UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POST-GRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

UN MODELO MATEMÁTICO EN LA CONTIENDA ELECTORAL

IVETH VERÓNICA MARTÍNEZ

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Panamá, Rep. de Panamá

1996

DEDICATORIA

A mi esposo **EDIS FLORES** por su apoyo y solidaridad en todo momento y de manera muy especial a mis hijos **ALAYN** y **ALEXANDER**, por el tiempo que les debo.

AGRADECIMIENTO

A Dios todo poderoso, guia y protector de mis pasos. A la Doctora **MANUELA FOSTER VEGA**, asesora del proyecto, por su valioso tiempo, dirección y dedicación para la culminación de este trabajo, a la cual le estaré eternamente agradecida. A mis familiares y amigos por su estimulo y camaraderia durante este tiempo.

ÍNDICE

RESUMEN

En este trabajo se analiza el Modelo de "Restricción de los Partidos Sobre Posiciones Optimas del Candidato", versión generalizada del Modelo Espacial de Competición Electoral propuesto por Anthony Downs en 1957. Se trata de un modelo de partidos políticos, donde se asume que los candidatos adquieren recursos de sus partidos y de los activistas, a través de su organización. Los activistas pueden participar en la campaña de un candidato y/o en la organización de su partido, asumiendo que ambos valoran, tanto ganar como los resultados políticos alcanzados. Fundamentalmente se prueba el teorema acerca de la existencia de una distribución de equilibrio de Nash en $\mathbb{R}^n$. Se explora el impacto de los recursos sobre los partidos, y el de las preferencias políticas de los candidatos sobre sus posiciones óptimas. Todo esto en el marco de la Teoría de Utilidad y de la Teoría de Juegos.

SUMMARY

In this work the model of "Restriction of Political Parties on the Candidate's Optimal Position" is analyzed. It represents a generalized version of the Space Model of Electoral Contest proposed by Anthony Downs in 1957. It is about political parties, where it is assumed that candidates get their resources from their parties and the activists through the organization. The activists can take part in one candidate's campaign and/or in their party organization assuming both value the victory as well as the political goals archieved. Basically the theorem on the distribution of equilibrium of Nash in $\mathbb{R}^n$ is proved. The impact of the resources on the canditates is being explored, also the political preferences of the candidates on their optimal positions. All this is in terms of the Theory of Utility and the Theory of Games.

INTRODUCCIÓN

Los modelos matemáticos en las ciencias politicas se desarrollaron a fines de los años cincuenta, como una herramienta para explicar mejor las consecuencias del comportamiento de los individuos y de los grupos, entender las causas de ruptura del consenso social y mejorar los procesos de decisión, y los mecanismos constitucionales y administrativos. A partir de esa época, han sido numerosos los aportes matemáticos que han servido, a paises desarrollados, como guias para tomar decisiones y realizar acciones con bases cientificas.

Considerando la importancia de los modelos matemáticos en la ciencia politica se realiza este trabajo, cuyos objetivos principales son los de analizar el modelo propuesto por John H. Aldrich y Michael D. McGinnis en 1989 en el espacio n-dimensional, destacar su importancia y estructurar los aspectos politicos de una contienda electoral, de manera que se pueda dar respuesta a problemas concretos de activa sociedad.

El contenido del trabajo está dividido en dos capitulos.

El primer capitulo abarca los conceptos generales de la Teoria de Utilidad, marco en el que se dan las condiciones en los que un comportamiento es medible y coherente. Otro aspecto importante que se desarrolla en este capítulo es la Teoría de Juegos. Su papel principal es el de determinar las hipótesis bajo las cuales pueden existir soluciones al juego electoral, es decir, situaciones de equilibrio en las que el resultado del juego significa un reparto de las posibles utilidades de la manera más razonable posible.

La Teoría de Juegos puede ser un instrumento esencial en el análisis predictivo en las ciencias políticas y puede asimismo ser un instrumento para analizar las relaciones fundamentales entre constitución y comportamiento político.

En el segundo capítulo se desarrolla el modelo matemático, tema del trabajo. En él se analiza la interacción entre dos candidatos que se disputan un puesto de elección y cuyas plataformas se representan como puntos en un espacio euclideano n-dimensional. Se presentan las especificaciones del modelo, se estudia la participación y contribución del ciudadano, el papel del candidato y la utilización de sus recursos, la contribución del partido y cómo afecta al modelo. Se muestran algunas propiedades del juego electoral y, por último, se analiza la posición del candidato que maximiza su oportunidad de ganar.

El tema tiene varias aristas pues está afectado por múltiples factores externos, como por ejemplo el comportamiento del votante, etc. Se espera que la forma como se ha abordado el problema de la contienda electoral partidista, sea motivadora para que otras personas se interesen por estudiar la modelación matemática de problemas políticos-sociales.

CAPÍTULO I

MARCO TEÓRICO

1. CONCEPTOS BASICOS SOBRE CUANTIFICACIONES DE PREFERENCIAS

Consideremos una persona (el decisor) que tiene un problema que resolver y sobre el que debe tomar una decisión de una manera razonada.

Una vez que el decisor ha definido el problema, se asume que él ya ha especificado un conjunto de alternativas factibles, denotado por A, entre las que está la mejor solución del problema.

En este conjunto se define una función evaluadora n dimensional que, a cada alternativa, asocia un punto en el espacio de consecuencias. Así:

$$X{:}a \longrightarrow (X_1(a),\ X_2(a),\ldots,X_n(a)) = (x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$$

donde cada componente X_i es una función evaluadora y representa un atributo sobre el que se calificará a las alternativas.

Si tenemos $(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ como un punto en el espacio de consecuencias, podemos comparar las magnitudes x_i y x_j con $i \neq j$ si X_i y X_j están descritos con igual medida, en caso contrario se requerirá de otro procedimiento para comparar y combinar las diferentes componentes del vector de consecuencias. La combinación se podría realizar por medio de una función escalar de valor.

Definición 1.1: Sea v una función real, sobre el espacio de consecuencias, que satisface la siguiente propiedad:

$$v(x_1,\dots,x_n) > v(x'_1,\dots,x'_n) \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \succcurlyeq (x'_1\dots,x'_n)$$

donde el símbolo $\succcurlyeq$ se lee "preferido o indiferente a"; a tal función se le llama <u>función de valor</u>.

Para una función de valor v, el problema es encontrar la (o las) alternativa(s) que la maximicen.

Consideremos las alternativas a' y a'' con vectores de consecuencias $x' = (x'_1,\dots,x'_n)$ y $x''= (x''_1\dots,x''_n)$ respectivamente. Se dice que x' domina a x'' si

a) $x'_i \succcurlyeq x''_i \quad \forall\, i$

b) $x'_i \succ x''_i$ para algún i ($\succ$ se lee "preferido a")

En el caso (a) se tiene que a' es al menos tan bueno como a'', para todos los atributos y en (b), a' es estrictamente mejor que a'' para al menos un atributo.

Esto significa que en el espacio bidimensional, (fig. 1.1), x' domina a x'' si y solamente si x' está en la posición noreste de x''.

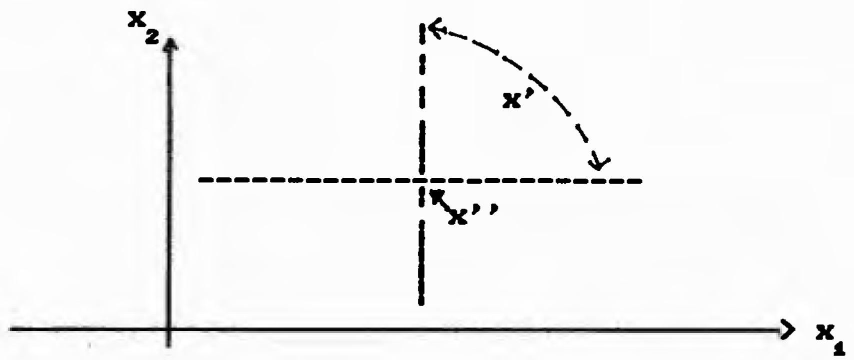


fig. 1.1

Este aspecto sólo toma en cuenta el caracter ordinal de los números en el espacio de consecuencias y no el caracter cardinal; además no se requiere una comparación entre x'_i y x''_j para $i \neq j$.

Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de las consecuencias asociadas con las alternativas de A; $\mathcal{R}$ es llamado conjunto rango del vector de evaluadores. Al conjunto de las consecuencias de $\mathcal{R}$ que no son dominadas se le llama frontera eficiente de$\mathcal{R}$ o conjunto optimal de Pareto.

Como ejemplo tomemos regiones limitadas en $\mathbb{R}^2$:

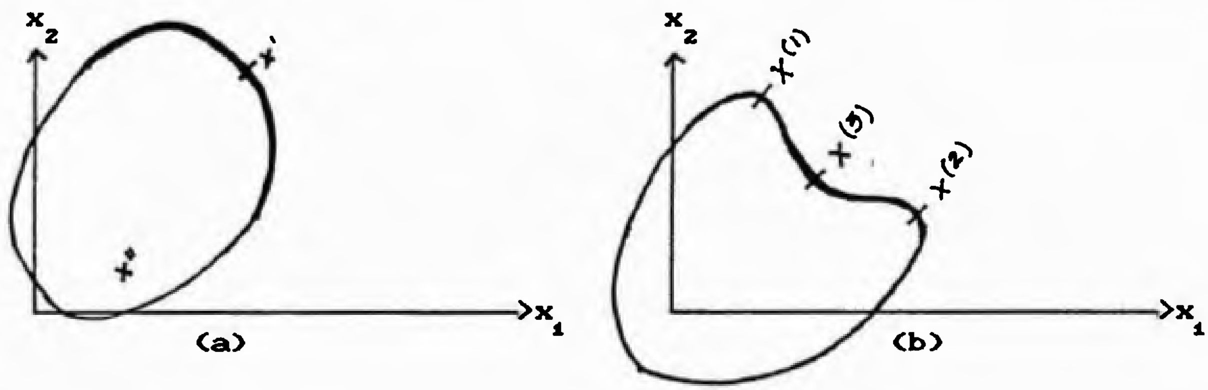


fig 1.2

En la fig. 1.2a la consecuencia x' es eficiente y domina a x'' (puesto que no existe ninguno del conjunto al noroeste de x'') En la fig. 1.2b la consecuencia $x^{(3)}$ es eficiente y podría ser seleccionada al igual que las consecuencias $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$ que también están sobre la frontera eficiente.

