

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMÁTICA

LA INTEGRAL DE HENSTOCK-KURZWEIL

JAVIER ENRIQUE HERRERA CASTILLO

ASESOR DR JAIME GURTIERREZ

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS

REQUISITOS PARA OPTAR AL

GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS

CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2005

13449 OBSERVADO DEL AUTOR

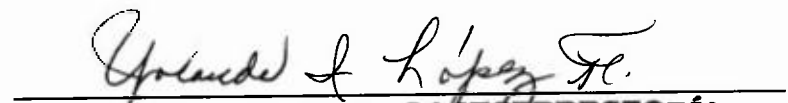
- 6 MAR 2006

**APROBADO POR:**

  
**Dr. JAIME GUTIERREZ**  
PRESIDENTE

  
**Dr. ROGELIO ROSAS**  
MIEMBRO

  
**MSc. ELMIR DE CARVALHO**  
MIEMBRO

  
**REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA  
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO**

**FECHA:** 29 de diciembre de 2005

## **DEDICATORIA**

Dedico este trabajo a mi madre que con mucho sacrificio luchó para darme la educación que hoy poseo, a mi esposa, soporte en mis momentos de debilidad, a mi hijo Javier y especialmente a mi hija Lesly Katherine quién con una dulce sonrisa siempre calma mis angustias

## **AGRADECIMIENTO**

Agradezco a Dios por haberme dado el derecho a la vida, a mi madre por tanta comprensión, a mi esposa por tanto cariño, a mis hijos por su excesiva paciencia, a mis profesores por su dedicación, a mis compañeros por su apoyo y a mi amigo y hermano Jaime Gutiérrez quién ha sido una guía en los momentos más difíciles de mi vida, Jaime mi eterno agradecimiento.

## ÍNDICE

<b>RESUMEN.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>1</b>
<b>ABSTRACT.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>2</b>
<b>INTRDODUCCIÓN.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>3</b>
<b>CAPÍTULO 1</b>							
<b>EVOLUCIÓN DE LA INTEGRACIÓN.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>5</b>
<b>CAPÍTULO 2</b>							
<b>INTRODUCCIÓN A LA INTEGRAL</b>							
<b>HENSTOCK-KURZWEIL.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>14</b>
2.1 Conjuntos Nulos, Funciones Nulas y							
Conjuntos Excepcionales.	.	.	.	.	.	.	<b>27</b>
2.2 La Integrabilidad de Funciones Nulas	.	.	.	.	.	.	<b>29</b>
<b>CAPÍTULO 3</b>							
<b>PROPIEDADES BÁSICAS DE LA INTEGRAL DE</b>							
<b>HENSTOCK-KURZWEIL.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>31</b>
3.1 Funciones Escalonadas .	.	.	.	.	.	.	<b>41</b>
<b>CAPÍTULO 4</b>							
<b>TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>46</b>
<b>CAPÍTULO 5</b>							
<b>LEMA DE HENSTOCK.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>54</b>
<b>CAPÍTULO 6</b>							
<b>LA INTEGRAL DE HENSTOCK-KURZWEIL SOBRE</b>							
<b>INTERVALOS NO ACOTADOS.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>63</b>
6.1 Propiedades de la integrabilidad absoluta.	.	.	.	.	.	.	<b>73</b>
<b>CAPÍTULO 7</b>							
<b>TEOREMAS DE CONVERGENCIA.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>76</b>
<b>CAPÍTULO 8</b>							
<b>EL PAPEL DE LA H-K INTEGRAL</b>							
<b>EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO Y DEL ANÁLISIS.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>86</b>
<b>CONCLUSIONES.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>90</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.</b>	.	.	.	.	.	.	<b>91</b>

## RESUMEN

En este trabajo se expone, la teoría de integración de Henstock-Kurzweil como una generalización la integral de Riemann. Se discuten las propiedades y conceptos fundamentales de esta integral, tales como El Teorema Fundamental del Cálculo, la no existencia de integrales impropias, los teoremas de convergencia, etc. Por último se concluye con una discusión acerca de la viabilidad de enseñar esta teoría de integración en los cursos de Cálculo o en los cursos de Análisis Matemático de pregrado para los estudiantes de ingeniería y Matemática.

## ABSTRACT

In this work shows, the theory of integration of Henstock-Kurzweil as a generalization of the Riemann integral. Properties and fundamental concepts of this integral, such as "The Fundamental Theorem of Calculus, the nonexistence of improper integral", the convergence theorems, etc are discussed. To finish, we have a discussion about the viability to teach this theory of integration to the freshman calculus or mathematical Analysis for Mathematical and engineering students.

## INTRODUCCIÓN

Es conocido que la integral de Riemann no es la más adecuada para los estudios en matemática avanzada, ya que existen muchas funciones que no son Riemann integrables y que no posee teoremas de convergencia lo suficientemente fuertes. Estas “deficiencias” fueron corregidas por Lebesgue quien desarrolló su teoría en los inicios del siglo pasado y su integral se convirtió en la herramienta de la investigación matemática.

Sin embargo, esta teoría también presenta algunas dificultades y se necesitaba una teoría de integración superior a la teoría de Lebesgue. En sus estudios de ecuaciones diferenciales en 1950, J. Kurzweil introduce una versión generalizada de la integral de Riemann y en 1960 Henstock hace el primer estudio sistemático de la nueva integral la integral de Henstock- Kurzweil (H-K integral), pero por alguna razón esta integral no ha llegado a ser muy conocida, a pesar de que es esencialmente fácil de describir como la integral de Riemann.

La idea de desarrollar este trabajo bibliográfico, nace de la necesidad de dar a conocer en nuestro medio, esta teoría en mención y el mismo tiene los siguientes objetivos: Reseñar la evolución de las teorías de integración, presentar los fundamentos de la teoría de integración según Henstock-Kurzweil, analizar comparativamente la teoría de integración según Henstock-Kurzweil con la teoría de integración de Lebesgue, discutir la conveniencia de incluir la teoría de integración de Henstock-Kurzweil en los cursos de Análisis Matemático y Cálculo que se ofrecen en nuestras universidades.

Consta de ocho capítulos, el primero es un resumen de la evolución de la integración. En el segundo damos la definición de la integral de Henstock-Kurzweil y algunos ejemplos que ilustran la generalidad de la misma, luego el tercer capítulo muestra las propiedades básicas, el cuarto capítulo presentamos el Teorema Fundamental del Cálculo, en el quinto se presenta el Lema de Henstock principal herramienta para establecer una de las propiedades más importantes de esta integral los teoremas de convergencia, también se demuestra que esta integral no posee integrales impropias.

En el sexto capítulo se hace un estudio de la integral de Henstock\_Kurzweil sobre intervalos no acotados y en el séptimo capítulo mostramos que tan profundo es el leve cambio que se realiza en la definición de la integral de Riemann para definir esta nueva integral, los teoremas de convergencia puesto que para establecer los mismos no necesitamos de condiciones tan fuertes. Por último, en el octavo capítulo, realizamos una exposición de algunos matemáticos tales como Robert Bartle entre otros sobre la enseñanza de esta nueva teoría y además damos nuestra opinión acerca de este punto.

La metodología utilizada consistió en la revisión de la bibliografía acerca del tema, para recopilar las definiciones, propiedades fundamentales y desarrollar los problemas que comúnmente aparecen como propuestos.

## **CAPÍTULO 1**

## CAPÍTULO 1

### EVOLUCIÓN DE LA INTEGRACIÓN

La integración es un concepto matemático que usualmente se asocia a la idea intuitiva de determinar el área de la región limitada por la gráfica de una función

Los orígenes de la integración se remontan a la cultura griega. en Grecia se dan los primeros pasos debido al problema de la cuadratura

**“Dada una figura plana, construir un cuadrado de igual área”.**

La primera cuadratura de una figura curvilínea cerrada fue dada por Hipócrates en el siglo quinto A.C., quién entre otros problemas de cuadraturas probó que el área limitada por el semicírculo de radio 1 y un cuarto del círculo de radio 2 (ver figura 1.1), es igual al área del cuadrado unitario

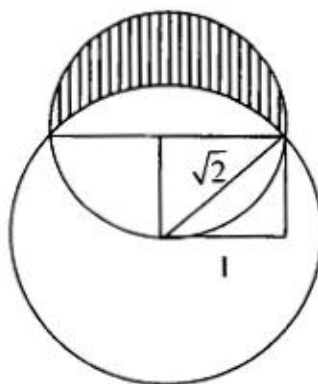


Fig 1.1

En el tercer siglo Antes de Cristo, Arquímedes (287-212 A C ) cuadró el segmento parabólico, deduciendo que esta área es cuatro tercio el área del triángulo de máxima área inscrita en el segmento parabólico ( ver fig 1 2)

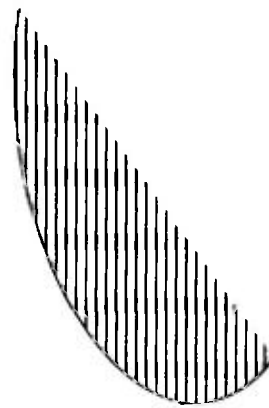


Fig 1 2

Arquímedes realizó numerosas cuadraturas , algunas de las cuales fueron realizadas utilizando construcciones extraordinariamente ingeniosas, pero la mayoría fueron basadas en la técnica de encajar el área de la región buscada entre polígonos inscritos y circunscritos, lo que se conoce como el Método de Exhaución, obviamente no hizo explícito del concepto de límite, pero en términos modernos la parte final de la discusión de una prueba que emplee el Método de Exhaución se fundamenta en probar la unicidad del límite de una sucesión de Cauchy

No existen evidencias de que entre Arquímedes y Cavalieri (1598-1647), se hubiese utilizado las cantidades infinitesimales, por lo que existe un salto de 2000 años hasta que éste matemático Cavalieri, diera los siguientes pasos hacia la construcción de la teoría de integración, esto se justifica si se reconoce la necesidad de una adecuada representación de los números reales, en este caso la representación decimal

Cavalieri, estudia áreas planas, redescubre las bases metodológicas del método mecánico y desconocido de Arquímedes, logra calcular lo que en nuestros tiempos escribimos como  $\int x^k dx$ , para  $k = 1, 2, 3, \dots, 9$ , su principal dificultad fue la evaluación de  $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$

Las desventajas de su método de indivisibles son Poca generalidad, debilidad lógica, excesivos razonamientos y procedimientos geométricos fueron superados rápidamente por Torricelli (608-1647), Fermat (1601-1665), Pascal (1623-1662), Wallis y Roberval En particular Fermat evalúa  $\int x^q dx$ , por medio de un brillante y simple método, por otra parte Pascal interpretó las sumas de líneas de Cavalieri como una suma infinitesimal de rectángulos

Si combinamos los resultados de Fermat con los de Cavalieri obtenemos la linealidad de la integral definida, con lo que podemos concluir que a mediados del siglo XVII se hubiese podido evaluar la integral  $\int P(x) dx$ , donde  $P(x)$  es un polinomio

Wallis, editor de obras de Arquímedes, aritmetizó los indivisibles de Cavalieri asignándole valores numéricos convirtiendo así el cálculo de áreas hasta entonces algo meramente geométrico, en cálculos aritméticos aplicando un primitivo proceso de paso al

límite, y el uso no justificado del infinito. A Wallis debemos el símbolo que usamos para denotar el “infinito” ( $\infty$ )

Otro de los protagonistas de la historia de la integración es sin duda alguna Grégoire de San Vincent, quién publica sus principales aportaciones en 1647 en su “Opus Geometricum”, en ella desarrolla un método geométrico de integración, estudia las series geométricas incluyendo diversas aplicaciones de las mismas, San Vincent discute la conocida paradoja de Zenón, sobre Aquiles y la tortuga y la resuelve magistralmente, argumentando que Zenon no consideró en la persecución de Aquiles que en el tiempo se formaba una progresión geométrica de razón  $\frac{1}{2}$  y por tanto tardaba un tiempo finito en alcanzar la tortuga, finalmente, una de sus aportaciones más valiosas a la teoría de la integración fue el descubrimiento que está ligado a la función logaritmo y el área bajo la hipérbola  $xy = 1$ , este resultado es expresado como  $\log_e(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$

Desde Hipócrates hasta Grégoire de San Vincent hemos mencionado los avances realizados, de los cuales algunos desembocaron en la geometría analítica y la teoría de la derivada. Pero lo que hoy conocemos como Cálculo empieza a tomar forma cuando Isaac Newton (1643-1727) creó la teoría de las fluxiones y el método de las tangentes inversas para encontrar áreas bajo curvas y por otro lado Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quien desconocía el trabajo no publicado de Newton descubre el proceso inverso de encontrar rectas tangentes para calcular áreas, y quien llegó al descubrimiento por un camino muy diferente. Leibniz introdujo la terminología Calculus Differentialis y Calculus Integralis, debido a que para encontrar rectas tangentes se utilizan diferencias y

para encontrar áreas se utilizan sumas, sintetizando esto con “El Teorema Fundamental del Cálculo”

Una explicación más amplia de esta afirmación utilizando la terminología de los tiempos modernos es la siguiente

**Teorema Fundamental del Cálculo**

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable y continua en  $x_0 \in [a, b]$ , entonces

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

es derivable en  $x_0$  y  $G'(x_0) = f(x_0)$

Discutamos la demostración de este teorema

**Premier caso:** Supongamos que  $h > 0$ , entonces

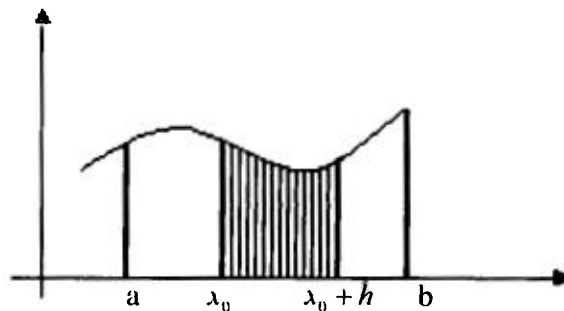


Fig 1 3

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

por el teorema del valor medio para integrales en el intervalo  $[x_0, x_0 + h]$ , tenemos que

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = f(x_h)h,$$

para algun valor  $x_h$  entre  $x_0$  y  $x_0 + h$  y en consecuencia

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = f(x_h)h$$

Para calcular la derivada de G en  $x_0$ , calculamos el siguiente límite

$$G'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_h) = f(x_0)$$

pero cuando  $h$  se aproxima a cero el punto  $x_h$  se aproxima a  $x_0$  y en consecuencia

$$G'(x_0) = f(x_0)$$

probando así lo afirmado

**Segundo caso:** Supongamos que  $h < 0$ , entonces

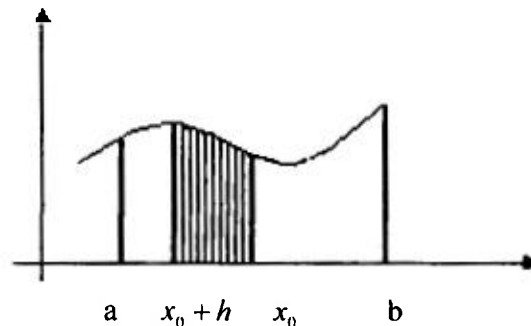


Fig 1 4

$$G(x_0) - G(x_0 + h) = \int_a^{x_0} f(t)dt - \int_a^{x_0+h} f(t)dt = \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt$$

por el teorema del valor medio para integrales en el intervalo  $[x_0 + h, x_0]$ , de longitud

$(-h)$ , tenemos que

$$\int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt = f(x_h)(-h)$$

para algún valor  $x_h$  entre  $x_0 + h$  y  $x_0$  y en consecuencia

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = f(x_h)h$$

Como en el caso anterior, para calcular la derivada de  $G$  en  $x_0$ , calculamos el siguiente límite

$$G'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_h) = f(x_0)$$

cuando  $h$  se aproxima a cero el punto  $x_h$  se aproxima a  $x_0$  y en consecuencia

$$G'(x_0) = f(x_0)$$

probando así lo afirmado

En notación de Leibniz podemos expresar el resultado de este teorema como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) = f(x) \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{dx} \int f = f$$

que nos da una manera más clara de expresar la relación entre la Derivada y la Integral, como operaciones inversas

Luego en el siglo XIX, Agustín Cauchy (1789-1857) finalmente desarrolla una teoría rigurosa del límite y nos da la primera definición de integral definida, investigando la integral para funciones continuas en intervalos cerrados, pero en vista de la importancia de la serie de Fourier y que sus coeficientes son dados por integrales fue necesario definir una integral para funciones más generales

Este problema fue resuelto por Bernhard Riemann (1826-1866), redefiniendo la definición de Cauchy, él estudia la integral de funciones continuas salvo en un número

finito de discontinuidades y formaliza lo que hoy conocemos como La Integral de Riemann, adoptando una perspectiva nueva y diferente, separó el concepto de integración de su contraparte, la diferenciación. Examinó de forma aislada el interesante proceso de sumas y límites para encontrar áreas. Para definir esta integral uno aproxima el área bajo la gráfica de la función por la suma de áreas de rectángulos infinitesimales y toma el límite de la suma de las áreas.

Riemann amplió el panorama considerando todas las funciones definidas sobre un intervalo para las que era posible definir este proceso de integración: la clase de funciones integrables.

Desafortunadamente, algunas funciones no tienen bien definidos los límites de estas sumas, así que ellas no tienen integral de Riemann, es decir, no son Riemann integrables.

Las "limitaciones" de la integral de Riemann fueron "remediadas" al comienzo del siglo XX por Henry Lebesgue (1875-1941). En 1902, Lebesgue ideó una nueva teoría de integración, superando mucho de las "insuficiencias" de la integral de Riemann, su definición que es apreciablemente más complicada, produce algunos teoremas para la convergencia y un amplio conjunto de funciones integrables, ya que toda función que es integrable según Riemann es integrable según Lebesgue y más aún las integrales coinciden, pero existen funciones que son integrables según Lebesgue pero no según Riemann.

Como parte del desarrollo de la integral de Lebesgue, él crea el concepto de medida de Lebesgue, concepto que da vuelta a la generalización de la integración y

conduce al campo moderno de la Teoría de la Medida, pero la integral de Lebesgue también posee “algunas deficiencias”

Una respuesta levemente más satisfactoria, es decir, nociones más generales de la integración, fueron dadas en 1912 por Arnaud Denjoy (1884-1974) y en 1914 por Oskar Perron (1880-1975), pero las definiciones resultaron complicadas

Décadas más tarde Ralph Henstock (1955) y Jaroslav Kurzweil (1957), encuentran una formulación mucho más simple que la integral Denjoy-Perron. En efecto, la formulación de Henstock-Kurzweil, es considerablemente más sencilla que la integral de Lebesgue y su definición es sólo una leve modificación de la definición de la integral de Riemann. Esto ha traído como consecuencia, que el interés en esta integral se haya levantado en las últimas décadas y algunos matemáticos abogan por enseñar esta integral junto a la integral de Riemann o Lebesgue o incluso, que se enseñe en lugar de éstas

## **CAPÍTULO 2**

## CAPÍTULO 2

### INTRODUCCIÓN A LA INTEGRAL HENSTOCK-KURZWEIL

Es muy conocido que la integral de **Lebesgue** es una integral más general que la integral de **Riemann**, en el sentido de que toda función **Riemann** integrable es **Lebesgue** integrable y de teoremas de convergencia menos restrictivos. Sin embargo, la integral de **Lebesgue** como generalización de la integral de **Riemann** es técnicamente difícil de describir en términos básicos y no es inmediata la relación entre ellas.

