UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

SEMIGRUPO DE OPERADORES

NORMA CORRALES

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA

OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON

ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2005

APROBADO POR:

Dr. Rogelio Rosas
PRESIDENTE

MSc. Josué Ortiz
MIEMBRO

MSc. Omar Oliveros
MIEMBRO

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 15 de diciembre de 2005

DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico con mucho amor:

A Dios, ser supremo sobre toda existencia, ya que sin él nada es posible.

A mis hijos que son la bendición más grande que me ha regalado Dios y son la razón de mi vida.

A mi esposo, persona muy importante en mi vida con el cual comparto.

A mis padres, que han sabido con sabiduría y amor orientarme con buenos principios hacia el camino correcto y en especial a mi madre que siempre ha estado ahí para motivarme en cada una de mis metas.

A mis hermanos, compañeros de toda la vida, con los cuales he experimentado vivencias difíciles como también de felicidad.

Norma Corrales.

AGRADECIMIENTO

Gracias a Dios Todopoderoso por haberme dado la fortaleza espiritual y con ésta la sabiduría emocional e intelectual en el transcurso del desarrollo de este trabajo, ya que fue esta fuerza divina la que me mantuvo firme y sin desmayo hacia el logro de una meta más en mi vida.

Gracias a mi mayor razón de inspiración y estímulo, mis hijos. Además, le agradezco a mi querido esposo por su comprensión y por su apoyo moral y económico. Como también a mis padres y hermana Olga por su apoyo incondicional en los momentos que los necesité.

Un agradecimiento muy especial al profesor Rogelio Rosas por su apoyo desinteresado y porque en todo momento estuvo dispuesto a orientarme en la dirección correcta hacia la culminación exitosa de este trabajo.

Finalmente, le agradezco a todos los que de una u otra forma contribuyeron en la realización de este trabajo.

Norma Corrales.

INDICE GENERAL

RESUMEN

Los semigrupos(continuos) de operadores se introducen como soluciones de ecuaciones funcionales del tipo $f(s+t)=f(s)f(t),\ \ s,t\geq 0$, ambientadas en espacios de transformaciones lineales continuas y con una adecuada noción de continuidad. Se establece el nexo entre los semigrupos y las ecuaciones diferenciales lineales $y'=Ay$ donde A es un operador lineal cerrado con dominio denso en el espacio. Los conceptos de integral de Riemann e integral generalizado (Riemann) para funciones continuas a valores en un espacio de Banach se introducen utilizando el Teorema de Hahn-Banach y los mismos, unidos al Teorema de Banach-Steinhauss, son las herramientas fundamentales en la demostración de los principales resultados concernientes a los semigrupos: el Teorema de Hille y el Teorema de Hille-Yosida. Finalmente y como ejemplo de la potencia de esta herramienta(semigrupos) se da una detallada presentación del semigrupo de operadores de Weierstrass, mismo que proporciona soluciones para la ecuación de calor con datos en espacios L^p. Los resultados sobre semigrupos y los ejemplos son presentados en forma completa y elemental.

SUMMARY

The continuos Operator semigroups are featured as solutions of functional equations such as $f(s+t)=f(s)f(t),\ \ s,t\geq 0$, with data in Banach Space of continuos linears transforms provided with an appropiate continuity notion. It establishes the relationship between operator semigroups and linear differential equations $y'=Ay$, where A is a closed linear operator with dense domain in a Banach space. Riemann and generalized Riemann integrals are introduced using Hahn-Banach Theorem; this approach, and the Banach-Steinhauss Theorem are the fundamentals tools in dealing with the basic results on semigroups: Hille and Hille-Yosida Theorems. Finally, as an interesting example of the power about the semigroup approach to linear problems. We present the Weierstrass semigroup, wich provides solutions for The Heat Equation with L^p data. All Theorems and examples are fully proved in an elementary way.

INTRODUCCION

Las funciones exponenciales $T_a(t) = e^{at}$ pueden caracterizarse por ser las únicas funciones continuas que satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases} T_a(t_1 + t_2) = T_a(t_1) \cdot T_a(t_2) \\ T_a(0) = 1 \end{cases}$$

Pero la continuidad unida a la primera de estas condiciones indica que basta exigir continuidad en 0 a la derecha para tener una exponencial; es decir:

$$\lim_{t \to 0^+} T_a(t) = 1 .$$

Las funciones exponenciales están relacionadas con las ecuaciones diferenciales del tipo:

$$y' = ay$$

en el sentido que las soluciones de estas ecuaciones son de la forma:

$$y(t) = e^{at} y(0)$$

Una primera ampliación de las consideraciones anteriores la constituye el problema:

$$\begin{aligned} y' &= Ay \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

donde A es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. También en este caso puede definirse una exponencial. T_A poniendo:

$$T_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = e^{tA}$$

esta función tiene todas las propiedades de las exponenciales T_a antes señaladas y las soluciones de la ecuación diferencial son del tipo $y(t) = e^{tA} y_0$. Siguiendo esta línea de pensamiento se puede considerar problemas de Cauchy para ecuaciones diferenciales abstractas del tipo:

$$\begin{aligned} y' &= Ay \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

donde A es un operador de un espacio de Banach de dimensión infinita X en si mismo.

A diferencia del caso finito dimensional, no todo operador $A : D(A) \to X$ es continuo; es más en la práctica, los operadores A son operadores diferenciales(involucran derivadas parciales) y estos operadores no son continuos; sin embargo: tienen dominio denso en X y son operadores cerrados.

Las consideraciones anteriores llevan a plantear varios problemas:

- Es posible generalizar el concepto de función exponencial de modo que las nuevas funciones permitan obtener soluciones del problema de Cauchy de los tipos antes considerados cuando A es un operador cerrado con dominio denso.
- Es posible establecer condiciones sobre A para que lo anterior se realice.

Ambos problemas tienen solución afirmativa, los cuales se resuelven en este trabajo. Para tal fin, se definieron los siguientes objetivos generales:

1. Extender el concepto de función exponencial; lo que se logra introduciendo los semigrupos (fuertemente) continuos de operadores.
2. Establecer las condiciones necesarias y suficiente para que los problemas de Cauchy

$$\begin{aligned} &y' = Ay \\ &y(0) = y_0 \end{aligned}$$

se puedan resolver por medio de semigrupos continuos de operadores (Teorema de Hille – Yosida).

Con el propósito de lograr los objetivos aquí definidos el presente trabajo se divide en tres capítulos.

En el primer capítulo se recapitulan conceptos básicos de Análisis Funcional, que constituyen el marco de referencia de la investigación: Teorema de Hahn – Banach, Calculo Diferencial e Integral de funciones de una variable a valores en un espacio de Banach, el teorema de Banach – Steinhaus de acotamiento local que es de gran utilidad. Se consideran también algunos resultados de la Teoría de Integración de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ como los teoremas de Fubini – Tonelli y Producto de Convolución.

En el segundo capítulo se determinan las condiciones para que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

admita una solución de tipo exponencial:

$$y(t) = T(t)x_0 \qquad\qquad t \geq 0$$

Luego de introducir los conceptos de semigrupos (fuertemente) continuos de operadores y de generador infinitesimal se concluye que lo anterior se logra si A es un operador cerrado y el resolvente de A $R(\lambda, A)$ satisface la condición:

$\|R^n(\lambda, A)\| \leq M(\lambda - w)^{-n}$ para todo $n, \lambda > w$ (Teorema de Hille – Yosida).

En el tercer capítulo se considera el semigrupo de operadores de Weierstrass cuyo generador es el operador Δ de Laplace actuando en $L^p(\boldsymbol{R}^n)$. Es en este capítulo que se aprecia la necesidad de contar con una sólida base en teoría de la integración de Lebesgue si se quiere efectivamente aplicar la teoría de los semigrupos de operadores en problemas concretos de Cauchy.

CAPÍTULO PRIMERO

CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1 Funciones continuas $f:[a,b]\to X$.

Sean $a,b\in \mathbb{R}$, $a<b$ y f una aplicación de $[a,b]$ en un espacio de Banach X. Considerando en $[a,b]$ la distancia usual:

$$d(t_1,t_2)=|t_1-t_2|, \qquad t_1,\ t_2\in[a,b]$$

La continuidad de f en $t_0\in[a,b]$ se define de la siguiente manera.

Definición 1.1:

f es continua en t_0 si: para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta_\varepsilon>0$ tal que para todo $t\in[a,b]$ si $|t-t_0|<\delta_\varepsilon$, entonces $\|f(t)-f(t_0)\|<\varepsilon$.

Si f es continua en cada $t\in[a,b]$ se dice simplemente que f es continua en $[a,b]$.

Observación:

Una forma equivalente de la noción de continuidad se obtiene de la siguiente manera:

Sea $t_0 \in [a,b]$. Considérese el conjunto $\{h \in \mathbb{R} / t_0 + h \in [a,b]\}$, entonces f es continua en t_0 si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que si $h \in \mathbb{R}$, $t_0 + h \in [a,b]$ y $|h| < \delta_\varepsilon$, entonces:

$$\|f(t_0 + h) - f(t_0)\| < \varepsilon$$

ó

$$\lim_{h \to 0} \|f(t_0 + h) - f(t_0)\| = 0.$$

Proposición 1.1:

Sea f continua en $[a,b]$ entonces, existen $t_m, t_M \in [a,b]$ tales que:

$$\|f(t_m)\| = \inf_{a \le t \le b} \|f(t)\|; \quad \|f(t_M)\| = \sup_{a \le t \le b} \|f(t)\|.$$

Es decir que $\|f\| : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida para $t \in [a,b]$ $\|f\|(t) = \|f(t)\|$ tiene máximo y mínimo.

Observación:

El resultado anterior es consecuencia directa del teorema de Weierstrass; aplicado a la función continua $F(t) = \|f(t)\|$. (Véase Rudin(22), pág. 96, 4.16).

La proposición 1.1 permite definir una norma en el espacio de las funciones continuas de $[a,b]$ en X; $C([a,b], X)$. Si $f \in C([a,b], X)$se pone

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \le t \le b} \|f(t)\|.$$

Con esta norma (de la convergencia uniforme) $C([a,b], X)$ resulta un espacio de Banach. (Véase Nachbin, Cap. 2, ejemplo, pág. 13).

Una propiedad fundamental para los propósitos de esta investigación es la continuidad uniforme de las funciones de $C([a,b], X)$. Se aplica aquí el resultado clásico: Sea K un espacio métrico compacto, entonces toda función $f : K \to X$ continua, es uniformemente continua. (Véase Rudin, pág. 97, 4.19).

La continuidad uniforme es un propiedad que en esencia señala que la magnitud de las diferencias de valores, $\|f(t) - f(s)\|$, depende básicamente de la distancia entre los puntos t y s; y que esta diferencia $\|f(t) - f(s)\|$ puede hacerse "pequeña" para $t, s \in [a,b]$ siempre que $|t - s|$ sea apropiadamente "pequeña". En especial, diferencias del tipo:

$$\|f(t+h) - f(t)\|$$

son pequeñas si $|h| = |(t+h) - t|$ es pequeño.

En la expresión $\|f(t+h) - f(t)\|$ hay que tener cuidado en los extremos del intervalo, ya que si $h < 0$, $a + h \notin [a,b]$. Lo mismo sucede, si $h > 0$ con $b + h$.

Para obviar este inconveniente, las funciones $f \in C([a,b],X)$ se extienden a todo $\boldsymbol{R}$ como sigue; indicando $\tilde{f}$ la extensión:

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases} f(a) & si\, t<a \\ f(t) & si\, t\in[a,b] \\ f(b) & si\, t>b \end{cases}$$

Indíquese ahora $\tilde{C}=\tilde{C}([a,b],X)$ el espacio de las extensiones así obtenidas. Las funciones de $\tilde{C}$ son funciones continuas de $\boldsymbol{R}\to X$, y

1) $\sup\limits_{t\in\boldsymbol{R}}\|\tilde{f}(t)\|=\|f\|_\infty$.

2) Toda $\tilde{f}\in\tilde{C}$ es uniformemente continua.

En efecto: sea $\tilde{f}\in\tilde{C}$ y $f=\tilde{f}\,/[a,b]$.

Para todo $t\in[a,b]$, $\|f(t)\|\leq\|f\|_\infty$ y si:

$$\begin{cases} t<a, & \|\tilde{f}(t)\|=\|f(a)\|\leq\|f\|_\infty \\ t>b, & \|\tilde{f}(t)\|=\|f(b)\|\leq\|f\|_\infty \end{cases}$$

Por esto $\sup\limits_{t\in\boldsymbol{R}}\|\tilde{f}\|\leq\|f\|_\infty$. Por otra parte es obvio que $\|f\|_\infty\leq\sup\limits_{t\in\boldsymbol{R}}\|\tilde{f}(t)\|$, por lo que vale la 1.

Con respecto a la 2. Sea $\tilde{f}\in\tilde{C}$ y $f=\tilde{f}\,/[a,b]$. Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta_{(\varepsilon)}>0$ tal que si $t_1,t_2\in[a,b]$ y $|t_1-t_2|<\delta_{(\varepsilon)}$, entonces $\|f(t_1)-f(t_2)\|<\varepsilon$.

Sean ahora $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$ con $|t_1-t_2|<\delta_\varepsilon$

si $t_1,t_2 \in [a,b]$ $\qquad \|\tilde{f}(t_1)-\tilde{f}(t_2)\| = \|f(t_1)-f(t_2)\| < \varepsilon$,

si $t_1,t_2 < a$ $\qquad \|\tilde{f}(t_1)-\tilde{f}(t_2)\| = \|f(a)-f(a)\| = 0 < \varepsilon$,

si $t_1,t_2 > b$ $\qquad \|\tilde{f}(t_1)-\tilde{f}(t_2)\| = \|f(b)-f(b)\| = 0 < \varepsilon$.

Supongamos ahora que $t_1 < a,\ t_2 \in [a,b]$, luego,

$\|\tilde{f}(t_1)-\tilde{f}(t_2)\| = \|f(a)-f(t_2)\|$, pero $|a-t_2| < |t_1-t_2| < \delta_{(\varepsilon)}$ por esto:

$$\|\tilde{f}(t_1)-\tilde{f}(t_2)\| < \varepsilon$$

De la misma manera, si $t_1 \in [a,b]$ y

$t_2 > b$ $\|\tilde{f}(t_1)-\tilde{f}(t_2)\| = \|f(t_1)-f(b)\| < \varepsilon$ porque $|b-t_2| < |t_1-t_2| < \delta_{(\varepsilon)}$.

Los espacios $\tilde{C}$ y C pueden identificarse con las transformaciones:

$$\mathcal{R}: \tilde{C} \to C([a,b],X)$$

$$\mathcal{R}(\tilde{f}) = \tilde{f}/[a,b] = f.$$

Por esto puede afirmarse que: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_{(\varepsilon)} > 0$:

$|h| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(t+h)-f(s)\| < \varepsilon$ para todo $t \in [a,b]$. Claro está que si $t+h \notin [a,b]$ el valor $f(t+h)$ es precisamente el correspondiente a $\tilde{f}$.

En lo sucesivo no se hará distinción entre f y $\tilde{f}$.

1.2 Integrales de Funciones Continuas.

Sean X e Y dos espacios normados con el mismo cuerpo de escalares, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y que en lo sucesivo se indicará K. El espacio vectorial de las aplicaciones $T: X \to Y$ lineales y acotadas, es decir, para las cuales existe una constante positiva $M > 0$ tal que: $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ para todo $x \in X$, es un espacio normado poniendo,

$$\|T\| = \inf\{M / M > 0 \text{ y } \forall x \in X \quad \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\}.$$

Si además Y es un espacio de Banach, también el espacio normado anterior, y que se denota $L(X,Y)$ es un espacio de Banach; lo anterior se aplica en particular si $Y = K$ en cuyo caso $L(X,K)$ se indica X^* y se llama espacio dual de X.

Es bien conocido que $L(X,Y)$coincide con el espacio de las funciones lineales continuas de X a Y y que para cada $T \in L(X,Y)$

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y.$$

En este segundo apartado se presentan algunos resultados acerca de los espacios $L(X,Y)$, como el Teorema de Hahn – Banach y de los mismos se dan algunas aplicaciones de gran utilidad en el estudio de las funciones $f:[a,b] \to X$ que son continuas y diferenciables, y de modo especial se define el concepto de Integral de Riemann y se dan algunas de sus propiedades.

De las versiones del teorema de Hahn – Banach; para los fines de esta investigación se considera la siguiente:

<u>Teorema 1.2</u>: (De Hahn – Banach)

Sean X, Y espacios normados. X_0 un sub-espacio vectorial de X y $f_0 : X_0 \to Y$ lineal y continua. Entonces existe una $f \in L(X,Y)$ tal que:

$$f / X_0 = f_0 \text{ y } \|f\| = \|f_0\|.$$

No se dará una demostración de este resultado ampliamente conocido; pudiendo consultarse a tal efecto los libros de análisis funcional indicados en la bibliografía: (Véase Kreyszig, pág. 221, 4, 3.2).

El teorema de Hahn – Banach tiene notables consecuencias; a continuación se indica una de ellas y un corolario que es de la mayor importancia en este trabajo.

<u>Proposición 1.3:</u>

Sean X un espacio normado y $x_0 \in X$ no nulo; entonces existe $f \in X^*$ tal que:

i) $f(x_0) = \|x_0\|$.

ii) $\|f\| = 1$.

Demostración:

Sea X_0 el sub-espacio de X generado por x_0. Como $x_0 \neq 0$, cada elemento $x \in X_0$ se escribe de modo único en la forma:

$$x = \lambda x_0 \quad \text{con} \quad \lambda \in X$$

por esto si se pone $f_0(x) = \lambda\|x_0\|$, f_0 es una aplicación lineal de X_0 en K. Como $x_0 = 1 \cdot x_0$ resulta $f_0(x_0) = \|x_0\|$ y f_0 satisface la condición (i).

Por otra parte,

$$\|f_0\| = \sup_{\|x\|=1} |f_0(x)| = \sup_{|\lambda|\,\|x_0\|=1} |\lambda|\,\|x_0\| = 1.$$

Por el teorema de Hahnn – Banach existe $f \in X^*$, extensión de f_0 a X que conserva la norma, luego:

i) $f(x_0) = \|x_0\|$.

ii) $\|f\| = \|f_0\| = 1$.■

<u>**Corolario 1.1:**</u> **("Propiedad de Separación")**

Sea X un espacio normado y $x \in X$. Entonces $x = 0$ si y solo si para todo $f \in X^*$, $f(x) = 0$.

Demostración:

Si $x=0$, como $f\in X^*$ es lineal resulta $f(x)=f(0)=0$. Por otra parte no puede ser $f(x)=0$ para todo $f\in X^*$ y $x\neq 0$, ya que por la proposición anterior, en este caso existe $f\in X^*$ tal que $f(x)=\|x\|\neq 0$ contradiciendo pues la hipótesis $f(x)=0$ para todo $f\in X^*$; por tanto $x=0$.■

Observación:

Sean $x,y\in X$; una forma de verificar que $x=y$ es comprobar que para todo $f\in X^*$ es $f(x)=f(y)$ ya que esto implica que $f(x-y)=0$ para todo $f\in X^*$ y por el corolario 1.1 $x-y=0$ ó $x=y$.

Definición 1.2: **(Integrales de Riemann)**

Sean $a,b\in \mathbb{R}$, $a<b$ y $f:[a,b]\to X$ continua; donde X es un espacio de Banach. El concepto de integral de Riemann se define de la siguiente manera.