1.1 PREFERENCIAS ESTRUCTURADAS Y FUNCION DE VALOR

Uno de los problemas del decisor es estructurar sus preferencias sobre el espacio de consecuencias. Se analizarán las preferencias del decisor por vectores consecuencias en el espacio n-dimensional, pertenezcan o no a $\mathcal{R}$.

La estructuración se desarrollará para el caso de uno y dos atributos, ya que este es punto de referencia para casos más generales.

Definición 1.1.1: Se define una estructura de preferencia del decisor sobre el espacio de consecuencia si cada dos puntos x' y x'' del espacio son comparables, esto es, si solo una de las siguientes afirmaciones es válida:

a) $x' \sim x''$ (x' es indiferente a x'')

b) $x' \succ x''$ (x' es preferido a x'')

c) $x' \succeq x''$ (x' es preferido o indiferente a x'')

y las relaciones $\succ$, $\succeq$, $\sim$ son transitivas.

Una vez que se especifique la estructura de preferencias del decisor, el problema se puede enunciar formalmente como el de escoger $a^{o} \in A$ tal que

$$X(a^{o}) \succeq X(a) \qquad \forall\ a \in A$$

es decir encontrar $x^{o} \in \mathcal{X}$ tal que

$$x^{o} \succeq x \qquad \forall\ x \in \mathcal{X}$$

En la fig. 1.3, se muestra el caso de un decisor que estructura sus preferencias en un espacio de evaluación de dimensión dos. El conjunto de consecuencias que tienen igual preferencia por parte del decisor pertenecerán a una <u>curva</u> llamada de <u>indiferencia</u>. El alejamiento de la curva del origen indica mayor preferencia del decisor. Si $x' \sim x''$ el decisor no se preocupa si logra x' o x'', ya que ambas están sobre la misma curva de indiferencia. El punto x''' es preferido a x', y por ende x''' está sobre la curva de indiferencia más alta (o más preferida).

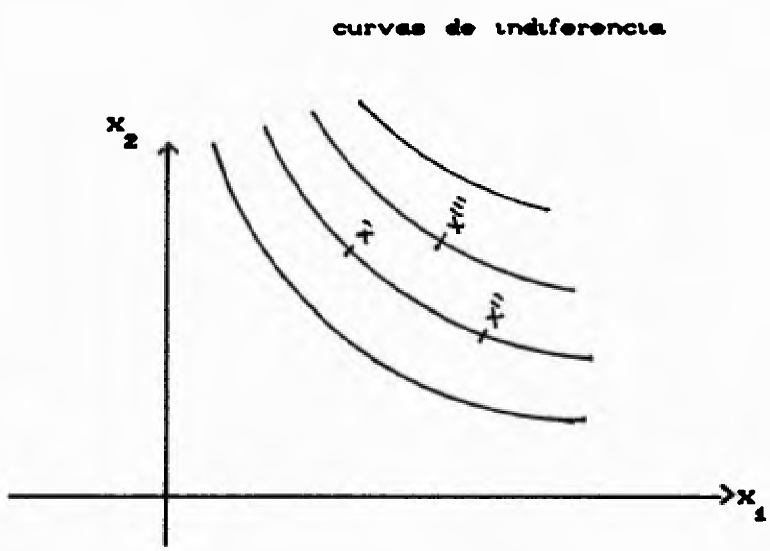


fig 1.3

Una función de valor v a la cual se le asocia un número real v(x) para cada punto x, representa la estructura de preferencia del decisor siempre que

$$x' \sim x'' \quad \Leftrightarrow \quad v(x') = v(x'')$$

y

$$x' \succ x'' \quad \Leftrightarrow \quad v(x') > v(x'')$$

Si v es una función de valor que refleja las preferencias del decisor, entonces su problema se puede expresar como el de un problema de optimización estándar en el que se busca un $a \in A$ que maximice $v[X(a)]$

1.1.1 Tasa de sustitución

Consideremos un problema donde las alternativas están descritas por dos atributos X e Y positivamente orientados y que x_1, y_1 son niveles respectivos de estos atributos. Supongamos que en Y se incrementa su nivel en Δ unidades y el decisor está dispuesto a disminuir el nivel en X en $\lambda\Delta$ unidades de manera que los puntos (x_1,y_1) y $(x_1 - \lambda\Delta,\ y_1 + \Delta)$ sean indiferentes en el espacio de consecuencias.

Esto significa que λ es aproximadamente la cantidad de X que está dispuesto a pagar por una unidad de Y, con x_1 de X y y_1 de Y, de tal manera que el nuevo punto sea indiferente con aquel, es decir, $(x_1,\ y_1) \sim (x_1 - \lambda\Delta,\ y_1 + \Delta)$ (ver fig. 1.4).

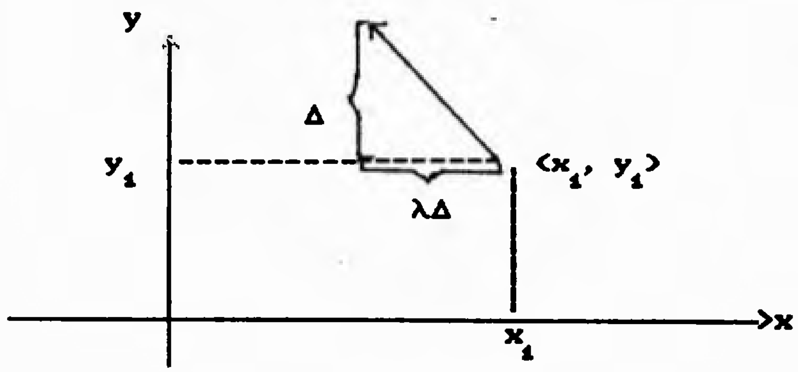


fig. 1.4

El parámetro λ es la tasa marginal de sustitución entre X e Y y constituye un elemento fundamental para la determinación de la función de valor del decisor.

1.2. FUNCION DE UTILIDAD

Se supone que el decisor debe realizar una selección entre varias alternativas, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cada una de las cuales resultará en una consecuencia que las describe en términos de un atributo único X.

Si el decisor no conoce exactamente qué consecuencia se obtendrá de cada una de las alternativas, él podría asignar probabilidades a las distintas posibilidades e igualmente podría asignar beneficios a estas consecuencias probables.

Existen métodos para asignar beneficios a las posibles consecuencias; uno de ellos podría requerir del juicio subjetivo del decisor para cada consecuencia asignada, pero esto causaría el manejo de muchas entradas en la práctica. Otro, que es lo deseable y necesario, es construir una <u>función de utilidad U</u> que asigne un valor U(x) a cada posible consecuencia x sobre un rango de posibilidades, para luego calcular la utilidad esperada. Así, el curso de acción preferido es el que obtenga el mayor valor esperado. Esto implica que la utilidad esperada es una guía apropiada para un decisor consistente.

La atención se centrará en las funciones de utilidad en la que están implicadas las probabilidades. Se tiene n consecuencias denotadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es importante que el decisor pueda ordenarlas según sus preferencias, por ejemplo, x_1 es menos preferido que x_2 y éste menos preferido que x_3 y así sucesivamente, que se pueda simbolizar por:

$$x_1 \prec x_2 \prec x_3 \cdots \prec x_n$$

Se asume que el decisor indaga acerca de cómo expresar sus preferencias por una distribución de probabilidad sobre estas consecuencias. Por ejemplo, acerca de las preferencias entre las alternativas a' y a'', donde

1. la alternativa a' resulta en la consecuencia x_i con probabilidad p'_i para $i = 1,\ldots,n$, $p'_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} p'_i = 1$,
2. la alternativa a'' resulta en la consecuencia x_i con probabilidad p''_i para $i = 1,\ldots,n$, $p''_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} p''_i = 1$;

el decisor asegura que, para cada i, él es indiferente entre las siguientes opciones:

a. La Opción de Certeza: Recibir x_i.

b. La Opción de Riesgo: Recibir x_n (la mejor consecuencia) con probabilidad π_i y x_1 (la peor consecuencia) con probabilidad $1 - \pi_i$.

Se denota la opción de riesgo por $L = \langle x_n, \pi_i, x_1 \rangle$, llamada lotería.

El resultado fundamental de la teoría de utilidad es que el valor esperado de las probabilidades π_i puede ser usado, además, para escalar numéricamente las distribuciones de probabilidad sobre las consecuencias x_i. Para ilustrar este razonamiento tomaremos la selección entre las alternativas a' y a'', con las consecuencias y probabilidades correspondientes ya mencionadas

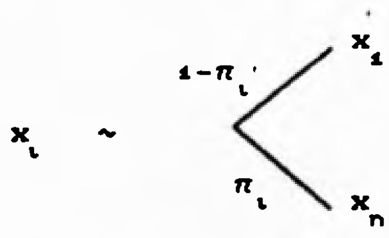
Si se asocia a cada x_i el valor π_i, entonces las ponderaciones esperadas para a' y a'' serán, respectivamente,

$$\pi' = \sum_i p'_i \pi_i$$

$$\pi'' = \sum_i p''_i \pi_i$$

La alternativa a' resulta con probabilidad p'_i, en la consecuencia x_i, pero x_i es considerada por el decisor indiferente a la oportunidad π_i de obtener x_n y la oportunidad complementaria $1 - \pi_i$ para obtener x_1

Este argumento descansa en el hecho de poder sustituir la opción de riesgo $\langle x_n, \pi_i, x_1 \rangle$ por cada x_i Esta sustitución se representa de esta manera.



Si se transforman las π_i en U_i por medio de una transformación lineal positiva

$$U_i = \alpha + \beta\pi_i, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, i=1,\dots,n,$$

entonces los valores esperados U_i ordenan a las alternativas de la misma manera como lo hacen las π_i. Esta sería una función de utilidad del decisor.

Von Neumanm y Morgenstern, [15] postularon cincos axiomas básicos que implican la existencia de utilidades numéricas para resultados cuyas expectativas por loterías preservan el orden de preferencia sobre loterías, esto es, a mayor utilidad esperada, corresponde mayor preferencia. La función de utilidad es única hasta por una transformación lineal positiva, es decir, si la función $U(x)$ representa una preferencia riesgosa de una persona, entonces también lo será $U^*(x)$ si y solamente si

$$U^*(x) = a\ U(x) + b \qquad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Los axiomas son informalmente establecidos, como sigue:

1. Las preferencias por loterías L_i son completas y transitivas.

Completas quiere decir que entre loterías L_1 y L_2, cualquiera de la posiciones $L_1 \succ L_2$ (L_1 es preferida a L_2) o $L_2 \succ L_1$ o ambas, es igualmente atractiva. Transitividad implica que $L_1 \succ L_2$ y $L_2 \succ L_3$ entonces $L_1 \succ L_3$.

