

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ**  
**VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA**

**LA MEJOR APROXIMACIÓN EN ESPACIOS**  
**CON PRODUCTO INTERNO**

**ERIC HIDALGO G.**

**TESIS PRESENTADA COMO UNO**  
**DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR**  
**AL GRADO DE MAESTRO EN**  
**CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN**  
**EN MATEMÁTICA**

**PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ**

**2006**

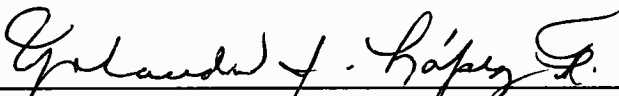
10 JUL 2006

APROBADO POR:

  
Dr. JORGE HERNANDEZ  
PRESIDENTE

  
Dr. ROGELIO ROSAS  
MIEMBRO

  
M.Sc. JOSUE ORTIZ  
MIEMBRO

  
REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA  
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

abg des auto

FECHA:

21 de abril de 2006

### *Dedicatoria*

*Dedico este trabajo de graduación a mi hijo Eric Hidalgo H.,  
quien es la fuente de inspiración para mi superación  
profesional y académica.*

## *Agradecimiento*

*Agradezco a Dios por permitirme culminar con éxito una de mis metas.*

*Al Dr. Jorge E. Hernández por su atinada orientación, apoyo y el tiempo dedicado al asesoramiento de este trabajo de graduación. Además, por poner a mi disposición su valiosa bibliografía.*

*A todos los profesores del Programa de Maestría en Matemática quienes impartieron sus conocimientos en cada uno de los cursos..*

# ÍNDICE

<b>RESUMEN</b>	1
<b>INTRODUCCIÓN</b>	2
<b>CAPÍTULO I</b>	
<b>Preliminares</b>	
1 1 Conjuntos Convexos y Conos Convexos	6
1 2 Conjuntos Ortogonales y Conjuntos Ortonormales	12
1 3 Complemento Ortogonal	34
1 4 Conjuntos Ortonormales Totales	39
1 5 Suma Directa	41
1 6 Operadores Proyección	43
<b>CAPÍTULO II</b>	
<b>La Mejor Aproximación</b>	
2 1 El Problema de La Mejor Aproximación	50
2 2 La Mejor Aproximación en Espacios Normados	55
2 3 La Mejor Aproximación en Espacios con Producto Interno	64
2 4 La Mejor Aproximación y Las Proyecciones Ortogonales	68
2 5 Conjuntos Proximinales y Conjuntos de Chebyshev	76
2.6 La Mejor Aproximación y Compacidad.	85

## **CAPÍTULO III**

### **Caracterización de La Mejor Aproximación**

<b>3 1</b>	<b>Caracterización de La Mejor Aproximación para Conjuntos Convexos</b>	<b>98</b>
<b>3 2</b>	<b>Caracterización de La Mejor Aproximación para Conos Convexos</b>	<b>103</b>
<b>3 3</b>	<b>Caracterización de La Mejor Aproximación para Subespacios</b>	<b>120</b>
<b>3 4</b>	<b>Caracterización de La Mejor Aproximación para Subespacios de Completos de Dimensión Infinita</b>	<b>125</b>
<b>3 5</b>	<b>La Proyección Métrica Sobre Conos Convexos</b>	<b>139</b>
<b>3 6</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>149</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>159</b>

## RESUMEN

En este trabajo se presenta el problema de la mejor aproximación, el cual consiste en determinar los elementos  $y_0 \in M$  (si existen) en un espacio con producto interno  $X$  que minimizan la distancia

$$\inf \{ d(x, y) \mid y \in M \} = d(x, M)$$

y se prueban teoremas de existencia de la mejor aproximación en espacios métricos, normados y con producto interno. Posteriormente se relaciona el problema de la mejor aproximación con los operadores proyecciones y se introducen los conceptos de conjuntos proximales, conjuntos de Chebyshev, conjuntos aproximativamente compactos y conjuntos acotadamente compactos. Se caracteriza la mejor aproximación para conjuntos convexos, conos convexos, subespacios de dimensión finita y subespacios completos de dimensión infinita de un espacio con producto interno. Finalmente, se calcula la mejor aproximación  $P_M(x)$  para algunos conjuntos particulares  $M$  y se aplica la teoría de la mejor aproximación para resolver problemas de aplicación relacionados con sistemas de ecuaciones.

## SUMMARY

In this work the problem of the best approximation is presented, which consists on determining the elements (if they exist) in a inner product space  $X$  that minimizes the distance

$$\inf \{ d(x, y) \mid y \in M \} = d(x, M)$$

and theorems of existence of the best approximation are proven in metric, normed, and inner product spaces. Later on the problem of the best approximation is related to projection operators, and the concepts of proximal sets, Chebyshev sets, approximatively compact sets and boundally compact sets are introduced. The best approximation is characterized for convex sets, convex cones, finite-dimensional subspaces and complete infinite-dimensional subspaces of a inner product space. Finally, the best approximation  $P_M(x)$  is calculated for some particular sets  $M$  and the theory of the best approximation is applied to solve problems of applications related with systems of equation.

## INTRODUCCIÓN

Muchos de los conceptos definidos en los espacios euclidianos  $\mathbb{R}^n$  como por ejemplo convexidad, ortogonalidad y ortonormalidad se pueden generalizar de una forma natural a los espacios con producto interno. Más aún, debido a la riqueza de la geometría que conservan los espacios con producto interno, gran parte de los resultados fundamentales de estos espacios tienen una interpretación geométrica simple. Esto es, que uno puede trazar un diagrama, lo cual permite el mejor entendimiento del alcance de los teoremas.

Un problema bien conocido en el plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , es determinar la distancia de un conjunto convexo  $M$  a un punto  $x \in \mathbb{R}^2$ , y caracterizar el punto  $y_0 \in M$  más próximo a  $x$ . Este problema se puede generalizar a espacios métricos, normados y con producto interno, y es conocido con el nombre del Problema de La Mejor Aproximación.

La teoría de la mejor aproximación consiste en determinar los puntos  $y_0$  en un subconjunto no vacío  $M$  de un espacio métrico  $X$  que estén más próximo al punto  $x$ , o sea

$$d(x, y_0) = \inf \{ d(x, y) : y \in M \} = d(x, M)$$

y se puede resumir en las siguientes preguntas

- Existencia de la mejor aproximación ¿Cuándo es verdad que cada  $x \in X$  tiene una mejor aproximación en  $M$ ?

- Unicidad de la mejor aproximación ¿Cuándo es verdad que cada  $x \in X$  tiene una única mejor aproximación en  $M$ ?
- Caracterización de la mejor aproximación ¿Cómo uno reconoce cuáles elementos de  $M$  son mejores aproximaciones a  $x$ ?
- Continuidad de la mejor aproximación ¿Cómo varía la mejor aproximación en  $M$  como una función de  $x$ ?
- Cálculo de la mejor aproximación ¿Qué algoritmos se tienen para el cálculo de la mejor aproximación?
- Error de la mejor aproximación ¿Puede uno calcular la distancia de  $x$  a  $M$ , o por lo menos obtener una cota superior e inferior para esta distancia?

El objetivo de esta investigación es dar respuesta a algunas de estas interrogantes, y para esto hemos dividido el trabajo en tres capítulos

En el primer capítulo presentamos los resultados básicos del Análisis Funcional que serán utilizados en el desarrollo de nuestro tema, como los son los conjuntos convexos y conos convexos, conjuntos ortogonales y conjuntos ortonormales, complementos ortogonales, conjuntos ortonormales totales, suma directa y operadores proyección

En el segundo capítulo se presenta el problema de la mejor aproximación a espacios métricos, espacios normados y espacios con producto interno. Se relaciona el problema de la mejor aproximación con las proyecciones

ortogonales y se introduce los conceptos de conjuntos proximales y conjuntos de Chebyshev. Por último, se definen dos tipos de compacidad utilizando el concepto de la mejor aproximación y se comparan con el concepto de compacidad usual.

Finalmente, en el tercer capítulo se caracteriza la mejor aproximación para conjuntos convexos, conos convexos, subespacios de un espacio con producto interno y subespacios completos de dimensión infinita. Se calcula la mejor aproximación para algunos ejemplos específicos y se estudian las propiedades más sobresalientes de la proyección métrica sobre conos convexos. También, se presentan algunos problemas donde se aplica la teoría de la mejor aproximación para su solución.

Queremos puntualizar que los espacios con producto interno utilizados en este trabajo son reales, aunque muchos de los resultados obtenidos pueden ser generalizados a espacios con producto interno complejos.

**I CAPÍTULO  
PRELIMINARES**

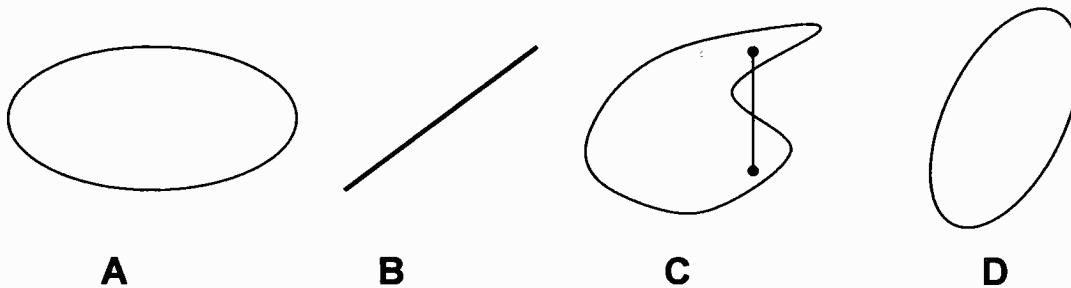
## 1.1 Conjuntos Convexos y Conos Convexos.

En el plano cartesiano, un conjunto se dice convexo si para cada par de puntos del conjunto, el segmento que ellos determinan está totalmente contenido en el conjunto. Esto es, un conjunto  $M$  es convexo si y solo si  $M$  contiene al segmento

$$[x, y] = \{ \lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1] \}$$

para todo  $x, y \in M$

Dados los conjuntos A, B, C y D. Los conjuntos A y B son convexos, mientras que C y D no lo son.



Esta definición de conjuntos convexos en el plano se extiende de forma natural a espacios vectoriales como sigue

**Definición 1.1:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $M$  un subconjunto de  $X$ .  $M$  es convexo si

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$$

para todo  $x, y \in M$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$

Al conjunto

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\}$$

lo denotamos por  $[x, y]$ , y lo llamaremos, el segmento en  $X$  de extremos  $x, y$

Así,  $M$  es convexo si  $[x, y] \subset M$  para todo  $x, y \in M$

### Observaciones:

1 A pesar de que la definición anterior está dada para espacios vectoriales en general, en este trabajo solo consideraremos espacios vectoriales definidos sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales

2 Note que el conjunto  $M$  es convexo sí y sólo si

$$\alpha x + \beta y \in M$$

para todo  $x, y \in M$ ,  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$

3 Si  $M$  es convexo y  $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ , entonces

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \in M$$

A continuación presentamos una serie de ejemplos de conjuntos convexos

### Ejemplo 1.1:

a) El conjunto vacío, el espacio vectorial  $X$  y cualquier conjunto unitario de  $X$  son subconjuntos convexos de  $X$

b) La intersección de una colección de subconjuntos convexos del espacio vectorial  $X$  es un subconjunto convexo de  $X$ . En efecto, sea

$$\{M_i, i \in I\}$$

una colección de subconjuntos convexos de  $X$  y sean

$$x, y \in \bigcap_{i \in I} M_i, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

entonces  $x, y \in M_i$  para todo  $i \in I$ . Por lo tanto,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in M_i$$

para todo  $i \in I$

Así,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_{i \in I} M_i$$

Por consiguiente,  $\bigcap_{i \in I} M_i$  es un subconjunto convexo de  $X$ .

c) Si  $M$  y  $N$  son conjuntos convexos, entonces la suma

$$M + N = \{a + b \mid a \in M, b \in N\}$$

es un conjunto convexo. En particular cualquier traslación  $M+a$  de un conjunto convexo  $M$  es convexo. En efecto, sean

$$y_1, y_2 \in M+N \text{ y } 0 \leq \lambda \leq 1$$

Entonces existen  $a_1, a_2 \in M, b_1, b_2 \in N$  tales que

$$y_1 = a_1 + b_1, \quad y_2 = a_2 + b_2$$

Como  $M$  y  $N$  son convexos

$$\begin{aligned}\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 &= \lambda(a_1 + b_1) + (1-\lambda)(a_2 + b_2) \\ &= \lambda a_1 + \lambda b_1 + (1-\lambda)a_2 + (1-\lambda)b_2 \\ &= [\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2] + [\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2]\end{aligned}$$

donde

$$\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in M \quad \text{y} \quad \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 \in N$$

Así,  $M+N$  es convexo

d) En un espacio normado  $X$ , para todo  $x \in X$  y para todo  $r > 0$ , la bola abierta  $B(x,r)$  y la bola cerrada  $\bar{B}(x,r)$  son conjuntos convexos. Sin embargo, la esfera

$$S(x,r) = \bar{B}(x,r) - B(x,r)$$

no es un conjunto convexo. En efecto

Sean  $y_1, y_2 \in B(x,r)$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned}\|x - [\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]\| &= \|\lambda(x - y_1) + (1-\lambda)(x - y_2)\| \\ &\leq \lambda \|x - y_1\| + (1-\lambda) \|x - y_2\| \\ &< \lambda r + (1-\lambda)r \\ &= r\end{aligned}$$

Por consiguiente,  $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in B(x,r)$  y  $B(x,r)$  es convexo

- Sean  $y_1, y_2 \in \bar{B}(x, r)$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$  Entonces

$$\begin{aligned} \left\| x - [\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2] \right\| &= \left\| \lambda(x - y_1) + (1-\lambda)(x - y_2) \right\| \\ &\leq \lambda \|x - y_1\| + (1-\lambda) \|x - y_2\| \\ &\leq \lambda r + (1-\lambda)r \\ &= r \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \bar{B}(x, r)$  y  $\bar{B}(x, r)$  es convexo

- Probaremos que  $S(x, r)$  no es convexo. En efecto, es claro que  $S(x, r) \neq \emptyset$

Sea  $x \in S(x, r)$ . Como  $\|x\| = 1$ , se tiene que  $x \neq 0$

Note que  $-x \in S(x, r)$ . Tomemos  $\lambda = \frac{1}{2}$ , entonces

$$\lambda x + (1-\lambda)(-x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = 0$$

Por lo tanto,

$$\lambda x + (1-\lambda)(-x) \notin S(x, r)$$

y  $S(x, r)$  no es convexo

- e) Si  $M$  es convexo y  $\alpha > 0$ , entonces

$$\alpha M = \{ \alpha x \mid x \in M \}$$

es convexo. En efecto, sean  $x, y \in M$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Entonces, existen

$a, b \in M$  tal que

$$x = \alpha a, \quad y = \alpha b$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(\alpha a) + (1-\lambda)(\alpha b) \\ &= \alpha[\lambda a + (1-\lambda)b]\end{aligned}$$

Como  $M$  es convexo,  $\lambda a + (1-\lambda)b \in M$  Por lo tanto,  $\alpha[\lambda x + (1-\lambda)y] \in \alpha M$

y  $\alpha M$  es convexo

**Definición 1.2:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $K$  un subconjunto de  $X$ .  $K$  es un cono convexo si

$$\alpha x + \beta y \in K$$

para todo  $x, y \in K$  y  $\alpha, \beta \geq 0$

A continuación presentamos una serie de ejemplos de conos convexos

**Ejemplo 1.2:**

- a) Todo subespacio de un espacio vectorial es un cono convexo
- b) La intersección de una colección cualquiera de conos convexos es un cono convexo. En efecto, sea  $\{K_i, i \in I\}$  una colección de conos convexos y  $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ . Si  $x, y \in K$  y  $\alpha, \beta \geq 0$ , entonces  $x, y \in K_i$  para todo  $i \in I$ . Por lo tanto,  $\alpha x + \beta y \in K_i$  para todo  $i \in I$ . Así pues,  $\alpha x + \beta y \in K$  y  $K$  es un cono convexo.
- c) Consideremos el espacio vectorial

$$X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$

y definamos el conjunto  $K$  por

$$K = \{x \in K \mid x(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in [a, b]\}$$

Probaremos que  $K$  es un cono convexo. En efecto, sean

$$x_1, x_2 \in K \quad \text{y} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

Entonces, para todo  $t \in [a, b]$  se tiene que

$$(\alpha x_1 + \beta x_2)(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \geq 0$$

Por lo tanto,  $\alpha x_1 + \beta x_2 \in K$  y el conjunto  $K$  es un cono convexo.