A. Para cada partición $\sigma: a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$; y para cada uno de los intervalos $[t_0,t_1],[t_1,t_2]\ldots[t_{n-1},t_n]$ se escoge un punto $\tau_i, i=1,2,\ldots n$ $(t_{i-1}\leq \tau_i\leq t_i)$; y se pone $\tau=\{\tau_i / i=1,2,\ldots n\}$

$$\rho(f,\sigma,\tau)=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})f(\tau_i).$$

B. Si $|\sigma| = \max_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1})$, existe

(**1.1**) $$\lim_{|\sigma|\to 0} \rho(f,\sigma,\tau)$$

La verificación de este hecho es completamente similar al caso numérico ($X=\mathbb{R}$ ó $X=\mathbb{C}$) y se basa esencialmente en la continuidad uniforme de f en $[a,b]$. (Véase Rudin(22), pág. 135, 6.8) .

El límite (**1.1**) se llama integral de Riemann de f en $[a,b]$ y se indica:

$$\int_a^b f(t)dt\,.$$

Proposición 1.4:

Sea $f:[a,b]\to X$ continua y $x^*\in X^*$, entonces

(1.2) $$x^*\left(\int_a^b f(t)dt\right)=\int_a^b x^*(f(t))dt$$

Demostración:

Sea $\{\sigma_n\}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $|\sigma_n|\to 0$ y si $\sigma_n : a=t_0<\ldots<t_{k_n}=b$, póngase,

$$S_n=\sum_{i=1}^{k_n}(t_i-t_{i-1})f(t_i)\,.$$

Entonces $S_n \to \int_a^b f(t)dt$. Como x^*es continua $\lim_{n\to\infty} x^*(S_n) = x^*\left(\int_a^b f(t)dt\right)$.

Por otra parte, x^* es lineal por esto,

$$x^*(S_n) = \sum_{i=1}^{k_n} (t_i - t_{i-1}) x^*(f(t_i))$$

ahora bien, $x^* \text{o } f:[a,b] \to k$ es continua y por tanto integrable según Riemann por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} (t_i - t_{i-1}) x^*(f(t_i)) = \left(\int_a^b x^*(f(t))dt\right)$$

esto asegura la validez de la **(1.2)**. ■

La fórmula (1.2) y el corolario 1.1 del teorema de Hahnn – Banach permiten generalizar al caso en consideración las siguientes propiedades de la integral de Riemann "numérica".

1. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ (linealidad)

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (aditividad; aquí $a < c < b$)

3. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

ya que al aplicar al miembro izquierdo de cada una de las relaciones anteriores una $x^* \in X^*$; la misma se transforma en el miembro derecho por una simple aplicación de la igualdad (1.2). Conviene señalar que la desigualdad 3, en el caso "vectorial" el valor absoluto debe sustituirse por la norma; es decir que la desigualdad pertinente es:

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt .$$

Obsérvese que la propiedad 2 continúa siendo válida; independientemente de la relación de orden entre a,b y c; si se "extiende" la notación a los casos $a=b$ y $b<a$; el procedimiento de extensión en el caso numérico es definir $\int_a^b f(t)dt$ en estos casos; lo que se hace poniendo:

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Lo anterior es aplicable aquí, ya que si se considera el efecto de x^* sobre el miembro izquierdo y se tiene en cuenta la igualdad (1.2), se obtendrá el valor a la derecha y por el corolario 1.1 y su comentario resultará el miembro derecho.

Todo lo anterior autoriza la manipulación de las integrales (de Riemann) con las reglas usuales del cálculo; sin embargo queda por establecer las reglas de cálculo efectivo de las integrales, éstas, como es bien sabido se dan a través de las primitivas de los integrandos.

Una primitiva de una función $f:[a,b]\to X$ es una función $F:[a,b]\to X$ tal que F es continua en $[a,b]$ y para todo $t\in(a,b)$, $F'(t)=f(t)$.

En la integración numérica valen los siguientes resultados:

4. Si F es una primitiva de f entonces:

$$\int_a^b (f(x))dx = F(b)-F(a) \quad \text{(Teorema fundamental del cálculo)}$$

5. Si $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ es de clase $C^{(1)}$; entonces:

$$\int_a^b (f'(x))dx = f(b)-f(a)$$

6. Si $F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad a\le x\le b, F$ es una primitiva de f (f continua).

También en esta situación el corolario 1.1 y la fórmula (1.2) son los elementos adecuados para extender las proposiciones anteriores (o sea las igualdades). Con la finalidad de establecer estos resultados es necesario definir la derivada de una función $f:[a,b]\to X$ en un punto interior de $[a,b]$.

<u>Definición 1.3</u>: (Derivada de una función)

Sea $f:[a,b]\to X$ y $t\in(a,b)$. Si existe el $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ este límite se llama derivada de f en t y se indica $f'(t)$. Si f es derivable en todo $t\in(a,b)$ se dirá que es derivable en (a,b).

En los puntos $t=a$ y $t=b$ solo pueden existir derivadas unilaterales; o sea a la derecha en a y a la izquierda en b. En este sentido una función $f:[a,b]\to X$ se dice de clase $C^{(1)}$ si: es derivable en (a,b); existen las derivadas (en el sentido antes señalado) en a y b y la función $t\to f'(t), t\in[a,b]$ es continua.

Proposición 1.5:

Sea $f:[a,b]\to X$ de clase $C^{(1)}$; y $x^*\in X^*$ entonces la función $x^*\circ f:[a,b]\to K$ es de clase $C^{(1)}$ y

$$(x^*\circ f)'(t)=x^*(f'(t)).$$

Demostración:

Sea $t\in[a,b]$.

$$\frac{(x^*\circ f)(t+h)-(x^*\circ f)(t)}{h}=x^*\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right)$$

Como x^* es continua y $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}\to f'(t)$ cuando $h\to 0$ resulta:

$$(x^*\circ f)'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x^*(f(t+h))-x^*(f(t))}{h}$$

$$=x^*\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right)$$

$$= x^*\big(f'(t)\big) = (x^* \circ f')(t).$$

Resulta, entonces que $(x^* \circ f)'$ es continua en (a,b) y existen los límites apropiados en a y b de tal modo que $x^* \circ f'$ es continua en $[a,b]$ por ser compuesta de funciones continuas. ■

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que si $F:[a,b] \to X$ es primitiva de f entonces, para cada $x^* \in X^*$, $x^* \circ F$ es primitiva de $x^* \circ f$ ya que:

$$(x^* \circ F)'(t) = x^*(F'(t)) = x^*(f(t)) = (x^* \circ f)(t)$$

esto asegura que vale el "teorema fundamental del cálculo".

Teorema 1.6: **(Teorema Fundamental del Cálculo)**

Sea $f:[a,b] \to X$ continua y $F:[a,b] \to X$ una primitiva de f, entonces,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Demostración:

Sea $x^* \in X^*$, entonces:

$$x^*\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b x^* f(t)dt$$

y como $(x^* \circ F)' = (x^* \circ f)(t)$, entonces por el teorema fundamental del cálculo(versión numérica) resulta:

$$x^*\left(\int_a^b f(t)dt\right) = (x^* \circ F)(b) - (x^* \circ F)(a)$$

$$= x^*(F(b) - F(a))$$

por lo tanto,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \blacksquare$$

De igual manera se extienden las propiedades 5 y 6.

Otro importante medio para calcular integrales es el teorema de cambio de variables.

Para los fines de esta investigación se consideran cambios de variables del siguiente tipo:

φ es una transformación de $[\alpha, \beta] \to [a, b]$ tal que:

i) φ es biyectiva.

ii) φ es de clase $C^{(1)}$.

La fórmula de cambio de variable en las integrales ordinarias(numéricas) es la siguiente:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt.$$

Aplicando nuevamente una $x^* \in X^*$ resulta:

$$x^*\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b x^*(f(t))dt = \int_\alpha^\beta x^* f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt$$

$$= x^*\left(\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt\right)$$

por lo que:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt.$$

Conclusión: Las integrales de Riemann de funciones continuas $f:[a,b]\to X$ se manipulan tal y como se hace con las integrales ordinarias numéricas.

Proposición 1.7:

Sea I un intervalo de $\boldsymbol{R}$, y para cada $t \in I$. $f(t,\cdot):[a,b]\to X$ una función continua, si $t_0 \in I$ y $f(t,x)\xrightarrow[t\to t_0]{} f(x)$; uniformemente en $[a,b]$ entonces:

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(t,x)dx = \int_a^b \lim_{t\to t_0} f(t,x)dt = f(x).$$

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$: si $|t-t_0| < \delta$, entonces $\|f(t,x)-f(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces, si $|t-t_0| < \delta_\varepsilon$ resulta:

$$\left\| \int_a^b f(t,x)dx - \int_a^b f(x)dx \right\| \leq \int_a^b \| f(t,x) - f(x) \| \, dx < \varepsilon \, .$$

Por tanto $\lim\limits_{t \to t_0} \int_a^b f(t,x)dx = \int_a^b f(x)dx$. ■

<u>Definición 1.4:</u> (Integral Generalizado de Riemann)

Sea $a \in \boldsymbol{R}$ y $f : [a,b] \to X$ continua, donde X es un espacio de Banach, si existe,

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt$$

se dice que f es integrable en sentido generalizado en $[a,+\infty[$ y el límite anterior se llama integral generalizada de Riemann de f en $[a,+\infty[$ y se denota:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt \, .$$

Observación:

$x : [a,+\infty[\to X$ continua es integrable en sentido generalizado si y solo si:

$$\lim_{M_1, M_2 \to +\infty} \left\| \int_{M_1}^{M_2} x(t)dt \right\| = 0 \, .$$

Proposición 1.8:

1. $f:[a,+\infty[\to X$ continua es integrable en sentido generalizado si y solo si para todo $\varepsilon>0$, existe $k>0$ tal que $b,b'>k$ entonces,

$$\left\|\int_b^{b'} f(t)dt\right\|<\varepsilon.$$

2. Si existe la integral impropia $\int_a^{+\infty}\|f(t)\|dt$, f es integrable en sentido generalizado y

$$\left\|\int_a^{+\infty} f(t)dt\right\|\leq \int_a^{+\infty}\|f(t)\|dt.$$

Demostración:

1. Supongamos que existe $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \|f(t)\|dt = L(\in X)$ dado $\varepsilon>0$, existe $k>0$ tal que $b>K$ resulta $\left\|\int_a^b f(t)dt - L\right\|<\varepsilon/2$

   por lo tanto si $b,b'>k$

$$\left\|\int_a^b f(t)dt - \int_a^{b'} f(t)dt\right\|\leq\left\|\int_a^b f(t)dt - L\right\|+\left\|\int_a^{b'} f(t)dt - L\right\|$$

$$<\varepsilon$$

   pero:

$$\left\|\int_a^b f(t)dt - \int_a^{b'} f(t)dt\right\|=\left\|\int_{b'}^b f(t)dt\right\|=\left\|\int_b^{b'} f(t)dt\right\|$$

así $\left\|\int_b^{b'} f(t)dt\right\| < \varepsilon$, cumpliéndose la condición necesaria. Pero también la condición es suficiente: considérese para tal fin la sucesión en X,

$$L_n = \int_a^n f(t)dt$$

(L_n)es una sucesión de Cauchy en X, ya que $\|L_n - L_m\| = \left\|\int_n^m f(t)dt\right\|$ dado $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que si $b, b' > k$, entonces $\left\|\int_b^{b'} f(t)dt\right\| < \varepsilon$, por lo tanto si $n, m > [k]$ resulta:

$$\|L_n - L_m\| < \varepsilon .$$

Como (L_n) es una sucesión de Cauchy y X es completo, existe $L \in X$ tal que $L_n \to L$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$; tal que si $b, b' > k$

$$\left\|\int_b^{b'} f(t)dt\right\| < \varepsilon/2$$

y si $n > [k]$

$$\left\|\int_a^n f(t)dt - L\right\| < \varepsilon/2$$

$$\left\|\int_a^b f(t)dt - L\right\| \le \left\|\int_a^b f(t)dt - \int_a^n f(t)dt\right\| + \|L_n - L\|$$

$$= \left\| \int_b^n f(t)dt \right\| + \left\| L_n - L \right\|$$

entonces, $\left\| \int_a^b f(t)dt - L \right\| < \varepsilon$ para todo $b > K$.

2. Si $b, b' \in [a, +\infty[$; $\left\| \int_b^{b'} f(t)dt \right\| \leq \left| \int_b^{b'} f(t)dt \right|$ (*)

como existe $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b \left\| f(t) \right\| dt$, por (1), dado $\varepsilon > 0$ existe $k : b, b' > k$.

$\left| \int_b^{b'} \left\| f(t) \right\| dt \right| < \varepsilon$, teniendo en cuenta (*) se tiene:

$$\left\| \int_b^{b'} f(t)\, dt \right\| < \varepsilon \text{, si: } b, b' > k.$$

Por la primera parte f es integrable en sentido generalizado.

También, para todo $b \in [a, +\infty[$.

$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \left\| f(t) \right\| dt$, por lo que

$$\lim_{b \to +\infty} \left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \left\| f(t) \right\| dt$$

es decir,

$$\left\| \int_a^{+\infty} f(t)dt \right\| \leq \int_a^{+\infty} \left\| f(t) \right\| dt. \blacksquare$$

Proposición 1.9:

Sea $f:[a,+\infty[\to X$ continua e integrable en sentido generalizado en $[a,+\infty[$, sea $s\in L(X,X)$, entonces $s\left(\int_a^{+\infty} f(t)dt\right)=\int_a^{+\infty} sf(t)dt$.

Demostración:

Si $s\in L(X,X)$ como $\int_a^b f(t)dt \xrightarrow{b\to+\infty} \int_a^{+\infty} f(t)dt$

$$(1.3)\qquad s\left(\int_a^b f(t)dt\right) \xrightarrow{b\to+\infty} s\left(\int_a^{+\infty} f(t)dt\right)$$

pero:

$$s\left(\int_a^b f(t)dt\right)=\int_a^b sf(t)dt$$

por esto:

$$(1.4)\qquad \lim_{b\to+\infty}\int_a^b s(f(t))dt = s\left(\int_a^{+\infty} f(t)dt\right)$$

de (1.3) y (1.4) resulta: $s\left(\int_a^{+\infty} f(t)dt\right)=\int_a^{+\infty} sf(t)dt$. ■

1.3 Teorema de valor medio de Lagrange.

El teorema de valor medio de Lagrange (o de incrementos finitos) es una herramienta de primer orden en el cálculo de las funciones derivables.

En el segundo capítulo se tratan muchas cuestiones en que aparecen involucradas diferencias del tipo $f(t+h)-f(t)$, donde f es una función continua y con derivada continua en un oportuno intervalo de la recta real y la estimación de estas diferencias vía el teorema de Lagrange es de gran utilidad. Por lo anterior se considera aquí una versión restringida del Teorema de Lagrange; pero adecuado a las necesidades de este trabajo; versiones más amplias pueden consultarse en Nachbin, pág. 91, proposición 40.

<u>Teorema 1.10:</u> (Teorema de Lagrange de valor medio)

Sea $f:[a,b]\rightarrow X$ continua, $f'(t)$ definida en (a,b) es continua y acotada; entonces si $t_1,t_2\in[a,b]$.

$$\|f(t_1)-f(t_2)\|\leq M|t_1-t_2|$$

donde M es una cota superior de $\|f'(t)\|$ en (a,b) en particular

$$\|f(b)-f(a)\|\leq M(b-a) \quad \text{(Desigualdad de Lagrange).}$$

Demostración:

Sin pérdida de generalidades supóngase que $t_1<t_2$. Existe $n_0\in N$ tal que $t_1+\frac{1}{n_0}<t_2-\frac{1}{n_0}$. Si $n\geq n_0$. $\left[t_1+\frac{1}{n},t_2-\frac{1}{n}\right]\subset(a,b)$

por esto f y f' son continuas en $\left[t_1 + \frac{1}{n},\ t_2 - \frac{1}{n_0}\right]$ resultando por la propiedad 5 de las integrales de Riemann (sección 1.2)

$$f\left(t_2 - \tfrac{1}{n}\right) - f\left(t_1 + \tfrac{1}{n}\right) = \int_{t_1+\frac{1}{n}}^{t_2-\frac{1}{n}} f'(t)dt$$

además:

$$\left\| f\left(t_2 - \tfrac{1}{n}\right) - f\left(t_1 + \tfrac{1}{n}\right)\right\| \leq \int_{t_1+\frac{1}{n}}^{t_2-\frac{1}{n}} \|f'(t)\| dt \leq M\left(t_1 - t_2 + \tfrac{2}{n}\right)$$

pasando el límite para $n \to +\infty$ y teniendo presente la continuidad de f resulta:

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq M(t_1 - t_2) = M|t_1 - t_2|$$

si $t_1 = a$ y $t_2 = b$ se obtiene la desigualdad de Lagrange. ■

Corolario 1.2:

Si $f : [a,b] \to X$ es continua y tiene derivada nula en (a,b), entonces f es constante.

Demostración:

En efecto, si $t \in [a,b]$

$$\|f(t) - f(a)\| \leq \int_a^t \|f'(\tau)\| d\tau \leq \sup_{a \leq \tau \leq b} \|f'(\tau)\|(t - a) = 0\,.$$

Por lo tanto, $f(t) = f(a)$ para $a \le t \le b$. ■

Observación:

Note que si $f'(t) = 0$ en (a,b), f' es continua y acotada por lo que se aplica el Teorema del valor medio, pero igual resultado se obtiene directamente, pues:

$$f\left(t_1 - \tfrac{1}{n}\right) - f\left(a + \tfrac{1}{n}\right) = \int_{a+\frac{1}{n}}^{t-\frac{1}{n}} f'(t)dt = 0$$

y pasando al límite: $f(t) - f(a) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.

1.4 El Teorema de Acotamiento uniforme de Banach – Steinhaus.

En la sección anterior se han considerado integrales de funciones continuas y la extensión del Teorema de Lagrange de valor medio apoyándose en el Teorema de Hahn – Banach.

En esta sección se utiliza otro de los pilares del Análisis Funcional, el Teorema de Banach – Steinhaus de Acotamiento Uniforme para obtener una importante propiedad de acotamiento local para una familia de operadores $\{T(y)\}_{y \in Y}$.

Teorema 1.11: **(Teorema de Banach–Steinhaus de acotamiento uniforme)**

Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado, I un conjunto de índices y para cada $i \in I$ sea $T_i \in L(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son mutuamente excluyentes:

A_1: $\sup\limits_{i \in I} \|T_i\| < \infty$

A_2: Existe un sub-conjunto de X denso en X, X_0 tal que para todo $x \in X_0$ resulta:

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| = \infty$$

(para una demostración de este importante resultado véase Pini(20), Terzo Curso, pág. 12, 1.5 y Rudin(21), pág. 43, 2.5).

Como comentario adicional es oportuno indicar que la hipótesis de que X es un espacio de Banach es imprescindible en este teorema.

Para los propósitos de esta investigación es crucial el siguiente resultado, consecuencia directa del Teorema de Banach – Steinhaus.

Proposición 1.12:

Sea X un espacio de Banach, (Y,d) es un espacio métrico y para cada $y \in Y$ sea $T(y) \in L(X,X)$. Supóngase que existe $y_0 \in Y$ tal que para todo $x \in X$ existe $\lim\limits_{y \to y_0} T(y)x$.