2. Si $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, entonces debe existir alguna probabilidad p entre cero y uno tal que la lotería

$$\begin{array}{ccc} p & \diagup & x_1 \\ 1-p & \diagdown & x_3 \end{array}$$

sea tan atractiva como recibir x_2 con certeza.

3. Si los objetos x_1 y x_2 son igualmente atractivos, entonces la lotería

$$\begin{array}{ccc} p & \diagup & x_1 \\ 1-p & \diagdown & x_3 \end{array} \quad \text{y la lotería} \quad \begin{array}{ccc} p & \diagup & x_2 \\ 1-p & \diagdown & x_3 \end{array}$$

serán igualmente atractivas para cualquier valor de p y x_3.

4. Sean las loterías L_1 $\begin{array}{ccc} p & \diagup & x_1 \\ 1-p & \diagdown & x_2 \end{array}$ y

L_2 $\begin{array}{ccc} q & \diagup & x_1 \\ 1-q & \diagdown & x_2 \end{array}$ que difieren solamente en la probabilidad. Si $x_1 \succ x_2$, entonces la primera lotería será preferida sobre la segunda si y solamente si $p > q$.

5. Una lotería compuesta (aquella cuyos resultados son también loterías) es igualmente atrayente que la lotería simple que podría resultar al multiplicar probabilidades de todo el ramal conforme a la teoría de probabilidad estándar.

Los axiomas anteriores son suficientes para garantizar que existe un índice de utilidad tal que el ordenamiento de loterías por sus utilidades esperadas coincida completamente con las preferencias actuales de la persona.

Dentro de la teoría de utilidad existen algunos conceptos que caracterizan al decisor y que permiten tener una idea de su conducta y hacer un análisis de sus decisiones.

Definición 1.2.1: Una persona es adversa al riesgo si su función de utilidad es cóncava.

Se puede decir que si algún juego es menos preferido que el valor esperado monetario con certeza, la preferencia es adversa al riesgo. Esto asegura que su certeza equivalente será menor que su valor esperado monetario [8].

Definición 1.2.2: Una persona es propensa al riesgo si su función de utilidad es convexa.

Un individuo propenso al riesgo es aquel que está dispuesto a jugar.

Existen distintas formas de como la utilidad ha sido considerada en los modelos de utilidad esperada. La combinación sistemática de las diversas transformaciones produce nueve variantes que son mostradas en la tabla 1.2.

1. $\sum p_i x_i$	Valor Monetario Esperado
2. $\sum p_i v(x_i)$	Utilidad Esperada (Bernoulli, 1738)
3. $\sum p_i u(x_i)$	Utilidad Esperada (Von Neumann-Morgenstern, 1947)
4. $\sum f(p_i)x_i$	Teoría de Certeza Equivalente
5. $\sum f(p_i)v(x_i)$	Utilidad Esperada Subjetiva (Edwards, 1955)
6. $\sum f(p_i)u(x_i)$	Utilidad Esperada Subjetiva (Ramsey, 1931)
7. $\sum w(p_i)x_i$	Valor Monetario Ponderado
8. $\sum w(p_i)v(x_i)$	Teoría de Expectativa (Kahneman y Tversky 1979)
9. $\sum w(p_i)u(x_i)$	Utilidad Subjetivamente Ponderada (Karmarkar, 1978)

Tabla 1.2
Nueve variantes del modelo de la Utilidad Esperada

En la tabla anterior, $v(x)$ denota una medida de utilidad escalada por intervalos y construída bajo certeza; $u(x)$ denota una medida de utilidad construída vía loterías (i.e. bajo riesgo). Los $w(p_i)$, llamados ponderación de la decisión, son utilizados para reflejar el impacto de los eventos en la atractividad total de los juegos.

1.3. INTRODUCCION A LA TEORIA DE JUEGOS

La teoría de juegos de estrategias trata problemas en los que interviene no sólo el azar sino también las posibles formas de actuar de los jugadores.

Varios oponentes pueden influir en la ocurrencia de ciertos eventos cuya realización obedece a intereses que no pueden coincidir.

Definición 1.3.1: Se llama <u>juego</u> al conjunto de reglas que indican las formas posibles en las que los jugadores pueden actuar, y sus consecuencias.

Se puede considerar como la relación entre dos o más sectores con intereses opuestos. En general, se asumirán n jugadores.

Definición 1.3.2: Un <u>movimiento</u>, en un juego, es un paso teórico previsto en las reglas del juego.

Definición 1.3.3: Un <u>pago</u> es el cumplimiento de la plena y absoluta realización de lo convenido en las reglas del juego.

Definición 1.3.4: Se llamará <u>estrategia pura</u> a un elemento a_i^k del conjunto numerable de estrategias A_i que tiene a la disposición un jugador i, con $1 \le i \le n$.

A_i es un plan de comportamiento establecido por el jugador i, formado por el conjunto de decisiones que puede tomar en la realización particular de un juego. La elección de la estrategia determinará completamente la realización del juego por parte de cada jugador.

La utilidad del juego para el j-ésimo jugador puede encontrarse con ayuda de una función $U_j(a_1^{k_1},...,a_n^{k_n})$ de valores reales para las estrategias puras $a_i^k \in A_i$, $1 \leq i \leq n$, llamada <u>función de pago</u> y que determina unívocamente los pagos a hacer al terminar el juego. Es evidente que el jugador j procurará maximizar su ganancia $U_j(a_1^{k_1},...,a_n^{k_n})$. Así un juego se representa por

$$\Gamma = \{A_1,A_2,...,A_n;\ U_1,U_2,...,U_n\}$$

Definición 1.3.5: El juego Γ se dice que es un juego de <u>suma constante</u> si existe un número C tal que $\forall\ a_i^k \in A_i$, $1 \leq i \leq n$

$$\sum_{j=1}^{n} U_j(a_1^{k_1},...,a_n^{k_n}) = C$$

si C = 0, el juego se dice de suma nula.

Si los conjuntos A_i son todos finitos, entonces el juego Γ se llama juego finito; en caso contrario, es infinito.

Definición 1.3.6: Se dice que un juego Γ es de información completa (o incompleta), según lo sea la información que posean los jugadores.

En los juegos de información completa, cada jugador conoce el desarrollo del juego cuando adopta alguna estrategia pura (por ejemplo, el juego de ajedrez). De lo contrario, el juego será de información incompleta (por ejemplo, el juego de cartas).

Cuando un juego se repite varias veces, los jugadores podrían perder interés en usar siempre la misma estrategia, ya que los oponentes obtendrían mayor información y sacarían provecho de la misma. Entonces, en una gran sucesión de jugadas, el jugador podría utilizar diferentes estrategias con una cierta frecuencia relativa y, aunque el evento se dé una sola vez, habrá circunstancias bajo las cuales se mezclarán estrategias diferentes con determinadas probabilidades. En estos casos se hablará de estrategia mixta, es decir, una distribución de probabilidad asignada sobre el conjunto de estrategias del jugador.

Definición 1.3.7: Si el conjunto de estrategias del j-ésimo jugador en un juego Γ, es un conjunto finito $A_j = \{a_j^1,\dots,a_j^{N_j}\}$, una estrategia mixta de j en Γ es un vector N-dimensional $p_j = (p_j^1, \ldots, p_j^{N_j})$ de componentes reales $p_j^k \geq 0$, con $k = 1, \ldots, N_j$, tal que

$$\sum_{k=1}^{N_j} p_j^k = 1$$

En el juego de estrategia mixta, la utilidad se reemplaza por la correspondiente esperanza matemática de los pagos, ponderada por los p_j^i, que representan las probabilidades con las que son utilizadas las estrategias a_j^i, para $1 \leq i \leq N_j$.

Definición 1.3.8: Sean $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n;\ U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ un juego finito con $A_i = (a_i^1, \ldots, a_i^{N_i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y A_i^* el conjunto de estrategias mixtas del i-ésimo jugador en Γ. Si se tiene que para cada n-upla de estrategias mixtas $(p_1, \ldots, p_n)$, con $p_i = (p_i^1, \ldots, p_i^{N_i}) \in A_i^*$, el pago esperado del i-ésimo jugador, es

$$E_i(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} U_i(a_1^{i_1}, \ldots, a_n^{i_n}) \cdot p_1^{i_1}\, p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n}$$

entonces, al juego $\Gamma^* = (A_1^*, \ldots, A_n^*; E_1, \ldots, E_n)$ se le <u>llama extensión mixta</u> de Γ.

Los jugadores pueden encontrar inconveniente el considerar su propia función de pago como la única manera de controlar sus pérdidas y ganancias, e intentar mejorar indirectamente sus ganancias potenciales. Esto puede conducir a que, entre los jugadores, se den coaliciones, anticoaliciones, etc.

Definición 1.3.9: Un juego de estrategia Γ es <u>no cooperativo</u> cuando se están prohibidas totalmente las coaliciones entre los jugadores.

El concepto más importante de la teoría de juego estratégico no cooperativos es el de punto de equilibrio, que corresponde intuitivamente a una regla de comportamiento tal que si todos los jugadores, excepto uno, actúan de acuerdo con ella, el jugador restante no puede hacer nada mejor que actuar también de acuerdo con ella.

Definición 1.3.10: Sea $\Gamma = \langle A_1, A_2, \ldots, A_n; U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ un juego. Se dice que una n-upla de estrategias $\langle a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^* \rangle$ es un <u>punto de equilibrio</u> si $\forall\ a_i^* \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, se tiene que

$$U_i \langle a_1^*, a_2^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_i, a_{i+1}^*, \ldots, a_n^* \rangle \leq U_i \langle a_1^*, a_2^*, \ldots, a_i^*, \ldots, a_n^* \rangle$$

Teorema 1.3.1: Si el juego Γ, para cada $i = 1,2,\ldots,n$, se satisface las siguientes condiciones

1. A_i es un conjunto convexo, cerrado y acotado en un espacio euclideano.
2. $U_i(a_1,\ldots,a_n)$ es cóncava con respecto a a_i para a_1^*, a_2^* ,..., a_{i-1}^*, a_{i+1}^* ,..., a_n^* fijas.
3. $U_i(a_1,\ldots,a_n)$ continua en $(a_1,\ldots,a_n)$,

entonces el juego tiene al menos un punto de equilibrio.

La demostración aparece en Perez Vilaplana (1972).

El siguiente teorema muestra la existencia de un punto de equilibrio en un juego de estrategia mixta, al cual se le llama <u>punto de equilibrio de Nash</u>.

Teorema 1.3.2: Para todo juego finito

$$\Gamma = (A_1,A_2,\ldots,A_n;U_1,U_2,\ldots,U_n)$$

la extensión mixta

$$\Gamma^* = (A_1^*,\ldots,A_n^*;E_1,\ldots,E_n)$$

tiene al menos un punto de equilibrio.

