. Por ejemplo si el *VaR* a un día de una cartera es de 10 millones de balboas con un nivel de confianza del 95%, entonces existe una probabilidad del 5% que las pérdidas de la cartera en las próximas 24 horas sean superiores a los 10 millones de dólares. Es importante puntualizar que el *VaR* no representa el “peor escenario” que puede producirse, sino más bien un nivel de pérdidas que se produce con relativa frecuencia, la cual será función del nivel de confianza elegido para calcular el *VaR*.

La siguiente gráfica es una representación del concepto del valor en riesgo (*VaR*).

Figura 3.2

Representación gráfica del concepto del valor en riesgo (*VaR*)

En la gráfica anterior observamos que el **VaR** representa el nivel de pérdida que se produce dentro de una cartera de inversión. La forma de dicha gráfica se debe al hecho, que los rendimientos esperados se comportan de acuerdo a una distribución normal, los cuales se encuentran al lado derecho, y al lado izquierdo encontramos los niveles de pérdidas o valor en riesgo que el inversionista está dispuesto a asumir.

Si consideramos el comportamiento histórico de los rendimientos de una cartera que posee n activos, es factible definir la función de distribución de densidad de aquellos rendimientos a través de un histograma. Además, es común encontrar fluctuaciones de rendimientos en torno a un valor medio que no necesariamente es cero (este concepto se conoce en estadística como reversión a la media) y cuya distribución se aproxima a una

normal. Una vez generada la función de distribución se debe calcular aquel punto del dominio de la función del área en su rango inferior

Ese punto en el dominio de la función de distribución se denomina *Valor en Riesgo* (VaR), y se representa en la gráfica siguiente

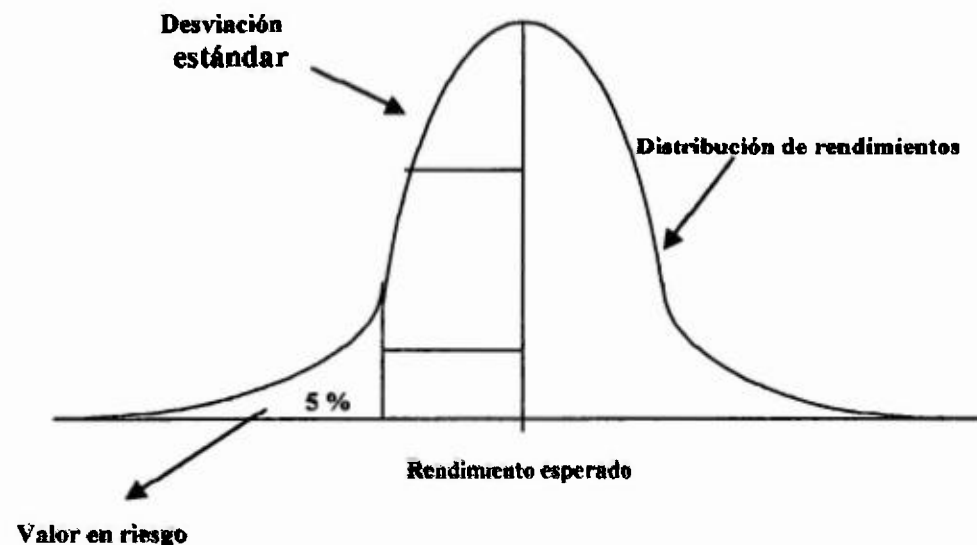


Figura 3.3 Valor en Riesgo

3.4 Valoración del riesgo

Los economistas, quienes han propuesto diferentes medidas para el riesgo, por mucho tiempo han discutido sobre el nivel de riesgo de una alternativa con respecto a otra. El largo debate no es sorprendente pues, sin suposición previa en cuanto a las preferencias de riesgo de los individuos o de las formas de las distribuciones alternativas, es siempre posible que dos individuos asuman niveles diferentes de riesgo para las mismas alternativas. Intuitivamente, una medida de riesgo debe referirse a “resultados menos

que” donde la palabra “que” pueden ser varios objetivos o puntos de referencia tales como ganancia media, la ganancia libre de riesgo, el cero, o cualquier otra meta subjetiva, o alguna seleccionada objetivamente

Entre las medidas de riesgo más conocidas tenemos

- La medida de desviación media absoluta
- La desviación estándar de Markowitz
- La medida de entropía propuesta por Philippatos y Wilson
- El coeficiente de variación de Levy
- La medida de Gini propuesta por Yitzhaki y Shalit

Sin suposiciones específicas sobre las distribuciones o sobre las funciones de utilidad, estas medidas de dispersión pueden conducir a errores acerca de las preferencias de los inversionistas contrarios al riesgo, quienes también prefieren la parte superior de la dispersión

El segundo grupo de medidas de riesgo hace un esfuerzo por confiar en resultados y probabilidades debajo de los puntos de referencia que están seleccionados subjetiva u objetivamente. Entre estas medidas del riesgo están El valor de pérdida esperada de Domar y Musgrave, medida de seguridad de Roy, la medida de semi-varianza de Markowitz, la medida $\mu - k \sigma$ de Baumol y los criterios $\alpha - t$ de Fishburn, la cual cubre un amplio rango de las medidas anteriormente mencionadas

Un enfoque alternativo de definir una medida de riesgo está basado en la utilidad esperada. En ese marco, Rothschild y Stiglitz, desarrollaron los pasos de preservación media quienes generan distribuciones más riesgosas o menos riesgosas. La definición de Rothschild y Stiglitz fue ampliada más tarde por Levy al considerar la diversificación

con activo sin riesgo y por Kroll, Leshno, Levy y Spector consideran la *Aversión al Riesgo Absoluto Decreciente (DARA)*. Hammond define una alternativa como más riesgosa que la otra si esta tiene la misma utilidad esperada, pero mayor varianza de rendimiento. Durante la década pasada métodos prácticos han sido desarrollados los cuales se enfrentan con la complejidad de tener que dividir el riesgo total en elementos separados mientras se ignora la actitud y la exposición al riesgo total.

El valor en riesgo (*VaR*) esta entre estas medidas propuestas, el VaR y sus distintas versiones son meramente modificaciones de las medidas tradicionales de riesgo, los cuales pertenecen a las familias de criterios $\alpha - t$ de Fishburn de Momentos Parciales Inferiores de Bawa. Actualmente, el *VaR* es utilizado principalmente para medir el riesgo de mercado, el cual es definido como una disminución en el valor de una posición debido a cambios de los precios financieros de mercado. De acuerdo a la enmienda de Basilea de los Establecimientos Bancarios Internacionales (BIS), de los países europeos, las instituciones financieras deberían mantener el capital elegible contra su *VaR* de mercado además de las exigencias de suficiencias de capitales convencionales debido al riesgo de crédito. Además, la Cámara de Seguridad y de Cambio (el SEC), organismo internacional de los países europeos dedicadas a la valorización del riesgo, permiten el empleo del *VaR* para describir la exposición de riesgo de mercado. Recientemente, la medida de *VaR* ha sido sugerida como un instrumento para administrar el riesgo de crédito.

Los trabajos recientes que examinan la validez del *VaR* se concentran en las dificultades estadísticas y computacionales prácticas del *VaR*. Sólo pocos trabajos pioneros han sido publicados relacionándose con las ventajas teóricas de su empleo.

Artzner, Delbaen, Eber y Brezal analizan profundamente las exigencias fundamentales de las medidas del riesgo. Ellos examinan si el *VaR* es una medida coherente analizando sus ventajas y desventajas. Basak y Shapiro establecen la superioridad de la versión *AvaR* del *VaR* sobre *VaR* como herramienta regulatoria. Su mayor contribución fue examinar las limitaciones del *VaR* en términos de optimización de cartera y maximización de utilidad. Recientemente, Kroll y Kapalnski y Grootveld como Hallerbach elaboraron el primero de los trabajos innovadores que examinan varias medidas del *VaR* como un instrumento optimal para la selección de cartera.

En las secciones siguientes se examina la validez de diferentes medidas de *VaR* como instrumento legítimo para estimar el riesgo para la toma de *decisiones bajo incertidumbre*, comparando varias medidas de *VaR* con las medidas tradicionales de riesgo. El análisis y la comparación asumen que los individuos son contrarios o aversos al riesgo y maximizan la utilidad esperada o la utilidad lexicográfica esperada, donde “la seguridad” es considerada fundamental por los individuos o por el regulador del riesgo y sólo entonces la utilidad esperada es maximizada. Varias medidas de riesgos serán examinadas, sin restricciones previas sobre la forma de las distribuciones.

Esta sección está organizada como sigue: la primera parte proporciona los fundamentos preliminares sobre el concepto del *VaR*. La validez de estas medidas del *VaR* es asumida bajo la maximización de la utilidad esperada, la aversión al riesgo y la Aversión al Riesgo Absoluto Decreciente (DARA). Los criterios de las medidas del *VaR* para distribuciones específicas también son desarrolladas en esta sección. Finalmente, discutimos las medidas tradicionales del riesgo y las comparamos con las medidas del *VaR*.

El análisis de eficacia de varias medidas del riesgo en términos del mismo también es estudiado. El VaR es examinado usando la función de utilidad desarrollada por Fishburn, quien propuso la medida de riesgo $\alpha - t$. Además, esta sección examina la validez del VaR bajo la utilidad simple lexicográfica.

A continuación definimos el VaR de la siguiente manera:

Denote por X una variable aleatoria con una función de distribución $f(x)$ y su función de distribución acumulada $F(x)$, (fda). Se define el cuantil $X(P)$ de X por el valor máximo de X para el que existe una probabilidad P que está por debajo del valor de $F(x)$ (fda). Formalmente la definición de $X(P)$ es $\Pr(X \leq X(P)) = P$.

El valor en riesgo (VaR) en un intervalo de confianza $1 - \hat{P}$ puede ser definido como la pérdida por debajo de algún objetivo $\eta(F(X))$ sobre un periodo de tiempo dado.

Por ejemplo, un VaR bimensual de 5 millones de balboas al 99% de intervalo de confianza significa que hay una probabilidad del 1 por ciento de tener una pérdida mayor de 5 millones durante los dos próximos meses. Los cálculos del VaR implican dos pasos primarios. Primero se deriva la *distribución de rendimiento*. Segundo, se calcula los primeros percentuales \hat{P} de esta distribución. La figura número 3.4 ilustra este proceso.

En términos de función de cuantil, VaR (P) simplemente puede ser escrito como

$$\text{VaR}(\hat{P}) = \eta(F(X)) - X(\hat{P}) \quad (3.1)$$

donde η denota la función utilizada por la medición del riesgo.

Si $\eta(F(X)) = E(X) = \mu_X$, entonces el VaR es la pérdida por debajo de la media esperada,

μ_X Lo cual es indicado como VaR_e ; esto es $VaR_e = \mu_X - X(\hat{P})$

Si ahora se considera un punto de referencia constante, como el rendimiento libre de riesgo o el cero, entonces lo anteriormente expuesto se denota por VaR_t .