Entonces existe $\delta > 0$ y $M > 0$ tales que para todo $y \in Y$ con $d(y, y_0) < \delta$ resulta:

$$\|T(y)\| \leq M .$$

Demostración:

Supóngase, razonando por absurdo que no se cumple la tesis enunciada. En este caso para cada $n \in N$ existe $y_n \in Y$ tal que:

i) $d(y_n, y_0) < \dfrac{1}{n}$

ii) $\|T(y_n)\| > n$

por (ii) $\sup\limits_{n \in N} \|T(y_n\| = +\infty$.

Por el teorema de Banach – Steinhaus existe $X_0 \subseteq X$ denso en X tal que para cada $x \in X_0$ $\sup\limits_{n} \|T(y_n)x\| = +\infty$.

Pero esto contradice la hipótesis de que $\lim\limits_{y \to Y_0} T(y)x$ existe, pues $y_n \to y_0$ por lo que $\lim\limits_{n \to \infty} T(y_n)x = \lim\limits_{y \to y_0} T(y)x \in X$. Así pues existen $\delta > 0$, $M > 0$ tales que $d(y, y_0) < \delta \Rightarrow \|T(y)\| \leq M$.■

Observación:

La existencia del límite de la sucesión $\{T(y_n)x\}$ implica que la sucesión es acotada.

1.5 Teorema tipo Fubini y Tonelli – Producto de Convolución.

Si bien para el estudio de los semigrupos de operadores la teoría de integración de Riemann es suficiente, en las aplicaciones con mucha frecuencia el espacio en que operan estos semigrupos es un espacio del tipo L^p, $1 \leq p < \infty$; tal es el caso del semigrupo de operadores de Weierstrass. Para tratar las cuestiones pertinentes se requieren algunos resultados específicos acerca de los operadores entre espacios L^p y de los mismos espacios L^p. En esta última sección se presentan estos resultados.

Teorema 1.13: (Teorema de Fubini – Tonelli)

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función; entonces si uno de los integrales:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} | f(x,y) | \, dx\, dy$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} | f(x,y) | \, dx \right) dy$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} | f(x,y) | \, dy \right) dx$$

es finito, los otros dos también lo son y $f \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Además:

a) Para casi todo $y \in \mathbb{R}$ $\qquad x \to f(x,y) \in L^1(\mathbb{R})$

b) Para casi todo $x \in \mathbb{R}$ $\quad y \to f(x,y) \in L^1(\mathbb{R})$

las funciones

$f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \ , \quad f_2(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$

pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$ y:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_2(y)dy .$$

Para una demostración de este resultado, véase Helmberg, págs. 326-327.

Proposición 1.14:

Sea $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, existe un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu(E) = 0$ y la función $y \to f(x-y)g(y), y \in \mathbb{R}$, es sumable $\forall x \in \mathbb{R} - E$. Y si

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

h es sumable y $\int_{\mathbb{R}} |\, h(x)\,|\, dx \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Demostración:

En efecto, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y además aplicando el teorema de Fubini – Tonelli se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\, f(x-y)\,|\,|\, g(y)\,|\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\, f(x-y)\,|\,|\, g(y)\,|\, dx \right) dy$$

$$= \int_R |g(y)| \left(\int_R | f(x-y) | \, dx \right) dy$$

$$= \int_R |g(y)| dy. \int_R |f(x-y)| dx$$

haciendo $\mu = x - y$ resulta:

$$\int_R |f(x-y)| dx = \int_R |f(\mu)| du = \int_R |f(x)| dx = \|f\|_1$$

Luego: $\int_R |g(y)| dy. \int_R |f(x-y)| dx = \|g\|_1 \|f\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$.

Por el teorema de Fubini – Tonelli la función $H(x,y) = f(x-y)g(y)$ es sumable $\left(\in L^1(R\text{x}R)\right)$ y casi en todas partes $y \to H(x,y)$ es a su vez sumable y si se pone

$$h(x) = \int_R H(x,y)dy = \int_R f(x-y)g(y)dy \qquad h \in L^1(R).$$

Por otra parte $\displaystyle\int_R \left| \int_R f(x-y)g(y)dy \right| dx \le \int_R \left(\int_R |f(x-y)| |g(y)| dy \right) dx$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1$$

así $\displaystyle\int_R \left| \int_R f(x-y)g(y)dy \right| dx \le \|f\|_1 \|g\|_1$.■

<u>**Definición 1.5**</u>:

Sean $f, g \in L^1(R)$, la función definida casi en todas partes $h(x) = \int_R f(x-y)\, g(y)\, dy$ se llama convolución (o producto integral) de f y g y se indica: $f * g$.

De acuerdo a la proposición 1.13 $f * g \in L^1(R)$. El concepto de convolución puede extenderse al caso en que ambos factores f, g pertenecen a espacios $L^p(R)$, $L^q(R)$ con $p, q \geq 1$. Con este propósito se considera los siguientes resultados.

Teorema 1.15:

Sea $f(x, y)$ medible en R^2 si

$$\int_R \left(\int_R |f(x,y)|^p \, dx \right)^{1/p} dy < +\infty$$

entonces $\int_R f(x,y) dy \in L^p(R)$ y:

$$\left(\int_R \left| \int_R f(x,y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \int_R \left(\int_R |f(x,y)|^p \, dx \right)^{1/p} dy .$$

Esta última desigualdad se conoce como desigualdad integral de Minkowski.

Para el caso de funciones continuas véase el libro Hardy, Littelewood y G. Polya sobre desigualdades, para el caso general, Pini(19), pág. 194, 4.4.

Teorema 1.16:

Sean $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Si $f \in L^p(R)$, $g \in L^q(R)$ entonces

$f * g \in L^r(R)$ donde r satisface la igualdad $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$ resultando

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (\text{Desigualdad de Young}).$$

Observación:

Si $f \in L^1(R)$ entonces $f * g \in L^p(R) \left(g \in L^p(R)\right)$ y:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p .$$

Este es precisamente el caso que interesa en este trabajo. (Véase Pini(19), pág. 197, 4.5).

Proposición 1.17:

Sea $f, g \in L^1(R),\ h \in L^p(R)\ \ (p \geq 1)$ entonces:

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Demostración:

Por el teorema 1.15 $(f * g) * h$ y $f * (g * h)$ son funciones de L^p bien definidas.

$$[f * (g * h)](x) = \int_R f(x-y)(g * h)(y)\, dy$$

$$= \int_R f(x-y)\left(\int_R g(y-z)\, h(z)\, dz \right) dy$$

por el teorema de Fubini – Tonelli resulta:

$$= \int_{R}\left(\int_{R} f(x-y)g(y-z)\,dy\right)h(z)\,dz$$

con un cambio de variable apropiado $u = y - z$, se tiene:

$$= \int_{R}\left(\int_{R} f(x-z-u)g(u)\,du\right)h(z)\,dz$$

$$= \int_{R} (f * g)(x-z)h(z)\,dz$$

$$= [(f * g) * h](x). \blacksquare$$

CAPÍTULO SEGUNDO

SEMIGRUPO DE OPERADORES

Sea X un espacio de Banach (en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$) y $L(X,X)$ el espacio de Banach de las aplicaciones lineales continuas de X a X.

$\| \ \|$ indica indiferentemente la norma en X (propiamente $\| \ \|_X$) y la norma en $L(X,X)$ (propiamente $\| \ \|_{L(X,X)}$).

$\xrightarrow{X}$ indica la convergencia en X y $\xrightarrow{L(X,X)}$ la convergencia en $L(X,X)$, (convergencia en norma).

2.1. Semigrupo (fuertemente) continuo de operadores lineales continuos de X en X.

Definición 2.1:

Sea $T:[0,\infty[\to L(X,X)$ tal que:

1) $T(s+t)=T(s)T(t) \qquad \forall s,t \geq 0$.

2) $T(0)=I \qquad$ (I el operador idéntico, $Ix=x \quad \forall x \in X$).

3) $\forall x \in X$ la aplicación $t \to T(t)x$ de $[0,+\infty[$ en X es continua; o sea

$$\forall x \in X \;\; \text{y} \;\; \forall t \in [0,+\infty[\;\; \text{resulta} \; \lim_{\Delta t \to 0} \|T(t+\Delta t)x - T(t)x\| = 0$$

$$(\, t + \Delta t \in [0,\infty[\,) \text{ o sea } T(t+\Delta t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} T(t) \text{ puntualmente.}$$

Entonces $\{T(t);\; t \geq 0\}$ se llama semigrupo (fuertemente) continuo de operadores continuos de X en X. Se dice además de Clase $C^{(0)}$.

Si en lugar de (3) se tiene:

(3') $\forall t \in [0,\infty[$ resulta $\lim_{\Delta t \to 0} \|T(t+\Delta t) - T(t)\| = 0 \qquad (t + \Delta t \geq 0)$

(o sea $T(t+\Delta t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{L(X,X)} T(t)$, entonces el semigrupo se dice uniformemente continuo.

Si un semigrupo continuo satisface la condición $\|T(t)\| \leq 1 \qquad \forall t \geq 0$, entonces se dice contractivo.

Observación: De (1) se deduce:

$$T(t)\,T(s) = T(s)\,T(t) \qquad \forall s,t \geq 0$$

o sea que los operadores conmutan entre si.

Observación: Sea $t \geq 0$ y $x, y \in X$ se tiene que:

$\|T(t)x - T(t)y\| = \|T(t)(x-y)\| \leq \|T(t)\|\,\|x-y\|$; por lo tanto, para $t \geq 0$, la aplicación $x \to T(t)x$ es continua en X; en particular si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X y si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x \in X$ entonces $T(t)x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} T(t)x \qquad \forall t \geq 0$.

Ejemplo 2.1:

Sea $A \in L(X,X)$; pongamos, para $t \in \mathbb{R}$,

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad (A^0 = I);$$

Se tiene que $\left\| T_{n+p}(t) - T_n(t) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. En efecto:

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \qquad\qquad A^0 = I$$

$$T_n(t) = \frac{t^0}{0!} A^0 + \frac{t^1}{1!} A^1 + \frac{t^2}{2!} A^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!} A^n$$

$$T_{n+p}(t) = \sum_{k=0}^{n+p} \frac{t^k}{k!} A^k$$

$$T_{n+p}(t) = \frac{t^0}{0!} A^0 + \frac{t^1}{1!} A^1 + \frac{t^2}{2!} A^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!} A^n + \ldots + \frac{t^{n+1}}{n+1!} A^{n+1} + \ldots + \frac{t^{n+p}}{n+p!} A^{n+p}$$

$$\left\| T_{n+p}(t) - T_n(t) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k$$

y como $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k$ es el resto de la serie convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^n = e^{|t|\|A\|}$,

entonces $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0; \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left\| T_{n+p}(t) - T_n(t) \right\| = 0$

(Recordemos que si $A, B \in L(X,X) \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ y por lo tanto,

$\|A^k\| \leq \|A\|^k$).

Entonces $(T_n(t))_{n\in N}$ es una sucesión de Cauchy en $L(X,X)$ y como $L(X,X)$ es completo, la sucesión converge en $L(X,X)$ a un elemento de $L(X,X)$ que se indica con $\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$.

Probemos que $\{\exp(tA);\ t \geq 0\}$es un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales continuos de X en X.

En efecto: $\forall s,t \in R$ (y por lo tanto en particular $\forall s,t \in R^+$)

resulta, $\|T_n(s)T_n(t) - T_n(s+t)\| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(s+t)^k}{k!} \|A\|^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$T_n(s)T_n(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} A^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{\ell=0}^{k} \frac{s^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \frac{t^\ell}{\ell!} A^{k-\ell} A^\ell\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{\ell=0}^{k} \frac{(s)^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \frac{t^\ell}{\ell!}\right) A^k$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!}\left(\sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!\, s^{k-\ell}}{(k-\ell)!\,\ell!} t^\ell\right) A^k, \text{ como: } \sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{(k-\ell)!\,\ell!} s^{k-\ell} t^\ell = (s+t)^k$$

Entonces, $T_n(s)T_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(s+t)^k}{k!} A^k = T_{2n}(s+t)$.

Luego,

$$T_n(s)T_n(t) = T_n(s+t) + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(s+t)^k}{k!} A^k$$

$$T_n(s)T_n(t) - T_n(s+t) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(s+t)^k}{k!} A^k \qquad \text{y}$$

$$\left\| T_n(s)T_n(t) - T_n(s+t) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(s+t)^k}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(s+t)^k}{k!} \|A\|^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

pues $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(s+t)^k}{k!} \|A\|^k$ es el resto n-ésimo de la serie convergente $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(s+t)^k}{k!} \|A\|^k = e^{(s+t)\|A\|}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \left\| T_n(s)T_n(t) - T_n(s+t) \right\| = 0$. Como la norma es continua, resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left\| T_n(s)T_n(t) - T_n(s+t) \right\| &= \left\| \lim_{n\to\infty} T_n(s)T_n(t) - \lim_{n\to\infty} T_n(s+t) \right\| \\ &= \left\| (\exp sA)\exp(tA) - \exp(s+t)A \right\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

O sea $(\exp sA)\exp(tA) = \exp((s+t)A)$; y por lo tanto $T(s+t) = T(s)T(t)$

Además, $T(0) = \exp(0A) = I$

$$T(0) = \exp(0A) = \lim_{n\to\infty} T_n(0) = \lim_{n\to\infty} I = I.$$

También, si $\Delta t > 0$

$$\begin{aligned} \left\| \exp((t+\Delta t)A) - \exp(tA) \right\| &= \left\| \exp(tA)(\exp(\Delta t\ A) - 1) \right\| \\ &\leq \left\| \exp tA \right\| \left\| \exp(\Delta t\ A) - 1 \right\| \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

porque, $\|\exp(\Delta t\ A) - I\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta t)^n}{n!} A^n \right\|$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Delta t|^n}{n!} \|A\|^n$$

por lo tanto, $\lim_{\Delta t \to 0^+} \|T(t+\Delta t)A - T(t)A\| = 0.$

Si $\Delta t < 0$ $\qquad t = (t+\Delta t) + (-\Delta t)$ $\qquad$ y

$$\exp(t+\Delta t)A - \exp tA = \exp(t+\Delta t)A - \exp[(t+\Delta t) + (-\Delta t)]A$$

$$= \exp(t+\Delta t)A\left(I - \exp(-\Delta t)A\right)$$

por esto,

$$\|\exp(t+\Delta t)A - \exp(tA)\| \leq \|\exp(t+\Delta t)A\| \cdot \|\exp(-\Delta t)A - I\|$$

$$\leq k\left(e^{-\Delta t\|A\|} - 1\right)$$

donde k es una constante que acota $\|\exp(t+\Delta t)A\|$ en una vecindad de t; por esto $\lim_{\Delta t \to 0^-} \|\exp(t+\Delta t)A - \exp(tA)\| = 0$ y por todo lo demostrado $\{\exp tA \,/\, t \geq 0\}$ es un semigrupo uniformemente continuo.

Ejemplo 2.2:

Sea $C([0,+\infty])$ el conjunto de las funciones $x:[0,\infty[\to \mathbb{R}$ continuas y convergentes al infinito. Poniendo $x(+\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) (\in \mathbb{R})$; este conjunto provisto de la adición y de la multiplicación escalar por $\mathbb{R}$; es un espacio vectorial y resulta normado poniendo $\|x\| = \sup\limits_{[0,+\infty]} |x(t)|$.

Obsérvese que cada elemento de este espacio es una función uniformemente continua. En efecto, sea:

$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = a = x(+\infty)$; fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $t_\varepsilon \in [0,+\infty[$ tal que $|x(t) - a| \le \varepsilon$ $\forall t \ge t_\varepsilon$ y por lo tanto $|x(t') - x(t'')| \le |x(t') - a| + |x(t'') - a|$

$$\le 2\varepsilon \qquad\qquad \forall t'; t'' \ge t_\varepsilon;$$

la restricción de x en $[0, t_\varepsilon]$ es uniformemente continua y por lo tanto $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tal que:

$|x(t') - x(t'')| \le \varepsilon \qquad \forall t', t'' \in [0, t_\varepsilon]$ con $|t' - t''| \le \delta_\varepsilon$; si además $t' \in [0, t_\varepsilon]$ y $t'' > t_\varepsilon$ y $t'' - t' < \delta_\varepsilon$, se tiene:

$$|x(t') - x(t'')| \le |x(t') - x(t_\varepsilon)| + |x(t_\varepsilon) - x(t'')| \le 3\varepsilon$$

$C([0,+\infty])$ con $\|x\| = \sup|x(t)|$ es un espacio de Banach. En efecto para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in C([0,+\infty])$ y sea $\|x_n - x_m\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$ (o sea $\{x_n\}$ es de Cauchy); tómese $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrario: existe n_ε tal que $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ $\forall m, n > n_\varepsilon$ y $\forall t \ge 0$; se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[0,+\infty]$; si x es la función límite se tiene entonces que x es continua y convergente al infinito; además $|x_n(t)-x(t)|\leq\varepsilon \quad \forall n>n_\varepsilon$ y $\forall t\in[0,\infty]$ y por lo tanto $\|x_n-x\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Sean $T(t)$ los operadores de traslación definidos así para $t\geq 0$:

$\forall x\in C([0,+\infty])(T(t)x)(\xi)=x(t+\xi) \quad \forall\xi\geq 0$ y $(T(t)x)(+\infty)=x(+\infty)$

Entonces $T(t):C([0,+\infty])\to C([0,+\infty])$; evidentemente $T(t)$ es lineal y además continua porque:

$\|T(t)x\|=\sup\limits_{\xi\in[0,+\infty]}|x(t+\xi)|\leq\sup\limits_{\xi\in[0,+\infty]}|x(\xi)|=\|x\|$, donde $\|T(t)\|\leq 1$. Por otra parte pertenece a $C([0,+\infty])$ la función constante 1; por esto $\|T(t)\|=1$.

Evidentemente $T(0)=I$. Si $s,t\geq 0$

$(T(t)T(s)x)(\xi)=(T(t)(T(s)x)(\xi)=(T(s)x)(t+\xi)=x(s+t+\xi)$ y

$(T(t+s)x)(\xi)=x(t+s+\xi)$ donde $T(t+s)=T(t)T(s)$.

Finalmente $\forall t\in[0,+\infty[$ y $\forall x\in C([0,+\infty])$ se tiene:

$$(T(t+\Delta t)x-T(t)x)(\xi)=x(t+\Delta t+\xi)-x(t+\xi)$$

Como x es uniformemente continua, dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_\varepsilon>0$

$|t'-t''|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|x(t')-x(t'')|<\varepsilon$ y además $|(t+\Delta t+\xi)-(t+\xi)|=|\Delta t|$ así que si $|\Delta t|<\delta_\varepsilon$ resulta $|x(t+\Delta t+\xi)-x(t+\xi)|<\varepsilon$ para todo $\varepsilon\geq 0$

Luego, $\|T(t+\Delta t)x-T(t)x\|=\sup\limits_{\xi\in[0,+\infty]}|(x(t+\Delta t+\xi)-x(t+\xi)|\leq\varepsilon$

por esto $T(t+\Delta t)x\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}T(t)x$

así $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \|T(t+\Delta t)x - T(t)x\| = 0$.

<u>Teorema 2.1</u>: (De Hille)

Sea $\{T(t); t \geq 0\}$ un semigrupo (fuertemente) continuo de operadores de $L(X,X)$. Entonces:

(a) La función $t \to \|T(t)\|$, $t \in [0,+\infty[$ es $L-$ medible.

(b) Existe el $\lim\limits_{t \to \infty} \log \dfrac{\|T(t)\|}{t}$ y tal límite es $< +\infty$.

(c) Indicado tal límite con $w_0, \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > w_0$, existe $M_\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$\|T(t)\| \leq M_\delta e^{t\delta} \quad \forall t \in [0,+\infty[$ $\quad w_0$ se llama el tipo del semigrupo.