Note que  $K$  no es un subespacio vectorial de  $X$ , ya que si  $x \in K$ ,  $x \neq 0$  y

$\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < 0$ , entonces  $\alpha x \notin K$ .

## 1.2 Conjuntos Ortogonales y Conjuntos Ortonormales.

Es conocido que en  $\mathbb{R}^2$  (o en  $\mathbb{R}^3$ ) dos vectores  $x$ ,  $y$  son perpendiculares si y

solo si  $\sum_{i=1}^2 x_i y_i = 0$  (ó  $\sum_{i=1}^3 x_i y_i = 0$ ) Esto es, en  $\mathbb{R}^2$  o en  $\mathbb{R}^3$  dos vectores  $x$ ,

y son perpendiculares si y solo si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

En este sentido enunciamos la siguiente definición en cualquier espacio con producto interno.

**Definición 1.3:** Sean  $X$  un espacio con producto interno,  $x, y \in X$ . Decimos que  $x, y$  son **ortogonales** si  $\langle x, y \rangle = 0$ . En este caso escribimos  $x \perp y$ .

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $X$ . El vector  $x$  se dice que es ortogonal al conjunto  $A$  si  $x \perp a$ , para todo  $a \in A$  y escribimos  $x \perp A$ .

Un subconjunto no vacío  $A$  de  $X$  se llama **conjunto ortogonal** si cada par de vectores en  $A$  son ortogonales, es decir, si  $\langle x, y \rangle = 0$  para todo  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ .

Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son ortogonales si  $a \perp b$  para toda  $a \in A$  y  $b \in B$ . En este caso, escribimos  $A \perp B$ .

A continuación presentamos una serie de ejemplos de conjuntos ortogonales.

**Ejemplo 1.3:**

a) En un espacio con producto interno  $X$ , el conjunto  $\{x\}$  es un conjunto ortogonal para todo  $x \in X$ .

b) Sea

$$X = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$

el espacio vectorial de las funciones reales continuas definidas sobre  $[-1, 1]$  con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

Consideremos las funciones  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = x$ ,  $h(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

Verifiquemos que el conjunto  $\{f, g, h\}$  es un conjunto ortogonal en  $X$ . En efecto,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0$$

$$\langle f, h \rangle = \int_{-1}^1 \left( x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} \right]_{-1}^1 = 0$$

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 \left( x^3 - \frac{x}{3} \right) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{6} \right]_{-1}^1 = 0$$

Por lo tanto,  $f \perp g$ ,  $f \perp h$  y  $g \perp h$

c) Sea el espacio vectorial  $X = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$  con el producto interno

definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

Consideremos los conjuntos

$$M_1 = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}$$

$$M_2 = \{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots\}$$

$$M_3 = M_1 \cup M_2$$

$M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  son subconjuntos ortogonales de  $X$ . En efecto,

- Verifiquemos que las funciones  $f(x) = 1$  y  $f_n(x) = \cos nx$  son ortogonales

$$\langle 1, \cos nx \rangle = \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \frac{\sin 2n\pi}{n} = 0$$

Luego,  $1 \perp \cos nx$  para todo  $n \geq 1$

- Supongamos que  $n \neq m$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \langle \cos nx, \cos mx \rangle &= \int_0^{2\pi} (\cos nx)(\cos mx) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(nx + mx) + \cos(nx - mx)] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{2\pi} \cos(n+m)x dx + \int_0^{2\pi} \cos(n-m)x dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{sen}(n+m)}{n+m} x \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{sen}(n-m)}{n-m} x \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{sen } 2\pi(n+m)}{n+m} + \frac{\text{sen } 2\pi(n-m)}{n-m} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\cos nx \perp \cos mx$  para  $n \neq m$

- Supongamos que  $n = m$ ,  $n \geq 1$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \langle \cos nx, \cos nx \rangle &= \int_0^{2\pi} (\cos nx)(\cos nx) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos 2nx}{2} \right) dx \\
 &= \left[ \frac{1}{2} x \right]_0^{2\pi} + \left[ \frac{1}{4n} \text{sen } 2nx \right]_0^{2\pi} \\
 &= \pi + \frac{\text{sen } 4n\pi}{4n} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que  $M_1$  es un conjunto ortogonal

- Supongamos que  $n \neq m$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \langle \text{sen } nx, \text{sen } mx \rangle &= \int_0^{2\pi} (\text{sen } nx)(\text{sen } mx) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos (nx - mx) - \cos (nx + mx)] \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{2\pi} \cos (n - m) x \, dx - \int_0^{2\pi} \cos (n + m) x \, dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{sen } (n - m)}{n - m} x \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{sen } (n + m)}{n + m} x \right]_0^{2\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\text{sen } nx \perp \text{sen } mx$  para  $n \neq m$

- Si  $n = m$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \langle \text{sen } nx, \text{sen } nx \rangle &= \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 nx \, dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\
 &= \left[ \frac{1}{2} x \right]_0^{2\pi} - \left[ \frac{1}{4n} \text{sen } 2x \right]_0^{2\pi} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que  $M_2$  es un conjunto ortogonal

- Supongamos que  $n \neq m$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \langle \cos nx, \sin mx \rangle &= \int_0^{2\pi} (\cos nx)(\sin mx) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{2\pi} \sin(n+m)x dx - \int_0^{2\pi} \sin(n-m)x dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos(n+m)}{n+m} x \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(n-m)}{n-m} x \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos 2\pi(n+m)}{n+m} + \frac{1}{n+m} + \frac{\cos 2\pi(n-m)}{n-m} - \frac{1}{n-m} \right] \\
 &= \frac{1}{n+m} \left[ \frac{1 - \cos 2\pi(n+m)}{2} \right] - \frac{1}{n-m} \left[ \frac{1 - \cos 2\pi(n-m)}{2} \right] \\
 &= \frac{\sin^2 \pi(n+m)}{n+m} - \frac{\sin^2 \pi(n-m)}{n-m} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Si  $n = m$ , entonces

$$\langle \cos nx, \sin nx \rangle = \int_0^{2\pi} (\cos nx)(\sin nx) dx = \left[ \frac{\sin^2 nx}{2n} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Por lo tanto,  $M_1 \cup M_2$  es un conjunto ortogonal

Al igual que en el espacio  $\mathbb{R}^2$ , el Teorema de Pitágoras tiene una validez análoga en cualquier espacio con producto interno.

**Teorema 1.1:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un conjunto de vectores ortogonales en  $X$ . Entonces

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

**Demostración:**

Tenemos que

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle \end{aligned}$$

Como

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0 \text{ para } i \neq j$$

se tiene que

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

**Teorema 1.2:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un conjunto de vectores ortogonales no nulos. Entonces  $M$  es un conjunto linealmente independiente.

**Demostración:**

Sea  $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$  y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

entonces, para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle 0, x_j \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_j \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle \\
 &= \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle \\
 &= \alpha_j \|x_j\|^2
 \end{aligned}$$

Pero  $x_j \neq 0$  y así  $\|x_j\|^2 \neq 0$ . En consecuencia  $\alpha_j = 0$  para todo  $j=1,2, \dots, n$ .

Por lo tanto, el conjunto  $M$  es linealmente independiente.

El recíproco del Teorema 1.2 no es cierto. Existen conjuntos linealmente independientes que no son ortogonales. Por ejemplo, en el espacio  $\mathbb{R}^2$ ,  $M = \{(1,0), (1,1)\}$  es un conjunto linealmente independiente que no es ortogonal.

**Teorema 1.3:** Sea  $X$  un espacio con producto interno. Entonces,  $x \perp y$  si y solo si  $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $x \perp y$ , y sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \|x + \alpha y\|^2 &= \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, \alpha y \rangle + \langle \alpha y, x \rangle + \langle \alpha y, \alpha y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \langle \alpha x, \alpha y \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \|x\|^2 + \|\alpha y\|^2 \\
 &= \|x\|^2 + \alpha^2 \|y\|^2
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \|x - \alpha y\|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle - \langle x, \alpha y \rangle - \langle \alpha y, x \rangle + \langle \alpha y, \alpha y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle - \alpha \langle x, y \rangle - \alpha \langle y, x \rangle + \langle \alpha x, \alpha y \rangle \\
 &= \|x\|^2 + \|\alpha y\|^2 \\
 &= \|x\|^2 + \alpha^2 \|y\|^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|x + \alpha y\|^2 = \|x - \alpha y\|^2$$

⇔ Recíprocamente

$$\|x + \alpha y\|^2 = \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \langle \alpha x, \alpha y \rangle$$

y

$$\|x - \alpha y\|^2 = \langle x, x \rangle - \alpha \langle x, y \rangle - \alpha \langle y, x \rangle + \langle \alpha x, \alpha y \rangle$$

Como

$$\|x + \alpha y\|^2 = \|x - \alpha y\|^2$$

para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , resulta que

$$\alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle = -\alpha \langle x, y \rangle - \alpha \langle y, x \rangle$$

Luego,

$$2\alpha \langle x, y \rangle + 2\alpha \langle y, x \rangle = 0 \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

Si  $\alpha = 1$ ,

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = 0$$

Luego,

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Por lo tanto,

$$x \perp y.$$

**Observación:** Recordemos que todos los espacios vectoriales mencionados en este trabajo son reales

**Teorema 1.4:** Sea  $X$  un espacio con producto interno. Entonces,  $x \perp y$  si y solo si  $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $x \perp y$ , entonces para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|x + \alpha y\|^2 &= \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, \alpha y \rangle + \langle \alpha y, x \rangle + \langle \alpha y, \alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \langle \alpha x, \alpha y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|\alpha y\|^2 \\ &\geq \|x\|^2 \end{aligned}$$

Así,

$$\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$$

para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$

⇔) Recíprocamente,

$$\begin{aligned}\|x + \alpha y\|^2 &= \langle x, x \rangle + \langle x, \alpha y \rangle + \langle \alpha y, x \rangle + \langle \alpha y, \alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2\end{aligned}$$

Luego,

$$\|x + \alpha y\|^2 - \|x\|^2 = \alpha (2\langle x, y \rangle + \alpha \|y\|^2)$$

de donde

$$\alpha (2\langle x, y \rangle + \alpha \|y\|^2) \geq 0$$

para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Supongamos que  $\langle x, y \rangle \neq 0$

- Si  $\langle x, y \rangle > 0$ , tomemos un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{-2\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} < \alpha < 0.$$

Entonces,

$$2\langle x, y \rangle + \alpha \|y\|^2 > 0 \quad \text{y} \quad \alpha < 0$$

de donde,

$$\alpha (2\langle x, y \rangle + \alpha \|y\|^2) < 0$$

Lo que es una contradicción

- Si  $\langle x, y \rangle < 0$ , tomemos un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$0 < \alpha < \frac{-2\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$$

Entonces

$$2\langle x, y \rangle + \alpha \|y\|^2 < 0 \quad \text{y} \quad \alpha > 0$$

de donde,

$$\alpha \left( 2\langle x, y \rangle + \alpha \|y\|^2 \right) < 0$$

Lo que es una contradicción

Así pues  $\langle x, y \rangle = 0$ , o sea,  $x \perp y$

Sea  $X$  un espacio normado y  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $X$ . Si la sucesión de sumas parciales

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

converge a  $x$ , entonces decimos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge en  $X$ , o

simplemente decimos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  es convergente. En este caso

escribimos

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \quad \text{si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{i=1}^n x_i \right\| = 0.$$

**Teorema 1.5:** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión

ortogonal en  $H$ . Entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  converge en  $H$  si y solo si  $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty$

Además, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z$$

entonces,

$$\|z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2$$

**Demostración:**

Para  $n > m$  se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^m z_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=m+1}^n z_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^n \|z_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 - \sum_{i=1}^m \|z_i\|^2 \end{aligned}$$

Así,  $\left\{ \sum_{i=1}^n z_i \right\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy en  $H$  sí y solamente sí

$\left\{ \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 \right\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$ . Por consiguiente, como  $H$  y  $\mathbb{R}$

son completos, se tiene que  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es convergente en  $H$  sí y solo sí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty$$

Ahora supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} z_i = z$$

Denotemos

$$s_n = \sum_{i=1}^n z_i$$

luego,

$$\|s_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z - s_n\| = 0$$

Por consiguiente,

$$\{\|z\| + \|s_n\|\}_{n=1}^{\infty}$$

es una sucesión acotada de números y

$$\left| \|z\| - \|s_n\| \right| \leq \|z - s_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Así,

$$\begin{aligned} \left| \|z\|^2 - \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 \right| &= \left| \|z\|^2 - \|s_n\|^2 \right| \\ &= (\|z\| + \|s_n\|) \|z\| - \|s_n\| \end{aligned}$$

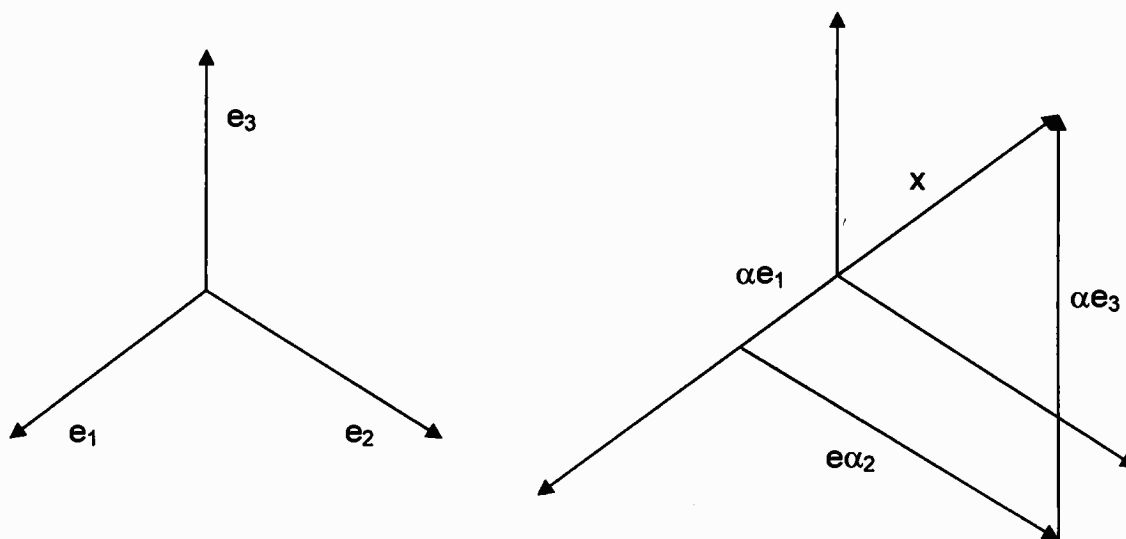
Como  $\{\|z\| - \|s_n\|\}$  converge a 0 y  $\{\|z\| + \|s_n\|\}_{n=1}^{\infty}$  es acotada, se tiene

que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 = \|z\|^2.$$

En el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  el conjunto  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  forma un conjunto ortogonal y constituye una base de  $\mathbb{R}^3$ , así que cada  $x \in \mathbb{R}^3$  tiene una única representación de la forma

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$



La ortogonalidad nos proporciona un procedimiento para determinar los coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ . Lo que constituye una gran ventaja de la ortogonalidad. En efecto, dado  $x \in \mathbb{R}^3$  se tiene

$$\langle x, e_1 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_1 \rangle + \alpha_3 \langle e_3, e_1 \rangle = \alpha_1$$

$$\langle x, e_2 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_2 \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_2 \rangle + \alpha_3 \langle e_3, e_2 \rangle = \alpha_2$$

$$\langle x, e_3 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_3 \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_3 \rangle + \alpha_3 \langle e_3, e_3 \rangle = \alpha_3$$

**Definición 1.4:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subconjunto no vacío de  $X$ .  $M$  es un **conjunto ortonormal** si  $M$  es un conjunto ortogonal en el cual cada vector tiene norma unitaria. Esto es, para todo  $x, y \in M$

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

En general, una familia  $\{x_i, i \in I\}$  es un conjunto ortonormal si es ortogonal y  $\|x_i\| = 1$  para todo  $i \in I$ . Así que para todo  $i, j \in I$  se tiene

$$\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

donde  $\delta_{i,j}$  se conoce como el **Delta de Kronocker**.