Existe una integral llamada la **Integral de Gauge**, también conocida como la **Integral Henstock-Kurzweil (H-K)** o la integral generalizada de **Riemann**, la cual en esencia es tan simple de definir como la integral de **Riemann** y a su vez generaliza la integral de **Lebesgue**.

En esta sección introducimos la definición de esta integral y también damos varios ejemplos que ilustran su generalidad. La definición es una ligera variación de la clásica definición de la integral de **Riemann**, pero el efecto es muy profundo pues se obtiene una integral más general que la integral de **Lebesgue**, sin **integrales impropias** y además satisface teoremas de convergencia menos restrictivos.

En la primera parte de este trabajo trabajaremos con intervalos acotados de la recta real ( $\mathbb{R}$ ). Si  $a$  y  $b$  son números reales y  $a \leq b$ , utilizaremos la siguiente notación,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \text{ (intervalo cerrado)}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \text{ (intervalo abierto)}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \text{ (intervalo abierto por la derecha)}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \text{ (intervalo abierto por la izquierda)}$$

El punto **a** es llamado punto **inicial** y el punto **b** es llamado punto **final** de cada uno de estos intervalos

**Definición 2.1:** Si  $I = [a, b]$ , con  $a \leq b$  definimos la longitud de  $I$

$$l(I) = b - a$$

Note que  $l(I) \geq 0$  y que  $l(I) = 0$  si y sólo si los puntos extremos de  $I$  coinciden

Similarmente definimos la longitud de cualquiera de los intervalos de la forma

$$(a, b), [a, b), (a, b]$$

es decir,  $b - a$  y en particular  $l(\emptyset) = 0$

**Definición 2.2:** Una partición etiquetada del intervalo  $I = [a, b]$  es un conjunto finito de pares ordenados  $D = \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^m$ , donde  $\{I_i\}_{i=1}^m$  es una partición de  $I$  que esta formada por subintervalos cerrados no traslapados, es decir, intervalos que tienen intersección vacía o contiene a lo mas un punto, el cual necesariamente es el punto final y el punto inicial de dos intervalos consecutivos y  $t_i$  es un punto que pertenece a  $I_i$ . En este caso el punto  $t_i$  es llamado la etiqueta de  $I_i$ .

**Observación 2.1:** Es claro que dada una partición cualquiera de  $I$ , esta puede ser etiquetada de infinitas formas

**Definición 2.3:** Sean  $f: I \rightarrow R$  una aplicación y  $D$  una partición etiquetada de  $I$  la suma de Riemann de  $f$  con respecto a  $D$  se define por

$$(2.1) \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^m f(t_i) \Delta(t_i),$$

si  $I_i = [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ , para  $i=1, 2, \dots, n$ , entonces esta suma de Riemann toma la forma

$$(2.2) \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^m f(t_i)(x_i - \lambda_{i-1})$$

**Definición 2.4:** Sea  $I = [a, b] \subset R$ , y  $\delta: I \rightarrow R$  una función,  $\delta$  es llamada una **función medidora** sobre  $I$  si  $\delta(t) > 0$  para todo  $t \in I$

**Definición 2.5:** Sea  $I = [a, b]$  y sea  $D = \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n$  una partición etiquetada. Si  $\delta$  es una función medidora sobre  $I$ , entonces decimos que  $D$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $I$ , si

$$I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)],$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$

Veamos ahora algunas de las propiedades y algunos ejemplos que se desprenden de este concepto

**Ejemplo 2.1:** Supongamos que  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son funciones medidoras sobre  $I$  y si definimos

$$\delta(t) = \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\} \text{ para todo } t \in I$$

entonces  $\delta$  es una función medidora sobre  $I$ . Es claro que toda partición de  $I$  que es  $\delta$ -fina es  $\delta_1$ -fina y  $\delta_2$ -fina, esta construcción se puede extender a cualquier número finito de funciones medidoras

**Ejemplos 2.2:**

a Si  $\delta > 0$  es un número positivo, entonces podemos definir una función medidora  $\delta: I \rightarrow R$  de la siguiente manera

$$\delta(t) = \delta, \text{ para todo } t \in I,$$

tal función es conocida como la función medidora constante

b Sea  $a < c < b$  y sea  $\delta$  una función medidora sobre  $[a, b]$ . Si  $D'$  es una partición  $\delta$ -fina de  $[a, c]$  y si  $D''$  es una partición  $\delta$ -fina de  $[c, b]$ , entonces  $D' \cup D''$  es una partición  $\delta$ -fina de  $[a, b]$

c Sea  $a < c < b$  y sean  $\delta'$  y  $\delta''$  dos funciones medidora sobre los intervalos  $[a, c]$  y  $[c, b]$  respectivamente. Se define  $\delta$  de la siguiente manera

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta'(t) & \text{si } t \in [a, c) \\ \min\{\delta'(c), \delta''(t)\} & \text{si } t = c \\ \delta''(t) & \text{si } t \in (c, b] \end{cases}$$

entonces  $\delta$  es una función medidora sobre  $[a, b]$ . Además, si  $D'$  es una partición  $\delta'$ -fina de  $[a, c]$  y  $D''$  es una partición  $\delta''$ -fina de  $[c, b]$ , entonces  $D' \cup D''$  es una partición de  $[a, b]$

d Sean  $\delta'$  y  $\delta''$  como en c y sea  $\delta^*$  definida de la siguiente manera sobre  $[a, b]$

$$\delta^*(t) = \begin{cases} \min\left\{\delta'(t), \frac{1}{2}(c-t)\right\} & \text{si } t \in [a, c) \\ \min\{\delta'(c), \delta''(c)\} & \text{si } t = c \\ \min\left\{\delta''(t), \frac{1}{2}(t-c)\right\} & \text{si } t \in (c, b] \end{cases}$$

Es claro que  $\delta^*$  es una función medidora sobre  $[a, b]$  y es fácil probar que toda partición  $D$ ,  $\delta^*$ -fina de  $[a, b]$  debe tener a  $c$  como una etiqueta para cualquier subintervalo de  $D$  que contenga  $c$ , así si reacomodamos la partición, toda partición  $D$ ,  $\delta^*$ -fina dará lugar a una partición de  $[a, c]$  que es  $\delta^*$ -fina y a una partición de  $[c, b]$  que es  $\delta^*$ -fina

Probaremos ahora que si  $\delta$  es cualquier función medidora definida sobre  $I$ , entonces siempre existe una partición de  $I$  que es  $\delta$ -fina. Este resultado fue establecido y utilizado en los espacios  $R^m$ ,  $m \geq 1$ , por Pierre Cousin (1867-1933)

**Teorema 2.1: (Lema de Cousin).** Sea  $\delta$  una función medidora el intervalo  $I = [a, b]$ . Entonces existe al menos una partición etiquetada  $\delta$ -fina sobre  $I$ .

**Prueba:** Consideremos el subconjunto  $E$  de  $I$ , por  $E = \{t \in I \mid \exists \text{ una partición etiquetada } \delta\text{-fina de } [a, t]\}$

Es claro que  $E \neq \emptyset$ , en efecto sea  $x \in (a - \delta(a), a + \delta(a))$  tal que  $a < x < b$ , entonces  $\{a, [a, x]\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina, es decir  $a \in E$ .

Por otro lado, como  $E$  está acotado superiormente entonces tiene un supremo, sea  $y = \sup E$ , mostraremos que  $y \in E$ . Escojamos  $x \in E$  tal que  $x \in \delta(y)$  y  $x < y$ , entonces existe una partición  $D$   $\delta$ -fina de  $[a, x]$ . El conjunto  $D \cup \{(y, [x, y])\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, y]$ , es decir  $y \in E$ .

Mostremos ahora que  $y = b$ , para ello supongamos que  $y < b$  y escojamos

$w \in \delta(y) \cap (y, b)$  Sea  $D$  una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, y]$  Entonces  $D' = D \cup \{(y, [y, w])\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, w]$ , pero esto contradice la definición de  $y$ , con lo cual  $y = b$

Existe otra forma de probar este teorema Suponga que el teorema es falso y bisectemos el intervalo, y construyamos intervalos  $I_0 = I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ , tal que  $\ell(I_k) \leq \frac{\ell(I_{k-1})}{2}$  y también supongamos que no exista ninguna partición  $\delta$ -fina de  $I_k$  y concluyamos con una contradicción, este teorema no sólo nos asegura la existencia de una partición  $\delta$ -fina, también es equivalente a la compacidad de un intervalo cerrado

Veamos ahora la siguiente definición la cual generaliza la clásica definición de la Integral de Riemann

**Definición 2.6:** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  es H-K integrable sobre  $[a, b]$ , si existe  $A \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  existe una  $\delta$  función medidora sobre  $[a, b]$  tal que  $|\mathcal{S}(f, D) - A| < \varepsilon$ , siempre que  $D$  sea una partición  $\gamma$ -fina de  $[a, b]$

Esta definición tiene sentido gracias a la validez del Lema de Cousin

**Teorema 2.2:** El número  $A$  en la definición 2.6 es único

**Prueba:** Supongamos que  $A_1 \neq A_2$  satisfacen las condiciones en la definición 2.6, y

sea  $\varepsilon = \frac{1}{3} |A_1 - A_2| > 0$  Como  $A_1$  satisface la definición 2.6 entonces existe una función

medidora  $\delta'_1$  sobre  $I$  tal que si  $D$  es una partición  $\delta'_1$ -fina de  $I$ , entonces

$$|S(f, D) - A_1| \leq \varepsilon$$

Similarmente, como  $A_2$  satisface la definición 2.6 entonces existe una función medidora  $\delta_2''$  sobre  $I$  tal que si  $D$  es una partición  $\delta_2''$ -fina de  $I$  entonces

$$|S(f, D) - A_2| \leq \varepsilon$$

Ahora, sea  $\delta_2 = \min\{\delta_1', \delta_2''\}$  por lo que  $\delta_2$  es una función medidora sobre  $I$  y sea  $D$  una partición  $\delta_2$ -fina de  $I$ . Entonces la partición  $D$  es  $\delta_1'$ -fina y  $\delta_2''$ -fina, ahora por la desigualdad de triángulo tenemos,

$$|A_1 - A_2| \leq |A_1 - S(f, D)| + |S(f, D) - A_2| \leq \varepsilon + \varepsilon < |A_1 - A_2|$$

lo cual es una contradicción

El número  $\Lambda$  se conoce como la H-K integral de  $f$  sobre  $I = [a, b]$  y es denotado por

$\int_a^b f$  o  $\int f$ , cuando encontramos integrales que dependen de parámetros es conveniente

escribir  $\int_a^b f(t) dt$  o  $\int f(t) dt$

**Ejemplo 2.3:** La función constante  $f(x) = c$  es H-K integrable en  $I = [a, b]$ . En efecto, si

$D = \{t_i, [x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$  es cualquier partición etiquetada de  $I$ , entonces

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a)$$

es decir, que todas las sumas de Riemann son iguales a  $c(b-a)$ , por lo que podemos

escoger una función medidora arbitraria, por ejemplo  $\delta_i(x) = 1$ . Si  $D$  es una partición

$\delta_2$ -fina entonces

$$|S(f, D) - c(b-a)| = 0 < \varepsilon,$$

con lo cual  $f$  es H-K integrable y además

$$\int_a^b f = c(b-a)$$

**Ejemplo 2.4:** La función  $g(x)=x$ , para  $I=[a,b]$  con  $a < b$  es  $g$  es H-K integrable. En

efecto, sea  $G(x) = \frac{1}{2}x^2$  para  $x \in [a,b]$ . Del teorema del valor medio y del hecho de que

$G'(x) = g(x) = x$ , existe  $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que

$$G(x_i) - G(x_{i-1}) = g(u_i)(x_i - x_{i-1}) = u_i(x_i - x_{i-1}), \text{ para } i=1, 2, \dots, n,$$

si sumamos esta expresión obtenemos la suma telescópica

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^n [G(x_i) - G(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n u_i(x_i - x_{i-1})$$

de allí que si  $D = \{t_i, [x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$  es cualquier partición etiquetada de  $I$ , entonces

$$G(b) - G(a) - S(g, D) = \sum_{i=1}^n [u_i - t_i](x_i - x_{i-1})$$

Si  $\delta$  es una función medidora constante sobre  $[a,b]$  si  $D$  es  $\delta$ -fina, entonces

como  $u_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tenemos que  $|u_i - t_i| \leq 2\delta$ . Así,

$$|G(b) - G(a) - S(g, D)| \leq \sum_{i=1}^n |u_i - t_i|(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n 2\delta(x_i - x_{i-1}) = 2\delta(b-a)$$

Por consiguiente, si  $\varepsilon > 0$  está dado podemos escoger la función medidora constante

$\delta_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  y como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario entonces  $g$  es H-K integrable y además

$$\int_a^b g = G(b) - G(a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

por lo que podemos escribir,

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

El lector puede llegar a pensar que el uso de la función  $G$  en el ejemplo precedente es un truco, sin embargo, es un procedimiento estándar para evaluar una suma que envuelve a una función manipulándola para que la suma sea reemplazada por una suma telescópica envolviendo a la función relacionada

**Ejemplo 2.5:** Sean  $I=[a,b]$ ,  $c \in (a,b)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  con  $\alpha \neq \beta$ . Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } a \leq x < c \\ \beta, & \text{si } c \leq x \leq b \end{cases}$$

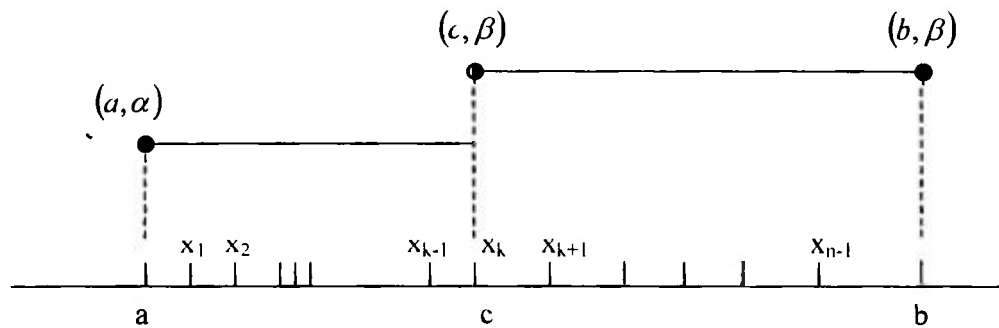


Figura 2.1

Probaremos que  $f$  es H-K integrable y que  $\int_a^b f = \alpha(c-a) + \beta(b-c)$ , notemos que  $f$  es continua excepto en el punto  $x=c$ , por lo que nuestra dificultad está enfocada en este punto. Será conveniente forzar a  $c$  para que sea etiqueta de dos subintervalos de longitud menor o igual a  $\delta$  (función medidora constante) y después determinar exactamente cuan pequeña debe ser  $\delta$ . Esto lo podemos lograr escogiendo  $\delta_\epsilon$  sobre  $I$ , definida de la siguiente manera

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}|t-c|, & \text{si } t \neq c \\ \delta, & \text{si } t = c \end{cases}$$

donde  $\delta$  será escogida de manera adecuada

Ahora, sea  $D = \{t_i, [x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$  una partición  $\delta$ -fina de  $[a, b]$  en la cual asumimos el siguiente orden

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

Haciendo un arreglo adecuado en la partición, podemos asumir que  $c$  es la etiqueta consignada a los subintervalos  $[x_{k-1}, x_k]$  y  $[x_k, x_{k+1}]$ , donde  $x_k = c$ . Como  $f(t_i) = \alpha$  para  $i=1, 2, 3, \dots, k-1$  la suma de los primeros  $k-1$  términos en  $S(f, D)$  es igual a  $\alpha(x_{k-1} - a)$  por otro lado, como  $f(t_i) = \beta$  para  $i=k, k+1, \dots, n$  la suma del resto de los términos en  $S(f, D)$  es  $\beta(b - x_{k-1})$ , así tenemos que

$$S(f, D) = \alpha(x_{k-1} - a) + \beta(b - x_{k-1})$$

Pero, como  $x_{k-1} - a = (c - a) - (c - x_{k-1})$  y  $b - x_{k-1} = (b - c) + (c - x_{k-1})$ , entonces tenemos

$$S(f, D) = \alpha(c - a) + \beta(b - c) + (\beta - \alpha)(c - x_{k-1}),$$

ahora como  $D$  es  $\delta_\epsilon$ -fina, entonces  $c - \delta \leq x_{k-1} < c$  por lo que  $0 < c - x_{k-1} \leq \delta$ , de donde,

$$|S(f, D) - [\alpha(c - a) + \beta(b - c)]| \leq |\beta - \alpha|(c - x_{k-1}) \leq |\beta - \alpha|\delta$$

Vemos que es suficiente tomar  $\delta_\epsilon(c) = \frac{\epsilon}{|\beta - \alpha|}$ , en la definición de  $\delta_\epsilon$ , ahora

como  $\epsilon > 0$  es arbitrario, concluimos que  $f$  es H-K integrable y

$$\int_a^b f = \alpha(c - a) + \beta(b - c)$$

**Ejemplo 2.6:** Sean  $\gamma \neq 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $a < c < d < b$  y  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } c < x \leq d \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probaremos que  $g$  es H-K integrable y que  $\int_a^b g = \gamma(d - c)$ , observe la figura 2.2

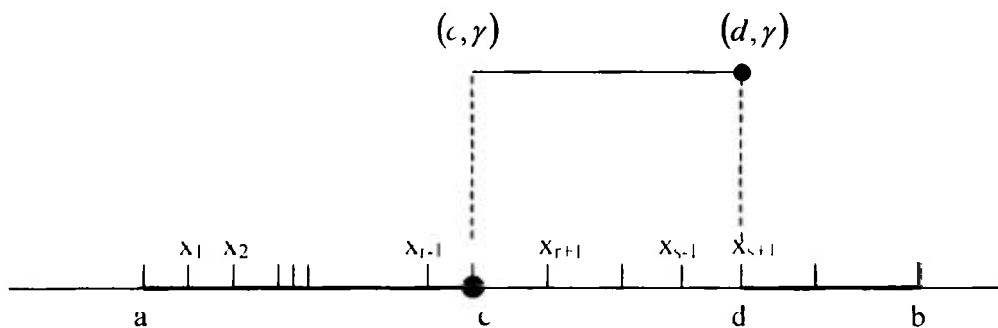


Figura 2.2

Como en el ejemplo anterior escogeremos una función medidora que forzará a los puntos  $c, d$  a ser etiqueta de los subintervalos que los contengan en cualquier partición  $\delta_\epsilon$ -fina. La práctica sugiere que definamos  $\delta_\epsilon$  sobre  $[a, b]$  por

$$\delta_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \min\{|t-c|, |t-d|\}, & \text{si } t \notin \{c, d\} \\ \delta, & \text{si } t \in \{c, d\} \end{cases}$$

donde  $\delta > 0$

Ahora sea  $D = \{t, [x_{r-1}, x_r]\}_{r=1}^n$  una partición etiquetada de  $[a, b]$ , podemos asumir que el punto  $c$  es la etiqueta para los subintervalos  $[x_{r-1}, x_r]$  y  $[x_r, x_{r+1}]$  (donde  $x_r = c$ ) y que  $d$  es la etiqueta para  $[x_{r-1}, x_r]$  y  $[x_r, x_{r+1}]$  (donde  $x_r = d$ )