Demostración:

(a) Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ y $E_a = \{t; t \in [0,+\infty[, \|T(t)\| > a\}$; si $a = +\infty$ entonces $E_a = \varnothing$; si $a < 0$ entonces, $E_a = [0,+\infty[$. Supongamos que $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$; si $t_0 \in E_a$ resulta $\|T(t_0)\| > a$ y entonces existe $x_0 \in X$ con $\|x_0\| = 1$ pues; $\|T(t_0)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T(t_0)x\| > a \Rightarrow \exists x : \|x_0\| = 1$ y $\|T(t_0)x_0\| > a$; por la 3 de la definición 2.1 resulta, $\lim\limits_{t \to t_0} \|T(t)x_0 - T(t_0)x_0\| = 0$, por hipótesis $\|T(t_0)\| - a > 0$, por la definición de límite $\exists \delta > 0$: si $|t - t_0| < \delta$

entonces $\|T(t)x_0 - T(t_0)x_0\| < \underbrace{\|T(t_0)x_0\| - a}_{\varepsilon}$ de esto por la desigualdad triangular:

$$\|T(t)x_0\| - \|T(t_0)x_0\| < \|T(t_0)x_0\| - a$$

$-\|T(t_0)x_0\| + a < \|T(t)x_0\| - \|T(t_0)x_0\| \qquad \forall t \geq 0, t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ por lo que $\|T(t)x_0\| > a \qquad \forall t \geq 0, t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ de ahí que $\|T(t)\| > a$ pues $\|x_0\| = 1$. De lo anterior se deduce que E_α es un conjunto relativamente abierto en $[0,+\infty[$ y por tanto $L-$ medible.

Observación: $E_\alpha = [0,+\infty[\cap \left(\cup \left(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0\right)\right)$

Conjunto relativamente abierto: la unión de intersecciones de conjunto abierto es abierto, así pues $t \to \|T(t)\|$ es $L-$medible y esto prueba (a).

(b) Por la condición (3) de la definición 2.1, para cada $x \in X$; $\lim_{t \to 0} T(t)x = x$. La proposición 1.12(Cap.1) asegura que $\{T(t);\ t \geq 0\}$ es acotado en una vecindad de $t = 0$, es decir existen $\delta > 0$, y $M > 0$ tales que si $0 \leq t \leq \delta$ entonces $\|T(t)\| \leq M$.

Sea ahora $[0, t_0]$ un intervalo compacto; $\forall\, t \in [0, t_0]$ resulta $t = p\delta + q$ con p entero no negativo y $0 \leq q < \delta$; entonces:

$\|T(t)\| = \|T(p\delta + q\| = \|(T(\delta))^p T(q)\| \leq M^{p+1}$. Consideremos ahora la función: $t \to w(t) = \log\|T(t)\|$, $t \in [0,+\infty[$; $w(t)$ es subaditiva, o sea $w(t_1 + t_2) \leq w(t_1) + w(t_2), \forall t_1 t_2 \geq 0$; en efecto si $\|T(t_1)\| > 0, \|T(t_2)\| > 0$, se tiene por (1) de la definición 2.1 que:

$w(t_1 + t_2) = \log\|T(t_1 + t_2)\| = \log\|T(t_1)T(t_2)\| \leq \log(\|T(t_1)\| \, \|T(t_2)\|)$

$= \log\|T(t_1)\| + \log\|(t_2)\| = w(t_1) + w(t_2)$, así $w(t_1 + t_2) \leq w(t_1) + w(t_2)$.

Si además $\|T(t_j)\| = 0$ para un j, entonces $T(t_j) = 0$ (operador nulo) y por lo tanto también $T(t_1 + t_2) = 0$, por lo que $w(t_1 + t_2) = -\infty$ (si se conviene que $\log 0 = -\infty$).

Sea $w_0 = \inf\limits_{]0,+\infty[} \dfrac{w(t)}{t}$ dado que $w(t)$ es superiormente acotada en cada subintervalo acotado de $[0,+\infty[$, w_0 es $-\infty$ ó pertenece a $\boldsymbol{R}$.

Supongamos que $w_0 \in \boldsymbol{R}$. Fijado $\delta \in \boldsymbol{R}, \delta > w_0$, existe $t_0 \in \boldsymbol{R}^+$ tal que $\dfrac{w(t_0)}{t_0} < \delta$; a cada t corresponde un entero no negativo $n(t)$ y un $r(t)$, $0 \leq r < t_0$, para los cuales $t = n(t)t_0 + r(t)$; entonces por la subaditividad de w, se tiene para $t > t_0$:

$$\frac{w(t)}{t}=\frac{w(n(t)t_0+r(t))}{t}\leq\frac{w(n(t)t_0)+w(r(t))}{t}=\frac{n(t)w(t_0)+w(r(t))}{t}$$

$$=\frac{n(t)w(t_0)}{n(t)t_0+r(t)}+\frac{w(r(t))}{n(t)t_0+r(t)}=\frac{w(t_0)}{t_0+\dfrac{r(t)}{n(t)}}+\frac{w(r(t))}{t}$$

el $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{w(t)}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{w(t_0)}{t_0+\dfrac{r(t)}{n(t)}}+\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{w(r(t))}{t}$

el $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{w(t_0)}{t_0+\dfrac{r(t)}{n(t)}}=\dfrac{\lim\limits_{t\to+\infty}w(t_0)}{\lim\limits_{t\to+\infty}t_0+\dfrac{r(t)}{n(t)}}=\dfrac{w(t_0)}{t_0}$

pues cuando $t\to+\infty$ $n(t)\to+\infty$, y además $0\leq r(t)\leq t_0$, por lo que $\dfrac{r(t)}{n(t)}\longrightarrow 0$ y por otro lado en $[0,t_0]\|T(t)\|\leq M_0$ (pues T es localmente acotado), entonces $\log\|T(r(t))\|\leq\log M_0$ porque $r(t)\in[0,t_0]$ dividiendo por t se tiene:

$\dfrac{w(r(t))}{t}\leq\dfrac{\log M_0}{t}$ como $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\log M_0}{t}=0$, entonces,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{w(r(t))}{t}\leq\limsup_{t\to\infty}\frac{\log M_0}{t}=0$$

luego, $\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{w(r(t))}{t}\leq 0$. Desde aquí se sigue que:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}\le\lim_{t\to\infty}\frac{w(t_0)}{t_0+\dfrac{r(t)}{n(t)}}+\limsup_{t\to\infty}\frac{w(r(t))}{t}$$

$$\le\frac{w(t_0)}{t_0}+\text{ “cant. negativa” } <\delta$$

así $\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{w(t)}{t}<\delta$.

Sea $\lambda=\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{w(t)}{t}\le\dfrac{w(t_0)}{t_0}<\delta$

$\forall\delta>w_0:\lambda\in(-\infty,\delta];\lambda\in\bigcap\limits_{\delta>w_0}(-\infty,\delta)=(-\infty,w_0]$

$\Rightarrow\lambda\le w_0$, o sea $\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{w(t)}{t}\le w_0$, pero

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}\ge\inf_{[0,+\infty]}\frac{w(t)}{t}=w_0$$

por esto siendo δ un número real arbitrario $>w_0$, se tiene:

$$0\ge\limsup_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}\le\liminf_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}\ge w_0$$

$$0\ge\liminf_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}\le\limsup_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}\le w_0$$

entonces $\liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{w(t)}{t}=\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{w(t)}{t}=w_0$

así $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{w(t)}{t}=w_0$.

Si después $w_0=-\infty$, entonces $\forall\delta\in R$ se tiene

$\limsup_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}<\delta$ y entonces $\lim_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}=-\infty$

así en cualquier caso

$$w_0=\inf_{t\to 0}\frac{\log\|T(t)\|}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\log\|T(t)\|}{t}.$$

(c) Entonces, tomando $\delta\in\mathbb{R},\delta>w_0$, existe $t_\delta\in\mathbb{R}^+$ tal que:

$$\frac{\log\|T(t)\|}{t}<\delta \qquad \forall t\in[t_\delta,+\infty[$$

en efecto $\|T(t)\|<e^{\delta t}$ $\qquad \forall t\in[t_\delta,+\infty[$

pero $\|T(t)\|$ es localmente acotada en $[0,t_\delta]$ y por lo tanto existe $M_\delta\geq 1$, en efecto $t\geq t_\delta$ y $t\in[0,t_\delta]$ $\|T(t)\|\leq M_\delta$; en particular $1=\|T(0)\|\leq M_\delta$, por consiguiente $\|T(t)\|\leq M_\delta e^{\delta t}$ $\quad \forall t\in[0,+\infty[$. ■

Observación: En la demostración del acotamiento local de $T(t)$ se usa la condición (3) de la definición 2.1 solo para $t=0$.

Pues esta definición puede ser modificada sustituyendo la condición (3) en la definición 2.1 con la siguiente:

$$\forall x\in X \text{ el } \lim_{t\to 0^+}\|T(t)x-x\|=0.$$

Probemos que de esta se sigue la (3) de la definición 2.1.

En efecto $\Delta t > 0$ se tiene:

$$0 \leq \|T(t+\Delta t)x - T(t)x\| = \|T(t)T(\Delta t)x - T(t)x\|$$

$$= \|T(t)(T(\Delta t)x - x)\|$$

$$\leq \|T(t)\| \|T(\Delta t)x - x\|;$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{\Delta t \to 0^+} \|T(t+\Delta t)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \lim_{\Delta t \to 0^+} \|(\Delta t)x - x\| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0^+} \|T(t+\Delta t)x - T(t)x\| = 0$$

si $\Delta t > 0$ y $t - \Delta t \geq 0$ se tiene:

$$0 \leq \|T(t-\Delta t)x - T(t)x\| = \|T(t)x - T(t-\Delta t)x\|$$

$$= \|T(t - \Delta t + \Delta t)x - T(t - \Delta t)x\|$$

$$= \|T(t-\Delta t)T(\Delta t)x - T(t-\Delta t)x\|$$

$$= \|T(t-\Delta t)(T(\Delta t)x - x)\|$$

$$\leq \|T(t-\Delta t)\| \; \|T(\Delta t)x - x\|$$

pero, $\|T(t-\Delta t)\|$ es limitada en torno de t y por lo tanto $\forall t \geq 0$

Se tiene $\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0^+} \|T(t+\Delta t)x - T(t)x\| = 0$ $(t + \Delta t \geq 0)$.

2.2 Generador infinitesimal de un semigrupo (fuertemente) continuo de operadores lineales continuos de X en X.

Definición 2.2:

Sea $\{T(t);t\geq 0\}$ un semigrupo (fuertemente) continuo de elementos de $L(X,X)$. Para $h>0$ póngase $A_h x=\dfrac{T(h)x-x}{h}$, $\quad x\in X$

Sea $D(A)$ el conjunto de los $x\in X$ para la cual existe (en X) el $\lim\limits_{h\to 0^+} A_h x$.

Si para cada $x\in D(A)$; $Ax=\lim\limits_{h\to 0^+} A_h x$, $A:D(A)\longrightarrow X$ se llama generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t);t\geq 0\}$.

Ejemplo 2.3:

1) Sea $T(t)=\exp(tA)$ $\qquad (A\in L(X,X))$; entonces:

$$A_h x=\frac{\exp(hA)x-x}{h}$$

$$\exp(hA)x=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{h^n A^n}{n!}x=x+\frac{hA}{1!}x+\frac{h^2A^2}{2!}x+\ldots$$

$$\exp(hA)x-x=hAx+\frac{h^2A^2}{2!}x+\frac{h^3A^3}{3!}x+\ldots$$

$$\exp(hA)x-x=h\left[\frac{Ax}{!}+\frac{h^1A^2}{2!}x+\frac{h^2A^3}{3!}x+\ldots\right]$$

$$\frac{\exp(hA)x-x}{h}=Ax+\frac{h^1A^2}{2!}x+\frac{h^2A^3}{3!}x+\ldots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h^{n-1}}{n!}A^nx\right)$$

$$A_hx=\frac{\exp(hA)x-x}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h^{n-1}}{n!}A^nx\right)\xrightarrow[h\to 0^+]{X}Ax$$

porque,

$$\left\|\exp(tA)x-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{t^k}{k!}A^kx\right)\right\|=\left\|\exp(tA)x-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{t^k}{k!}A^kx\right)x\right\|$$

$$\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|t|^k}{k!}\|A\|^k\|x\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \text{ y por lo tanto, } \exp(hA)x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{h^n}{n!}A^nx\right)$$

$$\|A_hx-Ax\|=\left\|\frac{\exp(hA)x-x-hAx}{h}\right\|$$

$$=\left\|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{h^n}{n!}A^nx\right)}{h}\right\|\leq\frac{e^{h\|A\|x}-1+h\|A\|\|x\|}{h}$$

Una aplicación de la regla de L' Hospital en el miembro derecho de esta desigualdad conduce a la conclusión $\lim\limits_{h\to 0^+}=\|A_hx-Ax\|=0$; por tanto A es el generador infinitesimal del semigrupo $\{\exp(tA);t\geq 0\}$.

Ejemplo 2.4:

Considérese ahora el semigrupo de las traslaciones en $C([0,\infty])$ (este espacio está normado con $\|x\| = \sup_{0\le t\le +\infty} |x(t)|$.)

Se tiene:

$$(A_h x)(\xi) = \frac{(T(h)x)(\xi) - x(\xi)}{h} = \frac{x(h+\xi) - x(\xi)}{h},$$

por tanto $D(A)$ es el subconjunto de $C([0,+\infty])$ de la función que tienen derivada perteneciente en $C([0,+\infty])$ y A es el operador de derivación.

Sea $x \in C([0,\infty])$, para cada $h > 0$ $A_h x = \dfrac{T(h)x - x}{h}$, esta es una función de $C([0,+\infty])$.

$C^{(1)}([0,+\infty])$ sea el subconjunto de las funciones de $C([0,+\infty])$ que tienen derivada que pertenece a $C([0,+\infty])$:

Sea $x \in C^{(1)}$ $[0,+\infty]: \lim_{h\to 0} \|A_h(x) - Dx\| = 0$

Para cada $\xi \in [0,+\infty]: A_h(x)(\xi) - Dx(\xi) = \dfrac{(T(h)x)(\xi) - x(\xi)}{h} - x'(\xi)$

$$= \frac{x(\xi + h) - x(\xi)}{h} - x'(\xi)$$

por el teorema de Lagrange se tiene:

$$= x'(\xi + \theta h) - x'(\xi) \qquad 0 \le |\theta| < 1$$

Las funciones de $C([0,+\infty])$ son uniformemente continuas.

Por esto si se da $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$\forall t,t' \in [0,+\infty]: |t-t'| < \delta$ entonces, $|x'(t) - x'(t')| < \varepsilon$ si $t = \xi$, $t' = \xi + \theta h$

$|t - t'| = |\xi - (\xi + \theta h)| = |\theta| \cdot |h| \le |h|$ por tanto si $|h| < \delta$

$$\left| \frac{x(\xi + h) - x(\xi)}{h} - x'(\xi) \right| < \varepsilon$$

Entonces, $\sup |A_h x(\xi) - x'(\xi)| \le \varepsilon$ si $|h| < \delta$

ó $\quad \|A_h x - x'\| < \varepsilon$ si $|h| < \delta$.

Teorema 2.2:

Sea $\{T(t);\ t \ge 0\}$ un semigrupo (fuertemente) continuo de operadores de $L(X,X)$ y sea A su generador infinitesimal con dominio $D(A)$. Entonces:

1) $D(A)$ es un subespacio vectorial de X y A de $D(A)$ es lineal.

2) $x \in D(A) \Rightarrow T(t)\,x \in D(A) \quad \forall t \ge 0$ y $\dfrac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$;

3) Si $x \in D(A)$, entonces $T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\xi)\,Ax\; d\xi \quad \forall t,s \ge 0$;

4) Si $f : [0,+\infty[\longrightarrow R$ es continua, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\xi) T(\xi) x\, d\xi = f(t)\,T(t)x \qquad \forall x \in X \text{ y } \forall t \ge 0 \quad (t+h) \ge 0;$$

5) $x \in X \Rightarrow \int_0^t T(s)x\,ds \in D(A) \qquad \forall t \geq 0 \quad \text{y} \quad T(t)x = x + A\int_0^t T(s)x\,ds,$

6) $\overline{D(A)} = X$, o sea $D(A)$ es denso en X, y A es un operador cerrado.

Demostración:

1) Sean $x_1, x_2 \in D(A)$ y $c_1, c_2 \in K$; entonces

$$A_h(c_1x_1 + c_2x_2) = \frac{T(h)(c_1x_1 + c_2x_2) - (c_1x_1 + c_2x_2)}{h}, \text{ pues } T \text{ es lineal}$$

$$= \frac{T(h)c_1x_1 + T(h)c_2x_2 - c_1x_1 - c_2x_2}{h}$$

$$= \frac{T(h)c_1x_1 - c_1x_1}{h} + \frac{T(h)c_2x_2 - c_2x_2}{h}$$

$$= \frac{c_1(T(h)x_1 - x_1)}{h} + \frac{c_2(T(h)x_2 - x_2)}{h}$$

$$= c_1A_hx_1 + c_2A_hx_2$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 \in D(A) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)(c_1x_1 + c_2x_2) - (c_1x_1 + c_2x_2)}{h} \in X$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)(c_1x_1 + c_2x_2) - (c_1x_1 + c_2x_2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{c_1(T(h)x_1 - x_1)}{h} + \frac{c_2(T(h)x_2 - x_2)}{h}$$

$$= c_1Ax_1 + c_2Ax_2$$

$$= A(c_1x_1 + c_2x_2)$$

Entonces, existe $A(c_1x_1 + c_2x_2) \in X$ y $A(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Ax_1 + c_2Ax_2$.

2) Dado que $T(t)T(h) = T(h)T(t)$ $(t, h \geq 0)$ se tiene para $h > 0$ y $x \in D(A)$

$$A_hT(t)x = \frac{T(h)(T(t)x) - T(t)x}{h} = T(t)\frac{T(h)x - x}{h} = T(t)A_hx$$

El $\lim_{h\to 0^+} T(t)A_hx = T(t)Ax$, porque $T(t)$ es continuo

$$AT(t)x = \lim_{h\to 0^+} A_hT(t)x = T(t)\left(\lim_{h\to 0^+} A_hx\right) = T(t)Ax$$

asi, $AT(t)x = T(t)Ax$. Esto asegura que $T(t)x \in D(A)$

si $h > 0$ resulta:

$$\begin{aligned}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} &= \frac{T(h)(T(t)x) - T(t)x}{h}\\ &= \frac{T(t)(T(h)x - x)}{h}\\ &= T(t)\cdot A_hx\\ &= A_hT(t)x \xrightarrow[h\to 0^+]{} AT(t)x\end{aligned}$$

Por tanto $\dfrac{d^+}{dt}T(t)x = A\,T(t)x = T(t)\,Ax$

si $h > 0$ y $t - h > 0$ se tiene:

$$\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax = \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax$$

$$= \frac{T(t-h+h)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax = T(t-h)\left[\frac{T(h)x - x}{h}\right] - T(t)Ax$$

$$= T(t-h)[A_h x - Ax] + T(t-h)Ax - T(t)Ax;$$

$$\text{y} \quad \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0 \quad \text{y} \quad \|T(t-h)[A_h x - Ax]\|$$

$$\leq \|T(t-h)\| \|A_h x - Ax\| \leq M_\delta e^{(t-h)\delta} \|A_h x - Ax\| \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$$

así pues $\dfrac{d^-}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$

3) $\forall s,t \geq 0$ y $\forall x \in D(A)$ se tiene

$$\int_s^t T(\xi)Ax\, d\xi = \int_s^t \frac{d}{d\xi} T(\xi)x\, d\xi = T(t)x - T(s)x \quad \text{porque} \quad \xi \longrightarrow T(\xi)Ax$$

es continua en el intervalo de extremo s y t (ver propiedad 5, pág.12, Cap. I)

4) La función $t \longrightarrow f(t)T(t)x$ es continua en $[0,+\infty[$.