Si  $I$  es un conjunto enumerable entonces decimos que el conjunto  $\{x_i, i \in I\} = \{x_n, n \in \mathbf{N}\}$  es una sucesión ortonormal

A continuación presentamos una serie de ejemplos de conjuntos ortonormales

**Ejemplo 1.4:**

a) El conjunto  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  definida por  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ , es un conjunto ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ .

b) Considere el espacio vectorial  $\ell_2$  de la sucesión de números reales  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

tales que  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$  con el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

donde,

$$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, \dots) \quad y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = (y_1, y_2, \dots)$$

El subconjunto  $\{e_1, e_2, \dots\}$  de  $\ell_2$ , donde  $e_j \in \ell_2$  es la sucesión real

definida por

$$e_j(i) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$e_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

es un conjunto ortonormal

c) Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un subconjunto no vacío y consideremos el espacio vectorial  $\ell_2(I)$

de todas las funciones  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene la propiedad de que el conjunto

$I_x = \{i \in I \mid x(i) \neq 0\}$  es enumerable y que  $\sum_{i \in I_x} x^2(i) < \infty$  (Como esta

convergencia es absoluta, cualquier arreglo de los términos produce la

misma suma) con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I^*} x(i)y(i), \quad I^* = I_x \cup I_y$$

para cada  $j \in I$  definamos la función  $e_j \in X$  por

$$e_j(i) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$e_j(i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

El conjunto  $M = \{e_j \mid j \in I\}$  es un conjunto ortonormal

d) En el espacio con producto interno  $X = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$  del

Ejemplo 1.3 (c), el conjunto

$$M = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}$$

es un conjunto ortonormal

**Teorema 1.6:** Sea  $X$  un espacio con producto interno,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  un conjunto ortonormal de  $X$ ,  $Y_n = [e_1, e_2, \dots, e_n]$  el subespacio de  $X$  generado por

$e_1, e_2, \dots, e_n$ , y  $x \in X$ . Entonces

a) Si  $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ , entonces  $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$

b) Si  $z = x - y$ , entonces  $z \perp y$

c)  $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

**Demostración:**

a) Probaremos que  $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 \\ &= \left\| \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 \\ &= |\langle x, e_1 \rangle|^2 \|e_1\|^2 + |\langle x, e_2 \rangle|^2 \|e_2\|^2 + \dots + |\langle x, e_n \rangle|^2 \|e_n\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle|^2 + |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle|^2 + \cdots + |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle|^2
 \end{aligned}$$

b) Probaremos que  $\mathbf{z} \perp \mathbf{y}$ . En efecto,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
 &= \left\langle \mathbf{x}, \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \right\rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle - \|\mathbf{y}\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathbf{z} \perp \mathbf{y}$

c) Probaremos que  $\sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$ . En efecto, aplicando el Teorema de

Pitágoras se tiene que

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y} + \mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2$$

Luego,

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 + \|\mathbf{z}\|^2$$

y

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle|^2$$

Como  $\|z\| \geq 0$ , se tiene que

$$0 \leq \|z\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

El siguiente teorema conocido como la desigualdad de Bessel generaliza la

desigualdad  $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$  del teorema anterior

**Teorema 1.7:** Sea  $\{e_1, e_2, \dots\}$  una sucesión ortonormal en un espacio con producto interno  $X$ . Entonces para todo  $x \in X$ ,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{desigualdad de Bessel})$$

**Demostración:**

Como los términos de la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$  son no negativos y por el

Teorema 1.6,

$$s_n = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \text{ para todo } n$$

se tiene que  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente y acotada de números reales

Por lo tanto, la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$  es convergente y

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

**Teorema 1.8:** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión ortonormal en  $H$ . Entonces,

a) La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$  converge en  $H$  si y solo si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$  converge en  $\mathbb{R}$

b) Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$  converge en  $H$ , entonces  $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

donde

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Así, en este caso

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

c) Para cada  $x \in H$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$  converge.

**Demostración:**

a) Denotemos

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

$$\sigma_n = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2$$

Si  $n > m$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \|s_n - s_m\|^2 &= \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \alpha_{m+2} e_{m+2} + \cdots + \alpha_n e_n\|^2 \\ &= |\alpha_{m+1}|^2 + |\alpha_{m+2}|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 \end{aligned}$$

$$= \sigma_n - \sigma_m$$

$$= |\sigma_n - \sigma_m|$$

Por consiguiente,  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy en  $H$  sí y solo sí  $\{\sigma_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$

Luego, como  $H$  y  $\mathbb{R}$  son completos se tiene que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$  es convergente en  $H$  sí y solo sí la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$  es convergente en  $\mathbb{R}$

b) Supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = x$$

o sea,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Note que

$$\langle s_n, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j \right\rangle = \alpha_j$$

Aplicando límite obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle s_n, e_j \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j$$

$$\left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, e_j \right\rangle = \alpha_j$$

$$\langle x, e_j \rangle = \alpha_j$$

con  $j = 1, 2, \dots$

Luego,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

c) Si  $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$ , entonces por la desigualdad de Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

o sea, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$  converge

Luego por la parte (a), la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$  converge en H

### 1.3 Complemento Ortogonal.

**Definición 1.5:** Sea X un espacio con producto interno y M un subconjunto no vacío de X. El **complemento ortogonal** de M se denota por  $M^\perp$  y se define por

$$\begin{aligned} M^\perp &= \{x \in X \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in M\} \\ &= \{x \in X \mid x \perp M\} \end{aligned}$$

**Teorema 1.9:** Sea X un espacio con producto interno y M, N subconjuntos, no vacíos de X. Entonces

a)  $M^\perp$  es un subespacio cerrado de X

b) Si  $M \subset N$  entonces  $N^\perp \subset M^\perp$

c)  $M \subset (M^\perp)^\perp = M^{\perp\perp}$

d) Si  $M$  es un subespacio de  $X$ , entonces  $M \cap M^\perp = \{0\}$

e)  $M^\perp = [M]^\perp = (\overline{[M]})^\perp$

**Demostración:**

a) Probaremos que  $M^\perp$  es un subespacio de  $X$ . En efecto,

- Como  $\langle 0, y \rangle = 0$  para todo  $y \in M$ ,  $0 \in M^\perp$ . Por lo tanto,  $M^\perp \neq \emptyset$
- Sean  $x, z \in M^\perp$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Luego, para todo  $y \in M$  se tiene

$$\langle \alpha x + \beta z, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle z, y \rangle = 0$$

Así,

$$\langle \alpha x + \beta z, y \rangle = 0$$

para todo  $y \in M$  y  $\alpha x + \beta z \in M^\perp$

- Ahora probaremos que  $M^\perp$  es cerrado en  $X$ . En efecto,

Sea  $x \in \overline{M^\perp}$ , luego existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  de elementos de  $M^\perp$  tal

que  $x_n \rightarrow x$

Sea  $z \in M$ , entonces

$$\langle x_n, z \rangle = 0$$

Aplicando límite obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, z \rangle \\ &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, z \right\rangle \\ &= \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\langle x, z \rangle = 0$ , para toda  $z \in M$ . Es decir,  $x \in M^\perp$ . Así pues,

$\overline{M^\perp} \subset M^\perp$  y  $M^\perp$  es cerrado en  $X$ .

b) Sean  $x \in N^\perp$  y  $z \in M$ . Como  $M \subset N$ , entonces  $z \in N$ .

Luego,

$$\langle x, z \rangle = 0 \text{ para todo } z \in N.$$

Así  $x \in M^\perp$ . Por lo tanto,  $N^\perp \subset M^\perp$ .

c) Sea  $x \in M$ , entonces

$$\langle z, x \rangle = 0$$

para todo  $z \in M^\perp$ .

Luego,  $x \in M^{\perp\perp}$ . Por consiguiente,  $M \subset M^{\perp\perp}$ .

d) Probaremos que si  $M$  es un subespacio de  $X$  entonces  $M \cap M^\perp = \{0\}$ . En

efecto, como  $M$  y  $M^\perp$  son subespacios de  $X$ ,  $0 \in M \cap M^\perp$ .

Por otro lado, si  $x \in M \cap M^\perp$ , entonces  $\langle x, x \rangle = 0$ . Por lo tanto,  $x = 0$ .

De lo anterior se tiene que  $M \cap M^\perp = \{0\}$ .

e) Probaremos que

$$M^\perp = [M]^\perp = (\overline{[M]})^\perp$$

• Como  $M \subset \overline{[M]}$ , entonces por la parte (b) se tiene que

$$(\overline{[M]})^\perp \subset M^\perp$$

• Sea  $x \in M^\perp$  y sea  $z \in \overline{[M]}$ . Luego, existe una sucesión  $\{y_n\}$  en  $[M]$  tal que  $y_n \rightarrow z$ .

Como  $y_n \in [M]$ , existen vectores  $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_{m_n}^{(n)} \in M$ , y escalares

$\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_{m_n}^{(n)} \neq 0$  tales que

$$y_n = \alpha_1^{(n)} u_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)} u_2^{(n)} + \dots + \alpha_{m_n}^{(n)} u_{m_n}^{(n)}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle x, y_n \rangle &= \langle x, \alpha_1^{(n)} u_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)} u_2^{(n)} + \dots + \alpha_{m_n}^{(n)} u_{m_n}^{(n)} \rangle \\ &= \langle x, \alpha_1^{(n)} u_1^{(n)} \rangle + \langle x, \alpha_2^{(n)} u_2^{(n)} \rangle + \dots + \langle x, \alpha_{m_n}^{(n)} u_{m_n}^{(n)} \rangle \\ &= \alpha_1^{(n)} \langle x, u_1^{(n)} \rangle + \alpha_2^{(n)} \langle x, u_2^{(n)} \rangle + \dots + \alpha_{m_n}^{(n)} \langle x, u_{m_n}^{(n)} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\langle x, z \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

para todo  $z \in [M]$ . Así pues,

$$x \in ([M])^\perp \quad \text{y} \quad M^\perp \subset ([M])^\perp$$

Por lo tanto,

$$M^\perp = ([M])^\perp$$

Por último, como

$$M \subset [M] \subset \overline{[M]}$$

por la parte (b) se tiene que

$$([\overline{[M]})^\perp \subset [M]^\perp \subset M^\perp$$

En conclusión,

$$M^\perp = [M]^\perp = ([\overline{[M]})^\perp$$

**Corolario 1.1:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Si  $[M]$  es denso en  $X$ , entonces  $M^\perp = \{0\}$

**Demostración:**

Esto es consecuencia directa del Teorema 1.9 (e).

**Teorema 1.10:** Sea  $X$  un espacio con producto interno,  $M$  un subconjunto ortonormal de  $X$ ,  $x \in X$  y  $M_x = \{e \in M : \langle x, e \rangle \neq 0\}$ . Entonces  $M_x$  es un conjunto enumerable

**Demostración:**

Si  $x = 0$ , el resultado es obvio. Supongamos que  $x \neq 0$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definamos el conjunto

$$S_n = \left\{ e \in M : |\langle x, e \rangle|^2 > \frac{\|x\|^2}{n} \right\}$$

- Supongamos que  $S_n$  es un conjunto infinito. Entonces, existe una sucesión  $\{e_m\}_{m=1}^\infty$  de elementos distintos de  $S_n$ . Luego

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\langle x, e_m \rangle|^2 \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|x\|^2}{n} = \infty$$

Pero, por el Teorema 1.7,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\langle x, e_m \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$$

lo que es una contradicción. Así,  $S_n$  es un conjunto finito, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Finalmente, como

$$M_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

se tiene que  $M_x$  es un conjunto enumerable

#### 1.4 Conjuntos Ortonormales Totales.

**Definición 1. 6:** Sea  $X$  un espacio normado y  $M \subset X$   $M$  es un **conjunto total** (o fundamental) si  $\overline{M}$  es denso en  $X$ , o sea, si  $\overline{M} = X$

Si  $X$  es un espacio con producto interno y  $M$  es un subconjunto (o sucesión) ortonormal en  $X$ , y además es total, entonces se dice que  $M$  es un conjunto (o sucesión) **ortonormal total**.

**Observación:** De los Teoremas 1.7 y 1.10 se tiene que si  $M$  es un subconjunto ortonormal del espacio con producto interno  $X$  y  $M_x = \{e \in M \mid \langle x, e \rangle \neq 0\}$ , entonces

$$\sum_{e \in M} |\langle x, e \rangle|^2 = \sum_{e \in M_x} |\langle x, e \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Más aún, como esta serie es absolutamente convergente, ella converge a la misma suma para cualquier arreglo del conjunto  $M_x$ ; o sea que para cualquier ordenamiento  $M_x = \{e_1, e_2, \dots\}$  de  $M_x$ , se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{e \in M_x} |\langle x, e \rangle|^2 = \sum_{e \in M} |\langle x, e \rangle|^2$$

**Corolario 1.2:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Si  $M$  es total en  $X$ , entonces  $M^\perp = \{0\}$

**Demostración:**

Esto es consecuencia inmediata del Corolario 1.1 y la Definición 1.6

Finalizaremos esta sección con un teorema de representación

**Teorema 1.11:** Sea  $X$  un espacio de Hilbert y  $M$  un subconjunto ortonormal de  $X$ . Si  $M$  es total, entonces

$$x = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e = \sum_{e \in M_x} \langle x, e \rangle e$$

para todo  $x \in X$ .

**Demostración:**

Sea  $x \in X = \overline{M}$  y

$$M_x = \{e_1, e_2, \dots\}$$

una ordenación de  $M_x$ . Por el Teorema 1.8 (c), la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$  es

convergente en  $X$ . Sea

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = \sum_{e \in M_x} \langle x, e \rangle e = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e$$

- Si  $e \in M_x$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \langle x - y, e \rangle &= \langle x, e \rangle - \langle y, e \rangle \\
 &= \langle x, e \rangle - \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e \right\rangle \\
 &= \langle x, e \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e \rangle \\
 &= \langle x, e \rangle - \langle x, e \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- Si  $e \in M - M_x$ , entonces

$$\langle x - y, e \rangle = \langle x, e \rangle - \langle y, e \rangle = 0$$

Así pues,

$$\langle x - y, e \rangle = 0$$

para todo  $e \in M$ , de donde  $x - y \in M^\perp$

Como  $M$  es total, por el Corolario 1.2, se tiene que

$$x - y \in M^\perp = (\overline{[M]})^\perp = \{0\}$$

Por consiguiente,

$$x = y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

### 1.5 Suma Directa.

Nuestro propósito es obtener una representación de un espacio de Hilbert como una suma directa, el cual es particularmente simple y conveniente para

hacer uso de la ortogonalidad. Por tal razón, introduciremos el concepto de suma directa en espacios vectoriales como sigue

**Definición 1.7:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $Y, Z$  subespacios de  $X$ . Decimos que  $X$  es **suma directa** de  $Y$  y  $Z$ , y escribimos  $X = Y \oplus Z$ , si cada  $x \in X$  tiene una única representación de la forma  $x = y + z$  donde  $y \in Y$  y  $z \in Z$ .

El subespacio  $Z$  es llamado el **complemento algebraico** de  $Y$  en  $X$  y viceversa.  $Y$  y  $Z$  son llamados un par de subespacios complementarios en  $X$ . Si  $X$  es un espacio normado y  $Y, Z$  son subespacios cerrados de  $X$ , entonces  $Z$  se llama un **complemento topológico** de  $Y$  y viceversa.

**Observaciones:**

- 1 Como  $Y$  y  $Z$  son subespacios de  $X$ , entonces  $X = Y \oplus Z$  si y solo si

$$X = Y + Z \text{ y } Y \cap Z = \{0\}$$

- 2 Para todo subespacio  $Y$  de  $X$  siempre existe un subespacio  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y \oplus Z$ . Sin embargo,  $Z$  no está unívocamente determinado por  $Y$ .
- 3 Dado un espacio normado  $X$  y un subespacio cerrado  $Y$  de  $X$  no siempre existe un subespacio cerrado  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y \oplus Z$ . En el caso que exista, entonces diremos que  $Y$  es complementado en  $X$ .