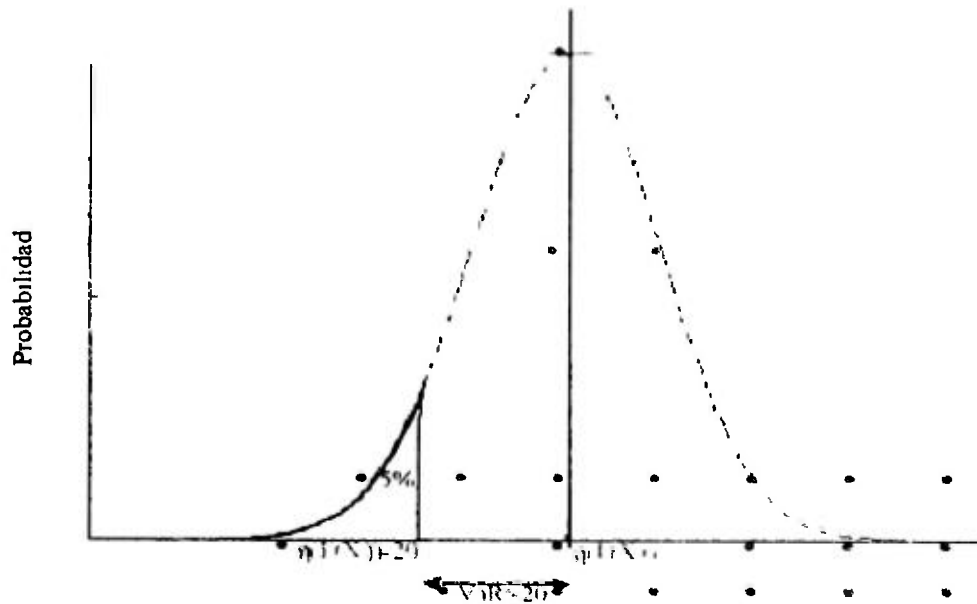


Figura 3.4

Proceso de cálculo de valor en riesgo

3.4.1 El VaR con Media Esperada como un Punto de Referencia (VaR_e)

Esta media se refiere a la identificación de una pérdida por debajo “del valor” proyectado supuesto con una apariencia fuertemente intuitiva Baumol propone que “la Inversión con desviación estándar relativamente alta será relativamente segura si su valor esperado es suficientemente alto” Así, él identifica la media menos k veces la desviación estándar como el “nivel de confianza” subjetivo para el riesgo que tomarán los

recomiende calcular el VaR como la pérdida potencial definida por debajo del valor actual el cual es conceptualmente igual al flujo de caja medio descontado en efectivo. Sin embargo, la mayoría de los trabajos sobre el VaR asumen que el punto de referencia para calcular la pérdida $\eta(F(X))$, es simplemente cero o el cero más el retorno libre de riesgo. Estos trabajos ignoran la media o probablemente asumen que en los periodos cortos la media no está lejos de cero. Sin embargo, adaptar el VaR como una medida de riesgo de la inversión implica horizontes de inversión que podrán ser más largos que unos días. En este caso, la selección del punto de referencia puede ser crucial, como se muestra en los dos siguientes teoremas.

3.4.2 *El criterio de la medida VaR_c*

A continuación presentamos algunas definiciones y teoremas donde se aplican los tres criterios de dominancia estocástica, estos criterios aparecen definidos y explicados en el apéndice B de este trabajo.

Primeramente, definimos el criterio de dominancia según la medida de riesgo VaR_c.

$$X \underset{\text{Medida VaR}_c}{D} Y \text{ si y sólo si } \mu_X \geq \mu_Y$$

y

$$\text{VaR}_c(X) \leq \text{VaR}_c(Y),$$

con al menos una desigualdad significativa. La desventaja principal de VaR_c (también cualquier otra medida de riesgo es basada en resultados por debajo de la media) consiste en que no se afecta por un cambio constante de la distribución total. Además, mostramos seguidamente, que el criterio de medida VaR_c no puede reflejar las alternativas que son

inferiores para todos los inversionistas de utilidad esperada racional. Tales alternativas son dominadas según la regla de FSD. En efecto, deseamos establecer la no validez de

$$X \underset{\text{FSD}}{D} Y \Rightarrow X \underset{\text{medida VaR}_e}{D} Y$$

Para tal fin, es suficiente proporcionar un ejemplo. Supongamos que X e Y presentan los siguientes valores con sus correspondientes probabilidades

X	P(X)
10	0.5
20	0.5

Y	P(Y)
0	0.5
5	0.5

Obviamente, cualquier inversionista racional prefiere la alternativa X sobre la alternativa Y, dado que $\text{Min}(X) > \text{Max}(Y)$ implica $X \underset{\text{FSD}}{D} Y$. Sin embargo, a un 50 por ciento o en un intervalo de confianza mayor ($\hat{P} < 0.5$), el $\text{VaR}_e(X) = 5$ y el $\text{VaR}_e(Y) = 2.5$. Así, tanto la media y el $\text{VaR}_e(X)$ son mayores que la media y el $\text{VaR}_e(Y)$, respectivamente. Entonces, de acuerdo a la regla VaR_e no existe dominancia entre las dos alternativas.

3.4.3 El VaR con un punto de referencia constante (VaR_t)

La identificación de una pérdida por un resultado debajo de algún punto de referencia constante implica la existencia de algunas normas objetivas para el éxito y el fracaso. La utilización del punto de referencia subjetivo en vez de la media proporciona una regla de

eficacia ligeramente más razonable que la descrita anteriormente, para tal fin proporcionaremos el siguiente teorema

Teorema 1 (Primer criterio de dominancia estocástica)

Sea VaR_t definida por $t - X(\hat{P})$ donde t es una constante. Entonces

$$X \underset{\text{FSD}}{D} Y \Rightarrow X \underset{\text{medida } VaR_t}{D} Y \quad (3.2)$$

Prueba:

De la condición necesaria de Dominancia Estocástica se tiene que $\mu_X \geq \mu_Y$

En el caso de VaR , de la condición $X \underset{\text{FSD}}{D} Y$, se infiere que para $0 \leq P \leq 1$ se

tiene que $X(P) \geq Y(P)$, luego $t - X(\hat{P}) < t - Y(\hat{P})$ y por lo tanto

$$VaR_t(X) \leq VaR_t(Y)$$

Así,

$$X \underset{\text{FSD}}{D} Y \Rightarrow X \underset{\text{medida } VaR_t}{D} Y$$

Observaciones:

A la luz del teorema 1, podemos hacer las siguientes consideraciones

- Si una alternativa domina según la regla FSD, entonces también es dominada según el criterio de la media VaR_t .
- En consecuencia si una alternativa es pobre para todos los *buscadores* de riesgo, así como para los aversos al riesgo, entonces también es pobre según la regla media VaR_t .

En general, no es válida la relación

$$X \underset{SSD}{D} Y \Rightarrow X \underset{\text{medida VaR}_t}{D} Y$$

Para constatarlo, supongamos que las variables X e Y tienen los valores y probabilidades que se dan a continuación

X	P(X)
10	0.25
20	0.25
15	0.50

Y	P(Y)
10	0.5
20	0.5

Cualquier inversionista racional averso al riesgo preferiría, claramente, la alternativa X sobre la alternativa Y, dado que $\left(X \underset{SSD}{D} Y \right)$. Sin embargo en un intervalo de confianza de 75 %, o mayor, $(\hat{P} < 0.25)$, $VaR_t(X) = VaR_t(Y) = t - 10$. Como ambas medias y ambas medidas de VaR son iguales, de acuerdo a la regla de medida VaR_t , no existe relación de dominancia entre las dos alternativas.

El conjunto eficiente según la regla medida VaR_t es un subconjunto del conjunto FSD eficiente. Lo anterior no se cumple de acuerdo al criterio de la medida VaR_t .

De acuerdo al contraejemplo, el criterio de la medida VaR_t no puede ser capaz de reflejar alternativas inferiores para todos los inversionistas aversos al riesgo lo que implica la ineficacia del criterio medida VaR_t bajo la aversión al riesgo.

Daremos, un ejemplo, que demuestra que el criterio medida VaR_t puede reflejar una alternativa óptima para individuos aversos al riesgo y sufrir una alta sensibilidad frente al

intervalo de confianza altamente seleccionado, una desventaja que fue primeramente mencionada por Artzner, Delbaen, Eber y el Brezal

Ejemplo Considere dos alternativas X y Y eficientes según FSD, con medias iguales. Asuma que la F(X) intercepta la F(Y) una vez desde abajo, con una probabilidad del 4 por ciento, tal que $X(0.04) = Y(0.04)$. De acuerdo a estas suposiciones, Y es ineficaz por SSD. Aún, el predominio según el criterio de la medida VaR_t depende del intervalo de

confianza seleccionado $1 - \hat{P}$. Para $VaR(\hat{P} = 0.03)$ X $\underset{\text{medida } VaR_t}{D}$ Y, para $VaR(\hat{P} = 0.05)$ Y $\underset{\text{medida } VaR_t}{D}$ X y para $VaR(\hat{P} = 0.04)$ no existe una dominancia

entre X e Y. Note también que las medidas de VaR no pueden reflejar cambio de probabilidad MPS (**the mean preserving spread**) de Rothschild y Stiglitz desde el centro hasta el lado de las distribuciones, que es la definición básica de tener más riesgo. Por ejemplo, si los cambios de probabilidad inferiores “del centro” de la distribución a cualquier punto \hat{P} , por encima, entonces, el VaR no se altera por MPS (*The Mean Preserving Spread*).

Lo anterior ilustra entonces que el VaR es muy sensible al \hat{P} seleccionado y así uno puede clasificar el riesgo incorrectamente y puede no reflejar un aumento de riesgo en término de MPS.

3.4.4 El VaR acumulado (AVaR)

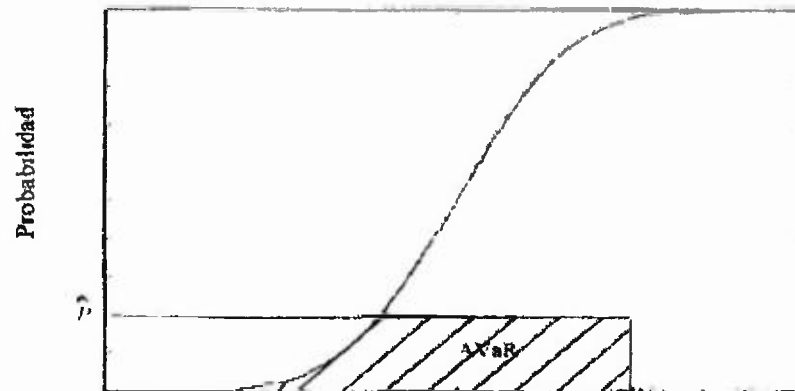
AVaR, que es también conocido como VaR condicional, fue introducido por Embrech, Kupperberg y Mikos. El AVaR_t con intervalo de confianza $1 - P$, es definido en términos de VaR por

$$\text{AVaR}_t(\hat{P}) = \int_0^{\hat{P}} \text{VaR}_t(P) dP \quad (3.3)$$

El AVaR hace un promedio de los VaR's con un intervalo de confianza, que varía de $1 - \hat{P}$ a 1. El AVaR puede ser visto como la pérdida esperada relativa al punto de referencia escogido, en un rango constante de probabilidades de 0 a \hat{P} , como se observa en la siguiente figura 3.5

Análogamente al VaR, el AVaR es igual al área de la probabilidad \hat{P} veces el punto de referencia ($\eta F(X) P$), menos los resultados esperados inferiores que es el área a la izquierda de la función de distribución acumulativa $\int_0^{\hat{P}} \hat{X}(P) dP$

Figura 3.5 El VaR acumulado (AVaR)



El AVaR posee algunas ventajas prácticas, tales como la posibilidad de optimizarlo por programación lineal, y algoritmos de optimización no suaves para distribuciones empíricas, sujetas a que el número de escenarios sea finito. Kroll y Kaplanski indican

algunas de las ventajas teóricas de AVaR sobre VaR. Su estudio se concentran sobre soluciones analíticas para la minimización del VaR de cartera, mientras señalan que estos métodos pueden también ser aplicados a AVaR. Kroll y Kaplanski desarrollan un modelo de equilibrio de precio, la cual es basado sobre AVaR.

El siguiente teorema presenta la relación básica entre AVaR_t y el análisis de eficacia de la *Dominancia Estocástica*.