Puesto que:

$$F(\xi) = \int_t^{t+\xi} f(s)T(s)xds$$

$$F'(\xi) = \frac{dF}{d\xi} = f(t+\xi)T(t+\xi)x$$

En particular: $F'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(h) - F(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_t^{t+h} f(s)T(s)xds - \cancelto{0}{\int_t^t f(s)T(s)xds}}{h}$$

$$F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)T(s)x\, ds$$

así pues, $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)T(s)x\, ds = f(t)T(t)x$.

5) Comencemos con la observación que si $[a,b]$ es en un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $x : [a,b] \longrightarrow X$ es continua y $U \in L(X,X)$, entonces,

$$U\left(\int_a^b x(t)dt \right) = \int_a^b Ux(t)dt.$$

La integral del segundo miembro existe porque $t \longrightarrow Ux(t)$ es continua.

Sea $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una descomposición finita de $[a,b]$ $\delta\sigma = \max\{t_k - t_{k-1} \quad k = 1,2,\ldots n\}$ y $r_k \in [t_{k-1}, t_k]$ para $k = 1,2,\ldots n$; entonces $\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})x(r_k) \xrightarrow[\delta_\sigma \to 0]{X} \int_a^b x(t)dt$ y además por la continuidad de U.

$$\lim_{\delta_\sigma \to 0} U\left(\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \right) x(r_k) = U\left(\lim_{\delta_\sigma \to 0} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) x(r_k) \right)$$

$$= U \int_a^b x(t)dt;$$

por otra parte,

$$U\left(\lim_{\delta_\sigma \to 0}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})x(r_k)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})Ux(r_k)\right) \xrightarrow[\delta_\sigma \to 0]{X} \int_a^b Ux(t)dt$$

Esto prueba la afirmación anterior.

Si $x \in X$ y $t, h > 0$

Entonces:

$$A_h \int_0^t T(s)xds = \frac{T(h)\left(\int_0^t T(s)xds\right) - \int_0^t T(s)xds}{h}$$

$$= \frac{\int_0^t [T(s+h)x - T(s)x]ds}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xdxds$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds$$

pero, por (4) se tiene que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds = T(t)x - T(0)x = T(t)x - x$$

por lo tanto, $\lim_{h\to 0} A_h \int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$, esto prueba que $\forall x \in X$ resulta que:

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A) \text{ y que } A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x.$$

6) $D(A)$ es denso en X si y sólo si $\overline{D(A)} = X$ o sea si y sólo si para cada $x \in X$ existe una sucesión de puntos de $D(A)$; $\{y_n\}$ tal que $y_n \longrightarrow x$.

Ahora bien; por (4) se tiene:

$\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)xds = T(0)x = x$ y por (5) se tiene:

$\int_0^t T(s)xds \in D(A)$, por esto si $t = \frac{1}{n}$ y se pone $y_n = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_0^{1/n} T(s)xds$.

$y_n \in D(A)$ y $y_n \longrightarrow x$

Se probará ahora que, A es un operador cerrado; es decir que, si $(x_n)_{n \in N}$ es una sucesión en $D(A)$ convergente en $x \in X$; $x_n \longrightarrow x \in X$ y $Ax_n \longrightarrow y$, entonces $x \in D(A)$ y, $y = Ax$.

Pues bien, por (3) resulta:

$$T(t)x_n - T(0)x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds \qquad \forall n$$

y por consiguiente $T(t)x - x = \lim\limits_{n \to \infty}(T(t)x_n - x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds$

pero $T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)y$, uniformemente en $[0,t]$ ya que:

$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \le \|T(s)\| \|Ax_n - y\|$ por el teorema 2.1 existe $\delta > 0, M_\delta > 0$ tal que: $\|T(s)\| \le M\delta e^{\delta s}$ para todo $s \ge 0$ por tanto si $L = M_\delta e^{\delta t}$ resulta para todo $s \in [0,t]$ que $\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \le L\|Ax_n - y\|$

desigualdad que asegura la convergencia uniforme; y por la proposición

1.7: $\lim_{n\to\infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds = \int_0^t T(s)y ds$

Entonces por (4) se tiene:

$$y = T(0)y = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{por (5)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} A_t x = Ax$$

por tanto $x \in D(A)$ y $y = Ax$, luego A es cerrada. ■

Teorema 2.3:

Sea A de $D(A)$ el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ fuertemente continuo de operadores de $L(X, X)$.

Entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax & \text{para } t > 0 \\ x(0) = x_0 \in D(A) \end{cases}$$

tiene una sola solución:

$$t \longrightarrow x(t) = T(t)x_0, \quad t \geq 0.$$

Por solución se entiende una función $t \longrightarrow x(t),\ t \geq 0$, continua derivable para $t > 0$ tal que $x(t) \in D(A)\ \ \forall t > 0$ y tal que $\dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t)\quad \forall t > 0, x(0) = x_0$.

Demostración:

Por la propiedad 2 del teorema 2.2 se tiene:

$\dfrac{d}{dt}x(t) = \dfrac{d}{dt}T(t)x_0 = AT(t)x_0 = Ax(t)$, porque $x_0 \in D(A)$ y además $x(0) = T(0)x_0 = x_0$. Así pues $t \longrightarrow x(t)$ es solución del problema de Cauchy.

Para probar la unicidad supongamos que $t \longrightarrow y(t)$ es otra solución.

Sea $F(s) = T(t-s)y(s)$ para $t > 0$ y $0 \leq s \leq t$. Para $\Delta s \neq 0,\ s + \Delta s \geq 0,$ $s + \Delta s \leq t,$ se tiene:

$$\frac{F(s+\Delta s) - F(s)}{\Delta s} = \frac{T(t-s-\Delta s)y(s+\Delta s) - T(t-s)y(s)}{\Delta s}$$

$$= T(t-s-\Delta s)\frac{[y(s+\Delta s) - y(s)]}{\Delta s} + \frac{[T(t-s-\Delta s) - T(t-s)]y(s)}{\Delta s}$$

$$= \frac{T(t-s-\Delta s)[y(s+\Delta s) - y(s)]}{\Delta s} + \frac{T(t-s-\Delta s)y(s) - T(t-s)y(s)}{\Delta s}$$

se tiene:

$$\frac{T(t-s-\Delta s)y(s)-T(t-s)y(s)}{\Delta s} = \begin{cases} -T(t-s)\dfrac{T(|\Delta s|)y(s)-y(s)}{|\Delta s|} & \text{si } \Delta s<0 \\[2ex] -T(t-s-\Delta s)\dfrac{T(\Delta s)y(s)-y(s)}{\Delta s} & \text{si } \Delta s>0 \end{cases}$$

porque $y(s)\in D(A)$ se tiene:

$$\frac{T(|\Delta s|)y(s)-y(s)}{|\Delta s|} = A_{|\Delta s|}y(s) \xrightarrow[|\Delta s|\to 0]{X} Ay(s);\ \ si\ \ \Delta s<0$$

$$\frac{T(\Delta s)y(s)-y(s)}{\Delta s} = A_{|\Delta s|}y(s) \xrightarrow[\Delta s\to 0]{X} Ay(s);\ \ si\ \ \Delta s>0$$

por esto,

$$\frac{T(t-s-\Delta s)y(s)-T(t-s)y(s)}{\Delta s} \xrightarrow[\Delta s\to 0]{X} -T(t-s)Ay(s)$$

Además,

$$T(t-s-\Delta s)\frac{y(s+\Delta s)-y(s)}{\Delta s} \xrightarrow[\Delta s\to 0]{X} T(t-s)y'(s).$$

Así pues F es derivable y $F'(s)=T(t-s)y'(s)-T(t-s)Ay(s)=0$, porque $y'(s)=Ay(s)$.

Además $F'(s)=0$ para $0\le s\le t$, luego $F(s)=$constante en $[0,t]$ y por lo tanto $F(0)=F(t)$, pero $F(0)=T(t)y(0)$

$$= T(t)x_0$$

$$F(0) = x(t)$$

y $F(t) = T(0)y(t) = y(t)$

Así pues, $x(t) = y(t)$; $\forall t \geq 0$. ■

<u>Teorema 2.4:</u>

Sea A de $D(A)$ el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ (fuertemente) continuo de operadores de $L(X, X)$. Sea $f : [0, \infty[\longrightarrow X$ continua con derivada (fuerte) continua. Entonces el problema de Cauchy $\dfrac{dx}{dt} - Ax = f(t)$ para $t > 0$, $x(0) = x_0 \in D(A)$ tiene una sola solución, $x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$. La definición de solución es aquella del teorema 2.3.

Demostración:

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + f(t) \qquad t \geq 0 \text{ con } x(0) = x_0 \in D(A)$$

La solución, como en el caso finito dimensional es:

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \qquad t \geq 0 \quad \mathbf{(1)}$$

donde $\{T(t);\ t \geq 0\}$ es el semigrupo generado por el operador A.

En la **(1)**, el primer término del segundo miembro es solución de la "ecuación homogénea":

$x' = \dfrac{d}{dt}T(t)x_0 = AT(t)x_0 = Ax(t) = Ax$; y cumple $T(0)x_0 = x_0$, también

$x(0) = x_0$, pues $\int_0^0 T(t-s)f(s)ds = 0$, ya que $\left(\int_0^0 f(s)ds = 0!\right)$.

La hipótesis sobre $f:[0,+\infty] \longrightarrow X$ son las siguientes:

a) f es continua en $[0,+\infty)$

b) f' es continua en $[0,+\infty)$

Para comprobar que **(1)** es solución de la ecuación diferencial hay que verificar que la aplicación $\varphi(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds \qquad t \geq 0$

es diferenciable en $(0,+\infty)$ y que $\varphi'(t) = A\varphi(t) + f(t) \qquad t \geq 0$

En efecto: Sea $t > 0$, y $F(s) = T(t-s)f(s) \qquad 0 \leq s \leq t$

$F(s)$ es continua. Por lo tanto, si $h \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq s + h \leq t$, entonces:

$$F(s+h) - F(s) = T(t-s-h)f(s+h) - T(t-s)f(s)$$

$$= T(t-s-h)\big(f(s+h) - f(s)\big) + \big[T(t-s+h)f(s) - T(t-s)f(s)\big]$$

por la condición de semigrupo continuo de $T(t)$, $t \geq 0$,

$\lim_{h\to 0}(T(t-s-h)f(s)-T(t-s)f(s))=0$. Para el primer sumando teniendo en cuenta que f es uniformemente continua en intervalos compactos de $[0,+\infty)$, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta_\varepsilon : |h|\le\delta_\varepsilon$ resulta que $\|f(s+h)-f(s)\|<\varepsilon$ para todo $s\in[0,t]$ y $|h|<\delta_\varepsilon$ tal que $0\le s+h\le t$.

Por otra parte: $\|T(t-s-h)\|$ es acotada localmente, por esto existe $L>0:\forall h:|h|\le\delta_\varepsilon:\|T(t-s-h)\|\le L$.

Así: $\|T(t-s-h)(f(s+h)-f(s))\|\le\varepsilon$; si $|h|\le\delta_\varepsilon$

luego, $\lim_{h\to 0}\|T(t-s-h)(f(s+h)-f(s))\|=0$.

Así pues, para todo $t>0$, $F(s)=T(t-s)f(s)$, $\quad 0\le s\le t$ es continua y $\varphi(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad t\ge 0$ está definida.

Ahora se demostrará que $\varphi(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)ds$ es derivable para $t>0$.

Hágase un oportuno cambio de variable $(\sigma=t-s)$; entonces:

$$\varphi(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}=\int_0^t T(s)\left[\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right]ds+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)f(t+h-s)ds$$

El segundo término a la derecha tiene límite cuando $h\to 0$ igual a $T(t)f(0)$. En cuanto al primero si se considera la función:

$$\lambda(s)=T(s)\frac{[f(t+h-s)-f(t-s)]}{h} \qquad 0\le s\le t$$

Esta converge uniformemente a $T(s)f'(t-s)$, $s\in[0,t]$. En efecto:

$$\left\|T(s)\left[\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right]-T(s)f'(t-s)\right\|$$

$$\le\|T(s)\|\left\|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)-hf'(t-s)}{h}\right\|$$

Siendo $T(t)$, $t\ge 0$ un semigrupo, existe $k>0$ tal que para $s\in[0,t]$ $\|T(s)\|\le k$.

Por otra parte si:

$$p(h)=f(t+h-s)-f(t-s)-hf'(t-s),\ h\in[-\delta_\varepsilon,\delta_\varepsilon]$$

p es derivable, y por el teorema del valor medio

$$\|p(h)\|=\|p(h)-p(0)\|\le\max_{|\theta|\le\delta}\|f'(t+\theta-s)-f'(t-s)\|\|h\|$$

por lo que,

$$\left\|T(s)\left[\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right]-T(s)f'(t-s)\right\|<\varepsilon$$

Si δ es tal que $\max_{|\theta|\le\delta}\|f'(t+\theta-s)-f'(t-s)\|<\varepsilon$ por la proposición 1.7

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t T(s)\left[\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}\right]ds=\int_0^t T(s)f'(t-s)ds.$$

Como φ es derivable, existe el $\lim_{h\to 0^+}\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$

pero; si $h > 0$ (considérese la versión original de $\varphi(t)$)

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^t [T(t+h-s)-T(t-s)]f(s)ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds$$

El segundo término tiene límite igual a $T(0)f(t) = f(t)$ por esto, existe:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^t [T(t+h)-T(t-s)]f(s)ds$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{T(h)\int_0^t T(t-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds}{h}$$

y siendo $T(t)$; $t \geq 0$, con generador infinitesimal A, lo anterior quiere decir que:

$$\varphi'(t) = A\left(\int_0^t T(t-s)f(s)ds\right) + f(t)$$

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) + f(t)$$

Así: $$\frac{dx(t)}{dt} = AT(t)x_0 + A\int_0^t T(t-s)f(s)ds + f(t)$$

$$= Ax(t) + f(t)$$

esto asegura que $x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$ es solución de la ecuación:

$$y'(t) = Ay(t) + f(t)$$

sujeta a la condición $y(0) = x_0$.

Unicidad:

Por el teorema anterior para cada $x_0 \in D(A)$ existe una única solución del problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

En particular, la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

es $x(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Si $x_1(t), x_2(t), \; t \geq 0$ son soluciones del problema:

$$x' = Ax + f(t) \qquad t \geq 0$$

$$x(0) = x_0$$

entonces $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ es solución del problema:

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x(0) &= x_1(0) - x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

por tanto, $x_1(t) - x_2(t) = 0$ para $t \geq 0$ y

$$x_1(t) = x_2(t) \qquad \forall t, \; t \geq 0. \blacksquare$$

<u>Teorema 2.5</u>:

Sea $A : D(A) \longrightarrow X$ lineal cerrado con dominio denso en X. Entonces A puede ser generador infinitesimal de a lo sumo un semigrupo fuertemente continuo en $L(X,X)$.

Demostración:

Sea A generador de dos semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ y $\{s(t); t \geq 0\}$ (fuertemente) continuo de operadores de $L(X,X)$.

Consideremos el problema de Cauchy:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{para } t > 0, \ x(0) = x_0 \in D(A).$$

Entonces, existen las soluciones:

$$t \longrightarrow x(t) = T(t)x_0 \quad \text{y}$$

$$t \longrightarrow y(t) = s(t)x_0.$$

Por la unicidad se tiene que:

$$T(t)x_0 = s(t)x_0 \qquad \forall t \geq 0 \quad \text{y} \quad \forall x_0 \in D(A)$$

Pero, $D(A)$ es denso en X y los operadores $T(t)$ y $s(t)$ son continuos; por lo tanto $T(t)x = s(t)x \quad \forall t \geq 0$ y $\forall x \in X$.

Por lo tanto, $T(t) = s(t) \quad \forall t \geq 0$. ■

Ejemplo 2.5:

Sea $A \in L(X, X)$; entonces A es generador del semigrupo $\{\exp(tA);\ t \geq 0\}$

y por lo tanto el problema de Cauchy $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ para $t > 0$, $x(0) = x_0 \in X$

tiene una sola solución $t \longrightarrow x(t) = \exp(tA)x_0$

Por ejemplo, si K es un intervalo compacto de R^n, $H \in L^2(K \times K)$,

entonces:

$$[f] \longrightarrow \left[\int_K H(y) f(y) dy \right],\ f \in L^2(K),$$

pertenece a $L^2\left(L^2(K),\ L^2(K)\right)$ y por lo tanto la solución de

$$\frac{d}{dt} g(x,t) = \int_K H(x,y) g(y,t) dy, \qquad g(x,0) = f(x) \quad \text{y}$$

$$g(x,t) = f(x) + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{t^K}{K!} \int_K H_K(x,y) f(y) dy \quad \text{donde,}$$

$$H_1 = H \quad \text{y} \quad H_n(x,y) = \int_K H(x,z) H_{n-1}(z,y) dz \qquad \text{para } n \geq 2.$$

Ejemplo 2.6:

Sea $X = C^{(1)}\left([0,+\infty]\right)$. Il problema de Cauchy

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ para $t > 0$, $u(0, \xi) = f(\xi)$ con $f \in C^{(1)}\left([0,+\infty]\right)$ tiene única solución $(t,\xi)\longrightarrow f(t+\xi)$ porque actualmente $\dfrac{\partial}{\partial\xi}$ es el generador del semigrupo de la traslación.

Observación: Sea $A:D(A)\longrightarrow X$ lineal cerrado con domino denso generador del semigrupo $\{T(t);\ t\geq 0\}$. Supongamos que A es acotado. Entonces $D(A)=X$; en efecto sea $x\in X$ y $x_n\in D(A)$, $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$; luego, $\|Ax_n-Ax_m\|\leq\|A\|\|x_n-x_m\|\xrightarrow[m,n\to\infty]{}0$, existe $y\in X$ tal que, $Ax_n\longrightarrow y$; además, A es cerrado de $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$; $Ax_n\xrightarrow[n\to\infty]{}y$, por consiguiente resulta que $x\in D(A)$ y $y=Ax$.

Como $A\in L(X,X)$; y además es único el semigrupo generado por este operador resulta $T(t)=\exp(tA)$ y por lo tanto $\{T(t);\ t\geq 0\}$ es uniformemente continuo.

2.3 El Resolvente de un operador cerrado. Teorema de Hille - Yosida.

En todo lo que sigue X indica siempre un espacio de Banach (o de Hilbert) complejo.

Definición 2.3:

Sea $D(T)$ un subespacio de X y $T : D(T) \longrightarrow X$ es lineal.

Sea $\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \middle/ C(\lambda - T) \text{es denso en } X \text{ y existe} (\lambda - T)^{-1} \text{acotado} \right\}$

Si $\lambda \in \rho(T)$, póngase: $R(\lambda;T) = (\lambda - T)^{-1}$, entonces $R(\lambda;T)$ se llama resolvente de T.

Teorema 2.6:

Si T es cerrado entonces, $\forall \lambda \in \rho(T), R(\lambda;T) \in L(X,X)$.

Demostración:

Por definición $R(\lambda;T)$ es acotado con dominio denso en X. Probemos que $R(\lambda;T)$ es cerrado.