## 1.6 Operadores Proyección

Un tipo especial de operadores, llamados proyección, juega un papel importante en el estudio sistemático de los operadores lineales y de la mejor aproximación

El término proyección aparentemente fue utilizado por primera vez en un documento de Aronszajn y Smith (1954)

**Definición 1.8:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $P: X \rightarrow X$  un operador lineal.  $P$  es un **operador proyección** (algebraico) sobre  $X$  si  $P$  es idempotente, o sea que

$$P^2 = P \circ P = P$$

Existe una importante relación entre operador proyección y suma directa de un espacio vectorial, la cual presentamos en el siguiente Teorema

**Teorema 1.12:** Sea  $X$  un espacio vectorial

a) Si  $P: X \rightarrow X$  es un operador proyección, entonces  $X = \text{Im}(P) \oplus \text{N}(P)$  donde

$\text{N}(P)$  es el núcleo de  $P$  y  $\text{Im}(P)$  es la imagen de  $P$

b) Si  $M$  y  $N$  son subespacios de  $X$  y  $X = M \oplus N$ , entonces la función y

$$P: X \rightarrow X$$

$$P(x) = m$$

donde  $x = m + n$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$ , es un operador proyección y  $\text{N}(P) = N$ ,

$\text{Im}(P) = M$

**Demostración:**

a) Sea  $x \in X$ , entonces

$$x = P(x) + (x - P(x))$$

Además,  $P(x) \in \text{Im}(P)$  y

$$P(x - P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$$

o sea,  $x - P(x) \in \text{N}(P)$  Por lo tanto,

$$X = \text{Im}(P) + \text{N}(P)$$

Por otro lado, si  $x \in \text{Im}(P) \cap \text{N}(P)$ , entonces existe  $y \in X$  tal que

$$x = P(y), \quad x \in \text{N}(P)$$

por lo tanto,

$$0 = P(x) = P^2(y) = P(y) = x$$

Así,

$$\text{Im}(P) \cap \text{N}(P) = \{0\}$$

y

$$X = \text{Im}(P) \oplus \text{N}(P)$$

b) Sean  $x, y \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Luego existe  $\bar{m}_1, m_2 \in M$ ,  $n_1, n_2 \in N$  tal que

$$x = m_1 + n_1, \quad y = m_2 + n_2$$

por lo tanto,

$$x + y = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2), \quad m_1 + m_2 \in M, \quad n_1 + n_2 \in N$$

y

$$P(x + y) = m_1 + m_2 = P(x) + P(y)$$

De igual forma

$$\alpha x = \alpha m_1 + \alpha n_1, \quad \alpha m_1 \in M, \quad \alpha n_1 \in N$$

Luego,

$$P(\alpha x) = \alpha m_1 = \alpha P(x)$$

Así pues  $P$  es un operador lineal

Probaremos que  $P$  es idempotente. En efecto, por definición

$$P(m) = m \quad \text{para todo } m \in M$$

Sea  $x \in X$ ,  $x = m + n$ . Entonces

$$P^2(x) = P(P(x)) = P(m) = m = P(x)$$

lo que implica que

$$P^2 = P$$

Finalmente como  $X = M \oplus N$ , se tiene que

$$N(P) = N \quad \text{y} \quad \text{Im}(P) = M$$

**Teorema 1.13:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $P: X \rightarrow X$  un operador lineal.  $P$  es un operador proyección si y solo si  $I - P$  es un operador proyección, donde  $I: X \rightarrow X$  es el operador identidad de  $X$ .

**Demostración.**

$$(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P \quad \text{si y solo si} \quad P^2 = P$$

**Observación:** Si  $P: X \rightarrow X$  es un operador proyección entonces

$$N(P) = \text{Im}(I - P) \quad \text{y} \quad \text{Im}(P) = N(I - P)$$

**Definición 1.19:** Sea  $X$  un espacio normado y  $P: X \rightarrow X$  un operador lineal.  $P$  es un operador proyección (topológico) sobre  $X$  si  $P$  es operador lineal acotado idempotente; o sea que  $P$  es un operador proyección algebraico continuo

**Teorema 1.14:** Sea  $X$  un espacio normado y  $P$  un operador proyección topológico sobre  $X$ . Entonces  $X = \text{Im}(P) \oplus \text{N}(P)$  y  $\text{Im}(P)$ ,  $\text{N}(P)$  son subespacios cerrados de  $X$ .

**Demostración:**

Como  $P$  es continuo,  $\text{N}(P)$  es un subespacio cerrado de  $X$ . Además como  $\text{Im}(P) = \text{N}(I - P)$  y  $I - P$  es continuo, se tiene que  $\text{Im}(P)$  es un subespacio cerrado de  $X$ .

**Teorema 1.15:** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $M, N$  subespacios cerrados de  $X$  tales que  $X = M \oplus N$ . Entonces, el operador

$$P: X \rightarrow X$$

$$P(x) = m$$

donde,  $x = m + n$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$  es un operador proyección (topológico)

**Demostración:**

Por la parte (b) del Teorema 1.12, se tiene que  $P$  es un operador proyección algebraico. Sólo debemos probar que  $P$  es continuo.

En efecto, definamos la función

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_* &: X \rightarrow \mathbb{R} \\ \|\cdot\|_* &= \|m\| + \|n\| \end{aligned}$$

donde  $x = m + n$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$

Es claro que  $\|\cdot\|_*$  es una norma sobre  $X$ . Además, como  $X$  es completo y

$M, N$  son subespacios cerrados de  $(X, \|\cdot\|)$ , se tiene que  $(X, \|\cdot\|_*)$  es un espacio de Banach

Por otro lado, si  $x = m + n$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$ , entonces

$$\|P(x)\| = \|m\| \leq \|m\| + \|n\| = \|x\|_*.$$

Por consiguiente,  $P: (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|_*)$  es un operador lineal continuo

Note que

$$\|x\| = \|m+n\| \leq \|m\| + \|n\| = \|x\|_*.$$

para todo  $x = m+n \in X$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$

Así pues,  $(X, \|\cdot\|)$  y  $(X, \|\cdot\|_*)$  son completos y

$$\|x\| \leq \|x\|_*.$$

para todo  $x \in X$

Luego, por el **Teorema de la Función Abierta**, se tiene que las normas  $\|\cdot\|$

y  $\|\cdot\|_*$  son equivalentes

Por consiguiente, la función

$$P: (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$$

es continua. Así,  $P$  es un operador proyección (topológica)

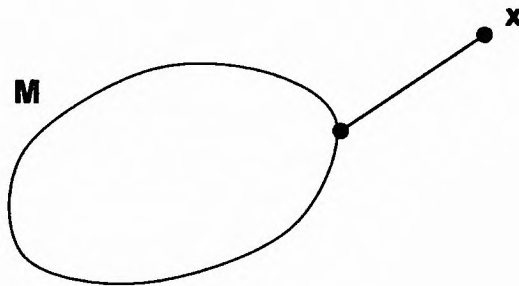
**Observaciones:**

- 1 Dado un espacio vectorial  $X$  y un subespacio  $M$  de  $X$ , siempre existe un subespacio  $N$  de  $X$  tal que  $X = M \oplus N$ .
- 2 Dado un espacio normado y un subespacio cerrado  $M$  de  $X$ . Si existe un subespacio cerrado  $N$  de  $X$  tal que  $X = M \oplus N$ , entonces se dice que  $M$  es complementado en  $X$  y que  $N$  es un complemento topológico de  $M$ .
- 3 En términos de operadores proyecciones, el Teorema 1.15 anterior implica que un subespacio cerrado  $M$  de un espacio de Banach  $X$  es complementado en  $X$  si y solo si existe un operador proyección (topológico)  $P: X \rightarrow X$  tal que  $\text{Im}(P) = M$
- 4 No todo subespacio cerrado de un espacio de Banach es complementado. F. J. Murray presentó un subespacio cerrado  $M$  del espacio  $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ , donde  $1 < p < \infty$ ,  $p \neq 2$ , para el cual no existe complemento topológico  $N$ , es decir que  $M$  no es la imagen de ningún operador proyección sobre  $X$
- 5 En espacios de Hilbert todo subespacio cerrado es complementado. Para probar esto se utiliza el concepto de ortogonalidad y será probado en el siguiente capítulo

**II CAPÍTULO**  
**LA MEJOR APROXIMACIÓN**

## 2.1 El Problema de La Mejor Aproximación.

Dado un espacio métrico  $(E,d)$ , un subconjunto no vacío  $M$  de  $E$  y  $x \in E$ , el problema de la mejor aproximación, intuitivamente, consiste en determinar el elemento  $y \in M$  más próximo a  $x$ , si existe



Al punto  $y \in M$  más próximo a  $x$  se le llama la mejor aproximación a  $x$  por elementos de  $M$

Esta teoría de la mejor aproximación se puede enfocar en base a las siguientes preguntas

- Existencia de la mejor aproximación (¿Existen elementos del conjunto  $M$  que minimizan la distancia de  $M$  a  $x$ ?)
- Unicidad de la mejor aproximación (¿Bajo qué condiciones la Mejor Aproximación es única?)
- Caracterización de la mejor aproximación (¿Cómo reconocer cuando un elemento de  $M$  es una Mejor Aproximación a  $x$  por elementos de  $M$ ?)

- Error de la mejor aproximación (¿Cómo calcular el error al aproximar la distancia de  $M$  a  $x$ ? o por lo menos ¿Cómo calcular una buena cota superior para el error? )
- Cálculo de la mejor aproximación (¿Cómo describir algunos algoritmos útiles para el cálculo de la mejor Aproximación?)
- Continuidad de la mejor aproximación (¿Cómo varía la mejor aproximación como una función de  $x$  o de  $M$ ?)

En este trabajo nos dedicaremos a resolver las tres primeras preguntas, aunque en algunos casos resolveremos las seis preguntas planteadas

Presentamos ahora la definición de la mejor aproximación

**Definición 2.1:** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico,  $M$  un subconjunto no vacío de  $E$  y  $x \in E$ . Un elemento  $y_0 \in M$  es llamado la **mejor aproximación** (o punto más cercano) a  $x$  por elementos de  $M$  si

$$d(x, y_0) = d(x, M) = \inf \{ d(x, y) \mid y \in M \}$$

El conjunto de todas las mejores aproximaciones a  $x$  por elementos de  $M$  se denota por  $P_M(x)$ . Así,

$$P_M(x) = \{ y \in M \mid d(x, y) = d(x, M) \}$$

Como veremos en el siguiente ejemplo, el conjunto  $P_M(x)$  puede ser vacío (el problema no tiene solución), unitario (el problema tiene única solución), o  $P_M(x)$  puede poseer varios elementos

**Ejemplo 2.1:** En el conjunto  $\mathbb{R}^2$  con la métrica usual (euclidiana) tomemos

$$M_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$$

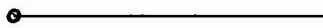
$$M_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$$

Entonces,

$$P_{M_1}((0, 1)) = \emptyset, \quad d((0, 1), M_1) = 1$$

$x(0, 1)$



$M_1$

$$P_{M_2}((0, 1)) = (1, 0), \quad d((0, 1), M_2) = 1$$

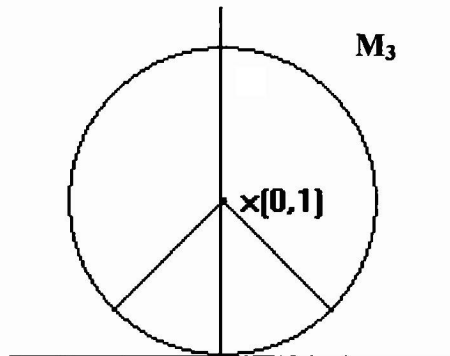
$x(0, 1)$



$M_2$

$$P_{M_3}((0,1)) = M_3 ,$$

$$d((0,1), M_3) = 1$$



**Observación:** Cuando el conjunto  $P_M(x)$  es unitario, por razones de simplicidad, escribimos  $y_0 = P_M(x)$ , en lugar de  $\{y_0\} = P_M(x)$

**Teorema 2.1:** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico,  $M$  un subconjunto no vacío de  $E$  y  $x \in E$ . Entonces existe una sucesión  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $M$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) = d(x, M)$$

A la sucesión  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  se le llama una **sucesión minimizante** para  $x$  en  $M$

**Demostración:**

Denotemos

$$\delta = d(x, M) = \inf \{ d(x, y) \mid y \in M \}$$

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , entonces por las propiedades del ínfimo existe un  $y_n \in M$  tal que

$$\delta \leq d(x, y_n) < \delta + \frac{1}{n}$$

Luego,

$$\delta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) \leq \delta$$

o sea que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) = \delta = d(x, M)$$

Así pues  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión minimizante para  $x$  en  $M$

A continuación probaremos un teorema de existencia de la Mejor Aproximación para conjuntos compactos.

**Teorema 2.2:** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico,  $M$  un subconjunto compacto no vacío de  $E$  y  $x \in E$ . Entonces,  $P_M(x) \neq \emptyset$

**Demostración:**

Por el Teorema 2.1, existe una sucesión  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $M$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) = d(x, M).$$

Como  $M$  es compacto, la sucesión  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  posee una subsucesión convergente  $\{y_{n_k}\}_{n_k=1}^{\infty}$  en  $M$ . Sea  $y_0 \in M$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0$$

entonces, por la continuidad de la métrica,

$$d(x, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x, y_{n_k}) = d(x, M)$$

Por lo tanto,  $y_0 \in P_M(x)$  y  $P_M(x) \neq \emptyset$ .

Finalizaremos esta sección puntualizando que si  $(E, d)$  es un espacio métrico y  $x \in E$ , entonces todo subconjunto no vacío  $M$  de  $E$  define una función

multivaluada  $P_M$  de  $E$  en el conjunto  $\mathcal{P}(E)$  de partes de  $E$ . Si  $P_M(x)$  es un conjunto unitario, para todo  $x \in E$ , entonces  $P_M$  define una función univaluada

$$\begin{aligned} P_M: E &\rightarrow M \\ x &\rightarrow P_M(x) \end{aligned}$$

donde  $P_M(x)$  es la mejor aproximación a  $x$  por elementos de  $M$

## 2.2 La Mejor Aproximación en Espacios Normados.

En esta sección presentaremos un teorema de existencia de la mejor aproximación para subespacios de dimensión finita en un espacio normado

Recordemos que todos los espacios vectoriales considerados en este trabajo son reales

**Teorema 2.3:** Sea  $X$  un espacio normado y  $M$  un subespacio de dimensión finita de  $X$ . Entonces, para todo  $x \in X$ ,  $P_M(x) \neq \emptyset$

**Demostración:**

Sea  $x \in X$  y consideremos la bola cerrada de  $M$

$$\tilde{B}_x = \{ y \in M : \|y\| \leq 2\|x\| \}$$

Como  $0 \in \tilde{B}_x$ , se tiene que

$$d(x, \tilde{B}_x) = \inf \{ \|x - z\| : z \in \tilde{B}_x \} \leq \|x\|$$

Ahora bien, si  $y \in M - \tilde{B}_x$ , entonces  $\|y\| > 2\|x\|$ , más aún

$$\begin{aligned}
 \|x - y\| &\geq \|y\| - \|x\| \\
 &> 2\|x\| - \|x\| \\
 &= \|x\| \\
 &\geq d(x, \tilde{B}_x)
 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$d(x, \tilde{B}_x) = d(x, M)$$

o sea que

$$P_M(x) = P_{\tilde{B}_x}(x)$$

Ahora bien,  $M$  es un subespacio de dimensión finita y  $\tilde{B}_x$  es un subconjunto cerrado y acotado de  $M$ . Por lo tanto,  $\tilde{B}_x$  es un subconjunto compacto de  $M$ . Así,  $\tilde{B}_x$  es un subconjunto compacto de  $X$ . Luego por el Teorema 2.2,  $P_{\tilde{B}_x}(x) \neq \emptyset$ . De donde,  $P_M(x) \neq \emptyset$ .