Teorema 2 (Considerando el AVaR_t) definido por

$$AVaR_t(\hat{P}) = \int_0^{\hat{P}} VaR_t(P) dP \quad (3.4)$$

Se tiene

$$X \underset{SSD}{D} Y \Rightarrow X \underset{\text{medida AVaR}_t}{D} Y$$

Prueba :

De la condición necesaria de la dominancia estocástica se tiene $\mu_X \geq \mu_Y$. Además,

de la dominancia $X \underset{SSD}{D} Y$, obtenemos que para $0 \leq P \leq 1$

$\int_0^P X(p) dp \geq \int_0^P Y(p) dp$, de aquí podemos establecer $\int_0^{\hat{P}} (t - X(p)) dp \leq \int_0^{\hat{P}} (t - Y(p)) dp$, en consecuencia $AVaR_t(X) \leq AVaR_t(Y)$

OBSERVACIÓN:

En general, no es válida la relación

$$X \underset{FSD}{D} Y \Rightarrow X \underset{\text{medida AVaR}_t}{D} Y$$

Para comprobar este hecho, supongamos que las variables X e Y toman los valores y probabilidades que se detallan

X	P(X)
10	0.25
50	0.25
20	0.50

Y	P(Y)
10	0.5
40	0.5

Todo inversionista racional averso al riesgo preferiría la alternativa X sobre Y $\left(X \underset{SSD}{D} Y \right)$ Sin embargo en un intervalo de confianza de 75 %, o mayor, $(\hat{p} < 0.25)$, $AVaR_t(X) = AVaR_t(Y) = (t - 10)\hat{p}$ Como ambas medias y ambas medidas de $AVaR_t$ son iguales, de acuerdo a la regla de medida $AVaR_t$, no existe dominancia entre las dos alternativas

Si todos los individuos aversos al riesgo prefieren a X sobre Y , entonces X domina a Y por SSD y de acuerdo al teorema 2, X también domina a Y según la medida $AVaR_t$. Note que el teorema 2 no se verifica para $AVaR_{t^*}$.

Nótese que la medida $AVaR_t$ es mucho menos sensitiva a la selección del intervalo de confianza. Regresando al ejemplo anterior en la cual la clasificación de dos alternativas empleando VaR se cambia cuando \hat{p} varía del 3 por ciento a 5 por ciento, encontramos también, que la clasificación de $AVaR_t$ no varía necesariamente en este caso. En efecto, en este ejemplo existe SSD de X sobre Y . Así, según el teorema 2, X domina a Y también por el criterio de medida $AVaR_t$ y así mismo uno puede concluir que para cualquier \hat{p} el $AVaR_t$ de X será menor que el de Y .

Generalmente, los economistas suponen que entre mayor es la riqueza de los individuos menor es su nivel de aversión al riesgo

Esta es la propiedad de *Aversión al Riesgo Absoluta Decreciente (DARA)*.

Para tener la propiedad *DARA*, la tercera derivada de la función de utilidad del individuo debe ser positiva. La segunda parte del Teorema 2, asegura que aún cuando todos los inversionistas aversos al riesgo que tengan la tercera derivada positiva de la función de utilidad prefieran a X sobre Y, entonces es posible que el criterio de la medida $AVaR_t$ no lo determine

Con el fin de distinguir la dominancia de todos los individuos aversos al riesgo, uno puede modificar el criterio $AVaR$ como sigue

3.4.5 El AAVaR

Definamos $AAVaR$ para el intervalo de confianza $1 - \hat{p}$ por

$$AAVaR_t(\hat{P}) = \int_0^{\hat{P}} AVaR_t(\hat{P}) dP \quad (3.5)$$

Teorema 3 (Considerando $AAVaR$ definido como en (3.5))

Sea $AAVaR_t \int_0^{\hat{P}} AVaR_t(\hat{P}) dP$ de tal manera que se tenga

$$X \underset{TSD}{D} Y \Rightarrow X \underset{\text{medida-AAVaR}_t}{D} Y$$

Prueba:

De la condición necesaria de la dominancia estocástica se tiene $\mu_X \geq \mu_Y$, además

$\left(X \begin{array}{c} D \\ TSD \end{array} Y \right)$ implica que $\int_0^p \int_0^p X(v) dv dp \geq \int_0^p \int_0^p Y(v) dv dp$, entonces

$$\int_0^p \int_0^p (t - X(v)) dv dp \leq \int_0^p \int_0^p (t - Y(v)) dv dp, \text{ y así } AAVaR_t(X) \leq AAVaR_t(Y)$$

Considerando Momentos Parciales Inferiores, Fishburn concluye que el conjunto eficiente de $\alpha - t$ criterio es un subconjunto del conjunto eficiente TSD para $\alpha \geq 0$, un subconjunto del conjunto eficiente SSD para $\alpha \geq 1$ y un subconjunto del conjunto eficiente TSD para $\alpha \geq 2$. En consecuencia la medida de $AAVaR_t$ puede ser vista como una medida de $\alpha - t$ modificada (o un momento inferior) en la que $\alpha = 1$ y la cota superior de integración es una función de alternativa conocida como la función de distribución acumulativa

Integrando VaR_t para obtener $AVaR_t$ es equivalente a incrementar el orden de α en el modelo de Fishburn de 0 a 1. Similarmente la integración $AVaR_t$ para obtener $AAVaR_t$ es equivalente a aumentar el orden de α de 1 a 2.

3.4.6 *Análisis de la eficiencia de la medida VaR para distribuciones específicas*

Uno puede concluir de la discusión previa que para el caso de distribuciones generales los criterios de medida VaR son superiores al criterio de medida desviación estándar ya que ellos proveen condiciones necesarias para el criterio de dominancia para toda utilidad esperada. Además, se puede demostrar que para el caso de distribuciones normales y log-

normales la medida de riesgo del VaR puede reemplazar la desviación estándar en los criterios de eficiencia óptima

Teorema 4 (El criterio VaR_α para la distribución normal)

Sean X e Y normalmente distribuidas, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

$$i) X \underset{SSD}{D} Y$$

$$ii) X \underset{\text{medida-VaR}}{D} Y$$

$$iii) X \underset{\substack{\text{desviación media} \\ \text{estándar}}}{D} Y$$

Prueba:

En el caso normal $X \underset{SSD}{D} Y \Leftrightarrow X \underset{\substack{\text{desviación} \\ \text{estándar media}}}{D} Y$

y

$$X(\hat{P}) = \mu + \sigma (Z(\hat{P})), \quad (3.6)$$

donde $Z(P)$ es el valor de orden P (cuantil) de la distribución normal estandarizada, μ es la media y σ la desviación estándar. De (3.6) la definición de VaR encontramos que

$$\sigma = (X(\hat{P}) - \mu) / Z(\hat{P}) = -VaR_\alpha(t) / Z(\hat{P}) \quad (3.7)$$

Sustituyendo en el criterio de la desviación estándar media obtenemos la expresión

$$X \underset{SSD}{D} Y \Leftrightarrow X \underset{\substack{\text{desviacion estandar} \\ \text{media}}}{D} Y \quad \text{del Teorema 4}$$

Este teorema apoya el uso del VaR_e en todos los casos donde se presume normalidad

Si uno prefiere usar la medida de riesgo VaR_t en vez de VaR_e el teorema 4 debe ser modificado así

Teorema 5 (Criterio Modificado de la medida VaR_t)

Sean X e Y distribuidas normalmente, entonces $X \underset{SSD}{D} Y$ si y sólo si

i) $\mu_X \geq \mu_Y$

ii) $\mu_X + VaR_t(X) \leq \mu_Y + VaR_t(Y)$

Prueba:

Sustituimos $VaR_e = VaR_t + \mu - t$ en el criterio de la media VaR_e y añadimos la constante t, a ambos lados para obtener $\mu_X + VaR_t(X) \leq \mu_Y + VaR_t(Y)$

Se puede mostrar fácilmente que para $VaR_e = VaR_t + \mu - t$, se cumple $\mu_X + VaR_t(X) \leq \mu_Y + VaR_t(Y)$, si sólo si $VaR_e(X) < VaR_e(Y)$ es independiente de la t seleccionada

Así bajo la suposición de distribución normal el criterio modificado de medida VaR_t es idéntico al criterio de medida VaR_e así como también a la regla de SSD y a los criterios de la medida de desviación estándar

Según $\mu_X + VaR_t(X) \leq \mu_Y + VaR_t(Y)$ la dominancia de X sobre Y requiere que la diferencia entre el VaR_t de Y y el VaR_t de X sean mayor que la diferencia entre las medias

Note que en el caso general, la dominancia según el criterio modificado de medida VaR_t implica dominancia por el criterio no modificado de medida VaR_t . Lo opuesto no se cumple y así, en el caso general el conjunto eficiente de la medida VaR_t es un subconjunto del conjunto eficiente del criterio modificado de medida VaR_t .

Note también que en el caso normal la medida de AVaR también puede ser usada para obtener un criterio optimal, pues, bajo el caso de distribución normal el VaR y AVaR son medidas equivalentes

La distribución log-normal es más atractiva que la distribución normal. Modelos Comerciales de tiempo continuo apoyan la suposición que los precios están distribuidos log-normalmente. Por tal razón, extendemos la discusión anterior al caso de las distribuciones log-normal

A continuación presentamos la siguiente figura donde se observa la gráfica de la distribución log-normal, donde la variable aleatoria es el rendimiento

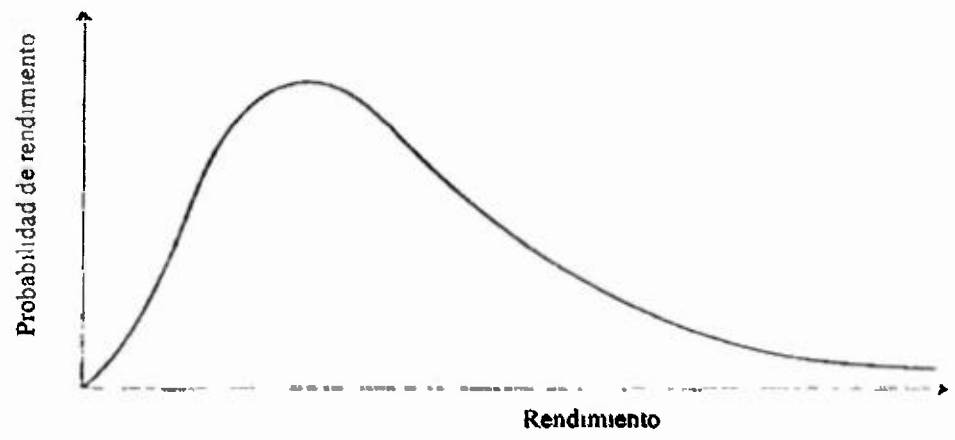


Figura 3 6 Distribución log-normal

El próximo teorema proporciona un criterio óptimo VaR en el caso de distribuciones log-normal

Teorema 6 (El criterio de medida VaR para distribuciones log-normales)

Sean X e Y distribudas log-normales, $X \sim \Lambda(\hat{\mu}_X, \hat{\sigma}_X)$ y $Y \sim \Lambda(\hat{\mu}_Y, \hat{\sigma}_Y)$ tal que

$Z_X = \log(X)$ y $Z_Y = \log(Y)$ son distribudas normalmente con dos primeros momentos, $\hat{\mu}_X, \hat{\sigma}_X$ y $\hat{\mu}_Y, \hat{\sigma}_Y$, respectivamente Entonces $X \stackrel{D}{SSD} Y$, si y sólo

si

$$\mu_X \geq \mu_Y$$

y

$$\ln\left(\frac{\mu_X}{t - VaR_t(X)}\right) \leq \ln\left(\frac{\mu_Y}{t - VaR_t(Y)}\right)$$

donde μ_X y μ_Y son los valores esperados de X e Y respectivamente, y $\hat{\mu}_X$, $\hat{\mu}_Y$ son los valores esperados de los logaritmos de X e Y respectivamente

Prueba:

En el caso log-normal

$\left(X \quad D \quad Y \right)$ si y sólo si

$$\mu_X \geq \mu_Y$$

y

$$\hat{\sigma}_X \geq \hat{\sigma}_Y$$

Donde μ es la media y $\hat{\sigma}$ la desviación estándar del logaritmo de los rendimientos

Además, en este caso el valor de orden \hat{P} está dado por

$$X(\hat{P}) = t - VaR_t = e^{(\hat{\mu} + \hat{\sigma} \cdot Z(\hat{P}))} \quad (3.8)$$

y la media está dada por

$$\mu = e^{\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \right)} \quad (3.9)$$

donde $Z(\hat{P})$ es el valor de orden \hat{P} (cuantil) de la distribución normal estandarizada,

μ y $\hat{\sigma}$ están definidas como antes y $\hat{\mu}$ es la media de los logaritmos de los

rendimientos Sustituyendo $\hat{\mu} = \ln(t - VaR_t) - Z(\hat{P}) \hat{\sigma}$ de (3.8) en (3.9)

obtenemos

$$\hat{\sigma}^2 - 2Z(\hat{P})\hat{\sigma} + 2\ln\left(\frac{t - VaR_t}{\mu}\right) = 0 \quad (3.10)$$

Sustituyendo la solución positiva de (3.10)

$$\hat{\sigma} = Z(\hat{P}) + \sqrt{Z^2(\hat{P}) - 2\ln\left(\frac{t - VaR_t}{\mu}\right)} \text{ en } (\hat{\sigma}_X \geq \hat{\sigma}_Y) \text{ y con pocos procedimientos}$$

$$\text{algebraicos (sujeto a } \hat{P} \leq 0.5) \text{ obtenemos } \ln\left(\frac{\mu_X}{t - VaR_t(X)}\right) \leq \ln\left(\frac{\mu_Y}{t - VaR_t(Y)}\right)$$

donde μ_X y μ_Y son los valores esperados de X e Y respectivamente y $\hat{\mu}_X$, $\hat{\mu}_Y$ son los valores esperados de los logaritmos de X e Y

La desigualdad anterior puede también ser escrita en términos de VaR_e como sigue

$$\ln\left(\frac{\mu_X}{\mu_X - VaR_e(X)}\right) \leq \ln\left(\frac{\mu_Y}{\mu_Y - VaR_e(Y)}\right)$$

$$\text{Las condiciones } \ln\left(\frac{\mu_X}{t - VaR_t(X)}\right) \leq \ln\left(\frac{\mu_Y}{t - VaR_t(Y)}\right) \quad \text{y}$$

$$\ln\left(\frac{\mu_X}{\mu_X - VaR_e(X)}\right) \leq \ln\left(\frac{\mu_Y}{\mu_Y - VaR_e(Y)}\right)$$

son equivalentes a la condición de que el coeficiente de variación de X sea menor o igual al de Y

Para comparar el caso normal con el caso log-normal, es importante recordar que

$$VaR_t(X) = t - X(P) \text{ y } VaR_t(Y) = t - X(P) \text{ y reformular}$$

$$\mu_X + VaR_t(X) \leq \mu_Y + VaR_t(Y) \text{ y } \ln\left(\frac{\mu_X}{t - VaR_t(X)}\right) \leq \ln\left(\frac{\mu_Y}{t - VaR_t(Y)}\right) \text{ como}$$

$$\mu_X - \mu_Y \leq X(\hat{P}) - Y(\hat{P}) \text{ y } \ln(\mu_X) - \ln(\mu_Y) \leq \ln(X(\hat{P})) - \ln(Y(\hat{P}))$$

respectivamente

Esta semejanza entre las dos últimas desigualdades es obvia donde la única diferencia es que en el caso log-normal los términos relevantes son los logaritmos de los parámetros relevantes. Esto no debería ser sorprendente pues en el caso de distribución log-normal los logaritmos de X e Y están distribuidos normalmente.

3.5 El VaR y las Medidas Tradicionales de Riesgo

Las diferentes medidas de riesgo pertenecen a uno de las dos categorías distintivas, según su percepción del riesgo. En el primer grupo o categoría, el riesgo está medido en términos de probabilidad y dispersión ponderada de resultados alrededor de algún punto de referencia, por lo general el valor esperado. Estas medidas de riesgo son afectadas por las desviaciones negativas así como las desviaciones positivas del objetivo. Sin embargo, las desviaciones positivas no pueden ser consideradas como una fuente de riesgo.

En la segunda categoría, el riesgo es medido sólo por resultados debajo de algún punto de referencia. Repasaremos los criterios más conocidos en las dos categorías comparándolos con los criterios de medidas VaR.

3.5.1 Medidas de Dispersión

3.5.1.1 Medida de Riesgo de Desviación Estándar

La medida de riesgo más conocida en el grupo de dispersión, es la desviación estándar la cual está dada por

$$\sigma_{\lambda} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - \mu)^2 dx} \quad (3.11)$$

El criterio de desviación media estándar fue desarrollado por Markowitz y Tobin Sharpe y Lintner. Un criticismo voluminoso de la desviación estándar como una medida de riesgo ha sido publicada, la mayoría relacionado a su insuficiencia con respecto al teorema de utilidad esperada. La insuficiencia es debido a lo siguiente. Primero, el reconocimiento implícito “desviaciones positivas” de la media como una fuente de riesgo.

En segundo lugar, el uso de las medias como un punto de referencia. Tercero, el empleo arbitrario de la suma de las desviaciones ponderadas cuadradas de la media como la medida del riesgo. Como mostramos en la sección anterior, en el caso de distribuciones normales tanto la desviación media estándar como el criterio optimal de la medida VaR son equivalentes a la regla SSD. En el caso general no-normal el criterio de desviación estándar media es no-optimal y hasta no puede ser capaz de proteger las alternativas inferiores FSD, mientras que esto no puede pasar en lo que concierne al criterio de medida VaR.

3.5.1.2 Medida de Riesgo de Coeficiente de Variación

Esto es simplemente la desviación estándar dividida por la media. El mérito especial del ***criterio de coeficiente de variación*** radica en su optimalidad en el caso log-normal.

Sin embargo, en este caso esto puede ser substituido según un criterio óptimo basado en la media y el VaR

3.5.1.3 Medida de Riesgo de Entropía

La medida de entropía es logaritmo natural esperado de la función de densidad, y está dado por

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln(f(x)) dx \quad (3.12)$$

La ventaja de entropía se basa en su *distribución natural libre*. A saber, H depende sólo de $f(x)$ y no de X mismo. Así, la única ventaja de la medida de entropía sobre VaR consiste en que también puede ser calculada de datos no métricos. Para datos métricos se ha demostrado que el análisis de la medida de entropía es equivalente al análisis de desviación media estándar.

3.5.1.4 Medida de Riesgo de Desviaciones Media Absoluta

Otra medida de dispersión que ha sido usada por un largo periodo por estadísticos es la Desviación Absoluta Esperada de la Media la cual está dada por

$$AD = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |x - \mu_X| dx \quad (3.13)$$

Asumiendo la Desviación Absoluta Esperada como medida de riesgo es posible desarrollar un modelo de optimización cuya principal ventaja sobre el modelo de desviación media estándar radica en su linealidad y la posibilidad de resolver problemas de optimización para distribuciones empírica usando programación lineal en vez de programación cuadrática. Note que el criterio de medida AvaR comparte la misma propiedad, asumiendo un número finito de alternativas. Más aún, similar a los criterios anteriores, el criterio de Desviación Media Absoluta es inferior al criterio de medida VaR, pues no puede proteger alternativas inferiores según la regla de dominancia estocástica relevante. Una mejor regla, basada en desviaciones absolutas, es presentada a continuación.

3.5.1.5 . Medida de Riesgo de Diferencia Media de Gini.

La medida de Riesgo de Diferencia Absoluta de Gini mide el valor esperado de la diferencia absoluta entre cada par de las realizaciones de la variable aleatoria y está dada por

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b |X - x| f(X) f(x) dX dx \quad (3.14)$$

Yitzhaki extendió esta medida a la familia de medidas de riesgo de Gini la cual se apartan cada una de la otra de acuerdo a su aversión al riesgo ν .

La medida extendida de Gini está dada por

$$\Gamma(\nu) = \mu_X - a - \int_a^b [1 - F(X)]^\nu dX \quad (3.15)$$

Para un a finito

EL Gini convencional es el caso específico donde $v = 2$

Yitzhaki y Shalit desarrollan un modelo de activos de capital basado en el criterio de la medida de Gini siguiente

X D Y , si y sólo si
medida-Gini

i) $\mu_X \geq \mu_Y$

ii) $\mu_X - \Gamma_X \geq \mu_Y - \Gamma_Y$

Similar al criterio de medida AVaR_t, el conjunto eficiente del criterio de medida-Gini es un subconjunto del conjunto eficiente SSD, que protege todas las alternativas ineficaces para todos los individuos adversos al riesgo. Sin embargo, este criterio puede proteger las alternativas que pueden ser óptimas para algunos individuos adversos al riesgo.

La complejidad matemática de esta medida supera la intuición detrás de ello y desalienta su uso.

3.6 Medida del Riesgo por Debajo de un Punto de Referencia

Las medidas de riesgo de este grupo consideran sólo resultados bajos y así ellos son más atractivas como medidas de riesgo.

Usando las propias palabras de Fishburn, su atractivo en el marco del análisis de medida de riesgo es su capacidad “de reconocer el deseo de salir bien a largo plazo evitando reveses potencialmente desastrosos o evitando fallas para alcanzar lo estándar a corto plazo”

3.6.1 Medidas de Riesgo de Fishburn " $\alpha - t$ ".

La mayoría de las medidas tradicionales en este grupo son los casos específicos del modelo " $\alpha - t$ " de Fishburn que es definido como

$$\int_{-\infty}^t (t-x)^{\alpha} f(x) dx$$

donde α describe diferentes actitudes hacia el riesgo. Las medidas de riesgo siguientes son partes de la familia de Fishburn.

3.6.1.1 Medida de Riesgo . Seguridad Primera de Roy (Safety First) (Fishburn $\alpha \rightarrow 0$)

La medida Safety First de Roy es definida por la probabilidad de estar por debajo de un punto de referencia t . Roy usa la desigualdad de Chebyshev para aproximar la probabilidad de estar por debajo de t por su límite superior $\sigma^2 / (\mu - t)^2$ donde μ y σ son las ganancias o retornos esperados y la desviación estándar respectivamente. Minimizar este límite superior es equivalente al maximizar la pendiente $(\mu - t) / \sigma$.

De acuerdo a Fishburn y Bawa el criterio de medida Safety First de Roy, protege todas las alternativas que son inferiores según la regla FSD. Arzac y Bawa se basan en esta característica para desarrollar un modelo de equilibrio de precios. Sin embargo, el criterio de medida Safety First de Roy no puede proteger las alternativas que son inferiores para todos los individuos adversos al riesgo. Además, la deficiencia principal de SF es que esto mide el riesgo sólo en términos de probabilidad, mientras se ignora totalmente el tamaño de la pérdida.

3.6.1.2 Medida de Riesgo de Domar y Musgrave (Fishburn $\alpha = 1$)

La medida de riesgo de *Domar y Musgrave* (DM) es en realidad una variación simple de AvaR_t , y es definida por

$$DM = \int_{-\infty}^t (x - t) f(x) dx \quad (3.16)$$

Segun Fishburn y similar al AvaR_t , el conjunto eficiente de medida-DM es un subconjunto del conjunto eficiente SSD. Sin embargo, la integración usando AvaR_t aumenta a una probabilidad dada \hat{P} , usando la medida de riesgo de DM implica una comparación de dos perspectivas sobre rangos de diferentes probabilidades.