Como las etiquetas que hacen una contribución no nula a  $S(g, D)$  son  $t_{r+1}, t_{r+1}$ , tenemos entonces que

$$S(g, D) = \gamma(x_{r+1} - x_{r+1}),$$

pero  $x_{r+1} = d + (x_{r+1} - d)$  y  $x_{r+1} = c + (x_{r+1} - c)$ , por lo que

$$S(g, D) = \gamma(d - c) + \gamma(x_{r+1} - d) - \gamma(x_{r+1} - c)$$

Como  $D$  es  $\delta_\epsilon$ -fina, entonces  $|x_{r+1} - d| \leq \delta$  y  $|x_{r+1} - c| \leq \delta$ , de donde se sigue que

$$|S(g, D) - \gamma(d - c)| \leq 2|\gamma|\delta$$

Pero como  $\gamma \neq 0$ , vemos que podríamos tomar  $\delta \leq \frac{\epsilon}{2|\gamma|}$  en la definición de  $\delta_\epsilon$  en

los puntos  $x=c$  Haciendo esto y observando que  $\epsilon > 0$  es arbitrario, concluimos que  $g$  es H-K integrable y que

$$\int_a^b g = \gamma(d - c)$$

**Ejemplo 2.7:** Supongamos que  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tiene valor constante  $c$  excepto en un número contables de puntos  $\Gamma = \{z_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Entonces  $f$  es H-K integrable sobre  $[a, b]$  y

$$\int_a^b f = c(b-a)$$

**Prueba:** Sea  $\varepsilon > 0$ . Si  $D = \{t_i, [x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^m$  es una partición etiquetada de  $[a, b]$ , considere

$$(2.3) \quad |S(f, D) - c(b-a)| = \left| \sum_{i=1}^m \{f(t_i) - c\} \ell(I_i) \right|$$

Si  $t_i \notin E$ , el término  $(f(t_i) - c)\ell(I_i)$  en (2.3) es cero, así que podemos definir una función medidora como  $\delta(t) = 1$  si  $t \in E$ . Si  $t_i = z_k$ , para algún  $k$  y si  $D$  es  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , para alguna función medidora  $\delta$ , entonces  $|f(t_i) - c|\ell(I_i) \leq |f(z_k) - c|\delta(z_k)$

Si escogemos  $\delta_k = \frac{\varepsilon}{(|f(z_k) - c|)2^{k+2}}$  y  $(z_k - \delta_k, z_k + \delta_k)$ , entonces cuando  $D$  es  $\delta$ -fina y

$t_i = z_k$ , tenemos  $|f(t_i) - c|\ell(I_i) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ . Si  $D$  es  $\delta$ -fina, de (2.3) tenemos que

$$|S(f, D) - c(b-a)| < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon$$

de allí que cada  $z_k$  puede ser la etiqueta de al menos 2 subintervalos en  $D$

En particular, la función

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \text{ es irracional} \\ 1, & \text{si } t \text{ es racional} \end{cases}$$

es H-K integrable sobre  $[a, b]$  con  $\int_a^b f = 0$ , esta función fue definida por Peter G. L. Dirichlet (1805-1859), es de dominio común de que esta función es discontinua y que no es Riemann integrable

## 2.1 Conjuntos Nulos, Funciones Nulas y Conjuntos Excepcionales

La noción de conjuntos nulos y funciones nulas serán de mucha importancia en lo que sigue

### **Definición 2.7:**

a Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}$  es llamado nulo (o de medida cero) si para todo  $\varepsilon > 0$  existe una colección contable  $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$  de intervalos abiertos tal que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} l(J_i) \leq \varepsilon$$

b Si  $A \subseteq \mathbb{R}$ , entonces una función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada función nula si el conjunto  $\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$  es un conjunto nulo

c Una propiedad  $P$  referente a los elementos de un conjunto  $A$  es llamada casi en todas partes (c.t.p.) en  $A$  si la propiedad  $P$  se cumple para todos los elementos de  $A$  excepto en subconjunto nulo de  $A$ . Es decir,  $E = \{x \in A \mid P(x) \text{ no se cumple}\}$  es un conjunto nulo

Veamos ahora algunos ejemplos de conjuntos nulos y funciones nulas

**Ejemplo 2.8:** Si  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $E$  nulo y  $F \subset E$ , entonces  $F$  es nulo

Como  $E$  es nulo entonces dado  $\varepsilon > 0$ , existe una colección contable de intervalos abiertos  $\{I_i\}$  que cubren a  $E$  con  $\sum_i \ell(I_i) < \varepsilon$  y como  $F \subset E$  entonces  $\{I_i\}$  también cubre a  $F$ , por lo tanto  $F$  es nulo

**Ejemplo 2.9:** Cualquier conjunto unitario  $\{p\}$  es un conjunto nulo. En efecto, para  $\varepsilon > 0$

tomemos  $J_1 = \left(p - \frac{1}{2}\varepsilon, p + \frac{1}{2}\varepsilon\right)$  y  $J_2 = J_3 = \dots = \emptyset$

**Ejemplo 2.10:** La unión contable de conjuntos nulos es un conjunto nulo

Como  $\{E_j, j \in \mathbb{N}\}$  es nulo para cada  $j \in \mathbb{N}$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  y cada  $j \in \mathbb{N}$

existe una colección de intervalos abiertos  $\{I'_i\}$  que cubren a  $E_j$  con  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \ell(I'_i) < \frac{\varepsilon}{2^j}$

Por otro lado es claro que  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I'_i\right)$ , es decir que  $\{I'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una

colección contable de intervalos abiertos que cubren a  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$ , denotemos por  $\{I_k\}$  a esta

colección, luego

$$\ell(I_k) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \ell(I'_i) < \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon,$$

con lo cual  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$  es nulo

**Ejemplo 2.11:** Cualquier conjunto contable es nulo. En efecto, sea  $L = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ ,

entonces  $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$  y como cada  $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$  es nulo, entonces  $E$  es nulo

## 2.2 La integrabilidad de funciones nulas

Estableceremos ahora un resultado muy importante acerca de las funciones nulas

**Teorema 2.3:** Sea  $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función nula sobre  $I$ . Entonces  $f$  es H-K

integrable con  $\int_I f = 0$

**Prueba:**

Sea  $\varepsilon > 0$  y  $E = \{t \in I, f(t) \neq 0\}$ . Para cada  $i \in \mathbb{N}$  sea  $E_i = \{t \in E, i-1 < |f(t)| \leq i\}$

Entonces  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  y cada  $E_i$  es nulo. Para cada  $i$  sea  $\{I'_j, j \in \mathbb{N}\}$  una colección de

intervalos abiertos que cubren a  $E_i$  con  $\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I'_j) < \frac{\varepsilon}{i2^i}$ . Definamos una función medidora

$\gamma$  sobre  $I$  por  $\delta(t) = R$  si  $t \notin E$  y  $\delta(t) = I'_j$ , si  $t \in E_i$  y  $j$  es el entero más pequeño tal que

$t_i \in I'_j$ . Supongamos que  $D = \{(t_k, I_k), 0 \leq k \leq m\} \ll \delta$  y sean  $D_i = \{(t_k, I_k), t_k \in E_i\}$

para  $i \in \mathbb{N}$  y  $D_0 = \{(t_k, I_k), t_k \notin E\}$ . Entonces  $S(f, D_0) = 0$  y

$$|S(f, D_i)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} i \ell(I'_j) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

para  $i \geq 1$ , entonces

$$|S(f, D)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i},$$

con lo cual  $f$  es H-K integrable y además  $\int_I f = 0$

Como consecuencia inmediata de este teorema, se tiene que si  $E \subset [a, b]$  es nulo,

entonces  $C_f$  definida por

$$C_l = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in E \\ 0, & \text{si } t \notin E \end{cases}$$

es integrable con  $\int_a^b C_l = 0$

## **CAPÍTULO 3**

## CAPÍTULO 3

### PROPIEDADES BÁSICAS DE LA INTEGRAL DE HENSTOCK-KURZWEIL

En esta sección desarrollaremos las propiedades básicas de la H-K integral. A lo largo de esta sección  $I$  representará el intervalo  $[a, b]$  y  $f, f_1, f_2, I \rightarrow R$  funciones

**Teorema 3.1:** Supongamos que  $f_1$  y  $f_2$  son integrables sobre  $I$ . Entonces

i)  $f_1 + f_2$  es integrable sobre  $I$  y  $\int_I (f_1 + f_2) = \int_I f_1 + \int_I f_2$

ii) Para toda  $t \in R$ ,  $tf_1$  es integrable sobre  $I$  y  $\int_I tf_1 = t \int_I f_1$

iii) Si  $f_1 \geq 0$  en  $I$ , entonces  $\int_I f_1 \geq 0$

iv) Si  $f_1 \geq f_2$  en  $I$ , entonces  $\int_I f_1 \geq \int_I f_2$

**Prueba:**

i) Sea  $\varepsilon > 0$ . Para  $i=1,2$ , sea  $\gamma_i$  una función medidora tal que  $\left| S(f_i, D) - \int_I f_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,

siempre que  $D$  sea  $\gamma_i$ -fina

Sea  $\gamma(t) = \min\{\gamma_i\}$ , entonces  $\gamma$  es una función medidora y si  $D$  es  $\gamma$ -fina

entonces  $D$  es  $\gamma_i$ -fina, por lo tanto

$$\left| S(f_1 + f_2, D) - \left( \int_I f_1 + \int_I f_2 \right) \right| \leq \left| S(f_1, D) - \int_I f_1 \right| + \left| S(f_2, D) - \int_I f_2 \right| < \varepsilon$$

Así,  $f_1 + f_2$  es integrable sobre  $I$  con  $\int_I (f_1 + f_2) = \int_I f_1 + \int_I f_2$

ii) Si  $t \neq 0$ , el resultado es inmediato. Por lo tanto supongamos que  $t \neq 0$  como  $f_1$  es integrable sobre  $I$ , sea  $\varepsilon > 0$  y  $\gamma$  una función medidora tal que  $\left| S(f_1, D) - \int_I f_1 \right| < \frac{\varepsilon}{|t|}$ ,

siempre que  $D$  sea  $\gamma$ -fina. Luego

$\left| S(tf_1, D) - t \int_I f_1 \right| = \left| t S(f_1, D) - t \int_I f_1 \right| = |t| \left| S(f_1, D) - \int_I f_1 \right| < |t| \frac{\varepsilon}{|t|} = \varepsilon$ , así  $tf_1$  es integrable

sobre  $I$  con  $\int_I tf_1 = t \int_I f_1$

iii) Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe una función medidora  $\gamma_1$ , tal que  $\left| S(f_1, D) - \int_I f_1 \right| < \varepsilon$ , siempre que

$D$  sea  $\gamma_1$ -fina. Como  $f_1 \geq 0$ , entonces

$$0 \leq S(f_1, D) \leq \int_I f_1 + \varepsilon,$$

por lo tanto,  $\int_I f_1 \geq 0$

iv) Como  $f_1 - f_2 \geq 0$ , entonces por i, ii y iii se tiene que  $\int_I f_1 \geq \int_I f_2$

El conjunto de las funciones H-K integrables sobre  $I$  es un espacio vectorial con respecto a la suma y al producto escalar y la aplicación

$$T: f \rightarrow \int f$$

es un funcional lineal

**Corolario 3.1:** Sean  $f$  una función H-K integrable y  $m, M$  números reales tales que

$m \leq f(x) \leq M$ , para todo  $x \in I = [a, b]$  entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

**Prueba:** Como  $f(x) - m \geq 0$ , para todo  $x \in I$  entonces por el teorema anterior

$$\int_a^b (f - m) = \int_a^b f - \int_a^b m \geq 0,$$

de allí que

$$\int_a^b f \geq m(b-a)$$

La prueba de la otra desigualdad es similar

**Definición 3.1:** Decimos que una función  $f$  es H-K absolutamente integrable sobre  $I$ , si ambas funciones  $f$  y  $|f|$  son H-K integrables

**Corolario 3.2:** Sea  $f$  H-K absolutamente integrable sobre  $I$ , entonces  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

**Prueba:** Como  $f \leq |f|$  y  $-f \leq |f|$  para todo  $I$ , por la parte iv del teorema 3.1, se tiene que  $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$  y  $-\int_a^b f = \int_a^b (-f) \leq \int_a^b |f|$  por lo tanto  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

En contraste con la integral de **Riemann** y la integral de **Lebesgue**, veremos mas adelante que la suposición de que la función sea absolutamente integrable es de suma importancia

De la misma forma que el criterio de Cauchy para sucesiones de números reales este criterio nos permite probar que una función es integrable sin la necesidad de conocer el valor de la integral

**Teorema 3.2 (Criterio de Cauchy):** Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  Entonces  $f$  es H-K integrable sobre  $I$  si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una función medidora  $\eta_\varepsilon$  en  $I$  tal que si  $D_1$  y  $D_2$ , son particiones etiquetadas  $\eta_\varepsilon$ -finas, entonces  $\left| S(f, D_1) - S(f, D_2) \right| < \varepsilon$

**Prueba:** ( $\Rightarrow$ ) Sea  $f$  H-K integrable con  $\int f = A$  y sea  $\eta_\epsilon = \frac{\delta_\epsilon}{2} > 0$  una función medidora

sobre  $I$  tal que si  $D_1, D_2$  son  $\eta_\epsilon$ -finas, entonces

$$|S(f, D_1) - A| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \vee \quad |S(f, D_2) - A| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

con lo cual,

$$|S(f, D_1) - S(f, D_2)| \leq |S(f, D_1) - A| + |S(f, D_2) - A| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

( $\Leftarrow$ ) Note que para todo  $k$  existe una  $\gamma_k$  función medidora en  $I$  tal que si  $D_1, D_2$  son  $\gamma_k$ -finas, entonces

$$|S(f, D_1) - S(f, D_2)| < \frac{\epsilon}{k}$$

Podemos asumir que  $\gamma_n(t) \geq \gamma_m(t)$  para todo  $t \in I$  de otra manera tomemos  $\gamma'_n(t) = \min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)\}$  Para cada  $k$   $D_k$  sea  $\gamma_k$ -fina Si  $k > j$ , tenemos  $|S(f, D_k) - S(f, D_j)| < \frac{1}{j}$  Así,  $\{S(f, D_k)\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$ , sea  $A = \lim S(f, D_k)$  Entonces

$$|S(f, D_k) - A| \leq \frac{1}{k}, \text{ para todo } k$$

Sea  $\epsilon > 0$  y elijamos  $N$  tal que  $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$  Supongamos que  $D$  sea  $\gamma_N$ -fina, entonces

$$|S(f, D) - A| \leq |S(f, D) - S(f, D_N)| + |S(f, D_N) - A| < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \epsilon$$

Así,  $f$  es H-K integrable sobre  $I$  con  $\int_I f = A$

Probaremos ahora que si una función es H-K integrable sobre un intervalo, también es H-K integrable sobre cualquier subintervalo de éste intervalo

**Teorema 3.3** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $c \in (a, b)$  Entonces  $f$  es H-K integrable sobre  $[a, b]$  si sus restricciones a  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , son ambas H-K integrables en este caso

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

**Prueba:** ( $\Leftarrow$ ) Supongamos que la restricción  $f_1$  de  $f$  al intervalo  $I_1 = [a, c]$  y la restricción  $f_2$  de  $f$  a  $I_2 = [c, b]$  son H-K integrable con integrales  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente. Entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , existe una función medidora  $\delta'_\varepsilon$  sobre  $I_1$  y una función medidora  $\delta''_\varepsilon$  sobre  $I_2$  tal que si  $P_1$  es una partición  $\delta'_\varepsilon$ -fina de  $I_1$  y  $P_2$  es una partición  $\delta''_\varepsilon$ -fina de  $I_2$  entonces

$$|S(f_1, P_1) - A_1| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{y} \quad |S(f_2, P_2) - A_2| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

Definamos una función medidora sobre  $[a, b]$ , dada por

$$\delta_\varepsilon = \begin{cases} \min\left\{\delta'_\varepsilon(t), \frac{1}{2}(c-t)\right\} & \text{si } t \in [a, c), \\ \min\{\delta'_\varepsilon(c), \delta''_\varepsilon(c)\} & \text{si } t = c \\ \min\left\{\delta''_\varepsilon(t), \frac{1}{2}(t-c)\right\} & \text{si } t \in (c, b] \end{cases}$$

Sea  $P$  una partición de  $I = [a, b]$  que es  $\delta_\varepsilon$ -fina entonces el punto  $c$  puede ser una etiqueta de al menos un subintervalo en  $P$  o  $P$  contiene dos subintervalos con  $c$  como etiqueta, sea  $J$  el subintervalo que contiene a  $c$  como etiqueta, observe que si dividimos a  $J$  en  $c$  sin cambiar la suma de Riemann  $S(f, P)$ , obtenemos el último caso, en este caso

$P_1 = \{(t, J) \in P \mid J \subset [a, c]\}$  es una partición etiquetada  $\delta'_r$ -fina de  $[a, c]$  y

$P_2 = \{(t, J) \in P \mid J \subset [c, b]\}$  es una partición etiquetada  $\delta'_r$ -fina de  $[c, b]$  Entonces

$$|S(f, P) - (A_1 + A_2)| \leq |S(f, P_1) - A_1| + |S(f, P_2) - A_2| < \varepsilon$$

y como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario entonces  $f$  es H-K integrable sobre  $[a, b]$  con

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

**Teorema 3.4:** Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  H-K integrable sobre  $I$ . Si  $J$  es un subintervalo cerrado de  $I$ , entonces  $f$  es H-K integrable sobre  $J$ .

**Prueba:** Sea  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\gamma$  función medidora en  $I$  tal que si  $D_1, D_2$  son particiones etiquetadas  $\gamma$ -finas de  $I$ , entonces  $|S(f, D_1) - S(f, D_2)| < \varepsilon$ .

Considere el caso  $a < c < d < b$  y  $J = [c, d]$ , los otros casos son similares. Sea  $\gamma'$  la restricción de  $\gamma$  a  $J$  y sea  $\gamma_1(\gamma_2)$  la restricción de  $\gamma$  a  $[a, c]([c, b])$ . Sea  $D_1(D_2)$  una partición etiquetada  $\gamma_1(\gamma_2)$ -fina de  $[a, c]([c, b])$ . Ahora supongamos que  $D$  y  $E$  son una partición  $\gamma'$ -fina de  $J$ , entonces  $D' = D_1 \cup D \cup D_2$  es  $\gamma$ -fina y  $E' = D_1 \cup E \cup D_2$  es  $\gamma$ -fina, por lo tanto,

$$|S(f, D') - S(f, E')| = |S(f, D) - S(f, E)| < \varepsilon,$$

entonces por el Criterio de Cauchy  $f$  es H-K integrable sobre  $J$ .

**Lema 3.1:** Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  y supongamos que para todo  $\varepsilon > 0$  existen funciones integrables  $g_1, g_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g_1 \leq f \leq g_2$  en  $I$  y  $\int_I g_2 \leq \int_I g_1 + \varepsilon$ . Entonces  $f$  es integrable sobre  $I$ .

**Prueba:** Sea  $\varepsilon > 0$ , existe una función medidora  $\gamma$  en  $I$  tal que si  $D$  es  $\gamma$ -fina, entonces

$|S(g_i, D) - \int_I g_i| < \varepsilon$ , para  $i=1,2$ . Supongamos que  $D$  es  $\gamma$ -fina, entonces

$$\int_I g_1 - \varepsilon \leq S(g_1, D) \leq S(f, D) \leq S(g_2, D) < \int_I g_2 + \varepsilon \leq \int_I g_1 + 2\varepsilon$$

Así, cualquier suma de Riemann para  $f$  con respecto a una partición etiquetada  $\gamma$ -fina se encuentra dentro de un intervalo de la forma  $[\int_I g_1 - \varepsilon, \int_I g_1 + 2\varepsilon]$ , por lo tanto la diferencia de dos sumas de Riemann cualesquiera difieren por lo menos en  $3\varepsilon$ , luego por el Criterio de Cauchy  $f$  es integrable sobre  $I$ .