**Ejemplo 2.2:** Sea  $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  el espacio normado de las funciones continuas  $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , con la norma

$$\|x\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

Consideremos las funciones  $1, t, t^2, \dots, t^n$  y  $M = [1, t, t^2, \dots, t^n]$  el subespacio de  $X$  generado por estas funciones

Como  $M$  es un subespacio de dimensión finita de  $X$ , por el Teorema 2.3

$P_M(x) \neq \emptyset$  para todo  $x \in X$ , es decir, existe un polinomio  $p_n(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$  de grado

a lo sumo igual a  $n$  tal que

$$\|x - p_n\| \leq \max_{t \in [a,b]} \left| x(t) - \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i \right| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

para todo  $y \in M$

Una pregunta natural es si la hipótesis de que  $M$  es de dimensión finita en el Teorema 2.3 es necesaria. La respuesta a esta pregunta la presentamos en el siguiente ejemplo

**Ejemplo 2.3:** Sea  $X = \mathcal{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$  con la norma

$$\|x\| = \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x(t)|$$

Sea  $M$  el conjunto de todos los polinomios definidos sobre el intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$

Es claro que  $M$  es un subespacio de dimensión infinita de  $X$

Consideremos la función

$$x: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

Es claro que  $x \in X$  y

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

o sea que la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $M$ , definida por

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^n t^i$$

converge a  $x$  en  $X$ , o sea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$$

Por lo tanto,

$$d(x, M) = 0$$

Si  $y_0 \in P_M(x)$ , entonces  $\|x - y_0\| = 0$ , o sea que  $x = y_0 \in M$ . Pero esto es una contradicción, ya que  $x$  no es un polinomio. Así,  $P_M(x) = \emptyset$ .

Por consiguiente, la hipótesis en el Teorema 2.3 de que  $M$  es de dimensión finita es necesaria.

Si bien es cierto que el Teorema 2.3 nos resuelve la pregunta sobre la existencia de la mejor aproximación para subespacios de dimensión finita de un espacio normado, este no nos ofrece ninguna información acerca de la unicidad de la mejor aproximación. En el siguiente ejemplo mostraremos que bajo las condiciones del Teorema 2.3 se puede tener que  $P_M(x)$  es un conjunto infinito.

**Ejemplo 2.4:** Sea  $X = \mathbb{R}^2$  con la norma  $\|\cdot\|_1$  definida por

$$\|(a, b)\|_1 = |a| + |b|$$

Consideremos el subespacio  $M$  de  $X$  definido por

$$M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\}$$

y sea  $x = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$

Sea  $y = (a, b) \in M$ , entonces  $a = b$  y

$$\begin{aligned} \|x - y\|_1 &= \|(1 - a, -1 - b)\|_1 \\ &= |1 - a| + |1 + b| \\ &= |1 - a| + |1 + a| \\ &\geq |(1 - a) + (1 + a)| \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(x, M) \geq 2$$

Por otro lado, como  $(0, 0) \in M$ , se tiene que

$$d(x, M) \leq \|(1, -1) - (0, 0)\|_1 = |1| + |1| = 2$$

Por consiguiente,  $d(x, M) = 2$ .

Tomemos ahora  $y = (a, a) \in M$  con  $-1 \leq a \leq 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \|x - y\|_1 &= |1 - a| + |1 + a| \\ &= 1 - a + 1 + a \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\{(a, a) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq a \leq 1\} \subset P_M((1, -1))$$

Más precisamente,

$$P_M((1, -1)) = \{(a, a) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq a \leq 1\}$$

el cual es un conjunto infinito

**Teorema 2.4:** Sea  $X$  un espacio normado,  $M$  un subespacio de  $X$  y  $x \in X$

Si  $P_M(x) \neq \emptyset$ , entonces  $P_M(x)$  es un conjunto convexo

**Demostración:**

Sea  $y_1, y_2 \in P_M(x)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ , entonces

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d(x, M)$$

luego,  $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in M$  y

$$\begin{aligned} \|x - [\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2]\| &= \|x - \lambda y_1 - (1 - \lambda)y_2\| \\ &= \|x + \lambda x - \lambda x - \lambda y_1 - (1 - \lambda)y_2\| \\ &= \|(\lambda x - \lambda y_1) + (1 - \lambda)x - (1 - \lambda)y_2\| \\ &= \|\lambda(x - y_1) + (1 - \lambda)(x - y_2)\| \\ &\leq \lambda \|x - y_1\| + (1 - \lambda)\|x - y_2\| \\ &= \lambda d(x, M) + (1 - \lambda)d(x, M) \\ &= d(x, M) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(x, M) \leq \|x - [\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2]\| \leq d(x, M)$$

Así pues,

$$\|x - [\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2]\| = d(x, M)$$

y

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in P_M(x)$$

Por consiguiente,  $P_M(x)$  es convexo

**Observaciones:**

- 1 El Teorema 2.4 también es verdadero si  $M$  es solamente un subconjunto no vacío y convexo de  $X$
- 2 Si  $M$  es un subespacio del espacio normado  $X$ ,  $x \in X$  y  $y_1, y_2 \in P_M(x)$ , entonces por el Teorema 2.4

$$[y_1, y_2] \subset P_M(x) \cap \bar{B}(x, d(x, M)) \subset M \cap \bar{B}(x, d(x, M))$$

donde

$$[y_1, y_2] = \{ \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \cdot \lambda \in [0, 1] \}$$

y

$$\bar{B}(x, d(x, M)) = \{ z \in X \mid \|x - z\| \leq d(x, M) \}$$

Más precisamente,

$$[y_1, y_2] \subset M \cap S(x, d(x, M))$$

donde,

$$S(x, d(x, M)) = \{ z \in X \mid \|x - z\| = d(x, M) \}$$

o sea que el segmento  $[y_1, y_2]$  pertenece a la frontera de la bola cerrada  $\bar{B}(x, d(x, M))$

- 3 Es claro que la frontera de la bola cerrada  $\bar{B}(x, d(x, M))$  contiene un segmento  $[y_1, y_2]$  si y solo si, la frontera de la bola unitaria cerrada contiene un segmento. Así, si queremos unicidad en el problema de la mejor aproximación, debemos excluir las normas cuya frontera de la bola unitaria cerrada contenga un segmento  $[z_1, z_2]$

**Definición 2.2:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $\|\cdot\|$  una norma sobre  $X$

La norma  $\|\cdot\|$  es **estrictamente convexa** si para todo

$x, y \in S(0,1) = \{z \in X : \|z\| = 1\}$ ,  $x \neq y$ , se tiene que

$$\|x+y\| < 2.$$

Al espacio  $(X, \|\cdot\|)$  se le llama **espacio normado estrictamente convexo**.

En el siguiente teorema presentamos un resultado sobre la unicidad de la mejor aproximación para subespacios de un espacio normado

**Teorema 2.5:** Sea  $X$  un espacio normado estrictamente convexo y  $M$  un subespacio de  $X$ . Entonces  $P_M(x)$  posee a lo sumo un elemento, para todo  $x \in X$

**Demostración:**

Supongamos que existe un  $x \in X$  tal que  $P_M(x)$  posee más de un elemento, y

sea  $y_1, y_2 \in P_M(x)$ ,  $y_1 \neq y_2$ . Por el Teorema 2.4,

$$[y_1, y_2] = \{\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \mid \lambda \in [0,1]\} \subset P_M(x)$$

Por la observación anterior, existen  $z_1, z_2 \in X$  tales que

$$\|z_1\| = 1, \quad \|z_2\| = 1, \quad z_1 \neq z_2,$$

y

$$[z_1, z_2] \subset S(0,1) = \{z \in X : \|z\| = 1\}$$

Sea

$$w = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 \in [z_1, z_2]$$

entonces, como  $X$  es estrictamente convexo, se tiene que

$$\|w\| = \frac{1}{2}\|z_1 + z_2\| < \frac{1}{2}(2) = 1$$

Pero esto contradice el hecho de que  $w \in S(0,1)$ . Por consiguiente,  $P_M(x)$  posee a lo sumo un elemento, para todo  $x \in X$ .

#### Observaciones:

- 1 El Teorema 2.5 también es verdadero si  $M$  es un subconjunto no vacío y convexo de  $X$ .
- 2 El espacio normado  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$  del Ejemplo 2.4 no es estrictamente convexo, ya que  $P_M((1,-1))$  contiene infinitos elementos.
- 3 Todos los espacios euclidianos,  $\mathbb{R}^n$  (norma usual) son espacios normados estrictamente convexos.

**Teorema 2.6:** Todo espacio con producto interno es estrictamente convexo; o sea que las normas que provienen de un producto interno son estrictamente convexas.

#### Demostración:

Sea  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , tales que  $\|x\| = \|y\| = 1$

Denotemos

$$\alpha = \|x - y\|$$

entonces,  $\alpha > 0$

Por la ley del paralelogramo tenemos que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= -\|x - y\|^2 + 2[\|x\|^2 + \|y\|^2] \\ &= -\alpha^2 + 2(1+1) < 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|x + y\| < 2$$

y  $X$  es estrictamente convexo

### 2.3 La Mejor Aproximación en Espacios con Producto Interno.

Iniciaremos esta sección con un resultado de unicidad de la mejor aproximación para subconjuntos convexos en un espacio con producto interno

**Teorema 2.7:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subconjunto convexo de  $X$ . Entonces  $P_M(x)$  posee a lo sumo un elemento, para todo  $x \in X$

**Demostración:**

Como por el Teorema 2.6,  $X$  es un espacio estrictamente convexo, por el Teorema 2.5 y su observación (1), se tiene que  $P_M(x)$  posee a lo sumo un elemento, para todo  $x \in X$

A continuación presentaremos un resultado de existencia de la mejor aproximación para subconjuntos convexos y completos de un espacio con producto interno

**Teorema 2.8:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subconjunto no vacío, convexo y completo de  $X$ . Entonces,  $P_M(x) \neq \emptyset$ , para todo  $x \in X$

**Demostración:**

Sea  $x \in X$ . Entonces, por el Teorema 2.1, existe una sucesión  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $M$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d(x, M)$$

Por la ley del paralelogramo se tiene que

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\ &= 2 \left[ \|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 \right] - \|2x - (y_m + y_n)\|^2 \\ &= 2 \left[ \|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 \right] - 4 \left\| x - \left( \frac{1}{2} y_m + \frac{1}{2} y_n \right) \right\|^2 \end{aligned}$$

Como  $M$  es convexo,  $\frac{1}{2} y_m + \frac{1}{2} y_n \in M$ , por lo tanto

$$0 \leq \|y_n - y_m\|^2 \leq 2 \left[ \|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 \right] - 4 [d(x, M)]^2$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|y_n - y_m\| = 0$$

y  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy en  $M$ . Como  $M$  es completo, existe un

$y \in M$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

Por lo tanto,

$$\|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d(x, M)$$

Así,

$$y \in P_M(x) \quad \text{y} \quad P_M(x) \neq \emptyset$$

**Corolario 2.2:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subconjunto no vacío, convexo y completo de  $X$ . Entonces  $P_M(x)$ , es un conjunto unitario, para todo  $x \in X$ .

**Demostración:**

Esto es una consecuencia inmediata de los Teoremas 2.7 y 2.8.

**Observaciones:**

1 En base al Corolario 2.2, para todo subconjunto no vacío, convexo y completo de un espacio con producto interno  $X$ , se puede definir una función

$$\begin{aligned} P_M: X &\rightarrow M \\ x &\rightarrow P_M(x) \end{aligned}$$

donde  $P_M(x)$  es la única mejor aproximación a  $x$  por elementos de  $M$ .

Posteriormente estudiaremos en detalles las propiedades de esta función, cuando  $M$  es un subespacio de  $X$ .

2. Un caso particular del Corolario 2.2 es cuando  $M$  es un subespacio completo de  $X$ , o cuando  $M$  es un subespacio cerrado de  $X$  y  $X$  es completo

**Teorema 2.9:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subespacio completo de  $X$ . Entonces

$$x - P_M(x) \perp M$$

para todo  $x \in X$

**Demostración:**

Sea  $x \in X$  y denotemos

$$z = x - P_M(x)$$

Supongamos que  $z \notin M^\perp$ , entonces existe un  $y_1 \in M$ ,  $y_1 \neq 0$  tal que

$$\beta := \langle z, y_1 \rangle \neq 0$$

Sea

$$\alpha = \frac{\beta}{\|y_1\|^2}$$

entonces,  $\alpha y_1 \in M$  y

$$\begin{aligned} \|z - \alpha y_1\|^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\ &= \|z\|^2 - 2\alpha \langle z, y_1 \rangle + \alpha^2 \|y_1\|^2 \\ &= \|z\|^2 - \frac{2\beta}{\|y_1\|^2} \beta + \frac{\beta^2}{\|y_1\|^4} \|y_1\|^2 \\ &= \|z\|^2 - \frac{\beta^2}{\|y_1\|^2} \end{aligned}$$

$$= [d(x, M)]^2 - \frac{\beta^2}{\|y_1\|^2}$$

$$< [d(x, M)]^2$$

Por lo tanto,

$$\|z - \alpha y_1\| < d(x, M)$$

de donde,

$$\|x - P_M(x) - \alpha y_1\| < d(x, M)$$

y

$$\|x - (P_M(x) + \alpha y_1)\| < d(x, M)$$

con  $P_M(x) + \alpha y_1 \in M$  Lo que es una contradicción

Así pues,  $x - P_M(x) \in M^\perp$ , o sea,  $x - P_M(x) \perp M$ .

## 2.4 La Mejor Aproximación y Las Proyecciones Ortogonales.

Los operadores proyección de interés en los espacios con producto interno son aquellos que están relacionados con el concepto de ortogonalidad. En esta sección estudiaremos estos operadores y los relacionaremos con el concepto de mejor aproximación.

**Definición 2.3:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $P: X \rightarrow X$  un operador proyección (algebraico).  $P$  es una **proyección ortogonal** si:

$$N(P) \perp \text{Im}(P)$$

En el siguiente teorema presentaremos una caracterización de las proyecciones ortogonales

**Teorema 2.10:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $P: X \rightarrow X$  un operador proyección.  $P$  es una proyección ortogonal si y solo si

$$\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$$

para todo  $x, y \in X$

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $P$  es una proyección ortogonal, entonces  $N(P) \perp \text{Im}(P)$ . Además, por el Teorema 1.12

$$X = \text{Im}(P) \oplus N(P)$$

Sean  $x, y \in X$ , entonces existen  $m, m' \in \text{Im}(P)$  y  $n, n' \in N(P)$  tales que

$$x = m + n, \quad y = m' + n', \quad P(x) = m, \quad P(y) = m'$$

Luego,

$$\langle P(x), y \rangle = \langle m, m' + n' \rangle = \langle m, m' \rangle$$

$$\langle x, P(y) \rangle = \langle m + n, m' \rangle = \langle m, m' \rangle$$

Por lo tanto,

$$\langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle \quad \text{para todo } x, y \in X$$

$\Leftarrow$ ] Recíprocamente, supongamos que

$$\langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle$$

para todo  $x, y \in X$ . Sean  $x \in \text{Im}(P)$ ,  $y \in \text{N}(P)$ , entonces  $P(x) = x$  y  $P(y) = 0$ . Por lo tanto,

$$\langle x, y \rangle = \langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle = 0$$

Por consiguiente,  $\text{N}(P) \perp \text{Im}(P)$  y  $P$  es una proyección ortogonal

**Teorema 2.11:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $P: X \rightarrow X$  una proyección ortogonal. Entonces  $P$  es un operador lineal acotado (o sea que  $P$  es un operador proyección topológico). Además, si  $P \neq 0$ , entonces  $\|P\| = 1$

**Demostración:**

Sea  $x \in X = \text{Im}(P) \oplus \text{N}(P)$ , entonces existen  $m \in \text{Im}(P)$ ,  $n \in \text{N}(P)$  tales que

$$x = m + n, \quad P(x) = m \quad \text{y} \quad \langle P(x), n \rangle = 0.$$

Luego por el Teorema de Pitágoras

$$\|x\|^2 = \|P(x) + n\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|n\|^2$$

Por lo tanto,

$$\|P(x)\| \leq \|x\|$$

para todo  $x \in X$  y  $P$  es un operador lineal acotado y  $\|P\| \leq 1$

Por otro lado, como para todo  $x \in \text{Im}(P)$ ,

$$\|P(x)\| = \|x\|$$

se tiene que  $\|P\| = 1$ , si  $P \neq 0$

**Corolario 2.3:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $P: X \rightarrow X$  una proyección ortogonal. Entonces  $N(P)$  y  $\text{Im}(P)$  son subespacios cerrados de  $X$ .

**Demostración:**

Por el Teorema 2.11,  $P$  es un operador lineal acotado. Por lo tanto,  $I-P$  es un operador lineal acotado. Luego  $N(P)$  y  $\text{Im}(P) = N(I-P)$  son subespacios cerrados de  $X$ .

Ahora utilizaremos los resultados de la mejor aproximación para probar un teorema sobre suma directa.