Sea $y_n \in D(R(\lambda;T))$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y sea $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{X} y$ y $R(\lambda;T)y_n \xrightarrow[n \to \infty]{X} x$; se trata de probar que $y \in D(R(\lambda;T))$ y $x = R(\lambda;T)y$. Ahora poniendo:

$$x_n = R(\lambda;T)y_n$$

$$x_n = (\lambda - T)^{-1} y_n$$

$(\lambda - T)x_n = (\lambda - T)(\lambda - T)^{-1} y_n$, se tiene que:

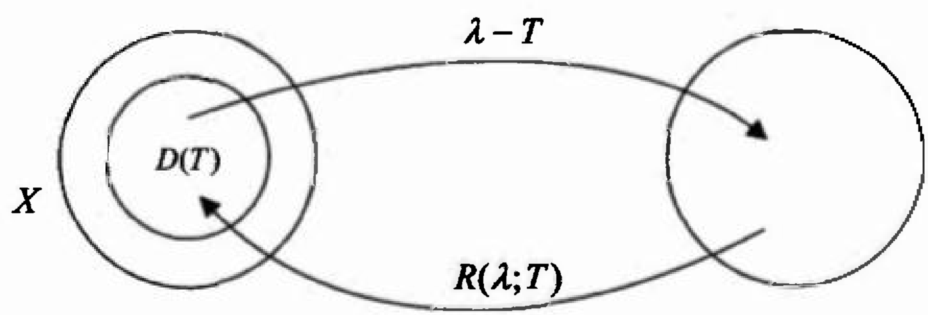
$(\lambda - T)x_n = y_n$; pero $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} y$ T es un operador cerrado; se sigue que $x \in D(\lambda - T)$ y $(\lambda - T)x = y$; por esto $y \in D(R(\lambda;T))$ y $R(\lambda;T)y = x$.

Probemos ahora que $D(R(\lambda;T)) = X$

Sea $x \in X$; existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(R(\lambda;T))$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x$, porque $D(R(\lambda;T))$ es denso en X; sea $y_n = R(\lambda;T)x_n$; dado que $R(\lambda;T)$ es acotado y $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x$, $(R(\lambda;T)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X; y además X es completo, por lo tanto existe el límite de tal sucesión.

Sea $y = \lim_{n\to\infty} R(\lambda;T)x_n$; pero $R(\lambda;T)$ es cerrado y por lo tanto $x \in D(R(\lambda;T))$ y $y = R(\lambda;T)x$. Así $x \in D(R(\lambda;T))$ y por consiguiente $x \subset D(R(\lambda;T))$ pero $D(R(\lambda;T)) \subseteq X$, por lo tanto $D(R(\lambda;T)) = X$.

Por lo tanto, $R(\lambda;T): X \xrightarrow[1-1]{\text{sobre}} D(T)$



y por lo tanto: $(\lambda - T)R(\lambda;T)x = x \qquad \forall x \in X$

$$R(\lambda;T)(\lambda - T)x = x \qquad \forall x \in D(T).\ \blacksquare$$

Observación:

Si U es lineal acotado cerrado con dominio denso; entonces $U \in L(X, X)$.

Teorema 2.7:

Sea T cerrado y $\lambda, \mu \in \rho(T)$; entonces:

$R(\lambda;T) - R(\mu;T) = (\mu - \lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T)$ (ecuación resolvente).

Demostración:

En efecto $\forall x \in X$ se tiene (porque $(\mu - T)R(\mu;T) = I$)

$$
\begin{aligned}
R(\lambda;T)x &= R(\lambda;T)(\mu - T)R(\mu;T)x \\
&= R(\lambda;T)[(\mu - \lambda) + (\lambda - T)]R(\mu;T)x \\
&= R(\lambda;T)(\mu - \lambda)R(\mu;T)x + R(\lambda;T)(\lambda - T)R(\mu;T)x \\
&= (\mu - \lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T)x + R(\lambda;T)(\lambda - T)(R(\mu;T)x);
\end{aligned}
$$

pero $R(\mu;T)x \in D(T)$ y por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
(R(\lambda;T)(\lambda - T))(R(\mu;T)x) &= (\lambda - T)^{-1}(\lambda - T)(R(\mu;T)x) \\
&= R(\mu;T)x
\end{aligned}
$$

Así pues: $R(\lambda;T)x = (\mu - \lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T)x + R(\mu;T)x$.

$R(\lambda;T)x - R(\mu;T)x = (\mu - \lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T)$ $\forall x \in X$ y por lo tanto;

$R(\lambda;T) - R(\mu;T) = (\mu - \lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T)$. ■

Observación:

Cambiando λ con μ se tiene:

$$R(\mu;T) - R(\lambda;T) = (\lambda - \mu)R(\mu;T)R(\lambda;T)$$

y por lo tanto,

$$R(\lambda;T) - R(\mu;T) = (\mu - \lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T)$$

donde,

$$R(\lambda;T)R(\mu;T) = R(\mu;T)R(\lambda;T).$$

Teorema 2.8:

Sea T cerrado y $\lambda_0 \in \rho(T)$; entonces,

$\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - \lambda_0| \|R(\lambda_0 : T\| < 1\} \subseteq \rho(T)$; y por lo tanto $\rho(T)$ es abierto, y

$$R(\lambda;T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n [R(\lambda_0;T]^{n+1}$$

la serie (de Neumann) converge en norma; y además:

$$\|R(\lambda;T)\| \leq \frac{\|R(\lambda_0;T)\|}{1 - |\lambda - \lambda_0| \|R(\lambda_0;T)\|}.$$

Demostración:

Póngase $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (\lambda - \lambda_0)^k (R(\lambda_0, T))^{k+1}$.

Entonces:

$$\left\|S_{n+p}-S_n\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{n+p}(-1)^k(\lambda-\lambda_0)^k[R(\lambda_0;T)]^{k+1}-\sum_{n=0}^{k}(-1)^k(\lambda-\lambda_0)^k[R(\lambda_0;T)]^{k+1}\right\|$$

$$=\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^k(\lambda-\lambda_0)^k[R(\lambda_0;T)]^{k+1}\right\|$$

$$\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}|\lambda-\lambda_0|^k\|[R(\lambda_0;T)]\|^{k+1}$$

Como $\dfrac{|\lambda-\lambda_0|^{k+1}\|R(\lambda_0;T)\|^{k+1}}{|\lambda-\lambda_0|^k\|R(\lambda_0;T)\|^k}=|\lambda-\lambda_0|\,\|R(\lambda_0;T)\|=r.$

El último miembro de la desigualdad es una suma parcial de una serie geométrica; y si $|\lambda-\lambda_0|\,\|R(\lambda_{0,};T)\|<1$; este miembro está acotado por la suma de la serie cuyo primer miembro es $\mu_0=|\lambda-\lambda_0|^{n+1}\|R(\lambda_0;T)\|^{n+1}$ o sea por:

$$S_n=\frac{V_0}{1-r}=\frac{\left[|\lambda-\lambda_0|\,\|R(\lambda_0;T)\|\right]^{n+1}\|R(\lambda_0;T)\|}{1-|\lambda-\lambda_0|\,\|R(\lambda_0;T)\|}.$$

Por esto $\left\|S_{n+p}-S_n\right\|<\dfrac{\left[|\lambda-\lambda_0|\,\|R(\lambda_0;T)\|\right]^{n+1}\|R(\lambda_0;T)\|}{1-|\lambda-\lambda_0|\,\|R(\lambda_0;T)\|}$

el segundo miembro converge $a\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, pues:

$\lim\limits_{n\to\infty}(r)^{n+1}\left[\dfrac{(\|R(\lambda_0;T)\|)}{1-r}\right]=0$, ya que $r<1$; por lo tanto:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to\infty}}\left\|S_{n+p}-S_n\right\|=0.$$

Así pues la sucesión $\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\lambda-\lambda_0)^k[R(\lambda_0;T)]^{k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

en $L(X,X)$ es una sucesión de Cauchy y como $L(X,X)$ es completo, la

sucesión $\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\lambda-\lambda_0)^k[R(\lambda_0;T)]^{k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norma y su límite

es un elemento de $L(X,X)$ que se indican; como es usual,

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^{n+1}$ y cuya norma es:

$$\leq\frac{\|R(\lambda_0;T)\|}{1-|\lambda-\lambda_0|\,\|R(\lambda_0;T)\|}.$$

Para probar que tal operador es $R(\lambda;T)$ solo basta probar que:

$$(\lambda-T)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^{n+1}\right)x=x\qquad\forall x\in X$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^{n+1}\right)(\lambda-T)x=x\qquad\forall x\in D(T).$$

Teniendo presente que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^{n+1}\qquad x\in D(T)\qquad\forall x\in X$$

Se tiene:

$$(\lambda - T)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^{n+1}\right)$$

$$=(\lambda-\lambda_0+\lambda_0-T)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^{n+1}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^{n+1}[R(\lambda_0;T)]^{n+1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[(\lambda_0-\lambda)R(\lambda_0;T)][R(\lambda_0;T)]^n$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^n+I+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^n=I$$

porque $(\lambda_0-T)R(\lambda_0;T)=I$. Con esto se ha probado la primera igualdad.

Análogamente, dado que $R(\lambda_0-T)(\lambda_0-T)x=x \quad \forall x\in D(T)$; se tiene:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^{n+1}\right)(\lambda-\lambda_0+\lambda_0-T)x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^{n+1}[R(\lambda_0;T)]^{n+1}x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^n\,x=x.$$

Así pues; si $|\lambda-\lambda_0|\,\|R(\lambda_0;T)\|<1$

$\forall\lambda\in\mathbb{C}$ con $|\lambda-\lambda_0|<\dfrac{1}{\|R(\lambda_0;t)\|}$ resulta:

$$R(\lambda;T)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n[R(\lambda_0;T)]^{n+1}.$$

Obviamente si $\lambda \in \rho(T)$ resulta $\|R(\lambda;T)\| > 0$ porque de otra forma se tendría $(\lambda - T)^{-1} x = 0 \ \ \forall x$ mientras $(\lambda - T)^{-1}$ es invertible y por lo tanto $(\lambda - T)^{-1} x = 0$ si y solo si $x = 0$.

Si A es un abierto de $\mathbb{C}$ y $T : A \longrightarrow L(X, X)$, diremos que $\lambda \longrightarrow T(\lambda)$ es analítica si $\forall \lambda_0 \in \mathbb{C}$ existe $r_0 > 0$ tal que:

$$T(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n T_n$$

para $|\lambda - \lambda_0| < r_0$, siendo $T_n \in L(X, X) \ \ \forall_n$ y la serie converge en norma. Así pues $\lambda \longrightarrow R(\lambda;T)$ es analítica sobre $\rho(T)$. ■

<u>Teorema 2.9:</u>

Sea $A : D(A) \longrightarrow X$ lineal cerrado y sea $x : [a, +\infty[\longrightarrow X$ continua.

Si $x(t) \in D(A) \ \ \forall t > a$, $t \longrightarrow Ax(t)$ es continua en $[a, +\infty[$ y las funciones $t \longrightarrow x(t)$ y $t \longrightarrow Ax(t)$ sean integrables en sentido generalizado, entonces:

$$\int_a^{+\infty} x(t)dt \in D(A) \quad \text{y} \quad A\int_a^{+\infty} x(t)dt = \int_a^{+\infty} Ax(t)dt.$$

Demostración:

Sea $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = M\}$ $(M > a)$ una descomposición finita de $[a, M]$ y sea $\delta_\sigma = \max\{t_k - t_{k-1};\ k = 1,2,...n\}$.

Pongamos $f_\sigma = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) x(\tau_k) \in D(A)$

y por lo tanto, $\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) A x(\tau_k) = A f_\sigma$

siendo $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ para $k = 1,2,...n$.

Resulta:

$$f_\sigma \xrightarrow[\delta_\sigma \to 0]{X} \int_a^M x(t)dt\,;\quad A f_\sigma \xrightarrow[\delta_\sigma \to 0]{X} \int_a^M Ax(t)dt\,.$$

Dado que A es cerrada se sigue que:

$$\int_a^M x(t)dt \in D(A) \quad \text{y} \quad \int_a^M Ax(t)dt = A\int_a^M x(t)dt$$

esto es cierto $\forall M > a$.

Ahora por hipótesis,

$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M x(t)dt = \int_0^{+\infty} x(t)dt,\quad \lim_{M \to +\infty} \int_a^M Ax(t)dt = \int_0^{+\infty} Ax(t)dt$$

y por cuanto se ha probado $\int_a^M Ax(t)dt = A\int_a^M x(t)dt$.

Entonces, siempre por la hipótesis que A es cerrado, resulta

$$\int_0^{+\infty} x(t)dt \in D(A) \quad \text{y} \quad A\int_a^{+\infty} x(t)dt = \int_a^{+\infty} Ax(t)dt . \blacksquare$$

Teorema 2.10:

Sea $\{T(t); t \geq 0\}$ un semigrupo (fuertemente) continuo en $L(X, X)$ con generador infinitesimal A. Sea $w_0 = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\log\|T(t)\|}{t}$ y sea $Re\lambda > w_0$.

Entonces $\lambda \in \rho(A)$ y $R(\lambda; A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt \qquad \forall x \in X$.

Por otra parte $\forall x \in X$ se tiene, fijado $a_0, 0 < a_0 < \dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{|\lambda| \to +\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x$ uniformemente en el sector $\left\{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg\lambda| \leq a_0 < \dfrac{\pi}{2}\right\} = S$.

Demostración:

La función $t \longrightarrow e^{-\lambda t}\, T(t)x$ es continua en $[0, +\infty[$ y fijado $w > w_0$ existe M_w tal que:

$\|T(t)\| \leq M_w e^{tw} \qquad \forall t \geq 0$ por el teorema 2.1(Teorema de Hille)

Sea $Re\lambda > w$. Para $M_2 > M_1 > 0$ se tiene:

$$\left\| \int_{M_1}^{M_2} e^{-\lambda t}\, T(t)x\, dt \right\| \leq \int_{M_1}^{M_2} \left\| e^{-\lambda t}\, T(t)x \right\| dt .$$

$$\left\| \int_{M_1}^{M_2} e^{-\lambda t}\, T(t)x\, dt \right\| = \int_{M_1}^{M_2} \left| e^{-\lambda t} \right| \left\| T(t)x \right\| dt$$

$$\leq \int_{M_1}^{M_2} \left| e^{-\lambda t} \right| \left\| T(t) \right\| \left\| x \right\| dt$$

$$\leq \int_{M_1}^{M_2} \left| e^{-\lambda t} \right| M_w\, e^{tw} \left\| x \right\| dt$$

$$= \left\| x \right\| \int_{M_1}^{M_2} e^{-Re\lambda\, t}\, M_w\, e^{tw}\, dt$$

Así $\left\| \int_{M_1}^{M_2} e^{-\lambda t}\, T(t)x\, dt \right\| \leq \left\| x \right\| \int_{M_1}^{M_2} e^{-Re\lambda\, t}\, M_w\, e^{tw}\, dt$

pero, $\left\| x \right\| \int_{M_1}^{M_2} e^{-Re\lambda\, t}\, M_w\, e^{tw}\, dt = \left\| x \right\| M_w \int_{M_1}^{M_2} e^{-Re\lambda\, t}\, e^{tw}\, dt$

$$= \left\| x \right\| M_w \int_{M_1}^{M_2} e^{t(w - Re\lambda)} dt = \left\| x \right\| M_w \left[\frac{e^{t(w - Re\lambda)}}{w - Re\lambda} \right]_{M_1}^{M_2}$$

$$= \left\| x \right\| M_w \left[\frac{e^{M_2(w - Re\lambda)} - e^{M_1(w - Re\lambda)}}{w - Re\lambda} \right]$$

Así $\left\| x \right\| \int_{M_1}^{M_2} e^{-Re\lambda\, t}\, M_w\, e^{tw}\, dt = \left\| x \right\| M_w \left[\frac{e^{M_2(w - Re\lambda)} - e^{M_1(w - Re\lambda)}}{w - Re\lambda} \right]$

El segundo miembro de esta igualdad $\xrightarrow[M_1 \to \infty]{} 0$

Así pues si $Re\lambda > w$ existe $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, T(t)x\, dt \qquad \forall x \in X$

Defínase para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re\lambda > w_0$ $R_\lambda x$ así:

$$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, T(t)x\, dt$$

$$\|R_\lambda x\| = \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, T(t)x\, dt \right\| \leq \int_0^{+\infty} \left\| e^{-\lambda t}\, T(t)x \right\| dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left| e^{-\lambda t} \right| \|T(t)x\|\; dt \;\leq\; \int_0^{+\infty} \left| e^{-\lambda t} \right| \|T(t)\|\; \|x\|\, dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\,\lambda\, t}\; M_w\, e^{tw}\; \|x\|\, dt = \|x\|\, M_w \int_0^{+\infty} e^{t(w-\mathrm{Re}\,\lambda)}\, dt$$

$$= \|x\|\, M_w \left[\frac{e^{t(w-\mathrm{Re}\,\lambda)}}{\mathrm{Re}\,\lambda - w} \right]_0^{+\infty} = \|x\| M_w \left[0 - \frac{1}{w-\mathrm{Re}\,\lambda} \right]$$

$$= \|x\| M_w \left[\frac{1}{w-\mathrm{Re}\,\lambda} \right] = \frac{\|x\|\, M_w}{\mathrm{Re}\,\lambda - w}$$

por lo tanto, $\|R_\lambda x\| \leq \dfrac{M_w}{\mathrm{Re}\,\lambda - w}\|x\|$ y por consiguiente $R_\lambda x \in L(X,X)$ y

además $\|R_\lambda x\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|R_\lambda x\| \;\leq\; \sup\limits_{\|x\|=1} \dfrac{M_w \|x\|}{\mathrm{Re}\,\lambda - w} = \dfrac{M_w}{\mathrm{Re}\,\lambda - w}$.

Para probar que $R_\lambda = R(\lambda;T)$ basta probar que:

$C(R_\lambda) \subseteq D(A)$

$(\lambda - A)R_\lambda x = x \qquad \forall x \in X$

$R_\lambda(\lambda - A)x = x \qquad \forall x \in D(A)$

Se tiene para $h > 0$ (dado que $T(h) \in L(X,X)$ y por lo tanto es cerrado)

$$A_h(R_\lambda x)=\frac{1}{h}\left[T(h)\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\,T(t)x\,dt-\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\,T(t)x\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\,T(t+h)x\,dt-\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\,T(t)x\,dt$$

Se hace cambio de variable para $\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\,T(t+h)x\,dt$:

$t=\phi+h$ si $t=0\Rightarrow\phi=h$

$t=\phi-h$

$dt=d\phi$

$$\int_h^{+\infty}e^{-\lambda(\phi-h)}\,T(\phi)xd\phi=\int_h^{+\infty}e^{-\lambda\phi}e^{\lambda\phi}\,T(\phi)xd\phi$$

$$=e^{+\lambda h}\int_h^{+\infty}e^{-\lambda t}\,T(t)xdt$$

Así,

$$A_h(R_\lambda x)=\frac{1}{h}e^{\lambda h}\int_h^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt-\frac{1}{h}\int_0^{h}e^{-\lambda t}T(t)xdt-\frac{1}{h}\int_h^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

$$=\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_h^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt-\frac{1}{h}\int_0^{h}e^{-\lambda t}T(t)xdx\xrightarrow[h\to 0^+]{X}\lambda R_\lambda x-x$$

Así pues, $R_\lambda x\in D(A)$ $\forall x\in X$ y

$A(R_\lambda x)=\lambda R_\lambda x-x$, o sea $(\lambda-A)R_\lambda x=x$ $\forall x\in X$.