**Teorema 3.5:** Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua, entonces  $f$  es H-K integrable sobre  $I$ .

**Prueba:** Sea  $\varepsilon > 0$ . Puesto que  $f$  es uniformemente continua en  $I$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ , cuando  $x, y \in I$ ,  $|x - y| < \delta$ . Sea  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$ , tal que  $(x_i, x_{i-1}) < \delta$ , para  $i=1,2, \dots, n$ .

Para  $i=1,2, \dots, n$ , sea  $M_i = \sup\{f(t) \mid x_{i-1} \leq t \leq x_i\}$  y  $m_i = \inf\{f(t) \mid x_{i-1} \leq t \leq x_i\}$  y definamos las funciones escalonadas  $g_1$  y  $g_2$  por

$$g_1 = m_1 C_{[x_0, x_1]} + \sum_{i=2}^n m_i C_{(x_{i-1}, x_i]}, \quad g_2 = M_1 C_{[x_0, x_1]} + \sum_{i=2}^n M_i C_{(x_{i-1}, x_i]}$$

entonces  $g_1 \leq f \leq g_2$  y  $0 \leq g_2 - g_1 \leq \varepsilon$  en  $I$ , por lo tanto  $\int_I (g_2 - g_1) \leq \varepsilon(b-a)$

entonces por el lema 3.1 es integrable sobre  $I$ .

Ahora emplearemos el teorema 3.5 para obtener una versión del teorema del valor medio para la HK-integral

**Corolario 3.3:** Sea  $f: I \rightarrow R$  continua. Entonces existe  $t \in I$  tal que

$$\int_a^b f = f(t)(b-a)$$

**Prueba:** Sea  $M = \max\{f(t) \mid t \in I\}$ ,  $m = \min\{f(t) \mid t \in I\}$ , entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a), \text{ es decir}$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M,$$

luego por el teorema del valor medio se obtiene el resultado

**Teorema 3.6:** Sean  $f, g: I \rightarrow R$ , continuas con  $g \geq 0$ . Pruebe que existe  $t \in I$  tal que

$$\int_a^b fg = f(t) \int_a^b g$$

**Prueba:** Sea  $M = \max\{f(x) \mid x \in I\}$ ,  $m = \min\{f(x) \mid x \in I\}$ , entonces

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

para todo  $t \in [a, b]$ , por lo tanto

$$m \int_a^b g(x) \leq \int_a^b f(x)g(x) \leq M \int_a^b g(x)$$

si  $\int_a^b g(x) = 0$  entonces  $\int_a^b f(x)g(x) = 0$ , con lo cual el teorema es cierto para cualquier  $t$

Supongamos ahora que  $\int_a^b g(x) \neq 0$ , entonces

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)} \leq M$$

tomemos  $\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)}$ , entonces  $m \leq \mu \leq M$  y  $\int_a^b f(x)g(x) = \mu \int_a^b g(x)$

Ahora como  $f$  es continua existe  $t \in [a, b]$ , tal que  $f(t) = \mu$ , con lo cual

$$\int_a^b f(x)g(x) = f(t) \int_a^b g(x)$$

**Teorema 3.7:** Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que existe  $A \in \mathbb{R}$ , tal que para todo  $\varepsilon > 0$ ,

existen funciones integrales  $g$  y  $h$  con  $g \leq f \leq h$  y  $A - \varepsilon < \int g < \int h < A + \varepsilon$ . Entonces  $f$

es integrable con  $\int f = A$

**Prueba:** Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $\gamma$  una función medidora además sea  $D = \{(t_i, I_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$  una partición etiquetada  $\gamma$ -fina. Es claro que

$$S(g, D) \leq S(f, D) \leq S(h, D)$$

luego,

$$\int g \leq S(f, D) \leq \int h$$

por lo que,

$$A - \varepsilon < \int g \leq S(f, D) \leq \int h < A + \varepsilon$$

así,

$$|S(f, D) - A| < \varepsilon$$

es decir,  $f$  es integrable y además  $\int f = A$

**Corolario 3.4:** Supongamos que  $\int |f| = 0$ . Entonces  $f$  es integrable sobre  $I$  y  $\int f = 0$

**Prueba:** Como  $-\int_I f_1 \leq \int_I f \leq \int_I f_1$ , y  $\int_I f_1 = 0$  entonces  $\int_I f = 0$

**Teorema 3.8:** Suponga que  $\int_I |f - g| = 0$ . Pruebe que  $f$  es integrable sobre  $I$  y solo si  $g$  es integrable sobre  $I$  con  $\int_I f = \int_I g$

**Prueba:** Como  $\int_I |f - g| = 0$  entonces  $\int_I (f - g) = 0$  y además como  $g$  es integrable se tiene que

$$\int_I f = \int_I (f - g) + \int_I g = \int_I g$$

**Teorema 3.9:** Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  integrable sobre  $I$  y supongamos que  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  es igual a  $f$  excepto posiblemente en un número contable de puntos en  $I$ . Entonces  $g$  es H-K

integrable sobre  $I$  con  $\int_I g = \int_I f$

**Prueba:** Sea  $E = \{z_k \in I \mid f(z_k) \neq g(z_k), k \in \mathbb{N}\}$ , es claro que  $E$  es un conjunto nulo y

$h = g - f$  es una función nula entonces por el teorema 2.3,  $h$  es H-K integrable con  $\int_I h = 0$ ,

como  $g = f + h$  se tiene que  $\int_I g = \int_I f + \int_I h = \int_I f$

**Teorema 3.10:** Sean  $f$  y  $g$  H-K integrables, si  $f(x) \leq g(x)$  c t p sobre  $I$ , entonces

$$\int_I f \leq \int_I g$$

**Prueba:** Sea  $E = \{x \in I \mid f(x) > g(x)\}$  es claro que  $E$  es un conjunto nulo, ahora sea

$f_1(x) = f(x)$  y sea  $g_1(x) = g(x)$  para  $x \in I - E$  y sea  $f_1(x) = g_1(x) = 0$ , para  $x \in E$ .

luego  $\int_I f = \int_I f_1 \leq \int_I g_1 = \int_I g$

**Corolario 3.5:** Sean  $f$  y  $g$  H-K integrables si  $|f(x)| \leq g(x)$  c t p sobre  $I$ , entonces

$$\left| \int f \right| \leq \int g$$

**Prueba:** Como  $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$  c t p sobre  $I$  entonces por el teorema anterior se

tiene que  $\int -g \leq \int f \leq \int g$ , con lo cual,

$$\left| \int f \right| \leq \int g$$

Estableceremos ahora la integrabilidad de las funciones reguladas una clase de funciones muy importante pero primero discutiremos las funciones escalonadas

### 3.1 Funciones Escalonadas

**Definición 3.2:** Una función  $\varsigma: I \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada función escalonada sobre  $I = [a, b]$  si

existen una partición  $\{[c_{i-1}, c_i]\}_{i=1}^n$  de  $I$  y números reales  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  tal que

$$\varsigma(x) = \alpha_i, \text{ para } x \in (c_{i-1}, c_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

**Observación 3.1:** La función escalonada también tiene valores en los puntos  $c_i$ , los cuales pueden diferir de los valores  $\alpha_i$ , pero para los propósitos de la integración estos valores no son de importancia, como se pudo observar en el teorema 3.9

**Teorema 3.11:** Toda función escalonada sobre  $I$  es H-K integrable y además,

$$\int_a^b \varsigma = \sum_{i=1}^n \alpha_i (c_i - c_{i-1})$$

**Prueba:** Definamos  $s_r$  sobre  $I$  por  $s_r = \alpha$ , para  $x \in I_r = (c_{r-1}, c_r)$  y  $s_r(x) = 0$  en otro caso, por el ejemplo 2.7 podemos afirmar que  $s_r$  es H-K integrable sobre  $I$ , con integral

$$\int_I s_r = \alpha_r(c_r - c_{r-1}), \text{ ahora aplicando la linealidad e inducción se obtiene el resultado}$$

Introduciremos ahora las funciones reguladas y mostraremos que son H-K integrables y luego probaremos que las funciones monótonas y las funciones continuas son parte de este conjunto de funciones

**Definición 3.3:** Una función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada regulada sobre  $I = [a, b]$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe una función escalonada  $s_\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$|f(x) - s_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in I$$

**Observación 3.2:** Es claro que una función  $f$  es regulada si y sólo si existe una sucesión de funciones escalonadas  $\{s_n\}_{n=1}^\infty$  que convergen uniformemente a  $f$  sobre  $I$

**Teorema 3.12:** Si  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función regulada sobre  $I = [a, b]$ , entonces  $f$  es H-K integrable

**Prueba:** Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $s_\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalonada tal que  $|f(x) - s_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ , por consiguiente, tenemos que

$$s_\varepsilon(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq s_\varepsilon(x) + \varepsilon, \text{ para todo } x \in [a, b]$$

Si hacemos  $\varphi_\varepsilon(x) = s_\varepsilon(x) - \varepsilon$  y  $\psi_\varepsilon(x) = s_\varepsilon(x) + \varepsilon$ , para todo  $x \in [a, b]$ , entonces las funciones escalonadas  $\varphi_\varepsilon$  y  $\psi_\varepsilon$  son integrables y

$$\varphi_\varepsilon \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon, \text{ para todo } x \in [a, b],$$

más aún, como

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) = \int_a^b 2\varepsilon = 2(b-a)\varepsilon,$$

con lo cual se tiene que  $f$  es H-K integrable

Veamos una caracterización de las funciones reguladas que es muy utilizada

**Teorema 3.13:** Una función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función regulada si y sólo si tiene límites laterales en todo punto del intervalo  $I$

**Prueba:** ( $\Rightarrow$ ) Primero notemos que toda función escalonada tiene límites laterales en cada punto. Para probar que la función regulada  $f$  tiene la misma propiedad, sea  $c \in [a, b)$ , probaremos que  $f$  tiene límite por la derecha de  $c$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $s_\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalonada tal que

$$|f(x) - s_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in I,$$

Como  $s_\varepsilon$  es una función escalonada y  $\lim_{x \rightarrow c^+} s_\varepsilon(x)$  existe, existe  $\delta_\varepsilon(c) > 0$  tal que

si  $x, y \in (c, c + \delta_\varepsilon(c))$ , entonces  $s_\varepsilon(x) = s_\varepsilon(y)$ . Por consiguiente, si  $x, y \in (c, c + \delta_\varepsilon(c))$  entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - s_\varepsilon(x)| + |s_\varepsilon(x) - s_\varepsilon(y)| + |s_\varepsilon(y) - f(y)| \leq \varepsilon + 0 + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Pero como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, el criterio de Cauchy implica que el límite por la derecha  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  existe. La existencia del límite por en  $c \in (a, b]$  se prueba de la misma forma

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $f$  tiene límites laterales en todo punto de  $I$ , el criterio de Cauchy para la existencia de límites laterales garantiza que dado  $\varepsilon > 0$ , existe una función medidora  $\delta_\varepsilon$

sobre  $I$  tal que si  $t \in I$  y  $y_1, y_2$  están ambos en  $[t - \delta_r(t), t)$  o ambos están en  $(t, t + \delta_r(t)]$  entonces

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq 2\varepsilon$$

Ahora sea  $D = \{(x_{i-1}, x_i] \}_{i=1}^n$  una partición  $\delta_r$ -fina de  $I$ , definamos  $s_r(z) = f(z)$  si  $z$  es uno de los números

$$a = x_0 \leq t_1 \leq \dots \leq x_{i-1} \leq t_i \leq x_i \leq \dots \leq t_n \leq x_n = b$$

Sobre el intervalo  $(x_{i-1}, t_i) \subseteq [t_i - \delta_r(t_i), t_i)$  definamos  $s_r(x) = f\left(\frac{1}{2}(x_{i-1} + t_i)\right)$  por

lo que,

$$|f(x) - s_r(x)| = \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}(x_{i-1} + t_i)\right) \right| \leq \varepsilon$$

Similarmente, sobre el intervalo  $(t_i, x_i) \subseteq (t_i, t_i + \delta_r(t_i)]$  definamos

$s_r(x) = f\left(\frac{1}{2}(t_i + x_i)\right)$ , por lo que,

$$|f(x) - s_r(x)| = \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}(t_i + x_i)\right) \right| \leq \varepsilon$$

De allí que la función escalonada  $s_r$  satisface  $|f(x) - s_r(x)| \leq \varepsilon$  para todo  $x \in I$ . Pero como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, concluimos que  $f$  es una función regulada.

**Observación 3.3:** Otra forma de probar el teorema 3.5 es la siguiente

**Prueba:** Como toda función continua sobre  $I$  tiene límite en todo punto de  $I$  entonces por el teorema anterior  $f$  es una función regulada luego por el teorema 3.12  $f$  es H-K integrable.

**Teorema 3.14:** Si  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función monótona sobre  $I$  entonces  $f$  es regulada y H-K integrable sobre  $I$ .

**Prueba:** Como toda función monótona sobre  $I$  tiene límites laterales sobre todo punto de  $I$ , entonces por el teorema 3.13  $f$  es regulada y por el teorema 3.12  $f$  es H-K integrable.

## **CAPÍTULO 4**

## CAPÍTULO 4

### TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Antes de establecer el principal teorema de este capítulo es conveniente introducir alguna terminología que nos ayudará en la exposición del mismo

**Definición 4.1:** Sea  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  y sea  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$

a Decimos que  $F$  es una primitiva ( o antiderivada) de  $f$  sobre  $I$  si la derivada de  $F$  existe y  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in I$

b Decimos que  $F$  es una a-primitiva de  $f$  sobre  $I$  si  $F$  es continua sobre  $I$  y si existe un conjunto nulo  $E$  de puntos de  $x \in I$  donde  $F'(x)$  no existe o no es igual a  $f$

c Decimos que  $F$  es una c-primitiva de  $f$  sobre  $I$  si  $F$  es continua sobre  $I$  y si existe un conjunto contable  $E$  de puntos de  $x \in I$  donde  $F'(x)$  no existe o no es igual a  $f$

d Decimos que  $F$  es una f-primitiva de  $f$  sobre  $I$  si  $F$  es continua sobre  $I$  y si existe un conjunto finito  $E$  de puntos de  $x \in I$  donde  $F'(x)$  no existe o no es igual a  $f$

**Observación 4.1:** En todos los casos decimos que  $E$  es el conjunto excepcional

**Lema 4.1:** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciable y sea  $z \in [a, b]$ . Entonces para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(v) - f(u) - f'(z)(v - u)| \leq \varepsilon(v - u)$ , siempre que  $u \leq z \leq v$  y  $[u, v] \subset [a, b] \cap (z - \delta, z + \delta)$

**Prueba:** Como  $f$  es diferenciable en  $z$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\left| \frac{f(x) - f(z)}{x - z} - f'(z) \right| < \varepsilon$

para  $0 < |x - z| < \delta$ ,  $x \in [a, b]$

Si  $z = u$ ,  $z = v$  la conclusión del lema es inmediata, por lo que supondremos que  $u < z$

$$|f(v) - f(u) - f'(z)(u-v)| \leq |f(v) - f(z) - f'(z)(v-z)| + |f(z) - f(u) - f'(z)(z-u)| \\ < \varepsilon(v-z) + \varepsilon(z-u) = \varepsilon(v-u)$$

La interpretación geométrica del lema 3.1 es clara, si los puntos  $u$  y  $v$  “encasillan  $z$ ”, entonces la pendiente de la cuerda entre los puntos  $(u, f(u))$  y  $(v, f(v))$  es casi la pendiente de la recta tangente en  $(z, f(z))$ . La conclusión del lema 4.1 falla si los

puntos  $u$  y  $v$  no encasillan a  $z$ , considere  $f(t) = t^2 \cos \frac{\pi}{t}$ , para  $t \neq 0$  y  $f(0) = 0$ , para  $t = 0$

En efecto, tomemos  $n > 0$  tal que  $\frac{1}{n} < \delta$  y sea  $v = \frac{1}{n}$ ,  $u = \frac{1}{n+1}$ , entonces

$$f(v) = \frac{1}{n^2} \cos(\pi n) = \frac{1}{n^2} (-1)^n$$

$$f(u) = \frac{1}{(n+1)^2} \cos[(n+1)\pi] = \frac{1}{(n+1)^2} (-1)^{n+1}$$

$$\text{Así, } |f(v) - f(u)| = \left| \frac{1}{(n+1)^2} (-1)^{n+1} - \frac{1}{n^2} (-1)^n \right| = \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} \right)$$

Si se cumple la conclusión del lema, entonces

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

pero esto es una contradicción ya que,

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n(n+1)}$$

Nos disponemos ahora a establecer la primera de varias de las versiones del Teorema Fundamental del Cálculo, que garantiza que la derivada de cualquier función sobre un intervalo  $I$  siempre es H-K integrable, sin la imposición de hipótesis adicionales sobre esta derivada

**Teorema 4.1:** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con primitiva  $F$  sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es H-K integrable y

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

**Prueba:** Dado  $\varepsilon > 0$ , sea la  $\delta$ , función medidora como el Lema 4.1 y sea

$D = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$  una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ . Como  $x_{i-1}$  y  $x_i$  encasillan a la etiqueta  $t_i$ , entonces

$$(4.1)$$

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

Ahora deseamos estimar la cantidad  $F(b) - F(a) - S(f, D)$ , para esto

hacemos uso de la suma telescópica  $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$  y obtenemos

$$F(b) - F(a) - S(f, D) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})]$$

Ahora de la desigualdad del triángulo obtenemos,

$$|F(b) - F(a) - S(f, D)| \leq \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})|$$

de la desigualdad (4.1) se sigue que el último término está dominado por la suma telescópica

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a),$$

como  $\varepsilon > 0$ , es arbitrario concluimos que  $f$  es H-K integrable y además

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Podemos describir el teorema de la siguiente manera Si  $F[a,b] \rightarrow R$  es diferenciable en todo punto de  $[a,b]$ , entonces  $F'$  es H-K integrable y además

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a)$$

El proximo ejemplo a considerar es un ejemplo de una función no acotada la cual es una integral impropia según Riemann

**Ejemplo 4.1:** Sea  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , para  $x > 0$  y  $f(0)=0$  Mostraremos que  $f$  es H-K

integrable sobre  $[0,1]$ , con  $\int_0^1 f = 2$  como se sabe del Cálculo

Sea  $\varepsilon > 0$ , primero consideremos la función cerca del cero Si  $0 < x < 1$ , entonces el área bajo la curva sobre  $[0,x]$  es  $2\sqrt{x}$  Si construimos la función medidora  $\gamma$  tal que  $\gamma(t) \subset (0,t)$ , para todo  $t \in (0,1]$ , entonces cuando  $D$  es una particion etiquetada  $\gamma$ -fina de  $[0,1]$ , la etiqueta asociada con el subintervalo de  $D$  que

contiene a cero es cero (teorema 8) Si  $\gamma(0) = \left(-\frac{\varepsilon^2}{16}, \frac{\varepsilon^2}{16}\right)$ , entonces

$$|f(0)(x_1 - 0) - 2\sqrt{x_1}| = 2\sqrt{x_1} < 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{16}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que  $[0, x_1] \subset \gamma(0)$  Si  $0 < u < v \leq 1$ , el área bajo la curva sobre  $[u,v]$  es