**Teorema 2.12:** Sea  $X$  un espacio de Hilbert y  $M$  un subespacio cerrado de  $X$ . Entonces

$$X = M \oplus M^\perp$$

**Demostración:**

Por el Corolario 2.2, para todo  $x \in X$  existe un único  $P_M(x) \in M$  tal que

$$\|x - P_M(x)\| = d(x, M)$$

y por el Teorema 2.9,  $x - P_M(x) \in M^\perp$ . Así pues,

$$x = P_M(x) + (x - P_M(x))$$

con  $P_M(x) \in M$ ,  $x - P_M(x) \in M^\perp$ . Por lo tanto,

$$X = M + M^\perp$$

Pero como

$$M \cap M^\perp = \{0\},$$

se tiene que

$$X = M \oplus M^\perp$$

**Observación:** Del Teorema 2.12 se tiene que si  $X$  es un espacio de Hilbert y  $M$  es un subespacio cerrado de  $X$ , entonces para todo  $x \in X$ ,

$$x = P_M(x) + z$$

con  $P_M(x)$  la mejor aproximación a  $x$  por elementos de  $M$  y  $z \in M^\perp$ . Luego, por el Teorema 1.12 (b), la función

$$\begin{aligned} P: X &\rightarrow M \\ x &\rightarrow P_M(x) \end{aligned}$$

es un operador proyección. Además, como

$$N(P_M) = M^\perp \quad \text{y} \quad \text{Im}(P_M) = M$$

se tiene que  $P_M$  es una proyección ortogonal.

Por lo tanto, por el Teorema 2.11,  $P_M$  es un operador lineal acotado y

$$\|P_M\| = 1 \quad \text{si} \quad M \neq \{0\}$$

**Corolario 2.4** Sea  $X$  un espacio de Hilbert y  $M$  un subespacio cerrado de  $X$ . Entonces  $M^\perp$  es el núcleo  $N(P)$  de alguna proyección ortogonal  $P: X \rightarrow X$ , con  $M = \text{Im}(P)$ .

**Demostración:**

Por los Teoremas 2.11 y 2.12 y la observación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} P_M: X &\rightarrow X \\ x &\rightarrow P_M(x) \end{aligned}$$

donde  $P_M(x)$  es la mejor aproximación a  $x$  por elementos de  $M$ , es una proyección ortogonal y

$$N(P) = M^\perp \quad \text{y} \quad \text{Im}(P) = M$$

**Teorema 2.13:** Sea  $X$  un espacio de Hilbert y  $M$  un subespacio cerrado de  $X$ . Entonces

$$M = M^{\perp\perp}$$

**Demostración:**

Como  $M \subset M^{\perp\perp}$ , sólo debemos probar la otra inclusión. En efecto, sea  $x \in M^{\perp\perp}$ . Entonces por el Teorema 2.12

$$x = P_M(x) + z, \quad P_M(x) \in M, \quad z \in M^\perp$$

Luego

$$z = x - P_M(x) \in M^\perp$$

Por lo tanto,

$$z \in M^\perp \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$$

Así,  $z = 0$  y  $x = P_M(x) \in M$ .

Por consiguiente,

$$M^{\perp\perp} \subset M \quad \text{y} \quad M = M^{\perp\perp}$$

**Teorema 2.14:** Sea  $X$  un espacio de Hilbert y  $K$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Entonces,  $\overline{K} = X$  si y solo si  $K^\perp = \{0\}$ .

**Demostración:**

Recordemos que

$$K^\perp = [K]^\perp = (\overline{[K]})^\perp$$

Sea  $M = \overline{[K]}$  Entonces  $M$  es un subespacio cerrado de  $X$  Luego por el Teorema 2.12

$$X = M \oplus M^\perp$$

Por lo tanto,

$$M = X \text{ sí y solo sí } M^\perp = \{0\}$$

o sea

$$\overline{[K]} = X \text{ sí y solo sí } (\overline{[K]})^\perp = \{0\}$$

Así pues,

$$\overline{[K]} = X \text{ sí y solo sí } K^\perp = \{0\}$$

Finalizaremos esta sección con una importante caracterización del núcleo de una proyección ortogonal en un espacio de Hilbert

**Teorema 2.15:** Sea  $X$  un espacio de Hilbert y  $P: X \rightarrow X$  una proyección ortogonal. Entonces,

$$N(P) = (\text{Im}(P))^\perp, \text{Im}(P) = (N(P))^\perp$$

**Demostración:**

Como  $P$  es una proyección ortogonal, por el Teorema 1.12 (a),

$$X = \text{Im}(P) \oplus N(P) \text{ y } N(P) \perp \text{Im}(P)$$

Por lo tanto,

$$N(P) \subset (\text{Im}(P))^\perp$$

Recíprocamente, sea  $x \in (\text{Im}(P))^\perp$ . Entonces, existen  $a \in \text{Im}(P)$ ,  $b \in N(P)$

tal que

$$x = a + b$$

de donde

$$a = x - b \in (\text{Im}(P))^\perp$$

Por lo tanto,

$$a \in \text{Im}(P) \cap (\text{Im}(P))^\perp = \{0\}$$

de donde

$$a = 0 \quad \text{y} \quad x = b \in N(P)$$

Así pues,

$$(\text{Im}(P))^\perp \subset N(P)$$

y

$$N(P) = (\text{Im}(P))^\perp$$

Finalmente, como por el Corolario 2.3  $N(P)$  y  $\text{Im}(P)$  son subespacios cerrados de  $X$ , por el Teorema 2.13 se tiene que

$$(N(P))^\perp = (\text{Im}(P))^{\perp\perp} = \text{Im}(P)$$

## 2.5 Conjuntos Proximales y Conjuntos de Chebyshev.

Recordemos de la Sección 2.1, que si  $X$  es un espacio con producto interno y  $K$  es un subconjunto no vacío de  $X$ , entonces se puede definir una función multivaluada

$$P_M \quad X \rightarrow \mathcal{P}(X) \\ x \rightarrow P_K(x) = \{ y \in K \mid \|x - y\| = d(x, K) \}$$

llamada la **proyección métrica** sobre  $K$ .  $P_K(x)$  es el conjunto de todas las mejores aproximaciones a  $x$  por elementos de  $K$  ( $P_K(x)$  puede ser vacío)

A continuación presentamos algunas propiedades de la función distancia y la proyección métrica

**Teorema 2.16:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Entonces

- a)  $d(x + y, K + y) = d(x, K)$ , para todo  $x, y \in X$
- b)  $P_{K+y}(x + y) = P_K(x) + y$ , para todo  $x, y \in X$ , si los conjuntos en consideración son no vacíos
- c)  $d(\alpha x, \alpha K) = |\alpha| d(x, K)$ , para todo  $x \in X$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$
- d)  $P_{\alpha K}(\alpha x) = \alpha P_K(x)$ , para todo  $x \in X$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si los conjuntos en consideración son no vacíos

**Demostración:**

a) Para todo  $x, y \in X$ ,

$$\begin{aligned} d(x+y, K+y) &= \inf \{ \| (x+y) - z \| \mid z \in K+y \} \\ &= \inf \{ \| (x+y) - (u+y) \| \mid u \in K \} \\ &= \inf \{ \| x - u \| \mid u \in K \} \\ &= d(x, K) \end{aligned}$$

b) Sean  $x, y \in K$ . Entonces por (a) se tiene que

$$\begin{aligned} y_0 \in P_{K+y}(x+y) &\Leftrightarrow y_0 \in K+y \quad \text{y} \quad \| (x+y) - y_0 \| = d(x+y, K+y) \\ &\Leftrightarrow y_0 - y \in K \quad \text{y} \quad \| x - (y_0 - y) \| = d(x, K) \\ &\Leftrightarrow y_0 - y \in P_K(x) \\ &\Leftrightarrow y_0 \in P_K(x) + y \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P_{K+y}(x+y) = P_K(x) + y$$

c) Para todo  $x \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} d(\alpha x, \alpha K) &= \inf \{ \| \alpha x - z \| \mid z \in \alpha K \} \\ &= \inf \{ \| \alpha x - \alpha u \| \mid u \in K \} \\ &= |\alpha| \inf \{ \| x - u \| \mid u \in K \} \\ &= |\alpha| d(x, K) \end{aligned}$$

d) Sea  $x \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

- Si  $\alpha = 0$ , entonces como  $P_{\alpha K}(\alpha x) \neq \emptyset$ ,  $P_K(x) \neq \emptyset$ ,

$$P_{\alpha K}(\alpha x) = \alpha P_K(x) = \{0\}$$

- Supongamos que  $\alpha \neq 0$  Entonces por (c),

$$y_0 \in P_{\alpha K}(\alpha x) \Leftrightarrow y_0 \in \alpha K \quad y \quad \|\alpha x - y_0\| = d(\alpha x, \alpha K)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} y_0 \in K \quad y \quad \|\alpha x - y_0\| = |\alpha| d(x, K)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} y_0 \in K \quad y \quad \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha x - y_0\| = d(x, K)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} y_0 \in K \quad y \quad \left\| x - \frac{1}{\alpha} y_0 \right\| = d(x, K)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} y_0 \in P_K(x)$$

$$\Leftrightarrow y_0 \in \alpha P_K(x)$$

Por lo tanto,

$$P_{\alpha K}(x) = \alpha P_K(x)$$

**Corolario 2.5:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subespacio de  $X$  Entonces,

- $d(x+y, K) = d(x, K)$ , para todo  $x \in X$ ,  $y \in K$
- $P_K(x+y) = P_K(x) + y$ , para todo  $x \in X$ ,  $y \in K$ , si los conjuntos en consideración son no vacíos
- $d(\alpha x, K) = |\alpha| d(x, K)$ , para todo  $x \in X$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $P_K(\alpha x) = \alpha P_K(x)$ , para todo  $x \in X$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si los conjuntos en consideración son no vacíos

**Demostración:**

Es una consecuencia inmediata del Teorema 2.16

**Definición 2.4:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subconjunto no vacío de  $X$ .  $K$  es un **conjunto proximal** si  $P_K(x) \neq \emptyset$ , para todo  $x \in X$ .

**Definición 2.5:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subconjunto no vacío de  $X$ .  $K$  es un **conjunto de Chebyshev** si  $P_K(x)$  es un conjunto unitario, para todo  $x \in X$ .

**Observaciones:**

- 1 Todo conjunto de Chebyshev es proximal. Pero la recíproca no es cierta. En efecto, consideremos a  $\mathbb{R}^2$  con la métrica usual y

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ , el conjunto  $P_K((x, y))$  es un conjunto unitario. Sin embargo

$$P_K((0, 0)) = K.$$

Por lo tanto,  $K$  es un conjunto proximal (ver Teorema 2.2) pero no es Chebyshev.

- 2 Los subconjuntos no vacíos, convexos y completos de un espacio con producto interno son conjuntos de Chebyshev (ver Corolario 2.2).
- 3 Los subconjuntos no vacíos, convexos y cerrados (y por ende los conos convexos cerrados) de un espacio de Hilbert son conjuntos de Chebyshev.
- 4 Los subespacios cerrados en un espacio de Hilbert son conjuntos de Chebyshev.

- 5 Si  $K$  es un subconjunto no vacío, convexo y proximal del espacio con producto interno  $X$ , entonces  $K$  es un conjunto de Chebyshev (ver Observación (1) del Teorema 2.5)

**Teorema 2.17:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subconjunto no vacío de  $X$

- a)  $K$  es proximal sí y solo sí,  $K + y$  es proximal para algún  $y \in X$
- b)  $K$  es proximal sí y solo sí,  $\alpha K$  es proximal para algún  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$
- c)  $K$  es de Chebyshev sí y solo sí,  $K + y$  es de Chebyshev para algún  $y \in X$
- d)  $K$  es de Chebyshev sí y solo sí,  $\alpha K$  es de Chebyshev para algún  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

**Demostración:**

- a) Por (b) de Teorema 2.16 se tiene que

$$\begin{aligned} K \text{ es proximal} &\Leftrightarrow P_K(x) \neq \emptyset \text{ para todo } x \in X \\ &\Leftrightarrow P_K(x) + y \neq \emptyset \text{ para todo } x \in X \text{ y algún } y \in X \\ &\Leftrightarrow P_{K+y}(x+y) \neq \emptyset \text{ para todo } x \in X \text{ y algún } y \in X \\ &\Leftrightarrow P_{K+y}(x) \neq \emptyset \text{ para todo } x \in X \text{ y algún } y \in X \\ &\Leftrightarrow K+y \text{ es proximal para algún } y \in X \end{aligned}$$

De igual forma se prueba (b), (c) y (d), usando (b) y (d) del Teorema 2.16

**Teorema 2.18:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Si  $K$  es proximal, entonces  $K$  es cerrado

**Demostración.**

Supongamos que  $K$  no es cerrado, entonces existe un  $x \in X$  y una sucesión

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $K$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{y} \quad x \notin K$$

luego,

$$0 \leq d(x, K) \leq d(x, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por lo tanto,

$$d(x, K) = 0$$

Por otro lado, como  $x \notin K$ , se tiene que  $d(x, y) > 0$  para todo  $y \in K$ . Esto implica que  $P_K(x) = \emptyset$ , lo que contradice el hecho de que  $K$  es un subconjunto proximal. Por consiguiente,  $K$  es un subconjunto cerrado de  $X$ .

**Observación:** La recíproca del Teorema 2.18 es falsa, como lo muestra el siguiente ejemplo

**Ejemplo 2.5:** Consideremos el espacio  $X = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  con el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt$$

Sea

$$K = \left\{ x \in X \mid \int_0^1 x(t) dt = 0 \right\}$$

Por la linealidad de la integral, se tiene que  $K$  es un subespacio de  $X$

Probaremos que  $K$  es un subespacio cerrado de  $X$ . En efecto, sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de  $K$  y supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{y} \quad x \in X$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 x(t) dt \right| &= \left| \int_0^1 x(t) dt - \int_0^1 x_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |x(t) - x_n(t)| dt \\ &\leq \int_{-1}^1 |x(t) - x_n(t)| dt \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 x(t) dt \right| &\leq \left[ \int_{-1}^1 |x(t) - x_n(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-1}^1 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \|x - x_n\| \end{aligned}$$

pero como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$$

se tiene que

$$\left| \int_0^1 x(t) dt \right| = 0$$

Así,

$$\int_0^1 x(t) dt = 0 \quad \text{y} \quad x \in K$$

Lo que implica que  $K$  es un subespacio cerrado de  $X$

Consideremos ahora el elemento  $x \in X$  definido por

$$x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x(t) = 1$$

Luego, para cada  $y \in K$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \int_{-1}^1 |x(t) - y(t)|^2 dt \\ &= \int_{-1}^0 |1 - y(t)|^2 dt + \int_0^1 |1 - y(t)|^2 dt \\ &= \int_{-1}^0 |1 - y(t)|^2 dt + \int_0^1 [1 - 2y(t) + (y(t))^2] dt \\ &= \int_{-1}^0 |1 - y(t)|^2 dt + 1 + \int_0^1 (y(t))^2 dt \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

y se obtiene la igualdad si

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Pero ningún elemento  $y \in K$  satisface esta condición

Por consiguiente,

$$d(x, K) \geq 1 \quad \text{y} \quad \|x - y\| > 1$$

para todo  $y \in K$

Por otro lado, para cada  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$  definamos el elemento  $y_\varepsilon \in K$  por

$$y_\varepsilon: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t \leq -\varepsilon \\ -\frac{t}{\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon < t \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|x - y_\varepsilon\|^2 &= \int_{-1}^1 |1 - y_\varepsilon(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\varepsilon}^0 \left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right)^2 dt + \int_0^1 dt \\ &= \int_{-\varepsilon}^0 dt + \frac{2}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 t dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\varepsilon}^0 t^2 dt + 1 \\ &= \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3}{3\varepsilon^2} + 1 \\ &= 1 + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$d(x, K) \leq \|x - y_\varepsilon\| = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{3}}$$

para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$  y

$$d(x, K) \leq 1$$

Así pues,

$$d(x, K) = 1 \quad \text{y} \quad \|x - y\| > 1$$

para todo  $y \in K$

De donde,

$$P_K(x) = \phi$$

Esto prueba que  $K$  es un subespacio cerrado de  $X$  que no es proximal.

Una consecuencia inmediata del Ejemplo 2.5 es que el espacio  $X = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt$$

no es completo (o sea que  $X$  no es un espacio de Hilbert) ya que posee un subespacio cerrado que no es de Chebyshev (ver Observación (4) posterior a la Definición 2.5)

## 2.6. La Mejor Aproximación y Compacidad.

En esta sección introduciremos dos definiciones de compacidad, usando el concepto de mejor aproximación, y las compararemos con la definición de compacidad usual.