3.6.1.3 Medida de Riesgo de Semi-Varianza de Markowitz (Fishburn $\alpha = 2$)

El punto de referencia constante de Semi Varianza (SV) de Markowitz es definido como

$$SV = \int_{-\infty}^t f(x)(x - t)^2 dx \quad (3.17)$$

SV tiene varios rasgos atractivos. El modelo SV de Markowitz se puede extender y demostrar que el correspondiente criterio de medida SV es compatible con la percepción de los administradores de riesgo.

OBSERVACIONES:

- Hogan y Warren desarrollan un algoritmo de optimización práctico para el criterio de medida SV.

- Porter mostró que el conjunto eficiente de medida SV es un subconjunto del conjunto eficiente SSD. El análisis de Porter es extendido por Bawa por la regla TSD y generalizado por Fishburn para las medidas de riesgo $\alpha - t$.
- Bey mostró que el criterio de medida SV identifica una parte substancial del conjunto eficiente de la dominancia estocástica tanto para la regla TSD como para la regla SSD.

Sin embargo, según Fishburn “no existe una razón a priori para tomar $\alpha = 2$ ”.

Además, como Bawa notó, el criterio de medida SV no es óptimo para funciones de utilidad DARA.

3.6.1.4 El escenario del peor caso (WCS) ($\alpha \rightarrow \infty$)

Es un caso especial en el que VaR, AvaR, AAVaR y las medidas de riesgo de Fishburn se traslapan al escenario del peor caso, la cual pueden ser escrita aproximadamente como $WCS = t - X(0)$. La principal deficiencia de este criterio es su tendencia de proteger las alternativas que pueden ser óptimas para algunos inversionistas con α finito.

3.7 La Medida de Riesgo de Baumol

Otra muy conocida medida de riesgo es la medida de Baumol la cual está dada por el rendimiento esperado menos k veces la desviación estándar, $\mu - k\sigma$. El parámetro k es un número arbitrario, la cual se supone, que refleja el nivel subjetivo de aversión al riesgo.

Entre más grande es k más grande es este nivel. El conjunto eficiente de la medida de Baumol es un subconjunto del conjunto eficiente de la desviación media estándar. Entre más grande es k (más pequeña) más grande (más pequeño) es el conjunto eficiente de Baumol. Para k suficientemente grande ($k \rightarrow \infty$) el conjunto de Baumol es idéntico al conjunto de desviación media estándar. La neutralidad del riesgo se asume cuando $k = 0$ y el conjunto eficiente sólo incluyen una alternativa con retorno esperado más alto.

En el caso de distribución normal el conjunto eficiente de la desviación estándar media es óptimo. Así el conjunto más pequeño de Baumol puede no incluir algunas inversiones óptimas de la desviación estándar para algunos inversionistas adversos al riesgo.

3.8 *Medidas del Riesgo VaR.*

Las medidas $\alpha - t$ de Fishburn y los momentos parciales inferiores de Bawa ponderan todos los resultados por debajo de un punto de referencia fijo. La medida de VaR también considera el riesgo por debajo de un punto de referencia fijo, sin embargo, en el caso del VaR el riesgo es medido sólo en términos de pérdidas que tiene un intervalo de confianza de $1 - \hat{P}$. Así, a diferencia de las medidas de Fishburn y los momentos parciales inferiores, el VaR ignora totalmente pérdidas potenciales altas en intervalos de confianza altos o mayores. En este sentido el VaR considera el riesgo como una pérdida potencial con una probabilidad acumulativa de ocurrencia de P , a la vez que ignora tanto las pérdidas potencialmente altas como también las bajas. En contraste, el AvaR también ponderan pérdidas grandes con un nivel de confianza de $1 - \hat{P}$ pero ignora pérdidas

pequeñas debido a resultados por debajo del punto de referencia con un intervalo de confianza menor que $1 - \hat{P}$. Así, el AvaR puede ser visto como la pérdida esperada que puede ocurrir con un intervalo de confianza mayor que $1 - \hat{P}$, donde la pérdida es medida por la diferencia de los resultados desde el punto de referencia t . Este enfoque se adecua al punto de vista del regulador quien asegura grandes pérdidas mientras asume que pequeñas pérdidas son auto-aseguradas por los prestamistas.

En la tabla 1, al final del capítulo, presentamos la expresión matemática de cada medida, se discute las principales propiedades y resume las principales diferencias entre las medidas. Uno puede notar de la discusión previa que, de una u otra manera, todas las medidas de riesgo, incluyendo la familia VaR , no son necesariamente consistente con la teoría de utilidad esperada de Von Neuman y Morgenstern (V - M).

3.9. Medidas de VaR y la Teoría de Utilidad

En la siguiente sección, investigamos más a fondo la relación entre la medida del VaR y el modelo utilidad lexicográfica esperada. Probaremos que el criterio de medida VaR_t no puede ajustarse a funciones de utilidad aceptables bajo el análisis de utilidad esperada, mientras que el análisis de la medida AvaR_t puede ser optimal para funciones de utilidad aceptable.

Sin embargo, tanto el criterio de medida AvaR_t como el criterio de medida VaR_t pueden ser óptimo para funciones de utilidad lexicográfica simple, además, extendemos el análisis de congruencia de la utilidad esperada de Fishburn al VaR . Alternativamente, el VaR puede ser considerado como un objetivo prioritario impuesto ya sea directamente

por los accionistas o directamente por el regulador quien representa los depósitos de las instituciones financieras. Una función de utilidad lexicográfica es consistente con el análisis de restricción del VaR.

3.9.1 Congruencia de la Medida del VaR con la utilidad esperada

Una congruencia de un criterio de riesgo con la utilidad esperada existe si y sólo si

$$X \underset{\text{medida de riesgo}}{D} Y \Leftrightarrow E(U(X)) > E(U(Y)) \quad (3.18)$$

donde $E(U(X))$ y $E(U(Y))$ son las utilidades esperadas de X e Y respectivamente. Fishburn muestra que su criterio de riesgo $\alpha - t$ es congruente con la utilidad esperada para la siguiente familia de funciones de utilidad

$$U_{\alpha-t}(X) = X - \begin{cases} K(t-X)^\alpha & X \leq t \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \quad (3.19)$$

donde $\alpha, k > 0$

El $U_{\alpha-t}$ es lineal para las X 's por arriba de t . La forma de $U_{\alpha-t}$ por debajo de t difiere según el valor de α . (Como Fishburn menciona existe un soporte mezclado en la literatura para este tipo de función de utilidad). Más aún, aunque ésta función de utilidad puede exhibir alguna versión del riesgo en lo pequeño por debajo de t y aversión al riesgo en lo grande, como Bawa notó, ciertamente una tal función no garantiza DARA en algunos rangos. En el análisis siguiente, probamos que para función de distribución general el criterio de medida VaR_t es congruente con la teoría de utilidad esperada sólo para

funciones de utilidad que violan el axioma de racionalidad básica de (V - M), mientras que AvaR_t no sufre de tal problema

Teorema 7 (El criterio de Medida- VaR_t congruente con la teoría de utilidad esperada, para cada función de distribución y solamente para la función de utilidad dada)

Sea la función de utilidad definida de la siguiente manera

$$U_{\text{medida-VaR}_t}(X) = X - k(t - X)\delta(X - X(\hat{P})) \quad (3.20)$$

con $k > 0$ y $\delta(t)$ la función de impulso definida por

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \quad (3.21)$$

Prueba:

Integrando $U_{\text{medida-VaR}_t}$ de (3.20) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} U(X)f(X)dX &= \int_{-\infty}^{\infty} Xf(X)dX - k \int_{-\infty}^{\infty} (t - X)\delta(X - X(\hat{P}))dX \\ &= \mu_X - k(t - X(P)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Así

$$\left(X \underset{\text{medida-VaR}_t}{D} Y \right) \Leftrightarrow \mu_X - k\text{VaR}_t(X) \geq \mu_Y - k\text{VaR}_t(Y) \quad (3.23)$$

El valor esperado de $U_{\text{medida-VaR}_t}$ es simplemente la media menos $k\text{VaR}_t$. El lado izquierdo de la figura 3.7 presenta $U_{\text{medida-VaR}_t}$ como también la función de utilidad de Fishburn, para $k = 1$ y $\alpha = 1$. De modo similar a la función de utilidad de Fishburn, $U_{\text{medida-VaR}_t}$ es una función neutral por encima de t . En contraste con la utilidad de

Fishburn, $U_{medida-VaR}$, es la función neutral de riesgo por debajo de la t excepto para un punto de discontinuidad en el valor de la $\hat{X}(\hat{P})$ en la cual el incremento en X disminuye la utilidad

Resumiendo, el corolario principal del análisis del VaR es que, además del caso de la función de utilidad irracional, en el caso del lado izquierdo de la figura 3.7 y como en el caso de la distribución normal, el criterio la medida VaR_t puede proteger las alternativas que son superiores para algunos o para todos los individuos aversos al riesgo. Esta deficiencia se añade a su incapacidad de identificar la dominancia para todos los individuos aversos al riesgo. Así, como el caso de la distribución normal, el criterio de medida VaR_t no puede ser justificado sobre las bases de la teoría de utilidad esperada.

Basak y Shapiro y Kroll y Kaplanski ya habían notado que el uso del VaR para regular la compañía puede crear costos de agencias. Otro aspecto de costos de agencias es que la minimización del VaR es consistente con la maximización irracional de la utilidad esperada.

En el siguiente teorema probamos que este problema es parcialmente resuelto usando $AVaR_t$ en vez de VaR_t como la medida de riesgo.

Teorema 8 (El criterio de medida $AVaR_t$ es congruente con la teoría de utilidad esperada para la función de utilidad dada)

$$U_{medida-AVaR}(X) = X - \begin{cases} K(t-X) & \text{si } X \leq \hat{X}(\hat{P}) \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \quad (3.24)$$

Prueba:

Integrando $U_{medida-AVaR_t}$ de (3 24) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} U(X) f(X) dX &= \int_{-\infty}^{\infty} X f(X) dX - k \int_{-\infty}^{X(\hat{p})} (t - X) dX \\ &= \mu_X - k \int_{-\infty}^{X(\hat{p})} (t - X) dX \end{aligned} \quad (3 25)$$

Así

$$\left(X \underset{\text{medida-AVaR}_t}{D} Y \right) \Leftrightarrow \mu_X - kAVaR_t(X) \geq \mu_Y - kAVaR_t(Y) \quad (3 26)$$

El lado derecho de la figura 3 7 presenta $U_{medida-VaR_t}$, como también la función de utilidad $U_{\alpha-t}$ de Fishburn con $k = 1$ y $\alpha = 1$

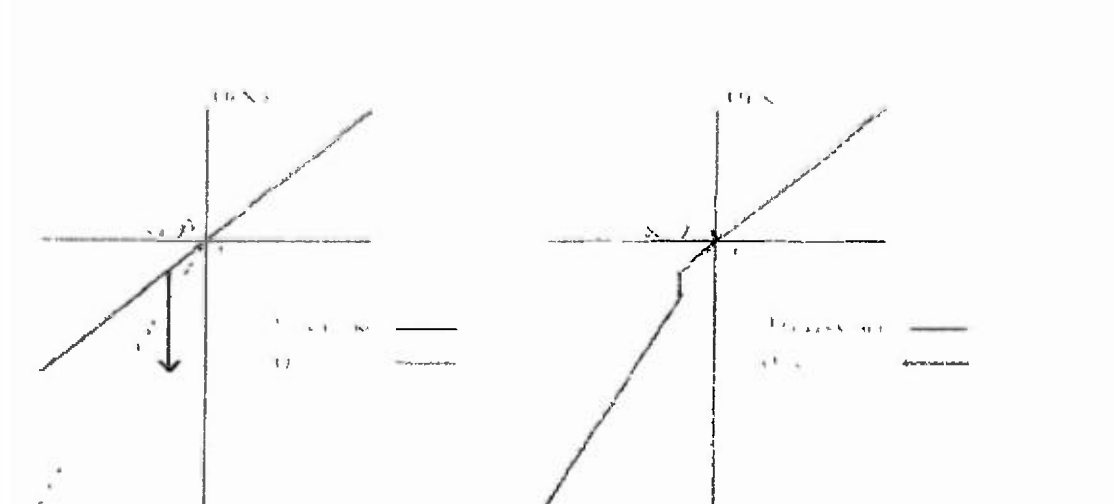


Figura 3.7 Comparación de las medidas de Fishburn U_{a-t} con $U_{medida-VaR_t}$ y $U_{medida-AVaR_t}$

Correspondiente con la función de utilidad de Fishburn, $U_{medida-VaR_t}$ es un riesgo neutral en lo pequeño por encima del punto de referencia y muestra una aversión al riesgo local por debajo del punto t de referencia. El punto de referencia $X(\hat{P})$ de $U_{medida-VaR_t}$ tiene un salto en la utilidad en el valor para la cual existe una probabilidad de \hat{P} de estar por debajo de este punto.