$2\sqrt{v} - 2\sqrt{u}$  y si  $u \leq z \leq v$ , tenemos

$$\begin{aligned}
|f(z)(v-u) - (2\sqrt{v} - 2\sqrt{u})| &= (v-u) \left| \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{2}{\sqrt{v} + \sqrt{u}} \right| \\
&= \frac{v-u}{z} \left| \frac{\sqrt{z}(\sqrt{v} + \sqrt{u}) - 2z}{\sqrt{v} + \sqrt{u}} \right| \\
&\leq \frac{v-u}{z} \left| \frac{\sqrt{z}(\sqrt{v} + \sqrt{u}) - 2z}{\sqrt{z}} \right| \\
&= \frac{v-u}{z} |\sqrt{v} + \sqrt{u} - 2\sqrt{z}| \\
&\leq \frac{v-u}{z} (|\sqrt{v} - \sqrt{z}| + |\sqrt{u} - \sqrt{z}|) \\
&= \frac{v-u}{z} \left( \frac{v-z}{\sqrt{v} + \sqrt{z}} + \frac{z-u}{\sqrt{u} + \sqrt{z}} \right) \\
&\leq \frac{v-u}{z} \left( \frac{v-z}{\sqrt{z}} + \frac{z-u}{\sqrt{z}} \right) = \frac{(v-u)^2}{z^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Esto sugiere que definamos el conjunto  $\gamma(z) = (z - \delta(z), z + \delta(z)) \cap (0, 2)$ .

para  $0 < z$ , con  $\delta(z) = \frac{\varepsilon z^{\frac{3}{2}}}{4}$  Ahora supongamos

que  $D = \{(t_i, I_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$  es  $\delta(z)$ -fina, con

$$I_i = [x_i, x_{i+1}], \quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = 1$$

Entonces  $t_0 = 0$ , de la estimación hecha arriba, tenemos

$$\begin{aligned}
|S(f, D) - 2| &= \left| \sum_{i=0}^n \{ f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - 2(\sqrt{x_{i+1}} - \sqrt{x_i}) \} \right| \\
&\leq 2\sqrt{x_1} + \sum_{i=1}^n |f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - 2(\sqrt{x_{i+1}} - \sqrt{x_i})| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{t_i^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i+1} - x_i)}{t_i^{\frac{3}{2}}} 2\delta(t_i) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon(x_{i+1} - x_i)}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

**Teorema 4.2:** Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tiene una  $c$ -primitiva  $F$  sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es H-K integrable y

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

**Prueba:** Sea  $E = \{c_k\}_{k=1}^n$  el conjunto excepcional para la  $c$ -primitiva  $F$  sobre  $[a, b]$ , como  $E$  es un conjunto contable entonces es nulo, en vista del teorema 3.9 podemos asumir que  $f(c_k) = 0$

Definamos ahora una función medidora sobre  $I = [a, b]$ , sea  $\varepsilon > 0$  y  $t \notin E$ , sea  $\delta_\varepsilon(t)$  como en lema, si  $t \in E$  entonces  $t = c_k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ , de la continuidad de  $F$  en  $c_k$ , escogemos  $\delta_\varepsilon(c_k) > 0$  tal que  $|F(z) - F(c_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$  para todo  $z \in I$  que satisface  $|z - c_k| \leq \delta_\varepsilon(c_k)$ , con esto definimos la función medidora  $\delta_\varepsilon(t)$  sobre  $I$

Ahora sea  $D = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$  una partición etiquetada  $\delta_\varepsilon$ -fina de  $I$ . Si ninguna de las etiquetas pertenecen a  $E$ , entonces la prueba en el teorema anterior se aplica sin cambios. Sin embargo, si  $c_k \in E$  es la etiqueta de un subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  entonces

$$\begin{aligned} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})| &\leq |F(x_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(x_{i-1})| + |f(c_k)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + 0 = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Ahora cada punto de  $E$  puede ser la etiqueta en más de dos subintervalos en  $D$ , por consiguiente la suma de los términos con  $t_i \in E$  satisface

$$\sum_{t_i \in E} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon$$

Por el lema, la suma de los términos con  $t_i \notin E$  satisface

$$\sum_{t \in I} |F(x_t) - F(x_{t-1}) - f(t)(x_t - x_{t-1})| \leq \varepsilon \sum_{t \in I} (x_t - x_{t-1}) \leq \varepsilon(b-a),$$

por lo cual cuando  $D$  sea  $\delta_\varepsilon$ -fina, tenemos

$$|F(b) - F(a) - S(f, D)| \leq \varepsilon(b-a).$$

y ya que  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, entonces  $f$  es H-K integrable con

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Se sigue del teorema (TFC) que las reglas desarrolladas para calcular integrales de la forma usual utilizando antiderivadas se mantienen para la integral H-

K En lo que sigue si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$  definamos  $\int_a^a f = -\int_b^a f$  y  $\int_a^a f = 0$

Otro método común muy utilizado en el cálculo de integrales es el método de sustitución o cambio de variables. Podemos utilizar el teorema 4.1 (TFC) para establecer tal resultado para la integral de H-K

**Teorema 4.3 ( Integración por sustitución)** Sean  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y

$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  diferenciables. Entonces

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f' = \int_a^b (f' \circ \varphi) \varphi'$$

**Prueba:** Por la regla de la cadena tenemos que  $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \varphi'$  y por el teorema

4.1

$$\begin{aligned} \int_a^b (f' \circ \varphi) \varphi' &= f(\varphi(\beta)) - f(\varphi(\alpha)) \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f' \end{aligned}$$

**Teorema 4.4:** Sean  $f_1$  y  $f_2$  diferenciables sobre  $I$ . Entonces  $f_1' f_2$  es integrable sobre  $I$

si y sólo si  $f_1 f_2'$  es integrable sobre  $I$  y en este caso,

$$\int_a^b f_1' f_2 = f_1(b) f_2(b) - f_1(a) f_2(a) - \int_a^b f_1 f_2'$$

**Prueba:** Por la regla del producto tenemos que  $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$ , entonces

$$\int_a^b f_1' f_2 = \int_a^b [(f_1 f_2)' - f_1 f_2'] \text{, luego}$$

$$\int_a^b f_1' f_2 = f_1(b) f_2(b) - f_1(a) f_2(a) - \int_a^b f_1 f_2'$$

## **CAPÍTULO 5**

## CAPÍTULO 5

### LEMA DE HENSTOCK Y LAS INTEGRALES IMPROPIAS

Una de las propiedades más importantes de la integral de Henstock-Kurzweil es la validez de los teoremas de convergencia de la forma  $\lim \int_I f_k = \int_I (\lim f_k)$ , bajo hipótesis más generales que los válidos para la integral de Lebesgue que a su vez son más generales que los teoremas válidos para la integral de Riemann. Estableceremos estos teoremas más adelante, pero la principal herramienta utilizada para establecer los teoremas de convergencia es un resultado conocido como el Lema de Henstock, resultado que presentamos de inmediato para luego discutir algunas aplicaciones del mismo, antes de esto veremos la terminología necesaria para este fin.

Sea  $I = [a, b]$ , una partición parcial etiquetada de  $I$  es una colección finita de parejas

$$\mathfrak{T} = \{(t_i, J_i) \mid 1 \leq i \leq n\},$$

donde los  $\{J_i\}$  son subintervalos cerrados no traslapados de  $I$  y  $t_i \in J_i$  (no se requiere

que  $\bigcup_{i=1}^n J_i = I$ ) Si  $\gamma$  es una función medidora sobre  $I$  y  $\mathfrak{T}$  es una partición parcial

etiquetada de  $I$ , entonces  $\mathfrak{T}$  es  $\gamma$ -fina, si  $t_i \in J_i \subset (t_i - \gamma(t_i), t_i + \gamma(t_i))$ , para  $i=1, 2, \dots, n$ .

Si  $\mathfrak{T}$  es una partición parcial etiquetada de  $I$  y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , escribimos

$S(f, \mathfrak{T}) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \ell(J_i)$  para la suma de Riemann de  $f$  con respecto a  $\mathfrak{T}$ , y si  $J = \bigcup_{i=1}^n J_i$ ,

escribimos  $\int_J f = \sum_{i=1}^n \int_{J_i} f$  cuando  $f$  es integrable. En el caso que  $D$  sea una partición

etiquetada  $\gamma$ -fina de  $I$  este resultado coincide con nuestra definición previa

**Lema 5.1(Henstock):** Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  integrable sobre  $I$ . Para  $\varepsilon > 0$ , supongamos que  $\gamma$

es una función medidora sobre  $I$  tal que si  $D$  es una partición etiquetada  $\gamma$ -fina de  $I$ ,

entonces  $\left| S(f, D) - \int_I f \right| < \varepsilon$ . Si  $\mathfrak{T} = \{(t_i, J_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$  es una partición parcial etiquetada

(cualquiera) de  $I$  tal que  $\mathfrak{T}$  es  $\gamma$ -fina, entonces

$$(5.1) \quad \left| S(f, \mathfrak{T}) - \int_I f \right| < \varepsilon.$$

Donde  $J = \bigcup_{i=1}^n J_i$ , y

$$(5.2) \quad \sum_{i=1}^n \left| f(t_i) \ell(J_i) - \int_{J_i} f \right| \leq 2\varepsilon$$

**Prueba:** El conjunto  $I = \bigcup_{i=1}^n J_i$  consiste de un número finito de intervalos disjuntos. Sea

$K_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , la clausura de estos subintervalos. Para  $\eta > 0$  la integrabilidad de  $f$  sobre

cada  $K_i$  implica que existe una partición etiquetada  $\gamma$ -fina  $E_i$  de  $K_i$  tal que

$$\left| S(f, E_i) \right| < \frac{\eta}{m}$$

Entonces  $D = \mathfrak{T} \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m$  es una partición  $\gamma$ -fina de  $I$ . Si

$J = \bigcup_{i=1}^n J_i$ , entonces

$$\left| S(f, D) - \int_I f \right| = \left| S(f, \mathfrak{I}) - \int_I f + \sum_{i=1}^m (S(f, E_i) - \int_{I_i} f) \right| < \varepsilon,$$

por lo tanto,

$$\left| S(f, D) - \int_I f \right| < \varepsilon + \sum_{i=1}^m \left| S(f, E_i) - \int_{I_i} f \right| < \varepsilon + m \left( \frac{\eta}{m} \right) = \varepsilon + \eta$$

Como  $\eta > 0$  es arbitrario,  $\left| S(f, D) - \int_I f \right| < \varepsilon$  como se deseaba

Para probar la segunda desigualdad. sea  $\mathfrak{I}$  y sea  $(I_i, J_i)$  tal que

$f(t_i)\ell(I_i) - \int_{I_i} f \geq 0 (< 0)$  Entonces por la desigualdad (5.1) se tiene

$$0 \leq \sum_{\mathfrak{I}^+} (f(t_i)\ell(J_i) - \int_{I_i} f) = \sum_{\mathfrak{I}^+} \left| f(t_i)\ell(J_i) - \int_{I_i} f \right| \leq \varepsilon$$

y

$$0 \leq -\sum_{\mathfrak{I}^-} (f(t_i)\ell(I_i) - \int_{I_i} f) = \sum_{\mathfrak{I}^-} \left| f(t_i)\ell(I_i) - \int_{I_i} f \right| \leq \varepsilon$$

por lo que se obtiene la desigualdad (5.2)

El lema de Henstock afirma que si  $\gamma$  es una función medidora sobre  $I$  tal que las particiones etiquetadas  $\gamma$ -finas de  $I$  inducen una suma de Riemann las cuales dan una buena aproximación del valor de la integral sobre  $I$ , entonces cualquier partición parcial etiquetada  $\gamma$ -fina induce sumas de Riemann las cuales dan buenas aproximaciones al valor de la integral sobre la unión de los intervalos en la partición etiquetada

Veamos ahora algunas aplicaciones del lema de Henstock

**Corolario 5.1:** Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  H-K integrable sobre  $I=[a,b]$  entonces la integral indefinida  $F(x) = \int_a^x f$ , para  $a \leq x \leq b$ , es continua en  $[a,b]$

**Prueba:** Sea  $c \in [a,b)$  probaremos que  $F$  es continua a la derecha en  $c$ . Si  $\varepsilon > 0$ , sea  $\delta_c$  la función medidora sobre  $I$  como en la hipótesis del lema de Henstock. Definamos ahora una función medidora por

$$\delta'_c(t) = \begin{cases} \min\left\{\delta_c(t), \frac{1}{2}|t-c|\right\}, & \text{si } t \in I, t \neq c, \\ \min\left\{\delta_c(c), \frac{\varepsilon}{(|f(c)|+1)}\right\}, & \text{si } t = c \end{cases}$$

Ahora, sea  $0 < h < \delta'_c(c)$  y sea  $D_0$  la subpartición  $\delta'_c$ -fina consistente de los pares  $([c, c+h], c)$ . Si aplicamos el lema de Henstock a  $D_0$  inferimos que

$$\left| f(c)h - \int^{c+h} f \right| \leq \varepsilon$$

Se sigue del hecho de que  $h \leq \frac{\varepsilon}{(|f(c)|+1)}$ , que

$$|F(c+h) - F(c)| = \left| \int^{c+h} f \right| \leq |f(c)|h + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, entonces  $F$  es continua a la derecha de  $c$ . De la misma forma se prueba que  $F$  es continua a la izquierda de cualquier punto en  $(a,b]$

**Corolario 5.2:** Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  H-K integrable sobre  $I$ . Si  $\int_a^b f = 0$ , para todo  $c \in [a,b]$ , entonces  $|f|$  es H-K integrable con

$$\int_a^b |f| = 0$$

**Prueba:** Note que si  $a < c < d \leq b$ , entonces

$$\int_a^d f = \int_a^c f + \int_c^d f = 0,$$

sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $\gamma$  una función medidora sobre  $I$ , tal que

$$\left| S(f, D) - \int_a^d f \right| = |S(f, D)| < \varepsilon,$$

siempre y cuando  $D = \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n \ll \gamma$ , por el lema de Henstock

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i)| \ell(I_i) \leq 2\varepsilon,$$

esto implica que  $|f|$  es H-K integrable con  $\int_a^d |f| = 0$

Concluiremos esta sección considerando la integral impropia para la HK integral

**Teorema 5.1 (Teorema de Hake):** Sea  $f [a, b] \rightarrow R$  H-K integrable sobre  $[c, b]$  para

todo  $a < c < b$ . Entonces  $f$  es H-K integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f$  existe. En este

$$\text{caso } \int_a^b f = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f$$

**Prueba:** Para probar la condición necesaria, sea  $\varepsilon > 0$  y escojamos  $\gamma$  una función medidora sobre  $[a, b]$  tal que

$$\left| S(f, D) - \int_c^b f \right| < \varepsilon,$$

siempre que  $D$  sea una partición etiquetada. Para cada  $c \in (a, b)$  existe una función medidora  $\gamma_c$  sobre  $[c, b]$  tal que

$$\left| S(f, E) - \int_c^b f \right| < \varepsilon,$$

siempre que  $E$  sea una partición etiquetada  $\gamma$ -fina de  $[c, b]$  Podemos asumir que  $\gamma_c(t) \subset \gamma(t)$  para todo  $t \in [c, b]$  Escojamos  $c$  tal que  $c \in (a - \gamma(a), a + \gamma(a))$  y  $(c - a)|f(a)| < \varepsilon$

Supongamos que  $s \in (a, c)$ , sea  $E$  una partición etiquetada  $\gamma$ -fina de  $[s, b]$  y sea  $D = E \cup \{(a, [a, s])\}$  Note que  $D \ll \gamma$  por lo tanto

$$\left| \int_a^b f - \int_s^b f \right| \leq \left| \int_a^b f - S(f, D) \right| + \left| S(f, E) \int_s^b f \right| + |f(a)||s - a| < 3\varepsilon,$$

por lo que  $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f = A$

Para probar la condición suficiente, sea  $\{c_k \ k = 0, 1, 2 \} \subset (a, b)$  tal que  $c_0 = b, c_k > c_{k+1}$  y  $c_k \rightarrow a$  Tomemos una función medidora  $\gamma_1$  sobre  $[c_1, c_0]$  tal que

$$\left| S(f, d) - \int_{c_1}^{c_0} f \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ siempre y cuando } D \text{ sea una partición etiquetada } \gamma_1\text{-fina de } [c_1, c_0]$$

Para  $k \geq 2$  tomemos una función medidora  $\gamma_k$  sobre  $[c_k, c_{k-2}]$  tal que

$$\left| S(f, D) - \int_{c_k}^{c_{k-2}} f \right| < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

siempre y cuando  $D$  sea una partición etiquetada  $\gamma_k$ -fina de  $[c_k, c_{k-2}]$  Escojamos  $N$  tal que  $\left| A - \int_a^{c_N} f \right| < \varepsilon$  para  $a < s < c_N$  y  $|f(a)|(c_N - a) < \varepsilon$  Definamos ahora una función

medidora  $\gamma$  de la siguiente manera

$$\gamma(t) = \begin{cases} (-\infty, c_N), & \text{si } t = a \\ \gamma_1(t) \cap (c_1, \infty), & \text{si } c_1 < t < c_0 \\ \gamma_k(t) \cap (c_k, c_{k-2}), & \text{si } c_k < t \leq c_{k-1}, k \geq 2 \end{cases}$$

Supongamos ahora que  $D = \{(t, l)\}_{t=1}^n \ll \gamma$  Para cada  $k$  sea  $D_k$  el subconjunto de  $D$  cuyas etiquetas están en  $(c_k, c_{k-1}]$  (sólo un número finito de los  $D_k$  son no vacíos y no dos de los  $D_k$  tienen elementos en común)

Sea  $J_k$  la unión de los subintervalos pertenecientes a  $D_k$ , por la definición de  $\gamma_k$  cada  $D_k \ll \gamma_k$ ,  $J_1 \subset (c_1, c_0]$  y  $J_k \subset (c_k, c_{k-2})$  para  $k \geq 2$  Por el lema de Henstock

$$\left| S(f, D_k) - \int_{J_k} f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

note que si  $(x, K)$  es tal que el subintervalo  $K = [a, d]$ , es el subintervalo en  $D$  que contiene a  $a$ , entonces la etiqueta asociada con  $K$  puede ser  $a$ , es decir  $a=x$  (Asuma que  $a < x$ , entonces  $a < c_k < x$  para algún  $k$  y  $\lambda \in K \subset (x - \gamma(x), x + \gamma(x)) \subset (c_k, c_{k-2})$ , esto es imposible ya que  $a \in K$  Así,

$$|A - S(f, D)| \leq |f(a)| \ell(K) + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{J_k} f - S(f, D_k) \right) \right| + \left| A - \int_a^b f \right| < \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} + \varepsilon = 3\varepsilon$$

De este resultado podemos concluir que la HK-integral no posee integrales impropias sobre intervalos acotados Probaremos más adelante que esta situación es similar para intervalos no acotados Esta particularidad de la HK-integral entra en un contraste muy agudo con la integral de Lebesgue y la integral de Riemann puesto que para ambas integrales existen integrales impropias

Emplearemos ahora el teorema 5.1 para obtener el criterio de comparación para la existencia de la integral

**Corolario 5.3:** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $|f| \leq g$  en  $[a, b]$ . Supongamos que  $f$  es absolutamente integrable sobre  $[c, b]$  para  $a < c \leq b$ .

i) Si  $f$  es no negativa, entonces  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si

$$\left\{ \int_a^c f \mid a < c \leq b \right\} \text{ es acotado}$$

ii) Si  $g$  es integrable sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$ .