Demostración: Para $i = 1,\ldots,n$, el conjunto de estrategia A_i, es convexo, cerrado y acotado en un espacio euclideano. La esperanza matemática $E_i(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ es una función lineal y cóncava con respecto a las componentes p_i, lo cual significa que $\forall\, p_i$, $\forall\, \lambda_i \in [0,1]$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(p_i)$$

con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Para todo i la función multilineal $E_i(p_1,p_2,\dots,p_n)$ en las componentes $p_1,p_2,\dots,p_n$, es desde luego, también continua en $p_1,p_2,\dots,p_n$. Estas mismas condiciones también se satisfacen para el juego Γ^*, lo que prueba la existencia de un punto de equilibrio de Γ^*.

CAPÍTULO II

MODELO DE RESTRICCIONES DE LOS PARTIDOS SOBRE POSICIONES ÓPTIMAS DEL CANDIDATO

2.1 INTRODUCCIÓN

En 1989 John Aldrich y Michael Mc Ginnis propusieron un modelo matemático de una contienda electoral en el espacio de n dimensiones. Este modelo, "Restricción de los Partidos sobre Posiciones óptimas del Candidato" es un versión general del "Modelo Espacial de Competencia Electoral" de Anthony Downs de 1957. En el trabajo de Aldrich y Mc Ginnis se modela la interacción entre dos candidatos que se disputan algún puesto público de elección con la participación de un electorado cuyos votos son importantes para ganar la elección. Los candidatos compiten por votos y adoptan una plataforma política motivados solamente por el deseo de ganar las elecciones. Esta plataforma se representa como un punto en un espacio euclideano n-dimensional.

Se asume que en el modelo, las funciones de utilidad de los ciudadanos tienen un "buen comportamiento", pues estos tienen bien definidas sus preferencias sobre este espacio político.

Dado que los candidatos son considerados para valorar la plataforma política solamente como un medio de ganar votos, la pregunta que se impone es si existe alguna plataforma o punto en el espacio político que sea óptimo, en el sentido de que esta plataforma o punto maximice las oportunidades de victoria del candidato, suponiendo que el candidato de oposición también está buscando una plataforma ganadora. Por lo tanto, desde el punto de vista de los candidatos, el modelo espacial puede interpretarse como un juego electoral de dos personas.

El análisis se centra en la búsqueda de un equilibrio, definido como un par de plataformas en donde ningún candidato puede racionalmente cambiar su estrategia unilateralmente. Este equilibrio fue encontrado para el caso unidimensional [9], el cual correspondía a la media de la distribución de los puntos ideales (puntos más preferidos) del ciudadano a lo largo de esta dimensión. La posición de equilibrio para el caso multidimensional es extremadamente restrictiva requiriendo una simetría exacta y altamente irrealista de la distribución de la preferencia del ciudadano.

En este trabajo se desarrolla un modelo espacial general que evidencia las regularidades empíricas de las posiciones de los candidatos. En este sentido, existen dos puntos importantes a considerar:

1. EL argumento de que los candidatos podrían ser modelados considerando que tienen preferencias por éxitos políticos en adición a sus deseos de victoria electoral.

2. EL modelo espacial de partidos políticos se generaliza a n dimensiones.

Los partidos son integrados dentro de un juego electoral como una fuente de recursos que los candidatos encuentran en su competencia y de esta manera sirven como restricciones sobre la posiciones óptimas de los candidatos.

La participación política del ciudadano en este juego electoral, tiene un amplio rango de selección ya que no sólo puede votar sino, además, contribuir con recursos para el candidato o partido de su preferencia.

Esta generalización está integrada a un modelo espacial expandido y de gran alcance, derivado de supuestos comunes acerca de las preferencias y de los principios teóricos de los juegos y de la maximización de la utilidad esperada estándar.

2.2 ESPECIFICACIONES DEL MODELO

2.2.1 Papel del ciudadano

Consideremos X un subconjunto del espacio euclideano n-dimensional $\mathbb{R}^n$. X representa la arena electoral o espacio político.

Sea i el i-ésimo ciudadano, el cual tiene una función de utilidad definida sobre el espacio político. Se denotará x_i su punto ideal, es decir, el punto donde él obtiene la máxima utilidad.

Para toda i, sea $U_i(x)$ la función de utilidad del i-ésimo ciudadano. Se supone que U_i satisface la condición de base cuadrática común (BCC), que establece, para todo i,

$$U_i(x) = \phi\,[(x_i - x)^t A(x_i - x)]$$

donde ϕ es una transformación estrictamente monótona y A es una matriz n x n positiva definida. Por lo tanto, para todo i, U_i es simétrica y unimodal, y la utilidad es medida como una transformación monótona de la distancia euclideana desde x_i. Sea f la función de distribución de los puntos ideales del ciudadano. La función f es continua de valor real sobre un subconjunto, D de X.

Se considera, además, que D es cerrado, compacto y convexo, en $\mathbb{R}^n$, con $x_i \in D$ para todo i.

Se asume que el ciudadano busca la máxima utilidad esperada y que evalúa su percepción de la posición adoptada en X , de los partidos y candidatos, llamada sus plataformas.

La posición del partido y del candidato j se denotarán p_j y c_j, respectivamente, para j = 1,2 y $U_i(p_j)$ y $U_i(c_j)$ representarán las utilidades de i derivadas de p_j y c_j.

El ciudadano basará sus votos y decisión de contribución en las utilidades derivadas de las plataformas de los partidos y candidatos.

Sea CV_i el costo del votante i, el cual se asume está distribuido aleatoriamente sobre i. Se dirá que el ciudadano i se abstiene si

$$| U_i(c_1) - U_i(c_2)| < CV_i$$

Es decir, si la diferencia de la i-ésima utilidad derivada del primer candidato y la i-ésima utilidad derivada del segundo candidato no alcanza el costo del votante i. Si un ciudadano se abstiene de participar, se considera que es debido a una indiferencia.

En general, la probabilidad de abstención de i se incrementa cuando

$$| U_i(y_1) - U_i(y_2)| \longrightarrow 0$$

donde $y_j = p_j$ o c_j

Que esta diferencia se aproxime hacia cero quiere decir que el votante tiene la misma preferencia por los dos candidatos o partidos, por lo que le producen la misma utilidad.

Se considera que el ciudadano tiene tres tipos de participación en una contienda electoral:

a. Contribuir con escasos recursos a un partido.

b. Contribuir con un candidato.

c. Votar.

Un ciudadano puede contribuir con un partido por medio de una participación activa o por colaboración monetaria, al igual que con un candidato.

Para cada una de estas acciones se definirá una distribución de probabilidad:

Sea P_j^v, para $j = 1,2$, la probabilidad de votar por el candidato j. P_o^v denota la probabilidad de abstenerse.

Sea P_j^p , para $j = 1,2$, la probabilidad de ser activista en el partido j. P_o^p denota la probabilidad de no ser activista.

Sea P_j^c , para $j = 1,2$, la probabilidad de contribuir con el candidato j.

La decisión de ser activista será ponderada por la "cantidad" de activismo, la cual se interpretará como el nivel de contribución con recursos.

La función de probabilidad de contribución depende de

x_i y de la posición del candidato o del partido, pero no de ambos. Se asumirá que i contribuirá a lo más con un partido y/o a lo más con un candidato.

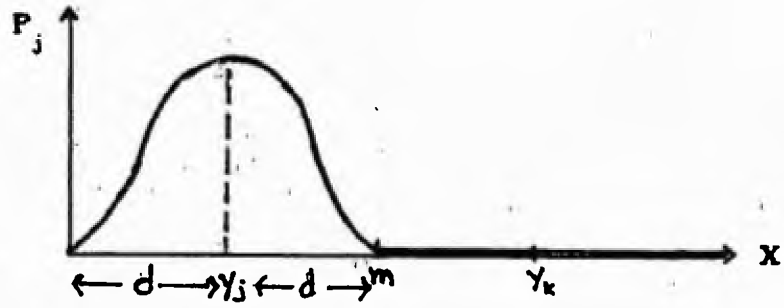
Para abreviar notaciones, para $j = 1{,}2$, sea P_j la probabilidad de votar (P_j^v) o de contribuir con el partido (P_j^p) o con el candidato (P_j^c).

Así $P_j(x_i,y_j)$ denotará la probabilidad de que el ciudadano i, con punto ideal x_i vote o contribuya con el partido (o candidato) j que tiene la posición y_j.

Definición 2.2.1: La función P_j, satisface la <u>Condición de Selección Racional</u> si para $j,k = 1{,}2$, con $j \neq k$, y las posiciones y_j, y_k de los partidos (o candidatos), se tiene que

$$P_j(x_i,y_j) \begin{cases} = 0 \text{ si } |x_i - y_j| > |x_i - y_k| \\ > 0 \text{ si } |x_i - y_j| \leq |x_i - y_k| \end{cases}$$

Esta condición asegura que el ciudadano nunca vote o contribuya con los partidos o candidatos que están más distantes de su punto ideal (fig. 1.1).



m punto medio entre y_j y y_k

figura 1.1

Definición 2.2.2: Las probabilidades P_j y P_k, para $j,k = 1,2$, con $j \neq k$, satisfacen la <u>Condición de Apoyo Extremista Débil</u>, si para todo par de puntos x,z y posiciones y_j, y_k de los partidos o candidatos, se tiene

$$|x - y_j| = |z - y_j| \quad y \quad |x - y_k| > |z - y_k|$$

entonces

$$P_j(x,y_j) > P_j(z,y_j)$$

Para aclarar esta condición, se supone que los puntos x, z son puntos ideales del ciudadano i. Para la posición y_j del partido o candidato j, la diferencia respecto a ambos puntos es la misma. Pero para la posición y_k del partido o candidato k, su diferencia respecto al punto z es más pequeña que respecto a x. Esto significa que dados dos puntos cualesquiera equidistantes de la posición de un partido (o candidato), el ciudadano con el punto más moderado tiene una menor probabilidad de apoyar al partido (o candidato) que se encuentra en la posición más lejana (fig. 1.2).