Las nociones de compacidad presentadas en esta sección serán definidas sobre espacios con producto interno reales, aunque ellas pueden ser presentadas en espacios normados reales.

**Definición 2.6:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subconjunto no vacío de  $X$ .  $K$  es **aproximativamente compacto** si cada sucesión minimizante

de  $K$  posee una subsucesión convergente en  $K$ . Es decir, si  $x \in X$  y  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión en  $K$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d(x, K)$$

entonces,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  posee una subsucesión convergente en  $K$

**Observación:** Por el Teorema 2.1 para todo subconjunto no vacío  $K$  de un espacio con producto interno  $X$  y  $x \in X$ , existe una sucesión minimizante  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  para  $x$ . Más aún,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión acotada, ya que

$$\|y_n\| \leq \|y_n - x\| + \|x\| \longrightarrow d(x, K) + \|x\|$$

**Teorema 2.19:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Si  $K$  es aproximativamente compacto, entonces  $K$  es proximal

**Demostración:**

Sea  $x \in X$ . Entonces por el Teorema 2.1, existe una sucesión  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $K$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d(x, K)$$

o sea que  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión minimizante para  $x$

Como  $K$  es aproximativamente compacto, la sucesión  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  posee una subsucesión convergente  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , digamos a  $y \in K$

Luego,

$$\|x - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y_{n_k}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d(x, K).$$

Por lo tanto,  $y \in P_K(x)$ . De donde,  $P_K(x) \neq \emptyset$  para todo  $x \in X$ , lo que implica que  $K$  es proximal.

La recíproca del Teorema 2.19 no es verdadera, como lo muestra el siguiente ejemplo

**Ejemplo 2.6:** Consideremos el espacio de las sucesiones

$$X = \ell_2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

con el producto interno definido por

$$\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

Definamos el conjunto  $K$  como sigue

$$K = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \mid \|x\| = 1 \right\}$$

Probaremos que  $K$  es proximal. En efecto, para  $0 \in \ell_2$  se tiene que

$$\begin{aligned} d(0, K) &= \inf \left\{ \|0 - y\| \mid y \in K \right\} \\ &= \inf \left\{ \|y\| \mid y \in K \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Además,

$$\|0 - y\| = \|y\| = 1$$

para todo  $y \in K$ . Por lo tanto,  $P_K(0) = K$ .

Sea  $x \in \ell_2$ ,  $x \neq 0$ , entonces  $\frac{x}{\|x\|} \in K$  y

$$\left\| x - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left| 1 - \frac{1}{\|x\|} \right| \|x\| = |\|x\| - 1|$$

Por otro lado, para todo  $y \in K$  con  $y \neq \pm \frac{x}{\|x\|}$ ,

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + 1 \end{aligned}$$

luego, como  $\{x, y\}$  es linealmente independiente,

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \sqrt{\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + 1} \\ &\geq \sqrt{\|x\|^2 - 2|\langle x, y \rangle| + 1} \\ &> \sqrt{\|x\|^2 - 2\|x\| + 1} \\ &= \sqrt{(\|x\| - 1)^2} \\ &= |\|x\| - 1| \\ &= \left\| x - \frac{x}{\|x\|} \right\| \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \left\| x - \left( -\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| &= \left\| x + \frac{x}{\|x\|} \right\| \\ &= |\|x\| + 1| \\ &= \|x\| + 1 \\ &\geq |\|x\| - 1| \end{aligned}$$

Así pues,

$$\left\| x - \frac{x}{\|x\|} \right\| = d(x, K)$$

Por consiguiente,

$$P_K(x) = \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

y  $K$  es un subconjunto proximal de  $\ell_2$

Probaremos que  $K$  no es aproximativamente compacto. En efecto, sea  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$

la sucesión en  $K$  definida por

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Note que

$$d(0, K) = 1 = \|e_n\| = 1,$$

para todo  $n$

Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|0 - e_n\| = 1 = d(0, K)$$

y  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión minimizante para 0. Sin embargo, la sucesión

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  no posee subsucesión convergente, ya que

$$\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

para todo  $n \neq m$ . Así pues,  $K$  no es aproximativamente compacto.

**Teorema 2.20:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subconjunto no vacío, convexo y completo de  $X$ . Entonces  $K$  es aproximativamente compacto.

**Demostración:**

Sea  $x \in X$  y  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $K$ , minimizante para  $x$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d(x, K).$$

Luego, por la ley del paralelogramo

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\ &= 2 \left[ \|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 \right] - \|(x - y_m) + (x - y_n)\|^2 \\ &= 2 \left[ \|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 \right] - \|2x - (y_m - y_n)\|^2 \\ &= 2 \left[ \|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 \right] - 4 \left\| x - \left( \frac{1}{2} y_m + \frac{1}{2} y_n \right) \right\|^2 \end{aligned}$$

Como  $K$  es convexo,

$$\left\| x - \left( \frac{1}{2} y_m + \frac{1}{2} y_n \right) \right\| \geq d(x, K)$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \|y_n - y_m\|^2 \leq 2 \left[ \|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 \right] - 4 d(x, K)$$

y

$$\|y_n - y_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

De lo anterior se tiene que  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy en  $K$ . Como  $K$

es completo,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  es convergente en  $K$ .

Así pues,  $K$  es aproximativamente compacto.

**Observación:** Todo conjunto compacto es aproximativamente compacto. Sin embargo, la recíproca no es cierta, ya que en un espacio de Hilbert  $X$  de dimensión infinita, el conjunto

$$K = \overline{B}(0, 1) = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

no es compacto, pero sí es aproximativamente compacto ya que  $K$  es convexo y completo (ver Teorema 2.20).

**Definición 2.7:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subconjunto no vacío de  $X$ .  $K$  es **acotadamente compacto** si toda sucesión acotada de elementos de  $K$  posee una subsucesión convergente.

**Observación:** Todo conjunto compacto es, obviamente, acotadamente compacto. Sin embargo, la recíproca no es cierta, ya que el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  con el producto interno usual (métrica usual) no es compacto, pero sí acotadamente compacto (propiedad de Bolzano – Weierstrass).

**Teorema 2.21** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Si  $K$  es acotadamente compacto, entonces  $K$  es aproximativamente compacto.

**Demostración:**

Sea  $x \in K$  y sea  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $K$  minimizante para  $x$ . Luego,

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión acotada de  $K$ . Como  $K$  es acotadamente compacto,

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  posee una subsucesión convergente en  $K$ . Por consiguiente,  $K$  es aproximativamente compacto.

La recíproca del Teorema 2.21 es falsa, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.7:** Consideremos el espacio de las sucesiones

$$X = \ell_2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

con producto interno definido por

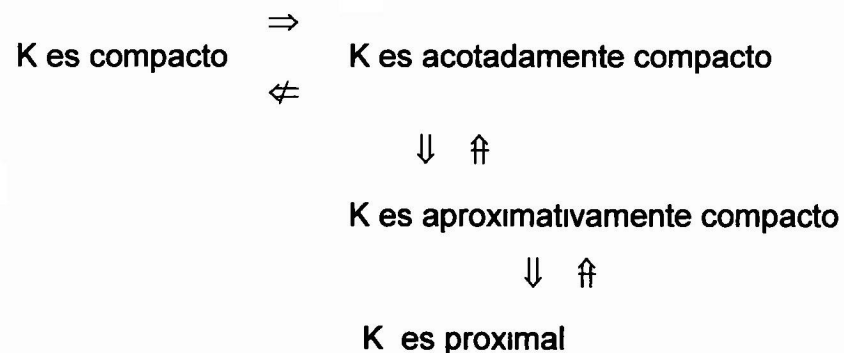
$$\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

y

$$K = \overline{B}(0, 1) = \{y \in \ell_2 \mid \|y\| \leq 1\}$$

Como  $K$  es convexo y completo, por el Teorema 2.20,  $K$  es aproximativamente compacto. Por otro lado, la sucesión  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  definida en el Ejemplo 2.6, es una sucesión acotada de  $K$ , la cual no posee subsucesión convergente. Esto implica que  $K$  no es acotadamente compacto.

Los resultados anteriores se pueden sintetizar en el siguiente diagrama:



**Teorema 2.22:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $Y$  un subespacio de dimensión finita de  $X$

- a) Si  $K$  es un subconjunto cerrado de  $Y$ , entonces  $K$  es un subconjunto proximal de  $X$
- b) Si  $K$  es un subconjunto cerrado y convexo de  $Y$ , entonces  $K$  es un subconjunto de Chebyshev de  $X$
- c)  $Y$  es un subespacio de Chebyshev de  $X$

**Demostración:**

- a) Supongamos que  $K$  es un subconjunto cerrado de  $Y$

Probaremos que  $K$  es aproximativamente compacto en  $X$ . En efecto, sea  $x \in X$  y  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión minimizante en  $K$  para  $x$ . Luego  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión acotada en  $X$ , y por lo tanto en  $Y$ . Como  $Y$  es de dimensión finita, existe una subsucesión  $\{y_{n_k}\}_{n_k=1}^{\infty}$  de  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $y_0 \in Y$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0$$

Como  $K$  es cerrado,  $y_0 \in K$ . Por lo tanto,  $K$  es aproximativamente compacto. Así, por el Teorema 2.19,  $K$  es un subconjunto proximal de  $X$ .

- b) Esto es consecuencia directa de (a) y el teorema 2.7
- c) Esto es consecuencia directa de (b)

**Ejemplo 2.8:** Sea

$$X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / x \text{ es continua}\}$$

el espacio con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y(t) dt$$

Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Y$  el subespacio de  $X$  de los polinomios de grado a lo sumo igual a  $n$ , y consideremos el subconjunto de  $Y$  definido por

$$K = \{p \in Y \mid p(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in [a, b]\}$$

Probemos que  $K$  es un cono convexo de Chebyshev de  $X$ . En efecto, sean  $p_1, p_2 \in K$  y  $\alpha, \beta \geq 0$ . Entonces

$$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \geq 0$$

por lo tanto,  $\alpha p_1 + \beta p_2 \in K$  y  $K$  es un cono convexo.

Probemos que  $K$  es un subconjunto cerrado de  $Y$ . En efecto, sea  $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$  una sucesión en  $K$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = x$$

Como  $Y$  es un subespacio cerrado de  $X$ ,  $x \in Y$ . Sólo nos resta probar que  $x(t) \geq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ .

Supongamos que esto no es cierto, entonces existe un  $t_0 \in [a, b]$  tal que  $x(t_0) < 0$ . Por la continuidad de  $x$ , existe un intervalo  $[c, d]$  en  $[a, b]$ ,  $c < d$ , tal que  $t_0 \in [c, d]$  y  $x(t) \leq \frac{1}{2} x(t_0) < 0$  para todo  $t \in [c, d]$ .

Luego como  $p_m \in K$ ,

$$\begin{aligned} \|p_m - x\|^2 &= \int_a^b (p_m(t) - x(t))^2 dt \\ &\geq \int_c^d (p_m(t) - x(t))^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_c^d |x(t)|^2 dt \\
&\geq \int_c^d \left[ \frac{1}{2} |x_0(t)| \right]^2 dt \\
&= \frac{1}{4} |x_0(t)|^2 (d-c) > 0
\end{aligned}$$

para  $m \in \mathbb{N}$ . Esto contradice el hecho de que la sucesión  $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $x$ . Por consiguiente,  $x(t) \geq 0$  para todo  $t \in [a, b]$  y  $x \in K$ . Así,  $K$  es un subconjunto cerrado de  $Y$  (y de  $X$ ).

Como  $K$  es un cono convexo cerrado de  $Y$ , por el Teorema 2.22 (b),  $K$  es un cono convexo de Chebyshev de  $X$ .

**Ejemplo 2.9:** Sea  $X = \ell_2(I)$  el espacio con producto interno completo definido en el Ejemplo 1.4 (c). Consideremos el conjunto

$$K = \{x \in \ell_2(I) \mid x(i) \geq 0 \text{ para todo } i \in I\}$$

Es claro que  $K$  es un conjunto convexo de  $\ell_2(I)$ .

Probaremos que  $K$  es un conjunto cerrado de  $\ell_2(I)$ . En efecto, sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de  $K$  tal que  $x_n \rightarrow x$  en  $\ell_2(I)$ . Luego,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n(i) - x(i)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum (x_n(i) - x(i))^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i) = x(i) \text{ para todo } i \in I$$

Como  $x_n(i) \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $x(i) \geq 0$  para todo  $i \in I$ . Por consiguiente,  $x \in K$  y  $K$  es un cono convexo cerrado de  $\ell_2(I)$ .

Como  $\ell_2(I)$  es un espacio de Hilbert y  $K$  es un cono convexo cerrado de  $\ell_2(I)$ , por la observación (3) de la Definición 2.5, se tiene que  $K$  es un cono convexo cerrado de Chebyshev de  $\ell_2(I)$ .

**III CAPÍTULO**  
**CARACTERIZACIÓN DE LA MEJOR**  
**APROXIMACIÓN**

El objetivo de este capítulo es presentar teoremas de caracterización de la mejor aproximación para conjuntos convexos, conos convexos y subespacios vectoriales, los cuales son las bases para la caracterización de la mejor aproximación en espacios con producto interno. En el caso particular de que el conjunto convexo es un subespacio vectorial, obtendremos la condición de ortogonalidad, el cual para el caso de dimensión finita se reduce a un sistema de ecuaciones lineales llamado ecuaciones normadas.

En este capítulo, al igual que en los anteriores, todos los espacios vectoriales considerados son reales.

### 3.1. Caracterización de la Mejor Aproximación para Conjuntos Convexos.

**Teorema 3.1:** Sea  $X$  un espacio con producto interno,  $M$  un subconjunto convexo de  $X$ ,  $x \in X$  y  $y_0 \in M$ . Entonces  $y_0 = P_M(x)$  si y solo si

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$$

para todo  $y \in M$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $y_0 = P_M(x)$  y que existe un  $y^* \in M$  tal que

$$\langle x - y_0, y^* - y_0 \rangle > 0$$

Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , definamos el elemento  $y_\alpha$  por

$$y_\alpha = \alpha y^* + (1 - \alpha)y_0$$

Como  $M$  es un conjunto convexo,  $y_\alpha \in M$  Además,

$$\begin{aligned}
 \|x - y_\alpha\|^2 &= \langle x - y_\alpha, x - y_\alpha \rangle \\
 &= \langle x - \alpha y^* - y_0 + \alpha y_0, x - \alpha y^* - y_0 + \alpha y_0 \rangle \\
 &= \langle x - y_0 - \alpha(y^* - y_0), x - y_0 - \alpha(y^* - y_0) \rangle \\
 &= \|x - y_0\|^2 - 2\alpha \langle x - y_0, y^* - y_0 \rangle + \alpha^2 \|y^* - y_0\|^2 \\
 &= \|x - y_0\|^2 - \alpha \left[ 2 \langle x - y_0, y^* - y_0 \rangle - \alpha \|y^* - y_0\|^2 \right]
 \end{aligned}$$

Como  $\langle x - y_0, y^* - y_0 \rangle > 0$ , para  $\alpha$  suficientemente pequeño, el término dentro del paréntesis es positivo. Por lo tanto,

$$\|x - y_\alpha\|^2 < \|x - y_0\|^2$$

o sea que

$$\|x - y_\alpha\| < \|x - y_0\|,$$

para  $\alpha$  suficientemente pequeño

Esto implica que  $y_0 \neq P_M(x)$ , lo que es una contradicción. Así pues,

$$\langle x - y_0, y^* - y_0 \rangle \leq 0$$

para todo  $y \in M$

Recíprocamente, supongamos que

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$$

para todo  $y \in M$

Entonces por la desigualdad de Schwarz,

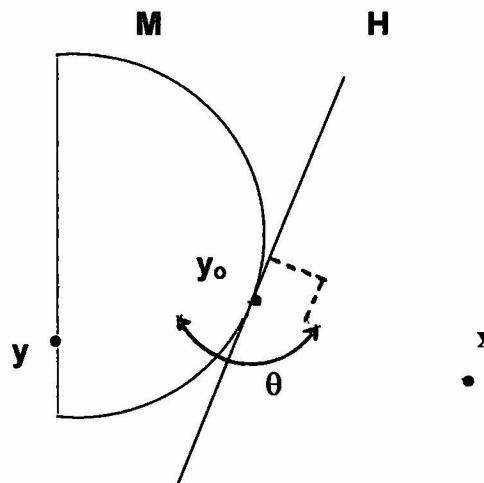
$$\begin{aligned}
 \|x - y_0\|^2 &= \langle x - y_0, x - y_0 \rangle \\
 &= \langle x - y_0, (x - y) + (y - y_0) \rangle \\
 &= \langle x - y_0, x - y \rangle + \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \\
 &\leq \langle x - y_0, x - y \rangle \\
 &\leq |\langle x - y_0, x - y \rangle| \\
 &\leq \|x - y_0\| \|x - y\|
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$$

para todo  $y \in M$ . Esto implica que  $y_0 \in P_M(x)$ . Luego como  $M$  es convexo, por el Teorema 2.7,  $y_0 = P_M(x)$  (o sea que  $P_M(x)$  es un conjunto unitario)

La interpretación geométrica del teorema anterior es que el conjunto convexo  $M$  se encuentra en uno de los hiperplanos que es ortogonal a  $x - y_0$  y pasa por  $y_0$ .