**Prueba:**

i) Note que la función  $c \rightarrow \int_a^c f$  es decreciente en  $(a, b]$  entonces por el teorema 5.1 el resultado es inmediato.

ii) Sean  $F(s) = \int_a^s f$  y  $G(s) = \int_a^s g$ , para  $a < s \leq b$ , por el teorema 5.1, es suficiente probar que la función  $F$  satisface el criterio Cauchy cerca de  $a$ .

Para  $a < s < t$ ,

$$|F(t) - F(s)| \leq \int_s^t |f| \leq \int_s^t g = G(t) - G(s),$$

por el teorema 5.1, la función  $G$  satisface el criterio de Cauchy cerca de  $a$ , por lo tanto  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$ .

**Ejemplo 5.1:** Para  $p \in \mathbb{R}$ , sea  $f(t) = t^p$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Para  $0 < c < 1$  y  $p \neq -1$ ,

$$\int_a^c f = \frac{(1 - c^{p+1})}{(p+1)}$$

Esta expresión tiene límite finito cuando  $c$  tiende a 0 si y sólo si  $p+1 > 0$  y en este caso tenemos

$$\int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}$$

por el teorema 5.1 Para  $p=-1$ , tenemos

$$\int_0^1 t^{-1} dt = \ln c,$$

por lo tanto  $t^{-1}$  no es HK-integrable sobre  $[0,1]$  por el teorema 5.1, Así,  $t^p$  es integrable sobre  $[0,1]$  si y sólo si  $p > -1$

## **CAPÍTULO 6**

## CAPÍTULO 6

### LA INTEGRAL HENSTOCK-KURZWEIL SOBRE INTERVALOS NO ACOTADOS

Consideraremos ahora funciones a valores reales sobre intervalos no acotados y definiremos su integral, esta definición se pudo haber dado anteriormente, ya que existen pocos puntos donde necesitamos consideraciones adicionales al tratar con intervalos infinitos, pero es más conveniente comenzar el estudio de esta integral sobre intervalos compactos

Supongamos que  $I$  es cualquier intervalo en  $\mathbb{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  y que deseamos definir la H-K integral de  $f$  sobre  $I$ . Extenderemos la definición de  $f$  a  $\mathbb{R}$ , definiendo  $f(t)=0$  para  $t \in \mathbb{R} - I$  y entonces la integral de esta extensión sobre  $\mathbb{R}$  nos daría una definición de la integral de  $f$  sobre  $I$ . Así, necesitamos solamente considerar la definición de la integral para funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si deseamos extender la definición de la integral para funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la primera cosa que debemos considerar son los conceptos de partición y partición etiquetada de  $\mathbb{R}$ .

Una partición de  $\mathbb{R}$  es un número finito de subintervalos cerrados, en el sentido topológico, no traslapados cuya unión es  $\mathbb{R}$ , por lo tanto al menos uno de los subintervalos debe tener longitud infinita. Una partición etiquetada de  $\mathbb{R}$  es una colección finita de pares ordenados  $\{(t_i, I_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$ , donde  $\{I_i \mid 1 \leq i \leq m\}$  es una partición de  $\mathbb{R}$  y  $t_i \in \mathbb{R}$ , para cada  $i$ . Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función estrictamente positiva y  $(t_i, I_i)$  es un elemento de una partición etiquetada donde  $I_i$  tiene longitud infinita entonces el término  $f(t_i)/I_i$  es infinito y la correspondiente suma de Riemann, para esta partición etiquetada también es infinita. Si asociamos la integral de una función positiva con el área bajo la curva de esta función, sería una situación indeseable.

Podemos "remediar" fácilmente esta situación considerando extender los números reales, para esto a  $\mathbb{R}$  le adjuntamos los "puntos infinitos"  $+\infty$  y  $-\infty$ , como es

usual Denotaremos esta extensión por  $R^*$  y adoptaremos el siguiente orden y las propiedades algebraicas en  $R^*$

$$-\infty < x < \infty \text{ para todo } x \in R$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$x \pm \infty = \pm\infty, \text{ para todo } x \in R$$

$$x(\pm\infty) = \pm\infty, \text{ para } x > 0$$

$$x(\pm\infty) = \mp\infty, \text{ para } x < 0$$

**Observación 6.1:** La más importante convención concerniente a la aritmética en  $R^*$  es la regla

$$0(\pm\infty) = 0 = (\pm\infty)0$$

la cual es frecuentemente utilizada

Nos referiremos a los intervalos de la forma  $[-\infty, a]$ ,  $[a, \infty]$ ,  $[-\infty, \infty]$  como subintervalos cerrados de  $R^*$  y además llamaremos a los intervalos de la forma  $[-a, \infty)$ ,  $(-\infty, a]$  subintervalos abiertos de  $R^*$ . Para intervalos no acotados  $I$  como los descritos arriba, se tiene que

$$l(I) = \infty$$

Sea  $I$  un subintervalo cerrado de  $R^*$ . Una partición de  $I$  es una colección finita de subintervalos no traslapados de  $I$  cuya unión es  $I$  y una partición etiquetada de  $I$  es una colección finita de pares ordenados  $D = \{(t_i, I_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$  tal que  $\{I_i \mid 1 \leq i \leq m\}$  es una partición etiquetada de  $I$  y  $t_i \in I_i$  para cada  $i$ . Como en el capítulo 2, nos referiremos a los subintervalos  $I_i$  como los subintervalos de  $D$  y a los  $t_i$  como las etiquetas asociadas con  $I_i$ .

Si  $I$  es cualquier subintervalo de  $R$  y  $f: I \rightarrow R$ , siempre asumiremos que  $f$  es extendida a  $R^*$  por  $f(t) = 0$  para  $t \in R^* - I$ . Si  $I$  es un subintervalo cerrado de  $R^*$ ,  $f: I \rightarrow R$  y  $D = \{(t_i, I_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$  es una partición etiquetada de  $I$ , la suma de  $f$  con respecto a  $D$  está definida por

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^m f(t_i)l(I_i)$$

Note que aunque sea  $\pm\infty$  la etiqueta asociada con el intervalo de longitud infinita, entonces  $S(f, D)$  esta siempre bien definida y es un número real debido a la condición

$$0(\pm\infty) = 0$$

Una función medidora  $\gamma$  sobre  $I \subset R^*$  es una función en  $I$  tal que  $\gamma(t)$  es un intervalo abierto que contiene a  $t$

Si  $D = \{(t_i, I_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$  es una partición etiquetada de  $I$  y  $\gamma$  es una función medidora sobre  $I$ , decimos que  $D$  es  $\gamma$ -fina y escribimos  $D \ll \gamma$ , si  $t_i \in I_i \subset \gamma(t_i)$  para  $1 \leq i \leq m$ . Note que si  $\gamma(t)$  es un intervalo abierto acotado para todo  $t \in R \cap I$ , entonces la etiqueta de cualquier intervalo no acotado en una partición  $\gamma$ -fina de  $D$  de  $I$  debe ser  $\pm\infty$  así la suma de Riemann de cualquier función  $f: I \rightarrow R$  con respecto a  $D$  esta bien definida

Estamos ahora en posición de definir la H-K integral sobre un subintervalo cerrado arbitrario  $I$  de  $R^*$ . Primero el Lema de Cousin a intervalos no acotados

**Teorema 6.1:** Sea  $I$  un intervalo cerrado en  $R^*$  y  $\gamma$  una función medidora sobre  $I$ . Entonces existe una partición etiquetada  $\gamma$ -fina de  $I$ .

**Prueba:** Consideremos el caso  $I = [a, \infty]$  y sea  $\gamma(\infty) = (b, \infty]$ . Si  $b < a$ , tenemos  $D = \{(\infty, I)\}$ . Si  $b \geq a$  existe una partición etiquetada  $\gamma$ -fina  $D_0$  de  $[a, b+1]$ . Entonces  $D = D_0 \cup \{(\infty, [b+1, \infty])\}$  es una partición etiquetada  $\gamma$ -fina de  $I$ . Los otros casos de intervalos no acotados son similares.

Procederemos ahora a definir la H-K integral para un subintervalo cerrado arbitrario  $I$  de  $R^*$ .

**Definición 6.1:** Sea  $I$  un intervalo cerrado en  $R^*$  y sea  $f: I \rightarrow R$ . Entonces  $f$  es H-K integrable sobre  $I$  si existe  $A \in R$  tal que para todo  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\gamma$  sobre  $I$  tal que  $|S(f, D) - A| < \epsilon$  siempre que  $D$  sea una partición etiquetada  $\gamma$ -fina de  $I$ .

Como en el teorema 2.2 es fácil establecer que el valor de  $A$  en esta definición es único y bien definida por el teorema 6.1, también adoptamos la notación

$A = \int_I f = \int_I f(t) dt$  Si  $I = [a, \infty)$ ,  $I = [-\infty, a]$ ,  $I = [-\infty, \infty]$ , algunas veces escribiremos

$$\int_I f = \int_a^\infty f + \int_{-\infty}^a f$$

Veamos ahora un ejemplo que ilustra esta definición

**Ejemplo 6.1:** Sea  $f(t) = \frac{1}{t^2}$ , para  $t \geq 1$ . Mostraremos que  $f$  es integrable sobre  $[1, \infty)$ ,

con  $\int_1^\infty f = 1$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , definiremos una función medidora sobre  $[1, \infty)$ , tal que  $\gamma(t)$

es acotada para todo  $t \in [1, \infty)$ , esto obliga que la etiqueta de cualquier intervalo no

acotado en cualquier partición etiquetada es  $+\infty$ . Si definimos  $\gamma(\infty) = \left(\frac{2}{\varepsilon}, \infty\right]$  y

tenemos  $[w, \infty) \subset \gamma(\infty)$ , entonces  $\left|f(\infty)l([w, \infty)) - \frac{1}{w}\right| = \frac{1}{w} < \frac{\varepsilon}{2}$  (Note que el área bajo

la curva de  $f$  sobre el intervalo  $[w, \infty)$  debe ser  $\frac{1}{w}$ . Luego si  $(z, [u, v])$  es un par en una

partición etiquetada, queremos estimar  $\left|f(z)(v-u) - \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)\right|$  (Nuevamente el área

bajo la curva de  $f$  sobre  $[u, v]$  debe ser  $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$ .)

Tenemos,

$$\left|f(z)(v-u) - \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)\right| = \left|\frac{uv - z^2}{z^2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)\right| \leq \frac{v-u}{z^2} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{u}\right)$$

Considerando los casos cuando  $uv - z^2$  es positivo o negativo. Supongamos ahora que

$D = \{(t_i, I_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$  es una partición etiquetada de  $[1, \infty)$  con

$I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_m = \infty$ ,  $t_m = \infty$ . De la desigualdad anterior y del hecho de que

$$-1 + \frac{1}{x_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \left(-\frac{1}{x_{i-1}} + \frac{1}{x_i}\right), \text{ tenemos}$$

$$|S(f, D) - 1| \leq \left|f(\infty)l(I_m) - \frac{1}{x_{m-1}}\right| + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{t_i^2} (x_i - x_{i-1}) \left(-1 + \frac{1}{x_{m-1}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i} \left(\frac{1}{x_{i-1}} + \frac{1}{x_i}\right)$$

Si definimos  $\gamma(t) = \left(t - \frac{\varepsilon t}{4}, t + \frac{\varepsilon t}{4}\right)$  y asumimos que  $D \ll \gamma$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
|S(f, D) - I| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varepsilon_i}{2l_i} \left( \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \left( \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 - \frac{1}{x_{m-1}} \right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Las propiedades básicas de esta integral establecidas anteriormente y particularmente el Lema de Henstock se verifican para la integral sobre intervalos no acotados

Como vimos en el caso de los intervalos acotados, mostraremos que no existen integrales impropias sobre intervalos no acotados

**Teorema 6.2:** Sea  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  H-K integrable sobre  $[a, b]$  para todo  $a < b < \infty$

Entonces  $f$  es H-K integrable sobre  $I$  si y sólo si  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f = A$  existe y  $\int_I f = A$

**Prueba:** Sea  $\varepsilon > 0$ , supongamos que  $f$  es H-K integrable sobre  $I$ , existe una función

medidora  $\gamma$  sobre  $I$  tal que  $\left| S(f, D) - \int_I f \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ , siempre que  $D$  sea  $\gamma$ -fina. Para

$a < c < \infty$  existe una función medidora  $\gamma_c$  en  $[a, c]$  tal que  $\left| S(f, E) - \int_I f \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

siempre que  $E$  sea una partición etiquetada  $\gamma$ -fina de  $[a, c]$ , podemos asumir que

$\gamma_c(t) \subset \gamma(t)$  para todo  $t \in [a, c]$ . Sea  $\gamma(\infty) = (T, \infty]$ , para  $c > T$ , sea  $E$  una partición

etiquetada  $\gamma_c$ -fina de  $[a, c]$ , sea  $D = E \cup \{(\infty, [c, \infty))\}$ . Entonces  $D$  es  $\gamma$ -fina y

$$\left| \int_I f - \int_I f \right| \leq \left| \int_I f - S(f, D) \right| + \left| S(f, E) - \int_I f \right| + |f(\infty)|l([c, \infty)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

por lo tanto,  $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f = \int_I f$

Supongamos que  $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f = A$ , escojamos una sucesión  $\{c_k\}$  tal que

$a = c_0 < c_1 < \dots$  y  $c_k \rightarrow \infty$ . Escojamos una función medidora  $\gamma_0$  en  $[c_0, c_1]$  tal

que

$$\left| S(f, D) - \int_a^1 f \right| < \frac{\varepsilon}{2^2}$$

siempre que  $D$  sea una partición etiquetada  $\gamma_0$ -fina de  $[c_0, c_1]$  Para  $k \geq 1$ , escojamos una función medidora  $\gamma_k$  en  $[c_{k-1}, c_{k+1}]$  tal que

$$\left| S(f, D) - \int_{c_{k-1}}^{c_{k+1}} f \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

siempre que  $D$  es una partición etiquetada  $\gamma_k$ -fina de  $[c_{k-1}, c_{k+1}]$  y  $N$  tal que  $b \geq c_N$  con lo cual

$$\left| \int_a^b f - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Definamos ahora una función medidora  $\gamma$  en  $I$  por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (c_N, \infty] & t = \infty \\ \gamma_k(t) \cap (c_{k-1}, c_{k+1}) & c_k \leq t \leq c_{k+1}, \quad k = 1, 2, \\ \gamma_0(t) \cap (c_0, c_1) & c_0 \leq t < c_1 \end{cases}$$

y supongamos que  $D = \{(t_i, t_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$  es una partición etiquetada  $\gamma$ -fina de  $I$ . Asumamos que  $I_m = [\alpha, \infty]$  es el intervalo no acotado en  $D$ , note que  $t_m = \infty$  y  $c_N < \alpha$ . Para  $k \geq 0$  sea  $D_k$  el elemento en  $D$  cuyas etiquetas están en  $[c_k, c_{k+1}]$ . Por la definición de  $\gamma$  cada  $D_k$  es  $\gamma_k$ -fina, si  $J_k$  es la unión de los subintervalos en  $D_k$ , entonces  $J_0 \subset [c_0, c_1]$  para  $k \geq 1$ . Por el Lema de Henstock

$$\left| S(f, D_k) - \int_{J_k} f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |A - S(f, D)| &\leq \left| A - \int_a^{\alpha} f \right| + \left| \int_a^{\alpha} f - S(f, D) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{J_k} f - \sum_{k=0}^{\infty} S(f, D_k) + f(\infty)l(I_m) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por supuesto que resultados análogos se obtienen para integrales sobre intervalos de la forma  $[-\infty, b]$ ,  $[-\infty, \infty]$ . Utilizando este teorema podemos obtener un corolario análogo al corolario 5.3

**Corolario 6.1:** Sea  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  H-K absolutamente integrable sobre  $[a, b]$  para todo  $a < b < \infty$

i) Si  $f$  es no negativa,  $f$  es H-K integrable sobre  $I$  si y sólo si,

$$\sup \left\{ \int_a^b f \mid a < b < \infty \right\} < \infty$$

ii) Si  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  es no negativa y H-K integrable sobre  $I$  y  $|f(t)| \leq g(t)$ , para todo  $t \in I$ , entonces  $f$  es H-K absolutamente integrable sobre  $I$

**Ejemplo 6.2:** Sea  $p \in \mathbb{R}$  y sea  $f(t) = \frac{1}{t^p}$ , para  $t \neq 0$ . Entonces  $\int_a^b f = \frac{(b^{-p+1} - a^{-p+1})}{1-p}$ ,

para  $p \neq 1$ , si  $p = 1$ .  $\int_a^b f = \ln b - \ln a$

Así del corolario 3.8 se sigue que  $f$  es H-K integrable sobre  $[1, \infty]$  si y sólo si  $p > 1$

**Proposición 6.1** Sea  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  positiva, decreciente y H-K integrable sobre  $[1, b]$ ,

para todo  $1 < b < \infty$ . Entonces la integral  $\int_1^\infty f = A$ , existe si y sólo si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = S \text{ es convergente, en este caso } A \leq S < A + f(1)$$

**Prueba:** Para  $t \leq x \leq t+1$ ,  $f(t+1) \leq f(x) \leq f(t)$ , así  $f(t+1) \leq \int_t^{t+1} f \leq f(t)$  y

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) \leq \int_1^n f \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

si  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$S - f(1) \leq A \leq S$$

Veamos otro ejemplo que ilustra la convergencia condicional de la integral

**Ejemplo 6.3:** La integral  $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$  existe. En efecto, integrando por partes se tiene

$$\int_1^b \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\cos t}{t} \Big|_1^b + \int_1^b \frac{\cos t}{t^2} dt$$

la función  $\frac{\cos t}{t^2}$  es H-K integrable sobre  $[1, \infty]$ , por el corolario 6.1 (ii) y el ejemplo

6.2 con  $p=2$ . De allí que,  $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\cos b}{b} = 0$  con lo cual del teorema 6.2 la integral de  $\frac{\sin t}{t}$

sobre  $[1, \infty]$ , existe

Sin embargo,  $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$  no existe, en efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\text{sent}}{t} \right| dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\text{sent}}{t} \right| dt \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\text{sent}| dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}, \quad \text{para todo } n \end{aligned}$$

Consideremos la integrabilidad absoluta para la H-K integral. Recalcamos que la H-K integral admite funciones condicionalmente integrables, daremos ahora las condiciones necesarias y suficientes para integrabilidad absoluta, estas condiciones involucran la variación de una función.

**Definición 6.2:** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $\pi = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  es una partición de  $[a, b]$ , la variación de  $f$  sobre  $\pi$  es

$$\text{var}(f; \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

y la variación de  $f$  sobre  $[a, b]$  es

$$\text{Var}(f; [a, b]) = \sup \text{var}(f; \pi)$$

donde el supremo se toma sobre todas las posibles particiones  $\pi$  de  $[a, b]$ . Si

$$\text{Var}(f; [a, b]) < \infty,$$

se dice que tiene variación acotada.

Para los lectores que no están familiarizados con la definición y propiedades de las funciones con variación acotada referimos el libro Introduction to Gauge integral.