La primera y segunda afirmación ha sido de esta forma probada.

Sea ahora $x \in D(A)$. Por el teorema 2.2 se tiene $T(t)Ax = AT(t)x$ y como A es cerrado resulta:

$$A\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, T(t)x dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, AT(t)x dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, T(t)Ax dt$$

Así pues: $R_\lambda Ax = AR_\lambda x \quad \forall x \in D(A)$ y por lo tanto,

$$R_\lambda(\lambda - A)x = \lambda R_\lambda x - AR_\lambda x = (\lambda - A)R_\lambda x = x \qquad \forall x \in D(A)$$

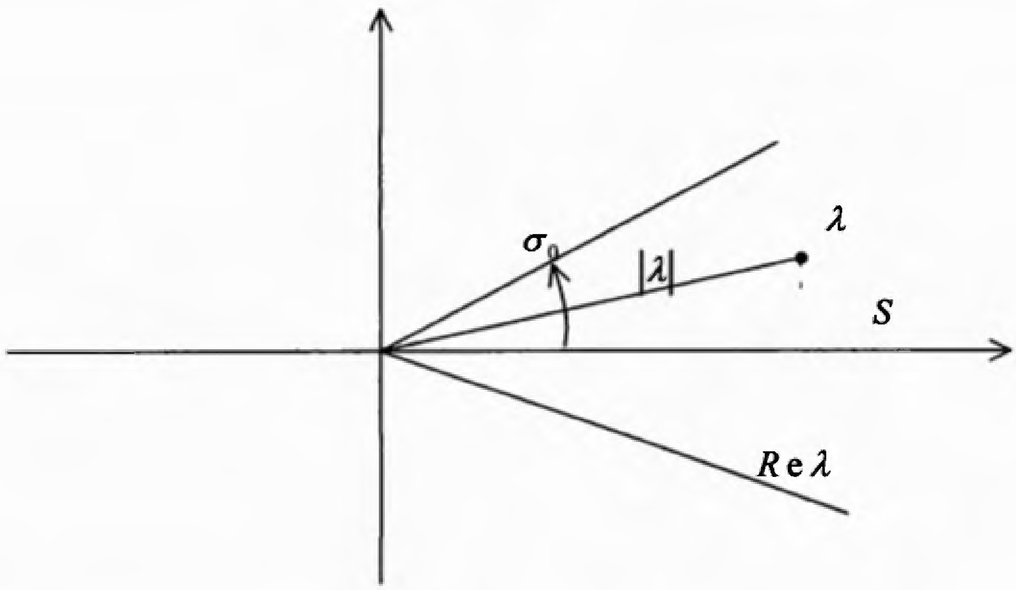
(La última igualdad sigue de cuanto se ha ya establecido).

Por lo tanto $R_\lambda = R(\lambda; A)$.

Sea ahora $\lambda \in S$. Sea $R\mathrm{e}\,\lambda > \max\{0, w_0\}$;

Entonces,

$$\lambda R(\lambda; A)x - x = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, [\, T(t)x - x\,]dt$$



$\forall x \in X$ (porque $\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dt = 1$).

Fijado $\varepsilon \in R^+$ existe $\delta(\varepsilon, x) \in R^+$ tal que:

$\|T(t)x - x\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \delta(\varepsilon, x)]$ (por la continuidad del semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$; entonces:

$$\lambda R(\lambda; A)x - x = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}[T(t)x - x]dt$$

$$|\lambda| \int_0^{\delta(\varepsilon,x)} e^{-Re\lambda\, t} \|T(t)x - x\|\, dt < |\lambda| \varepsilon \int_0^{\delta(\varepsilon,x)} e^{-Re\lambda\, t}\, dt$$

pero $\displaystyle\int_0^{\delta(\varepsilon,x)} e^{-Re\lambda\, t}\, dt = \left.\frac{e^{-Re\lambda\, t}}{-Re\lambda}\right|_{t=0}^{t=\delta} = \frac{1}{Re\lambda} - \frac{e^{-Re\lambda\,\delta}}{Re\lambda}$

$\displaystyle = \frac{1 - e^{-Re\lambda\,\delta}}{Re\lambda} < \frac{1}{Re\lambda}$; pues $\displaystyle 1 - e^{-Re\lambda\,\delta} = 1 - \frac{1}{Re\lambda\,\delta} < 1$,

ya que $\displaystyle\frac{1}{Re\lambda\,\delta} > 0$ y además $\displaystyle\frac{|\lambda|}{Re\lambda} = \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \leq \frac{1}{\cos a_0}$

por lo tanto:

$$|\lambda| \int_0^{\delta(\varepsilon,x)} e^{-Re\lambda\, t} \|T(t)x - x\|\, dt < \frac{|\lambda|\varepsilon}{Re\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{\cos a_0}$$

y por $Re\lambda > w > \max\{0, w_0\}$

$$|\lambda| \int_{\delta(\varepsilon,x)}^{+\infty} e^{-Re\lambda\, t} \|T(t)x - x\| dt < \frac{|\lambda|\varepsilon}{Re\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{a_0}$$

y para $Re\lambda > w > \max\{0, w_0\}$

$$|\lambda|\int_{\delta(\varepsilon,x)}^{+\infty} e^{-Re\lambda\, t}\ \|T(t)x-x\|dt \le |\lambda|\int_{\delta(\varepsilon,x)}^{+\infty} e^{-Re\lambda\, t}\ \left(\|T(t)\|\ \|x\|+\|x\|\right)dt$$

$$\le |\lambda|\int_{\delta(\varepsilon,x)}^{+\infty} e^{-Re\lambda\, t}\left(M_w e^{wt}+1\right)\|x\|\, dt$$

$$=|\lambda|\,\|x\|\int_{\delta(\varepsilon,x)}^{+\infty} e^{-Re\lambda\, t}\left(M_w e^{wt}+1\right) dt$$

$$=|\lambda|\,\|x\|\left[\int_{\delta(\varepsilon,x)}^{+\infty} e^{-Re\lambda\, t}\left(M_w e^{wt}\right) dt+\int_{\delta(\varepsilon,x)}^{+\infty} e^{-Re\lambda\, t}\, dt\right]$$

$$=|\lambda|\,\|x\|\left[M_w\int_{\delta(\varepsilon,x)}^{+\infty} e^{(w-Re\lambda)t}\, dt+\int_{\delta(\varepsilon,x)}^{+\infty} e^{-Re\lambda\, t}\, dt\right]$$

$$=|\lambda|\,\|x\|\left[\frac{M_w e^{(w-Re\lambda)t}}{w-Re\lambda}+\frac{e^{-Re\lambda\, t}}{-Re\lambda}\right]_{\delta}^{+\infty}$$

$$=|\lambda|\,\|x\|\left[\frac{M_w e^{(w-Re\lambda)\delta}}{Re\lambda-w}+\frac{e^{-Re\lambda\,\delta}}{Re\lambda}\right]$$

$$=|\lambda|\,\|x\|\left[\frac{M_w e^{w\delta}}{Re\lambda-w}+\frac{1}{Re\lambda}\right]e^{-Re\lambda\,\delta}$$

$$=|\lambda|\,\|x\|\left[\frac{M_w\, Re\lambda\, e^{w\delta}}{Re\lambda-w}+1\right]\frac{e^{-Re\lambda\,\delta}}{Re\lambda}$$

$$\le\left(\frac{Re\lambda}{Re\lambda-w}M_w\, e^{w\delta(\varepsilon,x)}+1\right)\frac{e^{-Re\lambda\,\delta(\varepsilon,x)}}{\cos a_0}\|x\|\xrightarrow[Re\lambda\to+\infty]{}0 \quad \text{uniformemente}$$

en el sector $\{\lambda\in\mathbb{C};|\arg\lambda|\le a_0\}=S$.

Se demostrará que lo anterior dicho es cierto

$\left(\dfrac{M_w \operatorname{Re}\lambda}{\operatorname{Re}\lambda - w} e^{w\delta} + 1\right) \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} \left(M_w\, e^{w\delta} + 1\right)$ ya que

$\dfrac{\operatorname{Re}\lambda}{\operatorname{Re}\lambda - w} \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} 1$ (ojo: como λ pertenece al sector $\operatorname{Re}\lambda \geq |\lambda| \cos\alpha_0$

por esto si $|\lambda| \longrightarrow +\infty$, $\operatorname{Re}\lambda \longrightarrow +\infty$)

y además;

$\dfrac{e^{-\operatorname{Re}\lambda\,\delta}}{\cos\alpha_0} \longrightarrow 0$ cuando $|\lambda| \longrightarrow +\infty$, pues

$0 \leq e^{-\operatorname{Re}\delta} \leq e^{-|\lambda|\cos\alpha_0\delta}$ y $e^{-|\lambda|\cos\alpha_0\delta} \longrightarrow 0$. ■

<u>Teorema 2.11</u>: (Hille y Yosida)

Condición necesaria y suficiente para el operador $A : D(A) \longrightarrow X$ lineal cerrado con dominio denso (en X) sea generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ (fuertemente) continuo de operadores de $L(X,X)$ es que existan $M, w \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > w \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ y

$$\left\| [R(\lambda; A)]^n \right\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall \lambda > w$$

en tal caso resulta $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ $\quad \forall t \geq 0$.

Demostración:

Condición Necesaria. Sea A generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t);\ t\geq 0\}$ (fuertemente) continuo. Entonces existen $M, w \in \mathbb{R}$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ $\forall t \geq 0$. Por el teorema 2.10 cada $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda > w$ pertenece a $\rho(A)$ y

$$R(\lambda; A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ T(t)\,x\,dt \qquad x \in X, \operatorname{Re}\lambda > w.$$

Luego,

$$\|R(\lambda; A)x\| = \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ T(t)\,x\,dt \right\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ \|T(t)\|\,\|x\|\,dt$$

$$\leq M \int_0^{+\infty} e^{wt}\, e^{-\lambda t} \|x\|\ dt = M\,\|x\| \int_0^{+\infty} e^{(w-\lambda)t}\ dt$$

$$= M\|x\| \frac{e^{(w-\lambda)t}}{w-\lambda}\Bigg|_0^{+\infty} = M\|x\|\left[-\frac{1}{w-\lambda}\right] = \frac{M\|x\|}{\lambda - w}$$

entonces, $\|R(\lambda; A)x\| \leq \dfrac{M\|x\|}{\lambda - w}$

y por lo tanto $\|R(\lambda; A)\| \leq \dfrac{M}{\lambda - w}$

Además $R(\lambda; A)\left[R(\lambda; A)x\right] = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ T(t)R(\lambda; A)x\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, T(t) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda z}\, T(z)x\,dz\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t+z)}\, T(t+z)x\, dz\, dt$$

Así,

$$\left\| R^2(\lambda;A)x \right\| = \left\| \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t+z)}\, T(t+z)x\, dz\, dt \right\|$$

$$\leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t+z)} \left\| T(t+z) \right\| \left\| x \right\| dt\, dz$$

$$\leq M \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{w(t+z)} e^{-\lambda(t+z)} \left\| x \right\| dt\, dz$$

$$= M\left\| x \right\| \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{w(t-\lambda)t}\, e^{(w-\lambda)z}\ \ dt\, dz$$

$$= M\left\| x \right\| \frac{1}{(\lambda-w)^2}$$

Así $\left\| R^2(\lambda;A)x \right\| \leq \dfrac{M\|x\|}{(\lambda-w)^2}$ y por lo tanto, $\left\| R^2(\lambda;A) \right\| \leq \dfrac{M}{(\lambda-w)^2}$. Es obvio que este procedimiento se puede aplicar para todo $n \in \mathbb{N}$.

Condición Suficiente.

Utilizando la hipótesis del teorema

① A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$.

② $\exists\, M > 0;\ w \in \mathbb{R}:$ para todo n y todo λ con $\lambda > w$

$\lambda \in \rho(A)$ y $\left\| R^n(\lambda;A) \right\| \leq \dfrac{M}{(\lambda-w)^n}$.

Se construye un semigrupo continuo de operadores $T(t);\ t \geq 0;$ y se prueba que $T(t);\ t \geq 0$ es el semigrupo generado por A.

Primera Parte: Construcción del semigrupo $T(t);\ t \geq 0$.

Sea $\lambda \in R,\ \lambda > w$ y B_λ el operador definido como:

$$B_\lambda = \lambda[\lambda R(\lambda; A) - I]$$

Si $\lambda, \mu > w$ como $R(\lambda; A) \cdot R(\mu; A) = R(\mu; A) \cdot R(\lambda; A)$ los operadores B_λ y B_μ conmutan es decir, $B_\lambda B_\mu = B_\mu B_\lambda$.

Dado que $B_\lambda \in L(X, X),\ B_\lambda$ genera el semigrupo

$$\begin{aligned} S_\lambda(t) = \exp(tB_\lambda) &= \exp[t\lambda(\lambda R(\lambda; A) - I)] \\ &= \exp(-t\lambda) \cdot \exp[t\lambda^2 R(\lambda; A)] \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\,\lambda^2)^n}{n!} R^n(\lambda; A) \end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis ② se tiene:

$$\|S_\lambda(t)\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\,\lambda^2)^n}{n!} \left\| R^n(\lambda; A) \right\| \leq M\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t\,\lambda^2}{\lambda - w} \right)^n$$

Fíjese $\gamma > 1$. Si $\lambda > \frac{\gamma w}{\gamma - 1} = \lambda(\gamma)$ resulta $\frac{\lambda}{\lambda - w} < \gamma$ y por tanto,

$\|S_\lambda(t)\| \leq Me^{\gamma w t} \forall \lambda > \lambda(\gamma)$.

Como $B_\lambda B_\mu = B_\mu B_\lambda$ para λ, μ, w también $S_\lambda(t)B_\mu = B_\mu S_\lambda(t)$.

Ahora bien,

$$\frac{d}{dt}S_\lambda(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \cdot \exp\left(t\lambda^2 R(\lambda;A)\right) + e^{-\lambda t}\left(\lambda^2 R(\lambda;A)\right)\exp\left(t\lambda^2 R(\lambda;A)\right)$$

$$= -\lambda S_\lambda(t) + \lambda^2 R(\lambda;A)S_\lambda(t)$$

$$= S_\lambda(t)\left[-\lambda + \lambda^2 R(\lambda;A)\right]$$

$$= S_\lambda(t)B_\lambda = B_\lambda S_\lambda(t)$$

Sean ahora $\lambda, \mu > \lambda(\gamma)$

$$S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x = \int_0^t \frac{d}{du}\left[\left(S_\mu(t-u)S_\lambda(u)\right)x\right]du$$

y como,

$$\frac{d}{du}\left(S_\mu(t-u)S_\lambda(u)\right)x = -S_\mu(t-u)B_\mu S_\lambda(u)x + S_\mu(t-u)S_\lambda(u)B_\lambda x$$

$$= S_\mu(t-u)S_\lambda(u)\left[B_\lambda x - B_\mu x\right]$$

resulta:

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \leq \int_0^t \|S_\mu(t-u)S_\lambda(u)\| \, \|B_\lambda x - B_\mu x\| \, du$$

$$\left\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\right\| \le M^2 \int_0^t e^{\gamma w(t-u)+\gamma w u}\left\|B_\lambda x - B_\mu x\right\| du$$

$$\le M^2 t e^{\gamma w t}\left\|B_\lambda x - B_\mu x\right\|$$

Observe que el factor de $\left\|B_\lambda x - B_\mu x\right\|$, $M^2 t\, e^{\gamma w t}$ es acotado sobre cualquier intervalo compacto $[0, a]$ de $[0,+\infty]$; por esto existe una constante ka;

Si $\lambda, \mu > \lambda(\gamma)$ y $0 \le t \le a$

$$\left\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\right\| \le ka\left\|B_\lambda x - B_\mu x\right\|.$$

Considérese ahora $x \in D(A)$ $R(\lambda; A)(\lambda - A)x = x$

y $R(\lambda; A)(\lambda - A)x = \lambda R(\lambda; A)x - R(\lambda; A)Ax$ por tanto,

$$\left\|\lambda R(\lambda; A)x - x\right\| = \left\|R(\lambda; A)Ax\right\| \le \frac{M}{\lambda - w}\left\|Ax\right\| \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0.$$

La aplicación $\lambda \longrightarrow \dfrac{\lambda}{\lambda - w}$ para $\lambda > w$ es decreciente y para $\lambda = 2w$ su valor es 2, por tanto si $\lambda > 2w$, $(\lambda > 0)$ $\left\|\lambda R(\lambda; A)\right\| \le \dfrac{M\lambda}{\lambda - w} \le 2M$.

Sea ahora $x \in X$. Fijado $\varepsilon > 0$, como $\overline{D(A)} = X$ (por hipótesis) existe $x_0 \in D(A)$ tal que,

$\left\|x - x_0\right\| < \varepsilon$ resulta entonces:

$$\left\|\lambda R(\lambda; A)x - x\right\| = \left\|\lambda R(\lambda; A)(x - x_0) - (x - x_0) + \lambda R(\lambda; A)x_0 - x_0\right\|$$

$$\le \left\|\lambda R(\lambda; A)\right\| \left\|x - x_0\right\| + \left\|x - x_0\right\| + \left\|\lambda R(\lambda; A)x_0 - x_0\right\|$$

y si $\lambda > \lambda_\varepsilon, \lambda_\varepsilon > 2w$ oportuno $\|\lambda R(\lambda; A)x_0 - x_0\| < \varepsilon$

por tanto: $\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| \leq (2m+1)\varepsilon + \varepsilon$

para todo $\lambda > \max\{2w, \lambda_\varepsilon\}$ y por tanto; $\lambda R(\lambda; A)x - x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$.

Por lo anterior; para $x \in D(A)$ se tiene:

$$B_\lambda x = \lambda(\lambda R(\lambda; A)x - x) = \lambda R(\lambda; A)Ax \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} Ax$$

o sea, $B_\lambda x \longrightarrow Ax$ para $\lambda \longrightarrow +\infty$ y por tanto; para $x \in D(A)$ resulta:

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)\| \xrightarrow[\lambda,\mu \to +\infty]{} 0.$$

Como se ha observado esta convergencia es uniforme en cada intervalo $[0, a] \leq [0, +\infty]$.

Si $x \in X$ y $x_0 \in D(A)$ se tiene:

$$(S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x) - S_\lambda(t)x_0 - S_\mu(t)x_0 = S_\lambda(t)(x - x_0) - S_\mu(t)(x - x_0)$$

aplicando la desigualdad triangular:

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \leq \|S_\lambda(t)x_0 - S_\mu(t)x_0\| + (\|S_\lambda(t)\| + \|S_\mu(t)\|)\|x - x_0\|$$

Si $0 \leq t \leq a$, entonces:

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \leq \|S_\lambda(t)x_0 - S_\mu(t)x_0\| + 2k\|x - x_0\|$$

Como $\overline{D(A)} = X$, puede escogerse $x_0 \in D(A)$ tal que:

$2k\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\lambda_\varepsilon > 0$; $\lambda, \mu > \lambda_\varepsilon$, entonces

$\|S_\lambda(t)x_0 - S_\mu(t)x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ luego,

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| < \varepsilon, \text{ si } \lambda, \mu > \lambda_\varepsilon \text{ y } t \in [0,a].$$

Lo anterior asegura que para todo $x \in X$ existe $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S_\lambda(t)x = T(t)x$.