3.9.2 El enfoque de la utilidad esperada lexicográfica

Hasta ahora hemos concluido que la medida de riesgo por debajo de un punto de referencia pueden ser inconsistente con la teoría de utilidad de V - M. Una posible explicación conductual de esta inconsistencia puede ser que lo inferior como referencia de riesgo es una especie “de riesgo de supervivencia”, pero no es la única componente del riesgo. La segunda componente puede ser llamada “el riesgo de volatilidad convencional” que trata con las variaciones que no pueden afectar la supervivencia que alternativamente no generan gastos suplementarios los cuales han sido previamente discutidos. Estas son las variaciones, que no afectan la probabilidad de estar debajo del punto de referencia. Sólo el enfoque de Dominancia Estocástica considera estos tipos de riesgo coherentemente con la teoría de utilidad esperada.

En el siguiente enfoque extendemos la teoría de utilidad esperada de V - M asumiendo una actitud diferente hacia los dos tipos de riesgo: el riesgo de supervivencia y

de volatilidad Este enfoque es equivalente asumir una función de utilidad esperada multivariada

A lo largo de este enfoque, imponemos preferencias jerárquicas entre evitar un desastre o supervivencia y obtener medidas de riesgo de compensación en la manera tradicional En otras palabras, el propósito de maximización la riqueza es secundario al objetivo de eliminar, o al menos disminuir hasta una probabilidad razonable, la probabilidad de desastre

Esta preferencia jerárquica puede ser expresada cuantitativamente en términos del modelo de utilidad esperada lexicográfica que fue introducida por Hausner Chipman y Fishburn y extendido por Lavalley y Fishburn

La hipótesis básica del modelo lexicográfico de la teoría de utilidad esperada es que un vector lexicográficamente ordenado de una función de utilidad multidimensional preserva el orden de las preferencias de los individuos

Según Fishburn el orden lexicográfico $<^L$ es definido como sigue

Para vectores reales $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ y $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, $X <^L Y$ si y sólo si solamente si $X \neq Y$ y $X_k < Y_k$ para el menor k

El sentido de esta definición es que para distintas variantes que están organizadas lexicográficamente en orden decreciente, una alternativa es preferida sobre la otra si, y sólo si, la primera variante más importante de una alternativa es preferida sobre la variante equivalente de la otra alternativa

En el siguiente ejemplo, presentamos una aplicación simple del modelo Considere la función de utilidad bidimensional $U(X) = [S(X), U(W(X))]$ La primera componente

$S(X) = \text{Min} [0, (\text{VaR}_{\text{crítico}} - \text{VaR}(X))]$ representa el objetivo de supervivencia y el segundo objetivo $U(W(X))$, representa la muy conocida maximización de utilidad de V - M o maximización de la riqueza

El valor crítico, $\text{VaR}_{\text{crítico}}$ es el nivel de desastre para la cual la \hat{p} es la probabilidad más alta soportable de tener pérdidas mayores que éstas. Una vez el objetivo de supervivencia es satisfecho, la compañía comienza a lograr el segundo objetivo de utilidad esperada. En cuanto el objetivo de supervivencia no ha sido logrado, solamente el riesgo de supervivencia determina la decisión. El parámetro $\text{VaR}_{\text{crítico}}$ incluye tanto el valor de pérdida como el intervalo de confianza requerido $1 - \hat{p}$. Entre más grande es el $\text{VaR}_{\text{crítico}}$ más débil es el factor del riesgo de supervivencia. Para $\text{VaR}_{\text{crítico}}$ tendiendo a infinito regresamos al marco usual de utilidad esperada unidimensional. En este modelo dividimos el riesgo en dos elementos separados. Así, el elemento de supervivencia de riesgo domina lexicográficamente todos los otros aspectos de las distribuciones, las cuales pueden ser todavía expresado en términos de la teoría de utilidad esperada de V - M. Por lo tanto, nuestro enfoque de utilidad esperada lexicográfica propuesta se adapta a las teorías conductuales basadas en el proceso de toma de decisiones de la empresa. Sobre la base conductual, este enfoque es compatible con la actitud diferencial del individuo hacia varios niveles de pérdida que podría ser debido a la escala diferencial de daño o debido a algún patrón de comportamiento basado positivamente. Esto es también consistente con el análisis que explica la selección tanto de boletos de lotería como del seguro por el mismo individuo con percepción diferente de riesgo bajo niveles de riqueza altos y bajos.

En consecuencia en este modelo la compra de seguro está comprometido a reducir el elemento de riesgo de supervivencia, mientras la compra de boletos de lotería implica sólo el segundo elemento de maximización de la riqueza. Del punto de vista de la compañía, los parámetros $VaR_{critical}$ pueden ser auto impuestos por los reguladores o prestamistas. En el caso de una compañía regulada con un $VaR_{critical}$ impuesto, el regulador conduce a los gerentes o administradores a tomar decisiones como si ellos poseyeran un factor de riesgo de supervivencia como el primer factor en una utilidad lexicográfica.

Otro argumento para el uso de un enfoque de utilidad lexicográfica para la compañía se deriva de los diferentes niveles de exposición al riesgo afrontados por inversionistas, según la procedencia legal de sus reclamaciones sobre los flujos futuros de efectivo de la compañía. Además, los conflictos de la compañía entre varios tipos de inversionistas y gerentes también tienden a terminar en actitudes diferentes hacia el riesgo.

**RESUMEN DE LAS MEDIDAS MÁS CONOCIDAS DE RIESGO, SU PRINCIPAL
DESVENTAJA Y LAS RELACIONES EN EL CASO GENERAL ENTRE EL
CRITERIO DE RIESGO MEDIO USANDO ESTAS MEDIDAS DE RIESGO Y EL
ENFOQUE DE DOMINANCIA ESTOCÁSTICA.**

Tipo de Medida		Índice	Elementos arbitrarios	Principal desventaja	*SD⇒riesgo-medio	
Dispersión de Probabilidad		$SD = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(x - \mu_X)^2 dx}$	•	Cuentas positivas para la dispersión	Ninguna	
		Entropía = $-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(x) dx$	•		Ninguna	
		Desviación Absoluta $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln x - \mu_X dx$	•		Ninguna	
		Gini = $\frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b R - r f(R) dr dR$	•		•	SSD
		Co-varianción = σ / μ				Ninguna
Probabilidad de dispersión por debajo de un objetivo	Fishburn = $\int_{-\infty}^t (t-x)^\alpha dF(x)$	$\alpha \rightarrow 0$	Roy = $P(X \leq t) \leq \sigma^2 / (\mu - t)^2$	t	Ignora el tamaño de la pérdida	FSD
		$\alpha = 1$	D&M = $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-t) f(x) dx$	t	Prospecto sobre un cambio de rango de probabilidades	SSD
		$\alpha = 2$	Semi-Varianza = $\int_{-\infty}^t (x-t)^2 f(x) dx$	t		TSD
		$\alpha \rightarrow \infty$	WCS = $t - Q(t)$	t	Ignora $0 < P \leq \hat{P}$	TSD
	VaR		$VaR_t = t - Q(\hat{P})$	\hat{P}, t	Ignora $P < \hat{P}$	FSD
			$VaR_c = E(x) - Q(\hat{P})$	\hat{P}, t		Ninguna
			$AVaR = \int_0^P VaR(p) dp$	\hat{P}, t	•	SSD
	Baumol		Baumol = $\mu - k\sigma$	k	Ignora $X < \mu - k\sigma$	ninguna

APÉNDICE A

Teoría de Utilidad

La teoría de la Probabilidad puede cuantificar el riesgo de un inversionista. Sin embargo, este procedimiento muchas veces no es posible, y se recurre a la Teoría de Utilidad, la cual permite describir numéricamente la actitud de un inversionista hacia el riesgo. Esta actitud comprende las ideas de ser adverso o preferente al riesgo. Algunos autores de la teoría económica definen la utilidad como el número usado por el decisor para medir el valor de los pagos monetarios con varios grados de riesgo. El concepto desarrollado por esta teoría, generó la construcción de una teoría del comportamiento racional, ya que su afán por comprender y manejar las decisiones bajo riesgo, conlleva a evaluar lo atractivo de cualquier transacción riesgosa, asignando a dicha transacción la utilidad de su equivalente certeza. La utilidad de esta equivalencia se calcula tomando un promedio de pesos de las utilidades resultantes posibles, con las probabilidades usadas como peso.

Para eso debe elaborarse, por parte del decisor, una función de utilidad, la cual debe reflejar las preferencias de un inversionista hacia el riesgo. Dicha función asigna un número a cada resultado posible de un evento incierto. El número asignado por una función de utilidad puede interpretarse como un índice de satisfacción relativa que obtendría el individuo si en efecto ocurriera tal resultado.

Por otro lado, la teoría moderna de la utilidad, reconoce que las consecuencias monetarias pueden tener una *utilidad* diferente según el decisor y la situación concreta de la que se trate

La teoría de utilidad, bajo ciertos supuestos razonables, establece que la función de utilidad de un individuo posee las siguientes propiedades

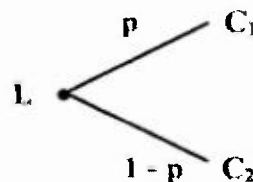
a Si un resultado A es preferido a un resultado B, entonces la utilidad de A, esta dada por $U(A)$, es mayor que la utilidad de B, $U(B)$, ($U(A) > U(B)$)

Lo contrario también se cumple

b Si un individuo posee una Lotería L que conduce a una ganancia B con probabilidad de $1-p$, la utilidad de dicho boleto, $U(L)$, puede ser calculada de acuerdo a la siguiente fórmula

$$U(L) = p U(A) + (1-p) U(B)$$

Se define como lotería (L) al proceso en el cual se presenta la consecuencia C_1 con probabilidad de ocurrencia p y el evento C_2 con probabilidad de ocurrencia $1 - p$, y se denota por



De acuerdo a lo anterior, debemos destacar que la propiedad (a) establece que la utilidad disminuye o aumenta en la medida que un resultado llegue a ser más o menos atractivo. En lo que se refiere al punto (b), se establece que la utilidad de un boleto de

lotería es simplemente un promedio de los pesos de las utilidades de los pagos, con probabilidades usadas como pesos. Cuando diferentes actos prometen diferentes conjuntos de resultados inciertos, la política sería óptima si elegimos el que maximice la utilidad esperada del decisor.

En el caso que se hable de la función de utilidad de un individuo, es porque la misma debe reflejar de manera razonable las actitudes del individuo hacia el riesgo. Generalmente, dicha función de utilidad es usada para tomar decisiones que involucran riesgos para el individuo una vez que ha sido obtenida. Si se da el caso que el individuo toma sus propias decisiones, no es necesario que se determine su función de utilidad por parte del decisor.