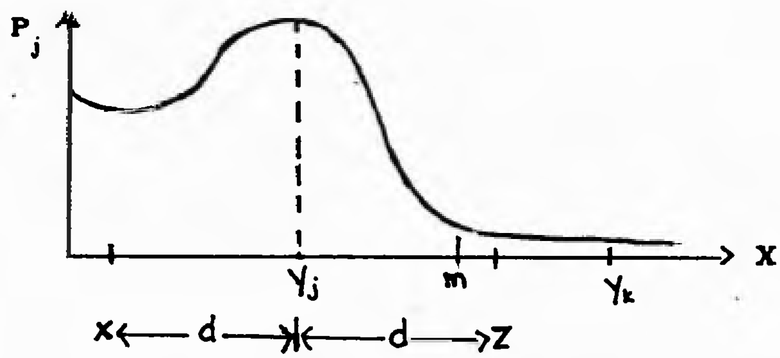


figura 1.2

Definición 2.2.3: Las probabilidades P_j y P_k, para j,k = 1,2, con $j \neq k$, satisfacen la <u>Condición de Simetría Métrica</u> si para todo par de puntos x, z, se tiene

$$|x - y_k| = |z - y_j| \quad \text{y} \quad |x - y_j| = |z - y_k|$$

con

$$|x - y_k| < |x - y_j| \quad \text{y} \quad |z - y_k| > |z - y_j|$$

entonces

$$P_k(x,y_k) = P_j(z,y_j)$$

Esto asegura que las dos funciones de probabilidad son una el reflejo de la otra, si las funciones de utilidad son simétricas y comúnmente formadas. Esto significa que el candidato o partido k obtendrá la misma proporción del voto entre ciudadanos con un punto ideal x como el que obtendrá j entre aquellos con un punto ideal z.

Es notable la importancia de estas condiciones, que se satisfacen si la función de utilidad cumple la condición de BCC.

Proposición 2.2.1:

a) Si BCC es válida, entonces la Condición de Selección Racional se cumple.

b) Si BCC es válida, entonces la Condición de Simetría Métrica se cumple.

c) Si BCC y la abstención debido a la indiferencia son válidas, entonces la Condición de Apoyo Extremista Débil se cumple.

Las pruebas de (a) y (c) aparecen en Aldrich (1983a) y la de (b) aparece en McKelvey (1975).

2.2.2 Papel de los candidatos

Para el caso de los candidatos se tienen las siguientes consideraciones:

a) Los candidatos están interesados en ocupar un cargo público; en este sentido, experimentan una ganancia en utilidad, si ganan la elección.

b) Los candidatos valoran los éxitos políticos.

Partiendo de estas suposiciones, se estructurarán conceptos que sustenten, claramente, la participación del candidato en la contienda electoral y la función de utilidad asociada.

Definición 2.2.4: El <u>valor del triunfo</u> del candidato j, se denota W_j y se define como

$$W_j \begin{cases} > 0 & \text{si } j \text{ gana} \\ = 0 & \text{si } j \text{ pierde} \end{cases}$$

Un candidato es también un ciudadano, por lo tanto, tiene su preferencia bien establecida. Cada candidato $j = 1,2$ tiene un punto ideal personal c_j^* y una función de utilidad $U_j(x)$ que satisface la condición de BCC.

El modelo no analiza las consecuencias por la variación en la intensidad de las preferencias, por lo que sus resultados no dependerán de las preferencias políticas de los candidatos. La función de utilidad de cada candidato requerirá del componente W y la condición BCC.

Los candidatos podrían experimentar alguna incertidumbre concerniente a los resultados de la elección. Esta incertidumbre se puede originar de las siguientes fuentes:

a. Las funciones de utilidad del ciudadano podrían ser, realisticamente, una lotería en términos probabilísticos desde la perspectiva del candidato. En este caso, se asume una distribución aleatoria independiente de los costos de votar.

b. Del hecho de que la generación de recursos sea un proceso probabilístico, ya que ningún candidato puede acertar en cuanto a quien contribuirá ni en la cantidad con la que cada ciudadano hará efectiva su contribución.

c. El impacto de los desembolsos de recursos para el sostén del votante y de las reuniones políticas podría ser considerado como un proceso probabilístico.

Se supone que los candidatos ven a los ciudadanos a través de los efectos de estos tres factores sobre las funciones P_j, más que a través de la estimación de las funciones de utilidad individuales.

La interpretación de incertidumbre se da en términos de que dado un conjunto de plataformas, la mayoría de votos esperado es solamente la mejor predicción en el momento. Entonces se asume que los candidatos maximizan la mayoría de votos esperados, (o la probabilidad de ganar) en adición a la política involucrada.

2.2.3 Contribución de los ciudadanos a los candidatos

Sea $c = (c_1,c_2)$ la posición de ambos candidatos. La contribución del ciudadano a un candidato se puede dar en tiempo, dinero o esfuerzo en la organización y desarrollo de la campaña de ese candidato. La función que refleja esta contribución es $P_j^c(x_i,c)$, que se puede interpretar como la probabilidad de que un ciudadano i con su punto ideal x_i apoye al candidato j dadas las dos plataformas. Esta función cumple las condiciones de Selección Racional, Apoyo Extremista Débil y la de Simetría Métrica (por la proposición 2.1.1).

Esta probabilidad está ponderada por la magnitud de las contribuciones y la densidad relativa de $f(x)$ en x_i. Los recursos se distribuirán aleatoriamente en X y el ciudadano i contribuirá a lo sumo con un candidato.

Se Denotará por RC_j la cantidad esperada de recursos provenientes de los ciudadanos, la cual depende de la posición de los candidatos y está dada por

$$RC_j(c) = \int_D P_j^c(x,c)\ f(x)\ dx$$

2.2.4 Utilización de los recursos por los candidatos

Sea r_j la cantidad total de recursos que recibirá el candidato j. Así, r_j es la suma de RC_j. RP_j representa la cantidad recibida por parte de su partido.

Sea r_{ij} el nivel de recurso que recibe (probabilisticamente) el ciudadano i para compensar los costos del voto por el candidato j. El aprecio a r_{ij} hace a i más probable de votar por j.

Estos recursos no sólo afectarán la concurrencia a las reuniones politicas, sino que podrian, además, determinar una selección individual entre candidatos, especialmente cuando tienen recursos diferentes.

Esta afirmación se puede expresar de otra manera. Supongamos que i prefiere ligeramente a c_2 sobre c_1, pero el candidato 1 tiene mayores recursos.

Si r_{i1} es mucho más grande que r_{i2} , se tiene más probabilidad que i vote por el candidato 1 que por 2 puesto que

$$U_i(c_1) < U_i(c_2)$$

pero

$$U_i(c_1) + r_{i1} > U_i(c_2) + r_{i2}$$

Si la utilidad esperada de votar por 1 es mayor que la utilidad esperada de abstenerse, entonces (como en la forma simplificada de votar de Riker y Ordeshook (1968)) se tiene

$$P[U_i(c_1) - U_i(c_2)] + r_{i1} > 0$$

Esto afirma que si i votara lo haría por el candidato 1, porque el beneficio neto menos el costo del voto por el candidato 1 es mayor que para el candidato 2, aún cuando, en ausencia de muestras de recursos, el ciudadano podría preferir al candidato 2.

Por esta razón las funciones P_j^V son afectadas tanto por los niveles de recursos como por las posiciones de los candidatos.

Definición 2.2.5: Sean $r = (r_1, r_2)$ los niveles de recursos de los candidatos y $c = (c_1, c_2)$ sus posiciones. El total de votos del candidato j se define como

$$V_j = \int_D P_j^V(x,c,r)\, f(x)\, dx$$

donde $P_j^V(x,c,r)$ es la probabilidad de votar por el candidato j, como una función del punto ideal del ciudadano, de la posición del candidato y de su nivel de recursos.

Así, si $r_1 > r_2$, se puede obtener una probabilidad positiva de votar por el candidato 1. Esto viola la

Condición de Selección Racional dada anteriormente. En lugar de esta se definirá una generalización de la misma y de la Simetria Métrica, para $j,k = 1,2$.

Definición 2.2.6: La función de probabilidad $P(x_i,c,r)$ satisface la <u>Condición de Selección Racional Generalizada</u> si P_j es una función estrictamente monótona creciente de $(c_j - c_k)$ y de $(r_{ij} - r_{ik})$.

Definición 2.2.7: La función de probabilidad $P(x_i,c,r)$ satisface la <u>Condición de Simetria Métrica Modificada</u> si P_j y P_k son simétricas con respecto a $c = \dfrac{c_1 + c_2}{2}$, salvo por una transformación lineal positiva.

Estas condiciones se satisfacen si la función de utilidad cumple con la condición BCC, r_{ij} son variables aleatorias distribuidas independientes y si es válida la indiferencia.

2.2.5 Los Partidos Politicos y sus Activistas

Se define P_j^p como la probabilidad de ser activista en el partido del candidato j e interpretada de la misma forma como la contribución al candidato y depende de las plataformas p_1 y p_2 de ambos partidos. Un aspecto importante que se discutirá a continuación es la derivación de estos dos puntos.

Se considera que la decisión de un ciudadano de ser activista en un partido se basa en la posición en la que él observe a los dos partidos en el espacio politico.

Definición 2.2.8: Llamaremos SIMBOLO a la media de la distribución de los puntos ideales de los activistas en el partido, ponderado por su grado de activismo.

El activista potencial del partido toma una decisión comparativa que maximiza la utilidad esperada. Si muchos se vuelven activistas, esto ocasiona un reajuste en la posición del partido y, en consecuencia, en la de ambos partidos. Esto puede conducir a que, por ejemplo, haya casos en los que algunos activistas podrian retirarse, mientras que otros podrian ingresar o retirarse del otro partido.

La primera interrogante es si existe una posición de equilibrio para p_1 y p_2, de una manera más precisa, una distribución de equilibrio del activista. La proposición 2.2.2 establece la existencia de una estrategia pura de equilibrio de Nash, bajo condiciones muy generales. Se demuestra que, en equilibrio, los partidos ofrecerán opciones políticas separadas, distintas y no convergentes.

En general, los dos partidos suministran dos puntos de referencia fijos para el juego electoral, que pueden servir potencialmente para medir la presión sobre los candidatos para converger a estos puntos si f(x) es simétrica, o para estar en una posición "vaga" en X en la ausencia de una estrategia pura de equilibrio.

Proposición 2.2.2: Sea f(x) una función n-dimensional, simétrica o asimétrica, entonces

a) Existe al menos una pareja de equilibrio de posiciones de partido distintas, es decir, $p_1 \neq p_2$

b) Cualquier equilibrio convergente, es decir, cualquier punto donde $p_1 = p_2$, es inestable.

Demostración: Esta prueba se da por construcción de un equilibrio con posiciones distintas de partidos.