Dado que: $\|S_\lambda(t)x\| \le Me^{\gamma w t}\|x\| \qquad t > 0,\ \gamma > 1$

resulta:

$$\|T(t)\| \le Me^{\gamma w t}$$

por tanto, ya que $T(t)$ es lineal, $T(t) \in L(X,X)$ y $\|T(t)\| \le Me^{wt}$ con $\gamma = 1$.

Pues bien $T(t);\ t \ge 0$ es un semigrupo continuo de operadores de $L(X,X)$. En efecto, es inmediato que:

i) $T(0)x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} S_\lambda(0)x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} Ix = x \qquad \forall x \in X$

y por consiguiente $T(0) = I$.

ii) $T(t_1 + t_2)x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} S_\lambda(t_1 + t_2)x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} S_\lambda(t_1)S_\lambda(t_2)x = T(t_1)T(t_2)x$

$\forall x \in X$ y $\forall t_1 + t_2 \ge 0$.

iii) Finalmente, fijado a oportuno $a > 0$, se tiene:

$S_\lambda(t)x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{X} T(t)x$ uniformemente en $[0,a]$ para cada $x \in X$ fijo.

Si se sigue que, fijado $t \ge 0$ y tomando un arbitrario $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existen $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda_\varepsilon > 2w$ tal que:

$\|S_\lambda(t)x - T(t)x\| < \varepsilon$ y $\|T(t+h)x - S_\lambda(t+h)x\| < \varepsilon$

$\forall \lambda > \lambda_\varepsilon$ y $|h| < \delta_\varepsilon$; escogido $\lambda > \lambda_\varepsilon$ existe $\delta_\epsilon^0 \in R^+, \delta_\epsilon^0 < \delta_\epsilon$,

tal que $\|S_\lambda(t+h)x - S_\lambda(t)x\| < \varepsilon$ para $|h| < \delta_\varepsilon^0$ por tanto:

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - Tt)x\| &\le \|T(t+h)x - S_\lambda(t+h)x\| + \|S_\lambda(t+h)x - S_\lambda(t)x\| \\ &+ \|S_\lambda(t)x - T(t)x\| < 3\varepsilon .\end{aligned}$$

Esto asegura, junto con los resultados precedentes, que $\{T(t);\ t \ge 0\}$ es un semigrupo de operadores de $L(X, X)$ (fuertemente) continuo.

Para finalizar la demostración basta probar que A es el generador de $\{T(t);\ t \ge 0\}$.

Como $\frac{d}{du} S_\lambda(u)x = S_\lambda(u)B_\lambda x$, entonces $S_\lambda(t)x - x = \int_0^t S_\lambda(u)B_\lambda x\, du$

Ahora bien , $S_\lambda(u)B_\lambda x \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} T(u)Ax$ uniformemente en $[0, t]$, si $x \in D(A)$. Por tanto para $x \in D(A)$

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \to +\infty} S_\lambda(t)x - x = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t S_\lambda(u)B_\lambda x\, du$$

$$= \int_0^t \lim_{\lambda \to +\infty} S_\lambda(u)B_\lambda x\, du = \int_0^t T(u)Ax\, du \qquad \forall x \in D(A)$$

y $\lim_{n \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h T(u)Axdu = T(0)Ax = Ax$ (por teorema 2.2)

Por tanto si $\overline{A}$ es el generador del semigrupo $T(t), t \ge 0$ resulta:

$$D(A) \subseteq D(\overline{A}) \text{ y } \frac{\overline{A}}{D(A)} = A.$$

Si w_0 es el tipo del semigrupo $T(t);\ t \geq 0$ como $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, entonces,

$$\ln\frac{\|T(t)\|}{t} < \frac{\ln M}{t} + w$$

por tanto, $\lim\limits_{t \to +\infty} \ln\frac{\|T(t)\|}{t} = w_0 \leq w$ (por teorema Hille y Yosida)

si $\lambda > w, \lambda > w_0$, entonces $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(\overline{A})$.

Sea $\overline{x} \in D(\overline{A})$ y $y = (\lambda - \overline{A})\overline{x}$; como $(\lambda - A)(D(A)) = X$, existe $x \in D(A)$ tal que:

$$(\lambda - A)x = (\lambda - \overline{A})x$$

así, $(\lambda - \overline{A})x = (\lambda - \overline{A})\overline{x}$ y como $\lambda - \overline{A}$ es inyectiva $x = \overline{x}$, pero entonces $\overline{x} \in D(A)$.

Así pues, $D(\overline{A}) \subseteq D(A)$ y $D(A) = D(\overline{A})$. ■

Teorema 2.12:

Sea A un operador lineal cerrado de $D(A)$ en X con dominio denso (en X). Existe $w \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > w \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ y

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}.$$

Entonces A es generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ de operadores $L(X, X)$ fuertemente continuo tal que:

$$\|T(t)\| \leq e^{wt} \qquad \forall t \geq 0.$$

Demostración:

Sigue inmediatamente del teorema de Hille y Yosida si ponemos $M = 1$, ya que:

$$\left\| [R(\lambda; A)]^n \right\| \leq \|R(\lambda; A)\|^n \leq \frac{1}{(\lambda - w)^n} \qquad \forall \lambda > w. \blacksquare$$

CAPÍTULO TERCERO

OPERADORES DE WEIERSTRASS.

Definición 3.1:

Sea $a \in \mathbb{R}^{+}$ y $w_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación $w_a(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi a}} \cdot e^{\frac{-x^2}{4a}} \qquad x \in \mathbb{R}$

Se llama operador de Weierstrass W_a al operador:

$$W_a(f) = w_a * f$$

para cada f para la cual la convolución está definida.

Observación:

$w_a \in L^1(\mathbb{R})$ pues:

$$\int_{\mathbb{R}} |w_a(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x^2}{4a}} dx \qquad \text{poniendo } u = \frac{x}{\sqrt{4a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \sqrt{4a}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$$

y como $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ resulta que:

$\int_R |w_a(x)| dx = 1$ y por lo tanto,

$w_a \in L^1(\mathbf{R})$ y $\|w_a\|_1 = 1.$

Por esto el operador W_a está definido en L^p si $1 \le p < +\infty$ y por la desigualdad de Young(Teorema 1.15):

$$\|W_a(f)\|_p \le \|w_a\|_1 \cdot \|f\|_p = \|f\|_p$$

Proposición 3.1:

Sean $a, b \in \mathbf{R}^+$ y $1 \le p < +\infty$, entonces:

$$W_a(W_b(f)) = W_{a+b}(f),\ f \in L^p(\mathbf{R}).$$

Demostración:

Por la definición $W_a(W_b(f)) = w_a * (w_b * f)$ y por la proposición 1.16 se tiene:

$$W_a(W_b(f)) = (w_a * w_b) * f,$$

por lo tanto es suficiente probar que: $w_a * w_b = w_{a+b}$

Ahora bien:

$$(w_a * w_b)(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{ab}} \int_R e^{\frac{-(x-y)^2}{4a}} \cdot e^{\frac{-y^2}{4b}} dy$$

$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{ab}} \int_R e^{-\left[\frac{(x-y)^2}{4a} + \frac{y^2}{4b}\right]} dy$$

prescindiendo del signo, el exponente de la exponencial en el integrando es:

$$\frac{1}{4ab}\left[b(x-y)^2+ay^2\right]=\frac{1}{4ab}\cdot\left[bx^2-2bxy+by^2+ay^2\right]$$

$$=\frac{x^2}{4a}+\frac{1}{4ab}\left[(a+b)y^2-2bxy\right]$$

$$=\frac{x^2}{4a}+\frac{1}{4ab}\left[\left(\sqrt{a+b}\,y-\frac{b}{\sqrt{a+b}}x\right)^2-\frac{b^2}{(a+b)}x^2\right]$$

$$=\frac{x^2}{4a}-\frac{bx^2}{4a(a+b)}+\frac{1}{4ab}\left(\sqrt{a+b}\,y-\frac{b}{\sqrt{a+b}}x\right)^2$$

$$=\frac{x^2}{4(a+b)}+\frac{1}{4ab}\left(\sqrt{a+b}\,y-\frac{b}{\sqrt{a+b}}x\right)^2$$

por lo tanto:

$$(w_a * w_b)(x)=\frac{1}{4\pi\sqrt{ab}}\,e^{\frac{-x^2}{4(a+b)}}\int_R e^{\frac{-\left(\sqrt{a+b}\,y-\frac{b}{\sqrt{a+b}}x\right)^2}{4b}}dy$$

poniendo $u=\sqrt{a+b}\,y-\dfrac{b}{\sqrt{a+b}}x$, $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}du=dy$

y el integral se transforma en:

$$(w_a * w_b)(x)=\frac{1}{4\pi\sqrt{ab}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+b}}\,e^{-\frac{x^2}{4(a+b)}}\int_R e^{-\frac{1}{4ab}u^2}du$$

nuevamente con la transformación $z=\dfrac{u}{\sqrt{4ab}}$ se obtiene $du=\sqrt{4ab}\,dz$ y:

$$(w_a * w_b)(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\cancel{ab}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+b}}\, e^{-\frac{x^2}{4(a+b)}} \cdot \sqrt{4\cancel{ab}} \int_R e^{-z^2}\, dz$$

y como $\int_R e^{-z^2}\, dz = \sqrt{\pi}$ se obtiene,

$$(w_a * w_b)(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\pi}\sqrt{a+b}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4(a+b)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi(a+b)}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4(a+b)}}$$

$$= w_{a+b}(x)$$

Así, $(w_a * w_b)(x) = w_{a+b}(x)$ y por consiguiente:

$$W_a\big(W_b(f)\big) = W_{a+b}(f) \quad , \; f \in L^p(R). \blacksquare$$

<u>Proposición 3.2:</u>

Sea $1 \le p < +\infty$, y para todo $a \in R^+$ $W_a : L^p \to L^p$ el operador de Weierstrass; entonces:

$$\lim_{a \to 0^+} \left\| W_a(f) - f \right\|_p = 0.$$

Demostración:

$$W_a(f)(x) - f(x) = (w_a * f)(x) - f(x)$$

$$= \int_R \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a}} f(y)dy - f(x)$$

$$= \int_R \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a}} f(y)dy - f(x) - \int_R \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\, e^{-\frac{t^2}{4a}} f(x)dt$$

utilizando el cambio de variable $x - y = t$ se obtiene:

$$W_a(f)(x) - f(x) = \int_R \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\, e^{-\frac{t^2}{4a}} \left[f(x-t) - f(x) \right] dt$$

poniendo $\tau = \dfrac{t}{\sqrt{a}}$ $\quad dt = \sqrt{a}\, d\tau$ $\quad$ y $\quad t = \sqrt{a}\ \tau$ por lo que la integral queda

de la siguiente forma:

$$W_a(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_R e^{-\frac{\tau^2}{4}} \left[f(x\sqrt{a}\,\tau) - f(x) \right] d\tau$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski:

$$\left(\int_R \left| W_a(f)(x) - f(x) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\int_R \left| \int_R e^{-\frac{\tau^2}{4}} \left[f(x - \sqrt{a}\,\tau) - f(x) \right] d\tau \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_R \left(\int_R \left| e^{-\frac{\tau^2}{4}} \left[f(x - \sqrt{a}\,\tau) - f(x) \right] \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_R e^{-\frac{\tau^2}{4}} \left(\int_R \left| f(x - \sqrt{a}\,\tau) - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} d\tau$$

El integrando de esta expresión tiende a cero cuando $a \to 0^+$, pues como $f \in L^p(R)$ tiene la propiedad de continuidad en media de orden p:

$\lim_{h \to 0} \int_R |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$, resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \lim_{a \to 0^+} \int_R e^{-\frac{\tau^2}{4}} \left(\int_R \left| f(x - \sqrt{a}\,\tau) - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_R e^{-\frac{\tau^2}{4}} \left(\lim_{a \to 0} \int_R \left| f(x - \sqrt{a}\,\tau) - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_R e^{-\frac{\tau^2}{4}} \cdot (0)^{\frac{1}{p}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_R 0 d\tau = 0.$$

Por otra parte:

$$\left(\int_R \left| f(x - \sqrt{a}\,\tau) - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_R \left| f(x - \sqrt{a}\,\tau) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_R \left| f(x)^p \right| dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_p + \|f\|_p$$

$$= 2\|f\|_p$$

Así $\left(\int_R \left| f(x - \sqrt{a}\,\tau) - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\|f\|_p$

por esto para todo t:

$$e^{-\frac{t^2}{4}} \left(\int_R \left| f(x - \sqrt{a}\,\tau) - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2e^{-\frac{t^2}{4}} \|f\|_p$$

como está última función es sumable $\left(\in L^1(R) \right)$ por el teorema de la convergencia dominada: $\lim_{a \to 0} \|w_a(f) - f\|_p = 0$. ■

Definición 3.2:

Sea $p \in [1,\infty]$. Poniendo $T(t) = W_t$ para $t > 0$ y $T(0) = I$, $\{T(t), t \geq 0\}$ es un semigrupo fuertemente continuo de operadores en $L^p(R)$, contractivo. Se llama semigrupo de operadores de Weirerstrass en $L^p(R)$ (Semigrupo de Weierstrass).

Las siguientes consideraciones son oportunas con el objeto de determinar el generador infinitesimal del semigrupo de Weierstrass.

Proposición 3.3:

Sea $\{W_t,\ t \geq 0\}$ el semigrupo de Weierstrass en $L^p(R)$. Si $f \in L^p(R)$ y $u(x,t) = W_t(f)(x)$, $x \in R$, $t > 0$, entonces u satisface la ecuación diferencial de Laplace:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sujeta a la condición inicial

$$\lim_{t \to 0^+} \| u(\cdot\ ,\ t) - f \|_p = 0.$$

Demostración:

Sea $t > 0$ y $x \in R$. Póngase $\Delta u = u(x, t + \Delta t) - u(x,t)$. Por Definición:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

siempre y cuando el límite existe. Resulta:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_{R} \frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right) f(y)dy.$$

Las funciones $y \rightarrow \frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right) f(y)$ tienen límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ igual a $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right) f(y)$ y son funciones de $L^1(R)$. Ahora bien, el cociente del integrando puede escribirse en la forma:

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right) = \frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\cdot\frac{\Delta}{\Delta t}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right)$$

Como el primer cociente del miembro derecho tiende a la derivada de $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$; se mantiene "acotado" en una vecindad de t; así si $|\Delta t| < \delta$, para un $L > 0$, $\left|\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{1}{4\pi t}\right)\right| \leq L$. En cuanto al factor $e^{\frac{-(x-y)^2}{4(t+\Delta t)}}$ este puede acotarse con $e^{\frac{-(x-y)^2}{4(t+\delta)}}$. Así el primer término es en valor absoluto menor o igual que $Le^{\frac{-(x-y)^2}{4(t+\delta)}}$ que es una función de y que pertenece a $L^q(R)$ para todo q.

El segundo término también puede acotarse con una función de $L^q(R)$ (para todo $q \geq 1$); de hecho con cálculos similares, la función es del tipo:

$$\frac{(x-y)^2}{4(t-\delta)^2}\cdot e^{\frac{-(x-y)^2}{4(t+\delta)^2}}$$

por esto la suma de estos cocientes pertenece a $L^q(\mathbb{R})$ y el producto por $f(y)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$.

En conclusión, existe $F(y)\in L^1(\mathbb{R})$ tal que:

$$\left|\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right)f(y)\right| \leq |F(y)|.$$

El teorema de convergencia dominada nos permite concluir que existe:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\int_{\mathbb{R}}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right)f(y)dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right)f(y)dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial t}\left(w_t(x-y)f(y)dy\right).$$

Consideraciones parecidas conducen a la relación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right)f(y)dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(w_t(x-y)\right)f(y)dy.$$

Finalmente, un cálculo directo proporciona la igualdad:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(w_t(x-y)\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(w_t(x-y)\right)$$

por lo que:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{para todo } t>0,\ x\in \mathbb{R}.$$

Finalmente por la proposición anterior:

$$\lim_{t\to 0^+}\| W_t(f)-f \|_p = \lim_{t\to 0^+}\| u(\cdot,t)-f \|_p = 0. \blacksquare$$

Observación:

El generador del semigrupo de Weierstrass es el operador $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. En efecto el generador A de un semigrupo $T(t)$, $t\geq 0$, se caracteriza por el hecho que si $x_0\in D(A)$, entonces: $(T(t)x_0)' = A(t(t)x_0)$ (Teorema 2.2). En el caso de los operadores de Weierstrass, el miembro izquierdo en la ecuación anterior es igual a $W_t=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$ y cuando $t\to 0^+$, este tiende a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$(propiedad 3.3), por otra parte $T(t)x_0 = W_t(f) \xrightarrow{t\to 0^+} f$ como A es cerrado resulta:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = Af$$

o sea que:

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

BIBLIOGRAFÍA

BACHMAN, G. y NARICI, L. Functional Analysis. Academic Press, 1966.

BERBERIAN, S.K. Lectures in functional Analysis and Operator Theory. Springer - Verlag, 1974.

BUTZER, P. y BERENS, H. Semigroups of Operators and aproximations, Springer, 1967.

CURTAIN, R.F. y PRITCHARD, A.J. Functional Analysis in modern aplied Mathematics, Academic Press, 1977.

DAVIS, J.B. One –Parameter Semigroup, Academic Press, 1980.

DUNFORD, N. y SCHWARTZ, J. Linear Operators, Interscience Publisher, Inc., New York, 1958.

ENCYCLOPAEDIA OF MATHEMATICS (A Traslation of the Soviet Mathematical. Encyclopaedia). Vol 6, kluwer Academic Publishers, 1995.

GASTEREN, J. VAN Generators of Strongly continuos Semigroups, Pitman, 1985.

GOLDSTEIN, J.A. Semigroups of linear Operators and Aplications, Oxford University Press, 1985.

G. HARDY, J.E. LITTELEWOOD y G. POLYA. Inequalities. Cambridge University Press, Londres, 1991.

HELMBERG, GILBERT. Introductions to Spectral Theory in Hilbert Spaces, North – Holland Publishing Compañy, Amsterdam, 1969.

HILLE, E. y PHILLIPS, R. Functional Analysis and Semi-Groups, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1957.

IRIBARREN, IGNACIO. Topología de espacios métricos, Editorial Limusa, Venezuela, 1987.

KLAUS BICHTELER. Integration A Functional, Approach Birkhauser Advanced Texts, Basel, 1998.

KREYSZIG, ERWIN. Introductory Functional Analysis with Aplications, John Wiley & Sons, New York.

MIRANDA CARLO. Istituzioni di Analisi Funciónale Lineare, Vol. 1 Unione Matemática Italiana, 1978.

NACHBIN, LEOPOLDO. Introducão À Análise Funcional, Río de Janeiro, R. J., Brasil, Monografía No. 17, O.E.A., 1976.

PAZY, A. Semigroups of linear Operators and aplications to Partial Differential Equations, Springer, 1983.

PINI, BRUNO. Terzo Corso di Analisi Matemática, Cooperativa Libraria Universitaria Editrice, Bologna, Cap. I, 1977.

PINI, BRUNO. Terzo Corso di Analisi Matematica, Cooperativa Libraria Universitaria Editrice, Bologna, Cap. II, 1978.

RUDIN, WALTER. Functional Analysis, Tata McGraw - Hill, Bombay, 1974.

RUDIN, WALTER. Principios de Análisis Matemático, McGraw – Hill, México, 1980.

RUDIN, WALTER. Real and Complex Analysis. Tata McGraw – Hill, Bombay, 1979.

STEIN, E.M. y WEISS, G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, 1971.

WHITE, A.J. Introducción al Análisis Real, Promoción Cultural, S.A., Barcelona, 1973.