Otra posición con respecto al concepto de utilidad es aquella que relaciona la función de utilidad de un decisor frente a las preferencias de un riesgo-rendimiento riesgo. Las funciones de utilidades, por lo tanto, pueden elaborarse para cada decisor partiendo de cada una de sus preferencias. Un ejemplo de estas funciones, son las llamadas curvas de indiferencia, las cuales relacionan la tasa de rendimiento esperado y el riesgo aceptado.

El aspecto más relevante en esta técnica es la función de utilidad $U(X)$, de la que se obtiene el valor promedio asociado a cada alternativa para seleccionar de entre ellos aquella estrategia que da la mayor utilidad promedio $U^*(X)$. La función de utilidad contiene de hecho una fotografía idónea al proceso del decisor, pues ella proporciona cuál es la actitud ante el riesgo en lugar de sus características físicas. A la vez señala, si la persona está dispuesta a invertir en proyectos que pueden involucrar pérdidas, o si por el contrario tiende más hacia aquellos eventos que no tienen posibilidad de pérdida, aún cuando involucren menor ganancia que la esperada. Así, la función de utilidad es una

función general que involucra aspectos personales del decisor, características propias que podrían tomarse en cuenta no únicamente en el proceso de invertir sino además aspectos que él capta en el medio ambiente, su experiencia propia, su cultura y el estilo de vida. Todo esto influye en el decisor al responder las preguntas necesarias para diseñar su función de utilidad. De ésta se sabe entonces si el decisor tiene aversión al riesgo, propensión al riesgo o indiferencia a éste.

APÉNDICE B

En éste apéndice resumimos las ideas centrales sobre Dominancia Estocástica, con el fin de ofrecer una referencia inmediata del tema.

Dominancia Estocástica

Hasta ahora se evaluaron medidas de aversión al riesgo en donde sólo existen dos activos: uno riesgoso y otro libre de riesgo. En éste caso sólo se asume la existencia de dos activos riesgosos.

A continuación presentamos distintos criterios basados en las propiedades estocásticas de los retornos (o de las funciones de probabilidad de los retornos) que le aseguren a la empresa o individuo que elige un activo sobre el otro, que ese activo tenga la mayor utilidad esperada. Los criterios de comparación que se analizan en esta sección se conocen como Dominancia Estocástica de Primer orden, de segundo orden y de tercer

orden Estos criterios están relacionados con a) nivel del retorno y b) la dispersión del retorno

Un activo se dice que es dominante desde el punto de vista estocástico si el individuo recibe mayor riqueza de este activo para todo estado ordenado de la naturaleza

Denotemos F y G las distribuciones acumuladas (funciones de probabilidad) de los activos X e Y, sin pérdidas de generalidad suponemos el intervalo de los retornos es [0,1]

Así

$$F(v) = P(r_X \leq v) = \int_0^v f(z) dz$$

y

$$G(v) = P(r_Y \leq v) = \int_0^v g(z) dz$$

La Dominancia Estocástica se caracteriza como una serie de criterios mínimos sobre las propiedades estocásticas de los retornos que nos aseguren que

$$E_F(U(r_X)) > E_G(U(r_Y))$$

En todo caso, se tratan sólo aquellos conceptos que consideramos absolutamente necesarios

Es decir, X domina a Y si para toda función creciente $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se cumple:

$$\int_0^1 U(v) dF(v) \geq \int_0^1 U(v) dG(v)$$

1.1 Dominancia Estocástica de Primer Orden.

La Dominancia Estocástica de primer orden posee una regla para clasificar activos de modo consistente para individuos que prefieren más riqueza a menos riqueza. Esto implica que $U' > 0$

Definición 1 El activo X domina estocasticamente de primer orden al activo Y (y se denota $X \underset{FSD}{D} Y$ SI $G(v) \geq F(v)$)

Dado que F y G son las funciones de distribución acumuladas de los retornos de los activos X e Y, esta definición nos dice que el individuo prefiere más a menos riqueza. Esto se debe a que (para el dominio de los retornos de los activos X e Y) al ser $G(v) \geq F(v)$ para valores bajos de los retornos, el activo Y tiene asignada una cantidad mayor de probabilidad que el activo X. Esto a su vez implica que la media de los retornos del activo X es mayor que la del activo Y.

Proposición Si $G(v) \geq F(v)$ entonces, $E_F(U(r_X)) > E_G(U(r_Y))$, o sea

$$\int_0^1 U(v) dF(v) \geq \int_0^1 U(v) dG(v)$$

Demostración

De la hipótesis se deduce

$$\int_0^1 G(v) - F(v) U'(v) dv \geq 0$$

que se puede escribir

$$-\int_0^1 F(v) dU(v) dv \geq -\int_0^1 G(v) dU(v)$$

Usando el hecho de que $F(1) = G(1)$ obtenemos

$$U(v) F(v) \Big|_0^1 - \int_0^1 F(v) dU(v) \geq U(v) G(v) \Big|_0^1 - \int_0^1 G(v) dU(v)$$

y por integración por partes la desigualdad de la proposición se cumple

1.1.1 Congruencias de Dominancia Estocástica de primer orden

Una consecuencia de dominancia estocástica de primer orden es que si $X \overset{D}{FSD} Y$

podemos expresar el retorno del activo dominante X como la suma de el retorno del activo Y más una variable aleatoria positiva, ε , $r_X = r_Y + \varepsilon$, donde ε representa la variable aleatoria positiva. Esta relación se cumple ya que

$$E(u(r_X)) - E(u(r_Y + \varepsilon)) \geq E(u(r_Y)), \text{ entonces}$$

$$E(u(r_X)) \geq E(u(r_Y)),$$

Por otra parte es fácil ver que, tomando el valor esperado en ambos lados de la ecuación,

$$E(r_X) \geq E(r_Y)$$

1.2 Dominancia Estocástica de Segundo Orden.

Dominancia Estocástica de segundo orden clasifica a todos los individuos que

- 1) Prefieren más a menos riqueza ($U'' > 0$)

ii) Son adversos o neutrales al riesgo ($U'' \leq 0$)

La segunda regla de Dominancia Estocástica SSD es un criterio óptimo para todos los individuos racionales adversos al riesgo que maximizan su utilidad esperada, donde adverso al riesgo es definido por una función de utilidad marginal no creciente. Según la regla SSD

$$X \underset{SSD}{D} Y \Leftrightarrow y' \int_0^x F(t) dt \leq \int_0^x G(t) dt \text{ para toda } x$$

1.2.1 Congruencias de Dominancia Estocástica de segundo orden

Stiglitz (1970) demuestra que $X \underset{SSD}{D} Y$ si y sólo si $r_Y = r_X + \varepsilon \Leftrightarrow E(\varepsilon | r_X) = 0$

Es decir, el retorno del activo Y es igual al retorno del activo X más una variable aleatoria ortogonal del retorno X. Note que r_Y y r_X tienen igual media, pero el retorno del activo Y tienen mayor varianza y por lo tanto el activo es más riesgoso.

1.3 Dominancia Estocástica de Tercer Orden

La tercera regla de Dominancia Estocástica TSD es un criterio óptimo para todos los individuos racionales adversos al riesgo con una tercera derivativa positiva de función de utilidad que maximizan utilidades esperadas. Según la regla

$$X \underset{TSD}{D} Y \Leftrightarrow \mu_X \geq \mu_Y \text{ y } \int_0^x \int_0^t F(v) dv dt \leq \int_0^x \int_0^t G(v) dv dt \text{ para toda } x$$

ÍNDICE DE ECUACIONES

A continuación, se presentan las ecuaciones empleadas en el Capítulo III algunas de ellas son el resultado de las demostraciones de los teoremas que aparecen el mismo

	ECUACIÓN	Página
1)	$VaR(\hat{P}) = \eta(F(X)) - X(P)$	97
2)	$AVaR_t(\hat{P}) = \int_0^{\hat{P}} VaR_t(P) dP$	103
3)	$AVaR_t(X) = AVaR_t(Y) = (t-10)\hat{P}$	104
4)	$AAVaR_t(\hat{P}) = \int_0^{\hat{P}} AVaR_t(P) dP$	106
5)	$X(\hat{P}) = \mu + \sigma(Z(\hat{P}))$	108
6)	$\sigma = (X(\hat{P}) - \mu) / Z(\hat{P}) = -VaR_e(t) / Z(\hat{P})$	108
7)	$VaR_e = VaR_t + \mu - t$	109
8)	$Z_X = \log(X)$ y $Z_Y = \log(Y)$	111
9)	$X(\hat{P}) = t - VaR_t = e^{(\hat{\mu} + \hat{\sigma}Z(\hat{P}))}$	112
10)	$\mu = e^{\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\right)}$	112
11)	$\hat{\mu} = \ln(t - VaR_t) - Z(\hat{P})\hat{\sigma}$	112
12)	$VaR(X) = t - X(\hat{P})$	113

- 13) $\text{VaR}(Y) = t - X(\hat{P})$ 113
- 14) $\sigma_X = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - \mu)^2 dx}$ 115
- 15) $H = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln(f(x)) dx$ 116
- 16) $AD = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |x - \mu_X| dx$ 116
- 17) $\Gamma = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b |X - x| f(X) f(x) dX dx$ 117
- 18) $\Gamma(u) = \mu_X - a - \int_a^b [1 - F(X)]^u dX$ 117
- 19) $DM = \int_{-\infty}^t (x - t) f(x) dx$ 120
- 20) $SV = \int_{-\infty}^t f(x)(x - t)^2 dx$ 120
- 21) $U_{\alpha - t}(X) = X - \begin{cases} K(t - X)^\alpha & X \leq t \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ 124
- donde $\alpha, k > 0$
- 22) $U_{media VaR_t}(X) = X - k(t - X) \delta(X - X(\hat{P}))$ 124
- 23) $\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ 125

$$24) \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} U(X)f(X)dX = \int_{-\infty}^{\infty} Xf(X)dX - k \int_{-\infty}^{\infty} (t-X)\delta(X-X(\hat{P}))dX \\ = \mu_X - k(t-X(\hat{P})) \end{cases} \quad 125$$

$$25) U_{medida-AVaR}(X) = X - \begin{cases} K(t-X) & \text{si } X \leq X(\hat{P}) \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \quad 126$$

$$26) \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} U(X)f(X)dX = \int_{-\infty}^{\infty} Xf(X)dX - k \int_{-\infty}^{\lambda(\hat{P})} (t-X)dX \\ = \mu_X - k \int_{\lambda(\hat{P})}^{\infty} (t-X)dX \end{cases} \quad 127$$

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Página
1 1 Marco referencial sobre el desarrollo de un proyecto de inversión	10
1 2 Diagrama de flujos de efectivo de un proyecto de inversión	15
1 3 Matriz de decisión de los 3 elementos del problema de decisión	18
1 4 Escala de los grados de dependencia de los proyectos de inversión	51
2 1 Gráfica de la curvatura de líneas de iso-utilidad	77
2 2 Curvas de indiferencia sobre las preferencias del inversionista	78
2 3 Punto de tangencia para calcular la cartera óptima	80
2 4 La cartera óptima	81
3 1 Proceso de la administración estratégica del riesgo	89
3 2 Representación gráfica del concepto de valor en riesgo	91
3 3 Valor en riesgo (VaR)	92
3 4 Proceso del cálculo del valor en riesgo	97
3 5 El VaR acumulado	103
3 6 La distribución log-normal	111
3 7 Una comparación de las medidas de Fishburn's $U_{\alpha-t}$ con $U_{medida VaR_t}$ y $U_{medida AVaR_t}$	127

CONCLUSIONES

Luego de hacer un estudio de los diferentes capítulos de este trabajo, deseamos presentarles las siguientes conclusiones a las que hemos llegado para someterlo a vuestra consideración