Para una posición de partido $p = (p_1, p_2) \in D \times D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, se define la función media $\mu(p) : D \times D \longrightarrow D \times D$ como:

$$\mu_j(p_j) = \frac{\int x \, P_j^p(x,p) f(x) \, dx}{Z_j(p_j)}$$

donde, para $j = 1,2$

$$Z_j(p_j) = \int P_j^p(x,p) \, f(x) \, dx$$

denota el tamaño o base de recurso del partido j. Un equilibrio es equivalente a un punto fijo de la transformación μ, o sea, un punto tal que $\mu(p) = p$. Ya que la media de cualquier distribución $g(x)$ denota su "centro de gravedad", ésta puede ser localizada encontrando un punto que balancee la distribución de $xg(x)$ a lo largo de cada dimensión.

Para construir un punto fijo, se definen las siguientes integrales sobre los integrandos en la función media a lo largo de la dimensión k a la izquierda y derecha de una coordenada p_{jk} dada. Sin perder generalidades se reduce el espacio $D \times D$ al hipercubo unitario $[0,1]^n \times [0,1]^n$.

$$I_{jk}(p) = \int_0^1 \cdots \int_0^{p_{jk}} \cdots \int_0^1 xP_j^p(x;p)\ f(x)\ dx$$

$$D_{jk}(p) = \int_0^1 \cdots \int_{p_{jk}}^1 \cdots \int_0^1 xP_j^p(x;p)\ f(x)\ dx$$

Una media corresponde al punto en el que cada $I_{jk} = D_{jk}$ para los partidos j y en todas las n dimensiones k. Se trata de construir una media de partido de equilibrio, variando cada coordenada p_{jk} para todo j,k, para localizar un punto que simultáneamente satisfaga esta condición y la condición de punto fijo, $\mu_{jk}(p_j) = p_{jk}$.

Primeramente se demostrará la continuidad de I_{jk} y D_{jk} como funciones. La función $P_j^p(x,p)$ es continua en todo DxD, con la posible excepción de puntos tal que $p_1 = p_2$ Sin embargo así como la media de los partidos son distintas, las fronteras de la región en la que P_j^p no es cero, varian continuamente con cambios en p, y así en el espacio

$$D_o = \{(p_1,p_2) \in DxD \ / \ p_1 \neq p_2\},$$

I_{jk} y D_{jk} son integrales que depende de un parámetro para el cual la continuidad puede ser extendida.

Los elementos de DxD pueden ser reescritos como

$$(p_1,p_2) = (p_{1k},\ p_{2k},\ \bar{p}_{1k},\ \bar{p}_{2k})$$

donde $\bar{p}_{jk} = (p_{j1},\ \dots\ ,p_{jk-1},p_{jk+1},\ \dots\ ,p_{jn})$.

Se mostrará que permaneciendo dentro de D_o, se pueden seleccionar coordenadas p_{jk} (mientras se fijan las n-1 coordenadas para cada p_j) tal que $I_{jk} = D_{jk}$. Para este proceso hay dos casos que considerar:

i) Fijar $\bar{p}_{1k} \neq \bar{p}_{2k}$.

Para el punto

$$(0,p_{2k},\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k}), \quad I_{1k} = 0 < D_{1k}$$

y para

$$(1,p_{2k},\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k}), \quad I_{1k} > D_{1k} = 0.$$

Para cualquier punto p_{2k} fijo debe existir al menos un punto $(q,p_{2k},\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k})$ con $0 < q < 1$ tal que $I_{1k} = D_{1k}$.

Al conjunto de tales puntos se le llamará conjunto de equilibrio parcial, definido como

$$E_{jk} = \{p \in DxD \ /\ I_{jk} = D_{jk}\}$$

Puesto que tales puntos pueden ser construídos para cual quier valor fijo de la otra coordenada, debe existir un camino conectado en E_{jk} de $(q,0,\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k})$ a $(q,1,\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k})$.

Como antes, para

$$(q,0,\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k}), \quad I_{2k} = 0 < D_{2k}$$

y para

$$(q,1,\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k}), \quad I_{2k} > D_{2k} = 0;$$

y al menos un punto $q' \in (0,1)$ puede ser encontrado tal que para

$$(q,q',\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k}), \quad I_{2k} = D_{2k}.$$

Así se tiene construido el conjunto no vacío

$$E_k = E_{1k} \cap E_{2k} = \{p \in DxD \ / \ I_{jk} = D_{jk} \text{ para } j = 1,2\}$$

el cual abarcará el camino conectado en las otras n-1 dimensiones. Todos los puntos que resultan de esta construcción son también elementos de D_o.

ii) Fijar $\bar{p}_{1k} = \bar{p}_{2k}$. En este caso la construcción utilizada arriba podría resultar solamente en puntos tal que $q = q'$, implicando $p_1 = p_2$. Se observa que esto no es verdadero, fijado $p_{2k} = q \in (0,1)$. Por continuidad se puede seleccionar un punto $q_o < q$ suficientemente cercano a q y que para el punto $(q_o,q,\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k})$ satisfaga $I_{1k} > D_{1k}$.

En otras palabras, la integral entre q_o y q puede ser seleccionada arbitrariamente pequeña. Ya que para

$$(0,q,\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k}) \qquad I_{1k} = 0 < D_{1k},$$

por continuidad se puede seleccionar un punto $q_1 \in (0,q_o)$ tal que $I_{1k} = D_{1k}$. Así para cada punto fijo p_{2k} y $\bar{p}_{1k} = \bar{p}_{2k}$ se puede seleccionar $p_{1k} \neq p_{2k}$ tal que $I_{1k} = D_{1k}$. Como antes, el conjunto E_{jk} debe ser conectado en p_{2k} y E_k puede ser construído y además mostrar que tiene una intersección no vacía con D_o.

Por consiguiente, para cualquier k y para cualquier $\bar{p}_{1k}$, $\bar{p}_{2k}$ fijadas, se puede construir el conjunto E_{jk} de equilibrio parcial para cualquier dimensión k. Como se mostró arriba, el conjunto E_1 puede ser construído y estará conectado en todas las otras n-1 dimensiones por la media de ambos partidos. El resto de la prueba procede por inducción, a través de la construcción de los conjuntos

$$E^s = \{(p_1,p_2) \ / \ I_{jk} = D_{jk}, \ \text{para } j = 1,2, \ k = 1,\ldots,s\}$$

de equilibrio parcial para s dimensiones simultáneamente. Para $s = 2,\ldots,n$, se construye E^s de E^{s-1} como sigue:

Los puntos $(0,0,\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k})$ y $(1,1,\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k})$ son miembros de E^{s-1} por construcción y, por continuidad, existe algún camino dentro de E^{s-1} incluyendo un camino a un punto $(q,q',\bar{p}_{1k},\bar{p}_{2k})$ con $q,q' \in (0,1)$ tal que $I_{jk} = D_{jk}$ para $j =$ 1,2. Por consiguiente, E^s es no vacío y conectado en las dimensiones restantes.

Por construcción E^n no es vacío y tiene intersección no nula con D_o. Por tanto, existe al menos una pareja distinta de posiciones de partido de equilibrio.

Parte (b). Considerar $D' = \{(p_1,p_2) \in DxD \ / \ p_1 = p_2\}$. Dentro de este conjunto cerrado, cada P_j^P es continuo (e idéntico), y así la existencia de al menos una media de partido de equilibrio convergente sigue directamente del teorema del punto fijo de Brouwer. Se considera alguna pequeña perturbación que decrezca algún p_{jk}. Como en el caso (ii), para este nuevo punto, $I_{jk} > D_{jk}$. Por definición, cuando $I_{jk} > D_{jk}$, la media de la distribución existente es también corrida hacia la izquierda, esto es $\mu_{jk} < p_{jk}$. Por lo tanto, después de cualquier pequeña perturbación, la media de la distribución será movida aún a mayor distancia del punto original, lo que implica inestabilidad. ∎

Aún cuando este resultado no nos proporciona datos para especificar la magnitud de la divergencia entre la posición de los partidos, se presume que esta divergencia es significativa. Se igualan las metas políticas del partido con la media del punto ideal de los activistas p_j, y se presume que los partidos utilizan los recursos de sus activistas en dos formas:

1) Ellos nominan su candidato con un punto ideal c_j^* y plataforma c_j.

2) Trabajan a través de esta nominación o con mayor generalidad, a través del conjunto de nominados para distintos oficios, con el fin de alcanzar dos metas partidistas:

a) Ganar las elecciones con su nómina y

b) La implementación de sus metas políticas.

Se representa la motivación importante de nominar un candidato fuerte que descansa en los principios del partido, con el supuesto de que ningún partido nominará candidatos con metas personales cercanas al activista símbolo del partido de oposición. Esto impone la siguiente condición

$$|p_j - c_j^*| < |p_k - c_j^*|$$

para $j,k = 1,2$, con $j \neq k$.

Sabemos que los partidos tienen un volumen de recursos Z_j, y se asume que lo asignan a sus candidatos para los distintos oficios, a riesgo, en cualquier periodo electoral determinado. Se denota por RP_j el nivel de recursos del partido asignados a su nómina. El interés del activista es de dos tipos:

1) Los intereses institucionales del partido, al tener a sus nominados ganando cargos públicos (una elección).

2) Los intereses políticos del partido.

Para el caso 1) se asume que los activistas son buscadores de beneficios, persiguiendo asegurar los beneficios que fluyen de la captura de cargos públicos por parte del partido. Así se asume que cada partido da al menos alguna cantidad mínima a cada uno de sus candidatos y no algún nominado del partido de oposición.

En el caso 2) se asume que la cantidad que ellos proveen a sus nominados incrementa la cercanía, entre la plataforma electoral de la nómina y la del propio partido, y aumenta la distancia entre la nómina del partido opuesto y su plataforma. Estas condiciones se expresan en la forma siguiente:

Definición 2.2.9: Los intereses institucionales de un partido son tales que

a) $RP_j = 0$ para el candidato k

b) Existe un nivel mínimo de recursos $V_j > 0$ tal que

$$RP_j \begin{cases} = V_j & \text{si } |p_j - c_j| \geq |p_j - c_k| \\ > V_j & \text{si } |p_j - c_j| < |p_j - c_k| \end{cases}$$

Definición 2.2.10: Los intereses políticos de un partido son tales que

a) RP_j se incrementa cuando $|p_j - c_j| \longrightarrow 0$

b) RP_j se incrementa cuando $(|p_j - c_k| - |p_j - c_j|)$ se incremente.

RP_j puede incrementarse solamente para Z_j, la restricción de presupuesto del partido. Esto puede ocasionar algún impacto en la distribución de recursos del partido entre sus nominados. Sin embargo, la competencia dentro del partido sobre los recursos podría ser una fuente limitante del tamaño de recursos del partido que puede ser aprovechable por algún candidato. Pero no se considera tal efecto en este análisis; se asume que los partidos han resuelto el problema de optimización restringido implicado, consistente en la distribución de recursos entre sus candidatos.