**Teorema 6.3:** Sea  $I = [a, b]$ , con  $-\infty < a < b < \infty$  y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  H-K integrable sobre  $I$ . Sea  $F(x) = \int_a^x f$ ,  $a \leq x \leq b$ , la integral indefinida de  $f$ . Entonces  $|f|$  es H-K integrable sobre  $I$  si y sólo si  $F$  es de variación acotada sobre  $I$ . En este caso

$$\int_I |f| = \text{Var}(F; I)$$

**Prueba:** Sea  $V = \text{Var}(F; I)$ . Si  $|f|$  es H-K integrable y  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  es una partición de  $I$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f| = \int_a^b |f|$$

por consiguiente

$$V \leq \int_a^b |f| < \infty$$

Para la condición suficiente asumamos que  $V < \infty$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Existe una partición  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  de  $I$  tal que,  $V - \varepsilon < \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right| \leq V$ , donde  $K_i = [x_{i-1}, x_i]$ . Note que si  $P_1 = \{a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}$  es un refinamiento de la partición  $P$  y  $L_i = [y_{i-1}, y_i]$ , entonces,

$$(1) \quad V - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^m \left| \int_{y_{i-1}}^{y_i} f \right| \leq V$$

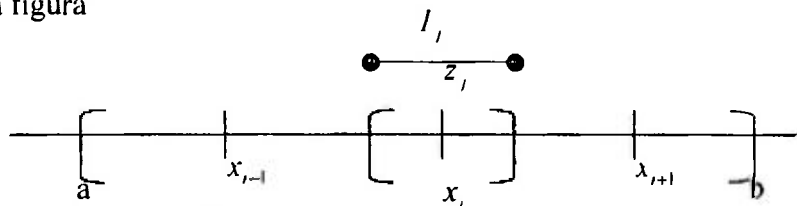
Sea función medidora  $\gamma_1$  en  $I$  tal que  $|S(f, D) - \int f| < \varepsilon$ , siempre que  $D$  sea una partición etiquetada  $\gamma_1$ -fina de  $I$ , por el ejercicio 31, si  $D = \{(t_i, J_i) \mid 1 \leq i \leq p\} \ll \gamma_1$ , entonces

$$(2) \quad \left| \sum_{i=1}^p \left\{ f(t_i) l(J_i) - \left| \int_{J_i} f \right| \right\} \right| \leq 2\varepsilon$$

Sea una función medidora  $\gamma$  en  $I$  tal que  $\gamma(t) \subset \gamma_1(t)$  para todo  $t \in I$ ,  $\gamma(t) \subset K_i$  y  $\gamma(x_i) \subset (x_{i-1}, x_{i+1})$  donde  $x_{-1} = -\infty, x_{n+1} = \infty$ . Si  $E = \{(z_i, I_i) \mid 1 \leq i \leq q\}$  es una partición etiquetada  $\gamma$ -fina de  $I$ , entonces existe una partición etiquetada  $\gamma$ -fina  $E' = \{(z'_i, I'_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$  tal que la partición  $\{I'_i \mid 1 \leq i \leq r\}$  es un refinamiento de  $\{K_1, \dots, K_n\}$  y tal que  $S(|f|, E) = S(|f|, E')$ . En efecto, por la definición de  $\gamma$ , podemos tomar

$$E' = \{(z_i, I_i \cap K_j) \mid 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n, I_i \cap K_j \neq \emptyset\}$$

Observe la figura



Entonces de (1) y (2) tenemos que

$$V - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^q \left| \int_{I_i} f \right| \leq V \quad \text{y} \quad \left| \sum_{i=1}^r \left\{ f(z'_i) l(I'_i) - \left| \int_{I'_i} f \right| \right\} \right| \leq 2\varepsilon$$

Por consiguiente,

$$|S(|f|, E) - V| = \left| S(|f|, E') \pm \sum_{i=1}^l \left| \int f_i - V \right| \right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon$$

Consideremos el caso cuando el intervalo  $I$  es no acotado

**Teorema 6.4:** Sea  $I = [-\infty, b]$ ,  $b < \infty$  y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  H-K integrable sobre  $I$ . Sea  $F(x) = \int_{-\infty}^x f$  para  $-\infty < x < b$ . Entonces  $|f|$  es H-K integrable sobre  $I$  si y solo si  $F$  es de variación acotada sobre  $I$ . En este caso,

$$\int_I |f| = \text{Var}(F; I)$$

**Prueba:** Para  $-\infty < a < b$ , sea  $F_a(x) = \int_a^x f$  para  $a \leq x \leq b$  y  $c_a = \int_{-\infty}^a f$  por consiguiente  $F(x) = F_a(x) + c_a$  para  $a \leq x \leq b$ .

Supongamos que  $|f|$  es H-K integrable sobre  $I$ , si  $-\infty < a < b$ , entonces por el teorema 6.3 tenemos que

$$\int_a^b |f| = \text{Var}(F_a; [a, b]) = \text{Var}(F; [a, b])$$

Ahora por el teorema 6.2,

$$\int_{-\infty}^b |f| = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b |f| = \text{Var}(F; I)$$

Supongamos ahora que  $F$  es de variación acotada sobre  $I$ . Si  $-\infty < a < b$ , entonces por el teorema 6.3

$$\int_a^b |f| = \text{Var}(F_a; [a, b]) = \text{Var}(F; [a, b]),$$

por el teorema 3.18

$$\text{Var}(F; I) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \text{Var}(F; [a, b]) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b |f| = \int_{-\infty}^b |f|,$$

los casos cuando  $I = [a, +\infty]$  o  $[-\infty, +\infty]$  se tratan de forma similar.

Como consecuencia de estos dos últimos teoremas se obtiene el siguiente resultado el teorema de comparación para la integrabilidad absoluta.

**Corolario 6.2:** Si  $I$  un subintervalo cerrado de  $\mathbb{R}^*$  y si  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones H-K integrables sobre  $I$  con  $|f(t)| \leq g(t)$ , para todo  $t \in I$ . Entonces  $f$  es H-K absolutamente integrable sobre  $I$  con

$$\left| \int f \right| \leq \int |f| \leq \int g$$

**Prueba:** Si  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , con  $x_i \in I$ , entonces,

$$\sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g = \int_{x_0}^{x_n} g,$$

y por los teoremas 6.3 y 6.4, se obtiene el resultado deseado

### 6.1 Propiedades de la integrabilidad absoluta.

**Teorema 6.5:** Si  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones H-K absolutamente integrables y si  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $cf$  y  $f + g$  son H-K absolutamente integrables

**Prueba:** Como  $f$  y  $|f|$  son H-K integrables sobre  $I$ , la primera afirmación se obtiene del hecho de que  $(cf)'(x) = c|f|'(x)$ , para todo  $x \in I$ . Ahora, como  $|cf|$  y  $|g|$  son integrables sobre  $I$ , entonces  $|cf| + |g|$  es H-K integrable sobre  $I$ , luego por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$|cf + g| \leq |cf| + |g|,$$

y por el corolario,  $cf + g$  es H-K absolutamente integrable

**Teorema 6.6:** Si  $f$  es H-K integrable las siguientes afirmaciones son equivalentes

- a  $f$  es H-K absolutamente integrable
- b Existe  $w$  H-K absolutamente integrable tal que  $f(x) \leq w(x)$  para todo  $x \in I$
- c Existe  $\alpha$  H-K absolutamente integrable tal que  $\alpha(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in I$

**Prueba:**

$a \Rightarrow b$  inmediato solo basta hacer  $w=f$

$b \Rightarrow a$  Note que  $f = w - (w - f)$  y como  $w-f$  es integrable  $w - f \geq 0$  entonces  $w-f$  es H-K absolutamente integrable y por teorema anterior  $f$  es H-K absolutamente integrable

Dejamos como ejercicio al lector la demostración  $a \Leftrightarrow c$

**Corolario 6.3:** Si  $f$  es H-K integrable las siguientes afirmaciones implican que  $f$  es absolutamente integrable

- a  $f$  es acotada superiormente en  $I$
- b  $f$  es acotada inferiormente en  $I$
- c  $f$  es acotada en  $I$

**Definición 6.3:** Sean  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$

a Definimos el máximo de  $f$  y  $g$ , denotado por  $f \vee g$  o  $\max\{f, g\}$  de la siguiente manera

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \text{ para todo } x \in I$$

b Definimos el mínimo de  $f$  y  $g$ , denotado por  $f \wedge g$  o  $\min\{f, g\}$  de la siguiente manera

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \text{ para todo } x \in I$$

c Definimos la parte positiva y negativa de  $f$ , denotada por  $f^+$  y  $f^-$  respectivamente por

$$f^+ = f \vee 0 \quad y \quad f^- = f \wedge 0$$

**Teorema 6.7:** Si  $f$  es una función H-K integrable las siguientes afirmaciones son equivalentes

- a  $f$  es absolutamente integrable
- b  $f^+$  y  $f^-$  son H-K integrables
- c  $f^+$  y  $f^-$  son H-K absolutamente integrables

**Prueba:**

$a \Rightarrow b$  De la identidad  $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$  y del teorema 3.1 se tiene que  $f^+$  es H-K integrable

$b \Rightarrow c$  Como  $f^+ \geq 0$  y  $f^- \geq 0$ , entonces  $f^+$  y  $f^-$  son absolutamente integrables

$c \Rightarrow a$  De la identidad  $|f| = f^+ + f^-$  y el teorema 6.5 es absolutamente integrable

**Teorema 6.8:** Si  $f$  y  $g$  son funciones H-K integrables entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

- a  $f$  y  $g$  son funciones H-K absolutamente integrables
- b  $f \vee g$  es H-K absolutamente integrable
- c  $f \wedge g$  es H-K absolutamente integrable

**Prueba:**

$a \Rightarrow b$  De la identidad  $f \vee g = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|]$  y como  $|f - g|$  es H-K absolutamente integrable por el teorema 6.5  $f \vee g$  es H-K absolutamente integrable

$b \Rightarrow a$  Como  $f, g \leq f \vee g$  entonces por el teorema 6.6,  $f$  y  $g$  son funciones H-K absolutamente integrables

$a \Rightarrow c$  Como  $f \wedge g \leq f, g$ , entonces por el teorema 3.1  $f$  y  $g$  son funciones H-K absolutamente integrables

**Teorema 6.9:** Sean  $f, g, \alpha, \omega$  H-K integrables,

a Si  $f \leq \omega$  y  $g \leq \omega$  entonces  $f \vee g$  y  $f \wedge g$  son H-K integrables

b Si  $\alpha \leq f$  y  $\alpha \leq g$  son H-K integrables

**Prueba:**

a De la identidad  $f \vee g = \frac{1}{2} [f + g + |f - g|]$  y como  $f \vee g \leq \omega$ , entonces

$$0 \leq |f - g| = 2f \vee g - f - g \leq 2\omega - f,$$

luego por el corolario tenemos que  $|f - g|$  es H-K integrable, por lo que  $f \vee g$  y  $f \wedge g$  son H-K integrables

b Como  $\alpha \leq f \vee g$  y aplicando un razonamiento similar al anterior se tiene que

$$|f - g| \leq f + g - 2\alpha,$$

luego  $f \vee g$  y  $f \wedge g$  son H-K integrables

**Observación 6.2:** En contraste con la integral de Riemann y la integral de Lebesgue, si  $f$  y  $g$  son H-K integrables no siempre  $f \vee g$  y  $f \wedge g$  son H-K integrables. Por ejemplo, si  $f$  es H-K integrable condicionalmente entonces  $f^+$  y  $f^-$  no son H-K integrables. Así, si  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ , para  $t \in [1, +\infty]$ , entonces  $f^+$  y  $f^-$  no son H-K integrables sobre  $[1, +\infty]$

## **CAPÍTULO 7**

## CAPÍTULO 7

### TEOREMAS DE CONVERGENCIA

**Definición 7.1:** Una sucesión  $\{f_k\}$  de funciones sobre un intervalo  $I$  a  $R$  se dice que converge uniformemente sobre  $I$  a una función  $f$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $K_\varepsilon \in N$  tal que si  $k \geq K_\varepsilon$  y  $x \in I$  entonces  $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

La convergencia uniforme es una restricción muy fuerte pero sigue siendo un modo de convergencia importante. Recordemos que si una sucesión de funciones Riemann integrables sobre un intervalo compacto  $I$  converge uniformemente sobre  $I$  a una función  $f$  entonces  $f$  es Riemann integrable sobre  $I$  y  $\int f = \lim \int f_k$ . Probaremos ahora la generalización de este resultado.

**Teorema 7.1: (Teorema de convergencia uniforme)** Si  $\{f_k\}$  es una sucesión de funciones H-K integrables que convergen uniformemente a  $f$  sobre  $I = [a, b]$ , entonces  $f$  es H-K integrable y

$$\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k$$

**Prueba:** Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $K_\varepsilon \in N$  tal que si  $k \geq K_\varepsilon$  y  $x \in I$  entonces

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{Por lo que, si } h, k \geq K_\varepsilon, \text{ entonces}$$

$$-2\varepsilon \leq f_h(x) - f_k(x) \leq 2\varepsilon, \text{ para } x \in [a, b]$$

luego,

$$-2\varepsilon(b-a) \leq \int f_h - \int f_k \leq 2\varepsilon(b-a),$$

de donde  $\left| \int f_h - \int f_k \right| \leq 2\varepsilon(b-a)$  y como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, la sucesión  $\left( \int f_k \right)$  es de Cauchy en  $R$  por lo tanto converge a un número  $A \in R$

Mostraremos ahora que  $f$  es H-K integrable con integral  $A$ , dado  $\varepsilon > 0$  y  $K_\varepsilon$  como antes, si  $D = \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^n$  es cualquier partición etiquetada de  $I$  y  $k \geq K_\varepsilon$  entonces,

$$|S(f_k, D) - S(f, D)| = \left| \sum_{i=1}^n \{f_k(t_i) - f(t_i)\} l(I_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f_k(t_i) - f(t_i)| l(I_i) \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon l(I_i) = \varepsilon(b-a)$$

Ahora escojamos un número fijo  $r \geq K_\varepsilon$ , tal que  $\left| \int f_r - A \right| < \varepsilon$ , sea  $\delta_{r,\varepsilon}$  una función medidora sobre  $I$  tal que  $\left| \int f_r - S(f_r, D) \right| \leq \varepsilon$  siempre que  $D$  sea  $\delta_{r,\varepsilon}$ -fina. Entonces

$$\begin{aligned} |S(f, D) - A| &\leq |S(f, D) - S(f_r, D)| + |S(f_r, D) - \int f_r| + \left| \int f_r - A \right| \\ &\leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(b-a+2) \end{aligned}$$

como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario entonces  $f$  es H-K integrable y  $\int f = A$

**Teorema 7.2: (Teorema de convergencia monótona)** Sea  $\{f_k\}$  una sucesión monótona (sucesión que es creciente o decreciente) H-K integrable y sea  $f(x) = \lim f_k(x)$  para toda  $x \in I = [a, b]$ . Entonces  $f$  es H-K integrable si y sólo si la sucesión  $\left( \int f_k \right)$  es acotada en  $R$ . En este caso

$$\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k$$

**Prueba:** Discutiremos el caso de una sucesión de funciones crecientes

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  es H-K integrable y como  $f_1(x) \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x)$  para toda  $x \in I$ ,

entonces la sucesión  $\left(\int f_k\right)$  es creciente y acotada

( $\Leftarrow$ ) Sea  $A = \sup\left\{\int f_k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ , por lo que la sucesión  $\left(\int f_k\right)$  converge a  $A$ . Sea  $\varepsilon > 0$

y sea  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^{r-2}} < \varepsilon$  y

$$0 \leq A - \int f_r < \varepsilon$$

Ya que  $f_k$  es H-K integrable, para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe una función medidora

$\delta_k$  sobre  $I$  tal que  $D$  es una partición  $\delta_k$ -fina de  $I$ , entonces

$$\left|S(f_k, D) - \int f_k\right| \leq \frac{1}{2^k}$$

Por otro lado, como  $f(x) = \lim f_k(x)$ , entonces para cada  $x \in I$  existe un entero  $k(x) \geq r$  con,

$$(\pi 1) \quad 0 \leq f(x) - f_{k(x)}(x) < \varepsilon$$

Ahora definamos  $\delta_\varepsilon(t) = \delta_{k(t)}(t)$  para  $t \in I$ , por lo que  $\delta_\varepsilon$  es una función medidora de  $I$ , utilizaremos una función medidora para probar que  $f$  es H-K integrable con integral igual a  $A$ . Así, si  $D = \{(I, t_i)\}_{i=1}^n$  es una partición  $\delta_\varepsilon$ -fina de  $I$ , deseamos probar que  $|S(f, D) - A|$  es convenientemente pequeña. Por la desigualdad triangular tenemos que

$$|S(f, D) - A| \leq \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^n f_{k(t_i)}(t_i)l(I_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^n f_{k(t_i)}(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f_{k(t_i)} \right| + \left| \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f_{k(t_i)} - A \right|$$

(denotemos esta suma por  $(\pi 2)$ )

De la desigualdad  $(\pi 1)$ , tenemos que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^n f_{k(t_i)}(t_i)l(I_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon l(I_i) = \varepsilon(b-a)$$

además,  $\left| \sum_{i=1}^n f_{k(t_i)}(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f_{k(t_i)} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| f_{k(t_i)}(t_i)l(I_i) - \int_{I_i} f_{k(t_i)} \right|$  ( $\pi$  3)

Para estimar esta suma, sea  $\nu = \max\{k(t_1), \dots, k(t_n)\} \geq r$ , notemos que la suma finita ( $\pi$  3) puede escribirse como una suma iterada la primera sobre todos los valores de  $i$  tal que  $k(t_i) = p$ , para algún número natural  $p \geq r$  y luego sobre  $p = r, \dots, \nu$ . Considere todas etiquetas  $t_i$  con  $k(t_i) = p$ , para  $p$  fijo. Cada subintervalo  $I_i$  correspondiente está contenido en la bola cerrada con centro  $t_i$  y radio  $\delta_i(t_i) = \delta_{k(t_i)}(t_i) = \delta_p(t_i)$ . Por consiguiente la colección de parejas  $\{(I_i, t_i) \mid k(t_i) = p\}$  forma una subpartición  $\delta_p$ -fina. Entonces por el lema de Henstock tenemos que

$$\sum \left| f_{k(t_i)}(t_i)l(I_i) - \int_{I_i} f_{k(t_i)} \right| \leq \frac{1}{2^{p-1}}$$

Si sumamos sobre  $p = r, \dots, \nu$  encontramos que el segundo término en ( $\pi$  2)

está dominada por

$$\sum_{p=r}^{\nu} \frac{1}{2^{p-1}} < \sum_{p=r}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{1}{2^{r-2}} < \varepsilon$$

Estimaremos ahora el tercer término en ( $\pi$  2), como la sucesión es creciente y

$r \leq k(t_i) \leq \nu$ , entonces  $f_r \leq f_{k(t_i)} \leq f_\nu$ , con lo cual

$$\int_{I_i} f_r \leq \int_{I_i} f_{k(t_i)} \leq \int_{I_i} f_\nu$$

sumando estas desigualdades para  $i=1, 2, \dots, n$  e integrando tenemos que

así,

$$A - \varepsilon \leq \sum_{l=1}^n \int_{I_l} f_{k(l)} \leq A$$

por lo que el tercer término en la desigualdad (7.2), está dominada por  $\varepsilon$ , combinando estas tres estimaciones concluimos que si  $D$  es  $\delta_\varepsilon$ -fina entonces

$$|S(f, D) - A| \leq (b-a)\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = (b-a+2)\varepsilon$$

y como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, entonces  $f$  es integrable sobre  $I$  con integral  $A = \lim \int f_k$

Veremos ahora un resultado que es utilizado cuando la sucesión no es monótona, el mismo fue probado por Pierre Fatou (1878-1929) Para la integral de Lebesgue, pero antes necesitaremos probar el siguiente lema