- * Para un problema de decisión se requiere determinar las estrategias o cursos de acción y compararlas entre las diferentes alternativas o proyectos de inversión de acuerdo a los criterios establecidos, con el fin de invertir en aquel proyecto que proporcione los mejores beneficios o utilidades
- * Puede esperarse que una buena decisión será de gran ayuda para el decisor en sus políticas de acción dentro de una empresa con el fin de lograr los objetivos trazados
- * Las distribuciones de las funciones de utilidades se presentan como una función normal y log-normal, las cuales tienen la principal característica de capturar la esencia de las preferencias del inversionista
- * El punto de tangencia, que identifica al inversionista con mayor rendimiento esperado, es único
- * Las medidas de riesgo VaR son una ligera variación o casos específicos de algunas medidas tradicionales que consideran el riesgo en términos de los resultados por debajo de un punto de referencia
- * En el caso de medida VaR, a menos que asumamos normalidad o log-normalidad, la congruencia con la teoría de utilidad esperada se obtiene sólo para funciones de utilidad irracional
- * En el caso de la distribución normal, el criterio de medida VaR no puede justificarse sobre las bases de la teoría de utilidad esperada, lo que no es el caso de la distribución log-normal

- * Para distribuciones normales, el criterio de medida AVaR es un criterio óptimo bajo cualquier función de utilidad racional o para cualquier función de distribución cuando se consideran funciones de utilidad que tienen un salto en un punto umbral crítico, el cual refleja el costo extra que debe existir debajo de este punto de referencia

- * El criterio de medida VaR_t es óptimo en el caso normal, y en su variación log-normal. Además, el criterio de medida VaR_t identifica alternativas inferiores según la regla FSD. Mientras que el criterio de desviación estándar media no puede garantizar esta propiedad, por esta razón podemos considerar el criterio de medida VaR_t superior al criterio de desviación estándar.

RECOMENDACIONES

Al culminar la elaboración de este trabajo, hemos considerado pertinente presentar las siguientes recomendaciones

- Las técnicas como la simulación de Monte Carlo, Testing Test, CAPM, la Frontera Eficiente, Tracking Error, Análisis del Retorno Total y otros, permite profundizar en otros ámbitos dentro de la Administración del Riesgo como un proceso operativo, áreas que consideramos de importantes trabajos de investigación y aplicación
- Considerar la posibilidad de tratar temas afines para la discusión en seminarios de las Maestrías Profesionales y trabajos de graduación, pues los mismos se caracterizan por el uso de métodos y herramientas matemáticas que ponen de manifiesto la importancia y aplicabilidad de la misma
- El tema tratado en esta tesis de Maestría en Investigaciones de Operaciones, permite dar pautas a seguir para que la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología a través de los Departamentos de Estadística y Matemática, permita integrar grupos interdisciplinarios con académicos y profesionales de las ciencias económicas y financieras, con la finalidad de ampliar el campo de actividades de ambos departamentos, y contribuir así al reconocimiento social de la Matemática
- La investigación en este trabajo de tesis me permitió observar que los cursos de Investigación de Operaciones son generalmente impartidos bajo un enfoque estrictamente teórico, dejando de lado los aspectos sociales, económicos y filosóficos. En consecuencia, creemos prudente incluir aspectos históricos en el desarrollo de tales cursos
- Por la importancia en la economía nacional creemos conveniente, incluir estos contenidos tanto en la formación en el nivel de Licenciatura como la capacitación a nivel de post-grado

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

AHARONI, Yair (1986) "The Foreign Investment Decision Process" Harvard University Boston U S A 3ª edición 380 págs

ANDREW, Johnson Christian (Marzo 2000). "Métodos de Evaluación del Riesgo para portafolios de inversión" Documento del Banco Central de Chile N° 67 Chile 39 págs

ARZAC, E y BAWA, V (1977) "Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety-First Investors" Journal of Financial Economics. N° 4 277-288 págs

AVINASH K, Dixit y PINDYCK, Robert (1994) "Investment under uncertainty Editorial Princeton University Press, New Jersey U S A 455 pág

BADGER, Ralph E (1981) "Investment Principles y Practices" 3ª edición New York Prentice Hall 360 pág

BAUMOL, W J (1963) "An Expected Gain Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection", Management Science N° 10 174-182 págs

BAWA, V S (Junio,1978) "Safety-First, Stochastic Dominance and Optimal Portfolio Choice" Journal of Financial and Quantitative Analysis" N° 13 255-271 págs

BERNSTEIN, Peter (1998) "Against The Gods The remarkable story of Risk John Wiley & Sons Inc. U S A 2ª edición 382 págs

BEY, R P (1979) "Estimating the Optimal Stochastic Dominance Efficient Set with Means Semi-Variance Algorithms" Journal Financial and Quantitative Analysis. N° 14 1059-1070 págs

BIERMAN, Harold Jr (1993) "The Capital Budgeting Analysis and Financing of Investment The Macmillan, New York, U S A 3ª edición 598 págs

BIERMAN, Harold Jr (1977) "Quantitative analysis for business decisions" The Macmillan, New Jersey, U S A 5ª edición 120-315 págs

BIERMAN, Harold Jr y SEYMOR, Smidt (1992) "Capital Budgeting Decision Economic Analysis of Investment" Prentice Hall, Inc U S A 8ª edición 608 págs

COHEN, Jerome (1977) "Guide to Intelligent Investing" Dow Jones Revised Edition, Richard D Irwin, Inc U S A 351 págs

CORONADO, María (Noviembre, 1999) “Valor en Riesgo Aplicación a Carteras de Opciones en Entidades Financieras Actualidad Financiera N° 11 Universidad P Comillas de Madrid, España 14-65 págs

CORONADO, María PhD (2001) “Comparing Different Methods for Estimating Value At Risk for Actual non linear Portfolios Empirical Evidence Department of Finance Madrid, España Journal of Finance 25 págs

COSS BU, Raúl (1996) “Análisis y evaluación de proyectos de inversión” Editorial Limusa, México, D F 2ª edición 375 págs

CLARK, John y HINDELANG, Thomas (1989) “Capital Budgeting Planning and Control of Capital Expenditures Prentice Hall, Inc. New Jersey U S A 3ª edición 467 págs

ELTON J., Edwin y GRUBER, Martín. (1987) “Modern Portfolio Theory and Investment Analysis” Tercera Edición Editorial John Wiley and Sons, Inc Canadá 3ª edición 643 págs

FABRYCKY, Walter (1981) “Análisis y proyectos” Prentice Hall, México, D F 1ª edición 320 págs

FISHBURN, P C (1971) “A Study of Lexicographic Expected Utility” Management Science N° 17 672-678 págs

FISHBURN, P C y LAVALLE, I H (Octubre, 1998) “Subjective Expected Lexicographic Utility with Infinite State Sets” Journal of Mathematical Economics N° 30 323-346 págs

GARCÍA, Alberto (1982) “Las inversiones a largo plazo y su financiamiento” Compañía Editorial Continental, S A México, D F 2ª edición 210 págs

GONZÁLEZ DEL RIO, Cristóbal (1984) “Variable de Distribución Administración y toma de Decisiones” Ediciones Contables y Administrativas, S A de C V México, D F 2ª edición 380 págs

GUP, Benton E (1992) “The basics of Investment” 1ª edición John and Wiley 5ª edición 544 págs

HAMMOND, J S (1974) “Simplifying the Choice Between Uncertain Prospects Where Preference is Non-Linear” Journal Management Science N° 20 1046-1072 págs

HEINTERHUBER, Giovanni (1996) "Política de Inversiones en la Industria" Fondo de Cultura Económica México, D F 19-32, 36-54 págs

INFANTE V, Arturo (1998) "Evaluación Financiera de Proyectos de Inversión" Editorial Norma Bogotá, Colombia 3ª edición 400 págs

JAFFE, Austin (1995) "Real Estate Investment Analysis" Prentice Hall, Inc Englewood Cliffs, New Jersey 3ª edición 480 págs

KROLL, Yoram y GUY, Kaplanski (2001) "VaR Risk Measures versus Traditional Risk Measures and Analysis and Survey School of Business Administration Hebrew University, Mount Scopus, Jerusalem Israel 38 págs

KROLL, Y, LESHNO, M LEVY, H y SPECTOR, Y (1975) "Increasing Risk, Decreasing Absolute Risk Aversion and Diversification Journal of Mathematical Economics N° 24 537-556 págs

KROLL, Yoram y GUY, Kaplanski (2000) "Efficient VaR Portfolios" Working paper Hebrew University

LEVY, Haim y SARNAT, Marshau (1984) "Portfolio and Investment Selection Theory and Practice Prentice Hall International U S A Inc 747 págs

LEVY, Haim y SARNAT, Marshau (1972) "Safety First An Expected Utility Principle" Journal of Financial and Quantitative Analysis N° 7 1829-1834 págs

MARKOWITZ, H M (1952) "Portfolio Selection" Journal of Finance. N° 7 77-91 págs

MERCADO R, Ernesto (1991) "Técnicas para la toma de decisiones" Grupo Noriega Editores. S A México D F 84 págs

MORGAN, J P (1996) "Risk Metric" Technical document N° 4 New York

PHILIPPATOS, G C y WILSON, C J (Septiembre, 1972) "Entropy, Market and Selection of Efficient Portfolios" Applied Economics N° 4 209-220 págs

RADCLIFFE, Robert C (1990) "Investment Concepts Analysis Strategy", 3ª edición Scott, Foresman and Company U S A 999págs

RHEAULT, Jean Paul (1992) "Introducción a la Teoría de las Decisiones con Aplicación A la Administración" Grupo Noriega Editores, México, D. F 204 págs

RICO, Eloy (1990) "Un Modelo de Selección de Inversiones" Tesis de Maestría, División de Estudios de Postgrado Universidad Nacional Autónoma de México

- ROY**, A D. (Julio, 1952) "Safety First and the Holding of Assets" *Econometrica* N° 20 431-449 págs
- RUSH**, Richard (1983) "Alternativas para invertir en épocas de inflación" Compañía Editorial, Continental México 210 págs
- SAPAG**, Cham Reynaldo y **SAPAG**, Cham Nassir (1995) "Preparación y evaluación de proyectos" 3ª edición Universidad de Chile Mc Graw Hill Colombia 230 págs
- SHARPE**, W F (1964) "Capital Asset Prices A theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk" *Journal of Finance* N° 19 425-442 págs
- TOBIN**, J (1958) "Liquidity Preferences as Behaviour Toward Risk" *Rev Economic Studies* N° 25 65-86 págs
- YITZHAKI**, S (Marzo, 1982) "Stochastic Dominance, Mean-Variance and Gini's Mean Difference" *American Economic Review* N° 72 178 185 págs
- YITZHAKI**, S (1983) "On An Extension of the Gini Inequality Index" *International Economic Review* N° 24 617-628 págs

INTERNET:

[http // www emu edu tr/- cmrpc/ibr Htm](http://www.emu.edu.tr/~cmrpc/ibr.htm)

[http //thales cica es/rd/Recursos/rd/99/ed99-0191-03/tabla.de.htm](http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd/99/ed99-0191-03/tabla.de.htm)

[http // ubmail ubalt edu/~harsham/oprc640s/Spanish.htm](http://ubmail.ubalt.edu/~harsham/oprc640s/Spanish.htm)

[http www.geocities.com/informal8ml/Historiamates.htm](http://www.geocities.com/informal8ml/Historiamates.htm)

[http // www uas mx//departamentos/publicaciones/textos/riesgo.htm](http://www.uas.mx//departamentos/publicaciones/textos/riesgo.htm)

[http.www.risknet.de/Risk-management/Risikosteuerung/Risiken-y/risiken-vermindern.htm](http://www.risknet.de/Risk-management/Risikosteuerung/Risiken-y/risiken-vermindern.htm)