2.3 ALGUNAS PROPIEDADES GENERALES DEL JUEGO ELECTORAL

En el modelo espacial, los ciudadanos tienen preferencias politicas y, como maximizadores de la utilidad esperada, pueden participar en la organización de una campaña electoral de un candidato, votar o abstenerse. Los partidos politicos se ven como un conjunto de activistas y como defensores de la plataforma politica del punto ideal de sus miembros simbolos.

Los activistas más prominentes nominan una lista de candidatos y distribuyen los recursos contribuidos a su partido para asegurar cargos públicos y los beneficios que emanan de tenerlos. Cuando un candidato adopta una posición en la campaña, esa plataforma (y la del oponente) merece cierta contribución de los ciudadanos y del partido de la nómina, los cuales son gastados para incrementar la perspectiva electoral del candidato.

El problema estrátegico es, entonces, averiguar qué plataforma deberán adoptar los dos candidatos. La siguiente proposición muestra que el juego candidato-electoral no es simétrico en estrategias, aún si los candidatos no valoran la politica.

Proposición 2.3.1: El juego de dos candidatos no es simétrico (aún si los candidatos no son motivados por política).

Demostración: Un juego es simétrico si, cuando los jugadores intercambian estrategias (posiciones), también intercambian los pagos (mayoría por maximizadores de la mayoría pura). Para el juego candidato-electoral desarrollado, la pluralidad será invertida después de un intercambio de posiciones si y solamente si la diferencia en los niveles de recursos de los candidatos es también exactamente invertida. En ausencia de efectos de los recursos, un cambio en la posición de los candidatos invierte el voto de cada votante, mientras que los que se abstienen se mantengan así. Las contribuciones de los candidatos individuales serán exactamente invertidas, pero las contribuciones de los partidos no necesitan ser así en general.

Construiremos un par de posiciones de los candidatos

$$c = (c_1, c_2) = (A, B)$$

para el cual los recursos del partido no son invertidos.

Para

$$c' = (B, A)$$

sea $B = p_2$ y se selecciona A cercana a p_2 tal que

$$|A - p_1| > |B - p_1| = |p_2 - p_1|$$

Así, cada candidato recibirá más recursos de su partido cuando su posición es B, pués ésta está más cercana a ambos p_j. El propósito de seleccionar A cercano a p_2 es para asegurar que el máximo recurso del partido del primer candidato (cuando está en B) sea aún menor que el mínimo que recibe el segundo candidato (cuando está en A). Tal punto no existirá, solamente en el caso en que el tamaño del partido 1 sea mucho mayor que el del partido 2, en cuyo caso la prueba puede proceder después de un intercambio de índices.

Esta condición se puede representar como sigue:

$$RP_2(A,B) > RP_2(B,A) > RP_1(B,A) > RP_1(A,B)$$

Por tanto, B tiene mayor ventaja en recursos del partido en c que en c', ya que la siguiente condición se cumple

$$RP_2(c) - RP_1(c) > RP_2(c') - RP_1(c')$$

Puesto que la ventaja del recurso individual se invierte exactamente, la ventaja del recurso global no puede invertirse y por ende, el juego candidato-electoral no es, en general, simétrico. ∎

Cuando se trabaja en una dimensión, un intercambio de las posiciones de los candidatos invierte exactamente el voto. Sin embargo, en el juego candidato-electoral que se está desarrollando, el candidato asociado con el mayor partido tiene una ventaja inherente. Este candidato puede muy bien ganar, aún si adopta una posición lejana diferente, siempre que los recursos del partido sean suficientemente grandes para hacer que se cambien de partido la cantidad suficiente de colaboradores.

Proposición 2.3.2: Las siguientes proposiciones son válidas:

a) No todas las posiciones convergentes de los candidatos, conducen a un empate (aún si los candidatos no son motivados por politica).

b) Si los candidatos son motivados en parte por politica, entonces las posiciones convergentes no son necesariamente valoradas iguales por los candidatos.

c) Si los candidatos son motivados en parte por politica, entonces el juego de dos candidatos no es en general, de suma constante.

Demostración: Se considera la posición convergente (p_1,p_1). Por definición, las contribuciones individuales serán iguales, pero el candidato 1 recibirá más recursos de su partido del que recibirá el candidato 2 del suyo (esto presume que el partido 1 no es mucho más pequeño que el partido 2, que el candidato 1 en p_1 recibe menos que el mínimo nivel garantizado para el candidato 2, sino simplemente se intercambian índices). Por lo tanto, ya que cada individuo es indiferente a los dos candidatos antes de la exposición de los recursos y ya que $r_{i1} > r_{i2}$ para todo i, por la condición de Simetría Métrica Modificada se debe tener que

$$\forall\ x,\ P_1^v(x,c,r) > P_2^v(x,c,r)$$

y así, el candidato 1 recibirá más votos. Este resultado se cumple independientemente de que la política sea incluida en las funciones de utilidad de los candidatos. Por lo que se prueba la parte (a).

La utilidad del candidato 1 para esta posición convergente excederá la del candidato 2, por lo que el candidato 1 no solamente gana sino que está cercano a su propio punto ideal basado en política, debido a la restricción sobre la selección de los nominados.

Por continuidad, deben existir puntos en la vecindad de (p_1,p_1) que producen la misma utilidad esperada pero que son cercanos a ambos puntos ideales de los candidatos (a menos que (p_1,p_1) esté sobre la linea entre estos puntos ideales, lo que en general, no es el caso). Puesto que ambos candidatos podrían beneficiarse del movimiento a tal punto, este juego no es, en general de suma constante.

Esta proposición muestra que la adopción de la misma posición del oponente raramente genera empate.

La motivación política es un factor importante que se analiza en el modelo. Esto se ilustra con la siguiente proposición de Calvert (1985), donde se muestra que si se tiene un par de estrategias convergentes, estas no necesariamente constituyen un punto de equilibrio. Para esta demostración se asumirá un punto $z \in D$, la función de utilidad del j-ésimo candidato U_j no fijo en el punto z, P^j la probabilidad subjetiva de que el j-ésimo candidato gane y $1-P^j$ de que gane su oponente para $j = 1,2$, con $P^j(x,y) > 0$ para cualquier par de puntos en una vecindad de la estrategia convergente (z,z).

Proposición 2.3.3: Para un punto z en el interior de D, el par de estrategias convergentes (z,z) no es un punto de equilibrio para los candidatos que actúan bajo riesgo y que están motivados en parte por la política.

Demostración:

Supongamos $j = 1$, y un punto fijo z del candidato 2.

Sea

$$d = \frac{\nabla U_j(z)}{\| \nabla U_j(z) \|}$$

la dirección del gradiente de la utilidad del candidato 1. Ya que U_j no es fija en z, existe un valor ξ_o tal que para todo $\xi \geq \xi_o$,

$$U(z + \xi d) > U(z)$$

Para algún $\delta_o > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que

$$P^1(z + \delta d, z) > 0$$

para todo $\delta \leq \delta_o$. Sea γ el mínimo de δ_o y ξ_o en z. La utilidad esperada del candidato 1 es:

$$U_1(z) = P^1(z,z)U_1(z) + [1-P^1(z,z)]U_1(z)$$

mientras en $z + \gamma d$, su utilidad esperada $U_1(z + \gamma d)$ es

$$P^1(z + \gamma d,z)U_1(z + \gamma d) + [1-P^1(z + \gamma d,z)]U_1(z + \gamma d)$$

ya que $P^1(z + \gamma d,z) > 0$ y $U_1(z + \gamma d) > U_1(z)$, la posición $z + \gamma d$ es preferida por el candidato 1. De esta manera (z,z) no es un punto de equilibrio. ∎

Estos análisis conducen a afirmar que el candidato j podría estar mejor ubicado moviéndose ligeramente a una posición cercana a la posición preferida del partido, con gran probabilidad de ganar.

Se pueden resumir las propiedades generales de la versión extendida del modelo espacial en dos aspectos:

1. La introducción de distintos partidos y sus recursos hacen el juego asimétrico y reducen la atracción de posiciones de candidatos convergentes.
2. La inclusión de la motivación política de los candidatos elimina cualquier posibilidad de un equilibrio convergente.

Estos resultados son considerablemente más generales que los previos, ya que se cumplen para cualquier distribución de las preferencias del ciudadano.

2.3.1 Caso de f(x) Simétrica y el Efecto de los Partidos Políticos

Como se comprobó en la proposición 2.3.2, este modelo espacial expandido no es un juego de suma constante, por lo que habrá una estrategia mixta de equilibrio de Nash, no convergente.

Se puede analizar qué tanto afecta la introducción de partidos políticos al modelo espacial de competencia electoral. La siguiente proposición muestra que si los partidos son suficientemente fuertes, entonces la media multivariada x_m de $f(x)$ no determina un par de estrategias puras de equilibrio aunque $f(x)$ sea simétrica y los candidatos se preocupen solamente por la victoria.

Proposición 2.3.1.1: Sean $f(x)$ simétrica o no. Si los candidatos son maximizadores de la pluralidad pura (o de la probabilidad de ganar), entonces la pareja de estrategias (x_m, x_m), donde x_m es la media multivariada de $f(x)$, no es un par de estrategias de equilibrio, siempre que los partidos sean suficientemente grandes en recursos.

Demostración: Para $f(x)$ simétrica con mediana 0, existe una posición de partido de equilibrio tal que $p_1 = -p_2$ y $Z_1(p) = Z_2(p)$, (Aldrich (1983a,b)).

En $c = (0,0)$, todos los recursos y las funciones de densidad de probabilidad de los votos son idénticos, de manera que el resultado esperado es un empate. Una pluralidad maximizadora del candidato j preferirá cualquier movimiento a $(\varepsilon,0)$, donde ε es una distancia arbitrariamente pequeña de 0 en la dirección de p_j, si y sólo si esta posición provee al candidato j de una pluralidad positiva.

De estos movimientos, se derivan tres hechos:

1. El candidato j será menos favorecido por la mayoría de los votantes potenciales, ya que el otro candidato permanece en la media multivariada x_m.