**Lema 7.1:** Sean  $f_k, \alpha$  dos funciones H-K integrables tal que

$$\alpha(x) \leq f_k(x), \text{ para } x \in I, k \in N,$$

entonces  $\inf\{f_k\}$  es una función H-K integrable

**Prueba:** Como  $\alpha(x) \leq f_k(x)$  entonces el  $\inf\{f_k\}$  existe y además es mayor o igual a  $\alpha$

Si  $k \in N$ , sea  $\psi_k = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k$ , por el teorema 6.9 e inducción matemática

tenemos que  $\psi_k$  es H-K integrable. Más aún, la sucesión  $(\psi_k)$  es decreciente y

converge a  $\inf\{f_k\}$ , pero como  $\int \psi_k \geq \int \alpha$ , el teorema de la convergencia monótona

implica que  $\lim \int \psi_k$  es H-K integrable, de allí que  $\int \inf\{f_k\} = \lim \int \psi_k$ , con lo que se

prueba la afirmación del lema

**Lema de Fatou:** Sean  $f_k, \alpha$  dos funciones H-K integrables tal que

$$\alpha(x) \leq f_k(x), \text{ para } x \in I, k \in N,$$

y que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k < \infty$$

entonces  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$  es H-K integrable y

$$-\infty < \int \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k < \infty$$

**Prueba:** Si  $\varphi_k = \inf \{f_m \mid m \geq k, m \in N\}$  para  $k \in N$ , entonces el lema anterior implica que  $\varphi_k$  es H-K integrable, ahora como  $\alpha(x) \leq \varphi_k(x) \leq f_k(x)$ , para  $x \in I, k \in N$  entonces

$$\int \alpha \leq \int \varphi_k \leq \int f_k$$

por la muy conocida propiedad del límite inferior (ver A modern Theory of integration), tenemos

$$\int \alpha \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k$$

Ahora  $(\varphi_k)$  es una sucesión creciente que converge sobre  $I$  a  $\varphi = \liminf f_k$ , por consiguiente esta última desigualdad implica que la sucesión creciente  $(\int \varphi_k)$  es convergente y por lo tanto acotada, entonces el teorema de convergencia monótona implica que  $\varphi = \lim \varphi_k = \liminf f_k$  es H-K integrable y que  $\int \varphi = \lim \int \varphi_k \in \mathbb{R}$ , si utilizamos la desigualdad  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k < \infty$  obtenemos la desigualdad

$$-\infty < \int \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k < \infty$$

El próximo resultado es una extensión a la integral generalizada de Riemann de un teorema probado en 1908 por Lebesgue

**Teorema 7.3: (Teorema de Convergencia Dominada).** Sea  $(f_k)$  una sucesión de funciones H-K integrables con  $f(x) = \lim f_k(x)$  para todo  $x \in I = [a, b]$

Supongamos que existe funciones  $\alpha, \omega$  H-K integrables tal que

$$\alpha(x) \leq f_k(x) \leq \omega(x), \text{ para } x \in I, k \in N,$$

entonces  $f$  es H-K integrable y

$$\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k$$

**Prueba:** Por hipótesis tenemos que  $f(x) = \lim f_k(x) = \liminf f_k(x) \in R$ , para todo

$x \in I$ . De la desigualdad  $\alpha(x) \leq f_k(x) \leq \omega(x)$  se tiene que

$$\int \alpha \leq \int f_k \leq \int \omega, \text{ para } k \in N,$$

de donde  $\liminf \int f_k$  y  $\limsup \int f_k$  están en  $R$ , entonces el lema de Fatou implica que  $f$  es H-K integrable y que

$$\int f \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k$$

Si aplicamos el lema de Fatou a la sucesión  $(-f_k)$  y como  $\liminf(-\xi_k) = -\limsup \xi_k$ , entonces concluimos que

$$-\int f = \int(-f) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int(-f_k) = -\limsup_{k \rightarrow \infty} \int f_k,$$

de donde inferimos que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int f_k \leq \int f,$$

combinando las desigualdades  $\int f \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k$  y  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \int f_k \leq \int f$ , obtenemos que

$$\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k$$

**Teorema 7.4:** Sean  $f_k, \alpha_k, \alpha$  H-K integrables tal que  $\alpha_k \leq f_k$  c t p sobre  $I$ ,  $\alpha_k \rightarrow \alpha$

c t p sobre  $I$  y  $\int \alpha_k \rightarrow \int \alpha$ , supóngase también que  $\liminf \int f_k < \infty$ . Entonces

$\liminf \int f_k$  es H-K integrable y

$$-\infty < \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k < \infty$$

**Prueba:** Sea  $h_k = f_k - \alpha_k \geq 0$ , por lo que  $0 \leq \int h_k = \int f_k - \int \alpha_k$ , luego

$$0 \leq \liminf \int h_k = \liminf \int f_k - \liminf \int \alpha_k = \liminf \int f_k - \int \alpha < \infty,$$

por el lema de Fatou ( con  $\alpha = 0$ ), tenemos que  $\liminf h_k = \liminf f_k - \alpha$  es H-K integrable y

$$0 \leq \int \liminf f_k - \int \alpha = \int \liminf h_k \leq \liminf \int h_k$$

$$= \liminf \int f_k - \int \alpha < \infty$$

como  $\int \alpha \in R$ , se obtiene la conclusión deseada

**Teorema 7.5:** Sean  $f_k, \omega_k, \omega$  H-K integrable tal que  $f_k \leq \omega_k$  c t p sobre  $I$ ,  $\omega_k \rightarrow \omega$  c t p sobre  $I$  y  $\int \omega_k \rightarrow \int \omega$  Supóngase también que  $-\infty < \limsup \int f_k$  Entonces  $\limsup f_k$  es H-K integrable y

$$-\infty < \limsup_{k \rightarrow \infty} \int f_k \leq \int \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k < \infty$$

La prueba de este teorema se realiza con argumentos similares a la demostración del teorema anterior

El siguiente resultado es una ligera extensión del Teorema de Convergencia Dominada

**Teorema 7.6:** Sean  $\alpha_k, \alpha, f_k, \omega_k, \omega$  H-K integrable y supóngase que  $\alpha_k \leq f_k \leq \omega_k$  c t p sobre  $I$ , que  $\alpha_k \rightarrow \alpha$ ,  $f_k \rightarrow f$  y  $\omega_k \rightarrow \omega$  c t p sobre  $I$  y que  $\int \alpha_k \rightarrow \int \alpha$  y  $\int \omega_k \rightarrow \int \omega$  Entonces  $f$  es H-K integrable y  $\int f_k \rightarrow \int f$

**Prueba:** Como  $\alpha_k \leq f_k \leq \omega_k$ , entonces  $\int \alpha_k \leq \int f_k \leq \int \omega_k$ , por lo que  $\liminf \int f_k \leq \lim \int \omega_k = \int \omega < \infty$  y similarmente  $-\infty < \limsup \int f_k$ , por el teorema anterior tenemos que  $f = \lim f_k$  es H-K integrable y

$$-\infty < \int f \leq \liminf \int f_k \leq \limsup \int f_k \leq \int f < \infty,$$

de donde  $\int f_k \rightarrow \int f$

**Teorema 7.7:** Sea  $(f_k)$  una sucesión de funciones H-K integrables tal que  $f(x) = \lim f_k(x)$  para todo  $x \in I = [a, b]$  Entonces  $f$  es H-K integrable y

$$\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k$$

si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que si  $k \geq m_\varepsilon$ , existe una función medidora  $\gamma_k$  en  $I$  tal que si  $D$  es una partición  $\gamma_k$ -fina de  $I$  entonces

$$|S(f_k, D) - S(f, D)| \leq \varepsilon$$

**Prueba:** Probaremos primero que  $(\int f_k)$  es una sucesión de Cauchy Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $m_\varepsilon$  como en la condición, así si  $h, k \geq m_\varepsilon$ , entonces existen  $\gamma_h, \gamma_k$  tales que si  $D$  es una partición etiquetada  $\gamma_h$ -fina entonces  $|S(f_h, D) - S(f, D)| \leq \varepsilon$ , y si  $D$  es una partición etiquetada  $\gamma_k$ -fina entonces  $|S(f_k, D) - S(f, D)| \leq \varepsilon$  Por consiguiente, ya que  $f_h, f_k$  son H-K integrables, existen funciones medidoras  $\delta_h$  y  $\delta_k$  tales que si  $D$  es una partición etiquetada  $\delta_h$ -fina entonces  $|S(f_h, D) - \int f_h| \leq \varepsilon$ , y si  $D$  es una partición etiquetada  $\delta_k$ -fina entonces  $|S(f_k, D) - \int f_k| \leq \varepsilon$  Ahora, sea  $\eta_\varepsilon = \min\{\gamma_h, \gamma_k, \delta_h, \delta_k\}$ , por consiguiente, si  $D$  es una partición etiquetada  $\eta_\varepsilon$ -fina, tenemos entonces

$$\begin{aligned} \left| \int f_h - \int f_k \right| &\leq \left| \int f_h - S(f_h, D) \right| + \left| S(f_h, D) - S(f, D) \right| + \left| S(f, D) - S(f_k, D) \right| + \left| S(f_k, D) - \int f_k \right| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon \end{aligned}$$

Dado que  $\varepsilon > 0$ , es arbitrario, la sucesión de  $(\int f_k)$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$ , y por consiguiente converge a algún número  $A \in \mathbb{R}$

Probaremos ahora que  $f$  es H-K integrable y que  $\int f = A$ . Si  $\varepsilon > 0$ , sea  $m_\varepsilon$  como en la condición, y sea  $k \geq m_\varepsilon$  tal que  $|\int f_k - A| \leq \varepsilon$ . Entonces existe una función medidora  $\gamma_k$  sobre  $I$  tal que si  $D$  es una partición etiquetada  $\gamma_k$ -fina entonces  $|S(f_k, D) - S(f, D)| \leq \varepsilon$ . Ahora como  $f_k$  son H-K integrables existe una función medidora  $\delta_k$  tal que si  $D$  es una partición etiquetada  $\delta_k$ -fina entonces  $|S(f_k, D) - \int f_k| \leq \varepsilon$ . Ahora sea  $\zeta_k = \min\{\gamma_k, \delta_k\}$ , se sigue que si  $D$  es una partición etiquetada  $\zeta_k$ -fina entonces

$$|S(f, D) - A| \leq |S(f, D) - S(f_k, D)| + |S(f_k, D) - \int f_k| + |\int f_k - A| \leq 3\varepsilon$$

Como  $\varepsilon > 0$ , es arbitrario, entonces  $f$  es H-K integrable y  $\int f = A$

Sea  $\varepsilon > 0$ , ya que  $(\int f_k) \rightarrow \int f$ , existe  $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que si  $k \geq m_\varepsilon$  entonces  $|\int f_k - \int f| \leq \varepsilon$ , ahora como  $k \geq m_\varepsilon$  es fijo y ya que  $f_k$  son H-K integrables existe una función medidora  $\delta_k$  tal que si  $D$  es una partición etiquetada  $\delta_k$ -fina entonces  $|\int f_k - S(f_k, D)| \leq \varepsilon$ . Ya que  $f$  es H-K integrable existe una función medidora  $\delta_0$  tal que si  $D$  es una partición etiquetada  $\delta_0$ -fina entonces  $|\int f - S(f, D)| \leq \varepsilon$ . Ahora sea  $\gamma_k = \min\{\delta_0, \delta_k\}$ , por lo que si  $D$  es una partición etiquetada  $\gamma_k$ -fina entonces

$$|S(f_k, D) - S(f, D)| + |S(f_k, D) - \int f_k| + |\int f_k - \int f| + |\int f - S(f, D)| \leq 3\varepsilon$$

## **CAPÍTULO 8**

## CÁPITULO 8

### EL PAPEL DE LA INTEGRAL DE LA H-K INTEGRAL EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO Y EL ANÁLISIS

Tradicionalmente la enseñanza del Cálculo, en una variable, se centra en el cálculo de derivadas y antiderivadas y como utilizarlas en algunas aplicaciones. A pesar de que se opta por iniciar el estudio de la integración presentando el concepto de Integral de Riemann, se omiten las pruebas o demostraciones de la mayoría de los resultados teóricos. A manera de ejemplo citamos los siguientes resultados

“Si una función es continua es Riemann integrable”

“Si una función, definida sobre un intervalo compacto, es monótona entonces es Riemann integrable”

La omisión de estas pruebas es inevitable ya que las demostraciones implican el uso de la completitud de la recta, la continuidad uniforme en intervalos compactos y otras nociones que van más allá del alcance de los estudiantes de primer año. No obstante, consideramos que es imprescindible que el estudiante sea inducido, a partir del primer curso de Cálculo, al tratamiento de resultados teóricos y no dedicarse exclusivamente al dominio de técnicas y algoritmos, dado que este tipo de formación puede convertirse en

un obstáculo para los estudiantes que necesitan tomar cursos de Análisis Matemático y adquirir conocimientos sobre Teoría de la Medida e Integración

En contraste con esta realidad, existe una tendencia, promovida por Robert Bartle (Estados Unidos de Norteamérica), Ralph Henstock (Irlanda), Jaroslav Kurzweil (República Checa) Rudolf Vърborný (Australia), Eric Schechter (Estados Unidos de Norteamérica), Stefan Schwabick (República Checa), que abogan por la inclusión en los libros de Cálculo de la Integral de Henstock-Kurzweil. En una carta abierta, dirigida a los autores de libros de Cálculo y publicada en la Internet en 1997, estos matemáticos consagrados argumentan que algunas partes de los libros serían más legibles por el hecho de que algunas definiciones y teoremas se pueden indicar de manera más simple (y más fuertes) si se utiliza la H-K integral en lugar de la integral de Riemann, esto es particularmente cierto para el segundo teorema fundamental del Cálculo y que además la preparación para los estudiantes que van seguir cursos más avanzados de Matemática sería más adecuada, ya que para ellos la H-K integral representa un puente más adecuada hacia la comprensión del Análisis.

Para Eric Schechter (Estados Unidos de Norteamérica) a pesar de que recomienda la inclusión de la H-K integral en los libros de Cálculo, muestra algunas reservas pues según su opinión no existen muchos puntos a favor para que se enseñe en los cursos de Cálculo ya que los estudiantes en este nivel entienden poco o nada de pruebas ya que se concentran en fórmulas y cálculos, por ejemplo, para ellos el segundo teorema fundamental del Cálculo es una simple ecuación y cualquier afirmación sobre continuidad o diferenciabilidad o existencia de integrales pasa desapercibido para la mayoría. Por otro lado, afirma que el curso de Análisis sería el nivel apropiado para la

enseñanza formal de esta integral puesto que el estudiante se concentra en el uso de herramientas tales como  $\epsilon$  y  $\delta$ , sucesiones convergentes, etc., y éstas son las mismas herramientas usadas en la HK integral por lo que las modificaciones en el curso serían leves

Existen otros matemáticos que fundamentan la enseñanza de la H-K integral en los cursos de Cálculo, en el hecho de que esta integral preserva la misma forma intuitiva con que se presenta la definición de la integral de Riemann, pero que tiene la fortaleza de la teoría de Lebesgue y abogan por su uso posible en todos los niveles, incluso sostienen que el interés de tratar la Teoría de Integración en todos los niveles era también parte de la motivación para R. Henstock para desarrollar la teoría

La idea de enseñar la H-K integral a los estudiantes de primer año de las universidades fue promovida por ejemplo en artículo "The teaching of the integral" por Bullen y Vybórný publicada en 1990 por Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol 21

Es cierto que la HK integral posee las mismas virtudes pedagógicas que la integral de Riemann, pero también es cierto que la generalidad de esta integral trae como consecuencia el no poder presentar tan fácilmente funciones que no sean HK integrables, por lo que el estudiante del Cálculo, podría pensar que todas las funciones son HK integrables cosa que no es así, como es el caso de los estudiantes de ingeniería que por más de diez años de trabajar con ellos, he podido notar lo difícil que ha sido el intentar introducir algunos conceptos teóricos, en los diferentes cursos que he dictado por lo que para los propósitos de las aplicaciones en estos niveles la integral de Riemann satisface las necesidades

Por otro lado, como se ha demostrado los teoremas de convergencia de esta integral exigen menos condiciones que los teoremas de convergencia que la integral de Riemann de allí su generalidad, pero los estudiantes de Cálculo no necesitan del dominio de este tipo de teoría tan abstracta, por estas razones considero que la enseñanza de esta nueva teoría debe iniciarse en los cursos de Análisis de pregrado donde la madurez matemática de los estudiantes o la mayoría de los estudiantes es la adecuada para introducir dicha teoría y luego continuar con los resultados más fuertes ( teoremas de convergencia ) en los cursos de Análisis de postgrado, además esta integral es más concreta y no requiere de la maquinaria complicada de sigma álgebras, medida etc , sus cálculos producen mucha intuición y penetración en medidas, particularmente en los intervalos y concluir con la enseñanza de la integral de Lebesgue

## **CONCLUSIÓN**

## CONCLUSIONES

Después de haber realizado este trabajo formulamos las siguientes conclusiones

- 1 La definición de la Integral de Henstock-Kurzweil, es una ligera variación de la integral de Riemann, pero sus resultados son más profundos
- 2 La integral de Henstock-Kurzweil, representa una alternativa didáctica, en la generalización de la integral de Riemann
- 3 Las reglas desarrolladas para calcular integrales usando antiderivadas, también son válidas para la integral de Henstock-Kurzweil
- 4 En contraste con la integral de Riemann y la integral de Lebesgue, el teorema Fundamental del Cálculo garantiza que la derivada de cualquier función sobre un intervalo  $I$ , siempre es H-K integrable, sin la imposición de hipótesis adicionales sobre esta derivada
- 5 La integral de Henstock-Kurzweil, no posee integrales impropias ya sea sobre intervalos acotados o no
- 6 La enseñanza de las propiedades y conceptos fundamentales de esta teoría de integración debe incluirse, en los cursos de análisis de postgrado y no en los cursos a nivel de licenciatura o ingeniería

## **BIBLIOGRAFÍA**

## BIBLIOGRAFÍA

- Bartle, Robert G A Modern Theory of Integration, Graduate Studies in Mathematics,  
 vol 32 Amer Math Soc 2001
- Bartle, Robert G Return to the Riemann Integral, Amer Mathematical Monthly 103  
 1996
- Davis R y Schuss Z A Proff that Henstock's Integral icludes Lebesgue, J London  
 Math Soc 2 (1970), 561-562
- Gordon, Russell A The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock, Graduate  
 Studies in Mathematics, vol 4, Amer Math Soc , Providence 1994
- Gordon, Russell A The Use of Tagged Partitions in Elementary Real Analysis, Amer  
 Mathematical Monthly 105 (Feb 1998)
- Lamoreaux, J & Armstrong, G The Fundamental Theorem of Calculus for Gauge  
 Integrals, Mathematics Magazine 71 (June 1998)
- Liu Genqian, On Necessary Conditions for Henstock Integration, Real Ana Exchange  
 18 ( 1987/88), 446-450
- McLeod, Robert M The Generalized Riemann Integral, Carus Mathematical  
 Monograph #20, Mathematical association of America 1980
- McShane, E J , A Unified Theory of Integration, Amer Math Monthly 80 (1973), 349-  
 359
- Pfeffer, W A note on the Generalized Riemann Integral, Proc Amer Math Soc 103  
 (1988), 1161-1166

Royden, H Real Analysis, MacMillan, N Y , 1988

Rudin, W Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, N Y , 1963

Swartz, C Introduction to Gauge Integrals, World Scientific Publ. Singapore, 2001

Swartz, C Measure, Integration and Function Spaces, World Scientific Publ Singapore,  
1984

Vyborny R , Kurweil –Henstock Absolute Integrable Means Mcshane Integrable, Real  
Anal Exchange 20(1994-95),363-366