2. Por la misma razón, el candidato j recibirá menos recursos individuales que el otro candidato k.

Sea AC la ventaja de k en los recursos alcanzados por él; esto es,

$$AC = RC_k(\varepsilon,0) - RC_j(\varepsilon,0)$$

3. El candidato j recibirá más recursos de su partido que el candidato k del suyo, ya que él está ahora más cercano y los dos partidos son de igual tamaño. Denotemos como AP la ventaja de j en recursos del partido

$$AP = RP_j(\varepsilon,0) - RP_k(\varepsilon,0)$$

AP puede ser expresado como una proporción q del tamaño común Z del partido, y ya que AC no se altera por cambios en Z, por el axioma de Arquímedes se puede seleccionar, para cualquier q > 0, algún número real Z_o lo suficientemente grande que haga

$$AP > AC$$

Por lo tanto, para partidos lo suficientemente grandes, un candidato puede incrementar su posibilidad de victoria moviendóse hacia su propio partido y dada la restricción anterior sobre los puntos ideales del candidato, él también se moverá hacia su propio punto ideal (a menos que $c_j^* = 0$). En cualquier caso, j preferirá $(\varepsilon,0)$ a $(0,0)$. ∎

Esta proposición enfatiza los efectos de los partidos políticos sobre el modelo espacial expandido. La incorporación de partidos políticos elimina la noción de convergencia de los candidatos y esto elimina la convergencia al centro de la política.

La última proposición es más constructiva. Se supone que f(x) es unimodal y simétrica.

Proposición 2.3.1.2: Sea f(x) unimodal y simétrica con media multivariada 0. Si los partidos son suficientemente grandes y con $p_1 = -p_2$, se tiene que, para j = 1,2, la posición óptima del j-ésimo candidato está dentro del triángulo con vértice $(p_j, c_j^*, 0)$ (fig 2.1).

Demostración: Los candidatos pueden obtener el máximo de la utilidad basada en la política en c_j^*, el máximo de los recursos del partido en p_j, la máxima contribución individual y (para recursos de partidos fijos) la pluralidad del voto en la mediana 0. Para cualquier punto exterior del triángulo con estos tres puntos como vértices, el candidato j puede, sin ambigüedad, estar mejor posicionado, moviéndose simultáneamente hacia los tres puntos, es decir, hacia puntos dentro del triángulo. (Los puntos están unidos por líneas rectas formando un triángulo porque cada función P_j es definida como monótona con la distancia Euclideana). Como se demostró en la proposición 2.3.1, si los partidos son suficientemente grandes, el candidato j preferirá puntos cercanos a p_j sobre la media, ya que los movimientos hacia la líneas que conectan p_j y c_j^* incrementarán sus recursos (y así sus votos), al igual que su utilidad basada en política.

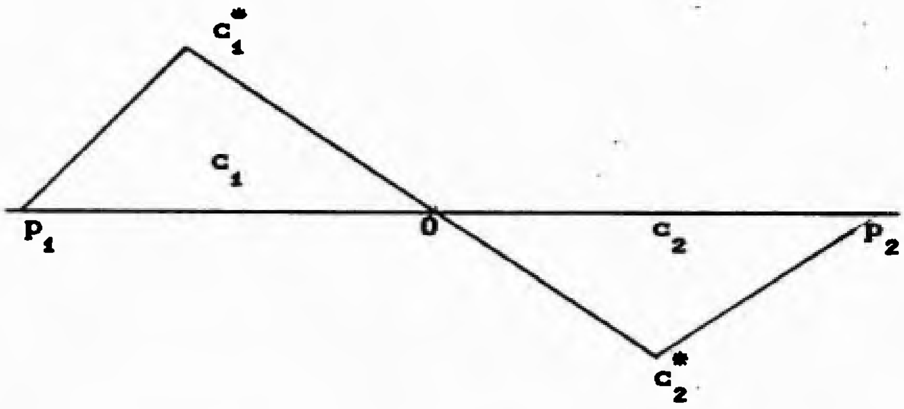


fig. 2.1 Restricción de la posición óptima del candidato

Se observa que la posición óptima de cada candidato está confinada a permanecer en la región limitada por la posición del votante medio, el centro del partido del candidato y el punto ideal de la política del candidato.

Este modelo "confinado" no especifica la localización exacta de la plataforma óptima del candidato, la cual será determinada por la importancia relativa que el candidato asigne a la victoria y a la política, asi como al tamaño del partido, relativo al nivel de recursos que un candidato pueda reunir de la organización de su propia campaña. En la misma medida en que el partido sea fuerte, en este sentido, c_j será atraido hacia p_j. Inversamente, mientras más alta sea la contribución individual, relativa a los recursos del partido, c_j se moverá más cerca de la media 0, donde la contribución individual máxima pueda ser reunida.

Mientras más alto sea el valor relativo que el candidato j asigne a la política versus ganar por ganar, menos significativos serán estos dos factores. Esto es, un candidato más relacionado con política seleccionará un óptimo c_j cercano a su propio punto ideal c_j^*, basado en la política. Por supuesto, todo esto es complicado por lo extenso de la incertidumbre y las estrategias del candidato oponente.

Si los partidos contribuyen con una cantidad insignificante de recursos, entonces el triángulo se contraerá de la línea entre c_j^* y la media en 0. Inversamente, si se presume que los candidatos valoran sólo la victoria (esto es, son maximizadores de la utilidad esperada del modelo espacial estándar), entonces el triángulo se contraerá de la línea entre la posición p_j del partido y la media en 0. En este sentido el tamaño del partido será directamente trasladado al grado de divergencia del candidato.

Más aún, con partidos en equilibrio, habrá un patrón regular para esa divergencia de manera que cada activista consecuentemente, se desplace del centro hacia su propio partido. Así, los partidos introducirán una regularidad estructurada para la estrategia del candidato. La reintroducción de las preferencias políticas del candidato expandirá el rango relativo de divergencia, ya que los puntos ideales del candidato serán dados más aleatoriamente (pero, en este modelo, no totalmente irrestricto, se debe a la necesidad de obtener la nominación del partido). Aún así, si los partidos políticos son suficientemente fuertes, introducirán un grado de estructura a la divergencia predecible de las posiciones del candidato.

CONCLUSIONES

Del trabajo realizado se puede concluir lo siguiente:

1. Esta versión expandida del modelo espacial puede ser considerada de mayor aceptación empírica y a la vez teorica, que el modelo estándar de Downs de 1957.

2. El trabajo es de gran interés pues se justificó y desarrolló un modelo espacial expandido que incorpora un rico y más completo rango de alternativas y estructuras institucionales, de manera que represente con mayor precisión la contienda de dos candidatos en elección.

3. Se demostró la existencia general de un punto de equilibrio en $\mathbb{R}^n$, que interpretado como la arena electoral o espacio político, representa un par de paltaformas políticas de los partidos, en donde ningún candidato puede, racionalmente, cambiar su estrategia unilateralmente.

6. Se analizó el efecto que producen las preferencias del candidato sobre su posición en la contienda.

5. Se exploraron las implicaciones de éste modelo expandido, haciendo énfasis en el impacto de estas nuevas estructuras y constrastándolas con los resultados encontrados en el modelo espacial tradicional.

6. Se proporciona una orientación para la toma de decisiones en problemas de contienda, con lo que los partidos podrían distribuir sus recursos adecuadamente, al conocer a los candidatos con preferencias convergentes a ellos.

7. El uso del enfoque matemático y muy especialmente del enfoque cuantitativo, no ofrece una solución global ni definitiva a los problemas de índole electoral. Sin embargo sirven para llegar a conclusiones útiles e interesantes vinculadas a problemas de índole económico y social.

RECOMENDACIONES

Al finalizar este trabajo quedan un sinnúmero de interrogantes por resolver. De las distintas direcciones posibles en las cuales se podrían orientar futuras investigaciones, es interesante resaltar las siguientes:

1. Desarrollar una justificación más rigurosa para la nominación política, posiblemente la parte más importante de los partidos políticos en elecciones.

2. Desarrollar, de manera general, las condiciones bajo las cuales podría darse un resultado sobre la existencia de un punto de equilibrio de las estrategias del candidato.

3. Establecer objetivos para la selección de dos partidos políticos representativos de nuestro país y adecuar el modelo para la solución de problemas concretos de esos partidos.

BIBLIOGRAFIA

1. ALDRICH, John H. 1983a — A DOWNSIAN SPATIAL MODEL WITH PARTY ACTIVISM. American Political Science Review, 974-990. Vol 77.

2. ALDRICH, John H. 1983b — A MODEL SPATIAL WITH PARTY PARTY ACTIVISTS: Implications for Electoral Dynamics. Public Choice: 69-199. Vol 41

3. ALDRICH, John H. Mc Ginnis, Michael. 1989 — A MODEL OF PARTY CONSTRAINTS ON OPTIMAL CANDIDATE POSITIONS Formal Theories of Politics: Mathematical Modelling in Politice Science, Pergamon press. Vol 12

4. ARANSON, Peter Peter C. Ordeshook. 1972 — SPATIAL STRATEGIES FOR SEQUENTIAL ELECTIONS. In Probability Models of Collective Decision Making. Columbus: Merril

5. ATTALI, Jaques. 1974 — LOS MODELOS POLITICOS. Editorial Labor.

6. CALVERT, Randall. 1985 — ROBUSTNES OF THE MULTIDIMENSIONAL VOTING MODEL: Candidate Motivations, Uncertainty and Convergence. America Journal of Political Science 69-65. Vol 29

7. DOWNS, Anthony 1957 — AN ECONOMIC THEORY OF DEMOCRACY. New York: Harper & Row.

8. KEENEY, Ralph L. Raiffa, Howard. 1976 — DECISIONS WITH MULTIPLE OBJECTIVES: Preferences and value tradeoffs. New York: John Wiley.

9. Mc KELVEY, Richard. 1976 — **POLICY RELATED VOTING AND ELECTORAL EQUILIBRIUM.** Econometric 43: 815-843.

10. NASH, J.F. — **EQUILIBRIUM POINTS IN N-PERSONS GAMES.** Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 36 1950, pp. 48.

11. PEREZ VILAPLANA, José. 1972 — **INTRODUCCION A LA TEORIA DE JUEGOS.** Apuntes del Curso de Investigación de Operaciones. Universidad de Panamá.

12. RAIFFA, HOWARD; Pratt, John; Schalaifer, Rober. 1964 — **THE FOUNDATIONES OF DECISION UNDER UNCERTAINTY:** An Elementary Exposition. Journal of the American Statistical Association, number 306, volume 59.

13. RIKER, William; Ordeshook, Peter 1968 — **A THEORY OF THE CALCULUS OF VOTING.** American Political. Science Riview 62: 25-42

14. SCHOEMAKER, Paul J. 1982 — **THE EXPECTED UTILITY MODEL:** Its Variants, purpose, Evidence and Limitations. Journal of Economic Literature, vol. XX 529-563

15. VON NEUMANN, John; Morgenstern, Oskar — **THEORY OF GAME AND ECONOMIC BEHAVIOR** Second edition. Princeton NJ. 1947.