En el siguiente resultado presentamos, un tipo de unicidad fuerte para la mejor aproximación, el cual nos da un estimado cuantitativo de que tanto  $\|x - y\|$  supera a  $\|x - P_M(x)\|$  en términos de  $\|y - P_M(x)\|$

**Corolario 3.1:** Sea  $X$  un espacio con producto interno,  $M$  un subconjunto convexo y de Chebyshev de  $X$  y  $x \in X$  Entonces,

$$\|x - y\|^2 \geq \|x - P_M(x)\|^2 + \|y - P_M(x)\|^2$$

para todo  $y \in M$

**Demostración:**

Como  $M$  es un conjunto convexo y de Chebyshev de  $X$ , por el Teorema 3.1

$$\langle x - P_M(x), y - P_M(x) \rangle \leq 0$$

para todo  $y \in M$  Luego,

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(x - P_M(x)) - (y - P_M(x))\|^2 \\ &= \langle (x - P_M(x)) - (y - P_M(x)), (x - P_M(x)) - (y - P_M(x)) \rangle \\ &= \|x - P_M(x)\|^2 + \|y - P_M(x)\|^2 - 2\langle x - P_M(x), y - P_M(x) \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|x - P_M(x)\|^2 + \|y - P_M(x)\|^2 \leq \|x - y\|^2$$

para todo  $y \in M$

**Definición 3.1:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $S$  un subconjunto no vacío de  $X$  El **cono dual** o **polar negativo** de  $S$  se denota por  $S^\circ$  y se define

por

$$S^\circ = \{x \in X \mid \langle x, y \rangle \leq 0, \text{ para todo } y \in S\}$$

**Observación:** Note que

$$-S^\circ = \{x \in X \mid \langle x, y \rangle \geq 0, \text{ para todo } y \in S\}$$

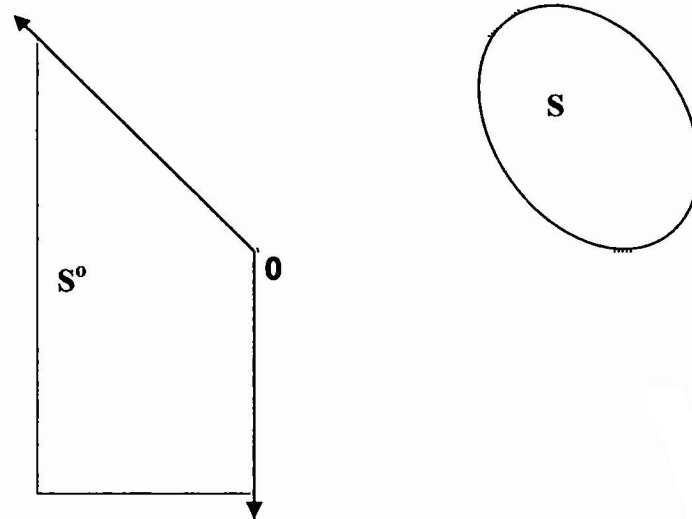
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S^\perp &= S^\circ \cap (-S^\circ) \\ &= \{x \in X \mid \langle x, y \rangle = 0, \text{ para todo } y \in S\} \end{aligned}$$

Además, si  $S \subset T$ , entonces  $T^\circ \subset S^\circ$

Geoméricamente, el cono dual  $S^\circ$  de  $S$  es el conjunto de todos los vectores de  $X$  que hacen un ángulo de al menos 90 grados con cada vector en  $S$  (Recordemos que el ángulo  $\theta$  entre los vectores no nulos  $x$ ,  $y$  se define por

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi)$$



En el siguiente corolario se presenta una caracterización de la mejor aproximación utilizando conos duales.

**Corolario 3.2:** Sea  $X$  en espacio con producto interno,  $M$  un subconjunto convexo de  $X$ ,  $x \in X$  y  $y_0 \in M$  Entonces  $y_0 = P_M(x)$  sí y solo sí

$$x - y_0 \in (M - y_0)^\circ$$

**Demostración:**

Es consecuencia inmediata del Teorema 3.1 y de la Definición 3.1

### 3.2 Caracterización de la Mejor Aproximación para Conos Convexos.

**Definición 3.2:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $S$  un subconjunto no vacío de  $X$ . La cláusula cónica de  $S$  se denota por  $\text{con}(S)$  y se define como la intersección de todos los conos convexos que contiene a  $S$ , o sea,

$$\text{con}(S) = \bigcap \{ M \subset X \mid M \text{ es un cono convexo y } S \subset M \}$$

**Teorema 3.2:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $S$  un subconjunto no vacío de  $X$ . La cláusula cónica  $\text{con}(S)$  de  $S$  es un cono convexo; o sea que  $\text{con}(S)$  es el cono convexo más pequeño que contiene al conjunto  $S$ .

**Demostración:**

Por definición

$$\text{con}(S) = \bigcap \{ M \subset X \mid M \text{ es un cono convexo y } S \subset M \}$$

Sean  $x, y \in \text{con}(S)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$

Luego para todo cono convexo  $M$  con  $S \subset M$  se tiene que  $x, y \in M$

Por lo tanto,

$$\alpha x + \beta y \in M$$

Así pues,

$$\alpha x + \beta y \in \bigcap \{ M \subset X \mid M \text{ es un cono convexo y } S \subset M \}$$

o sea que  $\alpha x + \beta y \in \text{con}(S)$  Por consiguiente,  $\text{con}(S)$  es un cono convexo

**Corolario 3.3:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $S$  un subconjunto no vacío de  $X$   
 $S$  es un cono convexo sí y solo sí  $S = \text{con}(S)$

**Teorema 3.3:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $S$  un subconjunto no vacío de  $X$   
 Entonces

$$\text{con}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid x_i \in S, \alpha_i \geq 0, n \in \mathbf{N} \right\}$$

**Demostración:**

Denotemos

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid x_i \in S, \alpha_i \geq 0, n \in \mathbf{N} \right\}$$

Como  $x = 1 \cdot x$ , para todo  $x \in S$ , se tiene que  $S \subset C$ .

Por otro lado, sean  $x, y \in C$  y  $\alpha, \beta \geq 0$ , entonces

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m \beta_i y_i$$

donde  $x_i, y_i \in S$  y  $\alpha_i, \beta_i \geq 0$  Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^m \beta_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n+m} \delta_i z_i \end{aligned}$$

donde  $\delta_i = \alpha_i$  y  $z_i = x_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , y  $\delta_i = \beta_{i-n}$  y  $z_i = y_{i-n}$  si  $n+1 \leq i \leq n+m$

Como  $z_i \in S$  y  $\delta_i \geq 0$ , se tiene que  $\alpha x + \beta y \in C$  Por consiguiente,  $C$  es un cono convexo que contiene al conjunto  $S$  Así pues  $\text{con}(S) \subset C$ .

Por otro lado, como  $\text{con}(S)$  es un cono convexo, se tiene que  $C \subset \text{con}(S)$

De todo lo anterior se tiene que

$$\text{con}(S) = C = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid x_i \in S, \alpha_i \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

**Teorema 3.4:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $S$  un subconjunto no vacío de  $X$

Si  $S$  es convexo, entonces

$$\text{con}(S) = \{ \alpha x \mid x \in S, \alpha \geq 0 \}$$

**Demostración:**

Denotemos

$$C = \{ \alpha x \mid x \in S, \alpha \geq 0 \}$$

Del Teorema 3.3 se deduce que

$$C \subset \text{con}(S)$$

Recíprocamente, sea  $y \in \text{con}(S)$ . Si  $y = 0$ , entonces obviamente  $y \in C$

Supongamos que  $y \neq 0$  Entonces por el Teorema 3.3

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i > 0, \quad x_i \in S, \quad n \in \mathbb{N}$$

Sea  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  y tomemos  $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

Luego,  $\beta_i > 0$  y  $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$  Como  $S$  es convexo,

$$x = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \in S$$

Por consiguiente,  $\alpha x \in C$  Pero,

$$\alpha x = \alpha \sum_{i=1}^n \beta_i x_i = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = y$$

de donde,  $y \in C$  Así pues  $\text{con}(S) \subset C$ .

De todo lo anterior se tiene que

$$\text{con}(S) = C = \{ \alpha x \mid x \in S, \alpha \geq 0 \}$$

**Corolario 3.4:** Sea  $X$  un espacio vectorial y  $S$  un subconjunto no vacío de  $X$ .

Si  $S$  es convexo y  $0 \in S$ , entonces

$$\text{con}(S) = \{ \alpha x \mid x \in S, \alpha > 0 \}$$

**Demostración:**

Es una consecuencia inmediata del Teorema 3.4

**Teorema 3.5:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $S$  un subconjunto no vacío de  $X$  Entonces,  $S^\circ$  es un cono convexo cerrado de  $X$

**Demostración:**

Sean  $x_1, x_2 \in S^\circ$  y  $\alpha, \beta \geq 0$  Entonces para todo  $y \in S$  se tiene que

$$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle \leq 0$$

Por consiguiente  $\alpha x_1 + \beta x_2 \in S^\circ$  y  $S^\circ$  es un cono convexo

Por otro lado, sea  $x \in \overline{S^\circ}$  Entonces existe una sucesión  $\{x_n\}$  de elementos de  $S^\circ$  tal que  $x_n \rightarrow x$

Por consiguiente, para cada  $y \in S$  se tiene que

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle \leq 0$$

o sea que  $x \in S^\circ$  Así pues,  $S^\circ$  es un cono convexo cerrado de  $X$

**Teorema 3.6:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $S$  un subconjunto no vacío de  $X$  Entonces,

a)  $S^\circ = (\overline{S})^\circ$

b)  $S^\circ = [\text{con}(S)]^\circ = [\overline{\text{con}(S)}]^\circ$

c)  $\overline{\text{con}(S)} \subset S^{\circ\circ}$

d) Si  $S$  es un cono convexo, entonces

$$(S - y)^\circ = S^\circ \cap \{y\}^\perp$$

para todo  $y \in S$

e) Si  $S$  es un subespacio de  $X$ , entonces

$$S^\circ = S^\perp$$

f) Si  $S$  es un cono convexo que es un conjunto de Chebyshev, entonces

$$S^{\circ\circ} = S$$

g) Si  $S$  es un subespacio de Chebyshev, entonces

$$S^{\circ\circ} = S^{\perp\perp} = S$$

h) Si  $X$  es un espacio de Hilbert, y  $S$  es un subconjunto no vacío de  $X$ , entonces

$$S^{\circ\circ} = \overline{\text{con}(S)}$$

$$S^{\circ\circ\circ} = S^{\circ}$$

**Demostración:**

a) Como  $S \subset \bar{S}$ , se tiene que  $(\bar{S})^{\circ} \subset S^{\circ}$  Recíprocamente, sea  $x \in S^{\circ}$

Para cada  $y \in \bar{S}$  existe una sucesión  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $S$  tal que

$y_n \rightarrow y$ , luego

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, y_n \rangle \leq 0$$

Por consiguiente  $x \in (\bar{S})^{\circ}$  y  $S^{\circ} \subset (\bar{S})^{\circ}$

Así pues  $S^{\circ} = (\bar{S})^{\circ}$ .

b) Como  $S \subset \text{con}(S)$ , se tiene que  $[\text{con}(S)]^{\circ} \subset S^{\circ}$  Recíprocamente, sea

$x \in S^{\circ}$ ,  $y \in \text{con}(S)$  Luego por el Teorema 3.3,  $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$  para algunos

$y_i \in S$ ,  $\alpha_i \geq 0$  y  $n \in \mathbb{N}$  Por lo tanto

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x, y_i \rangle \leq 0$$

Por consiguiente,  $x \in [\text{con}(S)]^{\circ}$  y  $S^{\circ} \subset [\text{con}(S)]^{\circ}$

Así pues,

$$S^\circ = [\text{con}(S)]^\circ$$

Por la parte (a) se tiene que

$$S^\circ = [\text{con}(S)]^\circ = \left[ \overline{\text{con}(S)} \right]^\circ$$

c) Sea  $x \in S$  Entonces para cualquier  $y \in S^\circ$  se tiene que

$$\langle x, y \rangle \leq 0$$

Por lo tanto,  $x \in S^{\circ\circ}$  Así pues  $S \subset S^{\circ\circ}$

Como por el Teorema 3.5,  $S^{\circ\circ}$  es un cono convexo cerrado, se tiene que

$$\overline{\text{con}(S)} \subset S^{\circ\circ}$$

d) Sea  $x \in (S-y)^\circ$ , entonces  $\langle x, z-y \rangle \leq 0$  para todo  $z \in S$  Tomando  $z = 2y$

obtenemos que  $z \in S$  y  $\langle x, y \rangle \leq 0$  Por otro lado, tomando  $z=0$ , tenemos

que  $z \in S$  y  $\langle x, -y \rangle \leq 0$ , o sea  $\langle x, y \rangle \geq 0$  Así,  $\langle x, y \rangle = 0$  Por lo tanto,

$\langle x, z \rangle \leq 0$  para todo  $z \in S$  y  $x \in \{y\}^\perp$  Así pues  $x \in S^\circ$  y  $x \in \{y\}^\perp$

Por consiguiente,  $x \in S^\circ \cap \{y\}^\perp$  y  $(S-y)^\circ \subset S^\circ \cap \{y\}^\perp$

Recíprocamente, sea  $x \in S^\circ \cap \{y\}^\perp$ , entonces  $\langle x, z \rangle \leq 0$  para todo  $z \in S$  y

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Por lo tanto,

$$\langle x, z-y \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, y \rangle \leq 0 \text{ para todo } z \in S$$

Por consiguiente,  $x \in (S-y)^\circ$  y  $S^\circ \cap \{y\}^\perp \subset (S-y)^\circ$

Así pues, si  $S$  es un cono convexo, entonces

$$(S - y)^\circ = S^\circ \cap \{y\}^\perp$$

e) Si  $S$  es un subespacio, entonces  $S = -S$  y  $S^\circ = (-S)^\circ$  Por lo tanto,

$$S^\perp = S^\circ \cap (-S)^\circ \doteq S^\circ \cap S^\circ = S^\circ$$

f) Como  $S$  es un cono convexo, por la parte (c) se tiene que

$$S = \text{con}(S) \subset \overline{\text{con}(S)} \subset S^{\circ\circ}$$

Supongamos que  $S^{\circ\circ} - S \neq \emptyset$  y sea  $x \in S^{\circ\circ} - S$  Como por hipótesis  $S$  es un conjunto de Chebyshev, existe un  $y_0 \in S$  tal que  $y_0 = P_S(x)$

Por el Corolario 3 1, se tiene que

$$x - y_0 \in (S - y_0)^\circ$$

Pero por la parte (d) se tiene

$$(S - y_0)^\circ = S^\circ \cap \{y_0\}^\perp$$

de donde,  $x - y_0 \in S^\circ \cap \{y_0\}^\perp$  Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - y_0\|^2 &= \langle x - y_0, x - y_0 \rangle \\ &= \langle x - y_0, x \rangle - \langle x - y_0, y_0 \rangle \\ &= \langle x - y_0, x \rangle \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

ya que  $x - y_0 \in S^\circ$  y  $x \in S^{\circ\circ}$  Por consiguiente,

$$x = y_0 = P_S(x) \in S$$

Lo que es una contradicción

Así púes,

$$S^{\circ\circ} - S = \phi \quad \text{y} \quad S^{\circ\circ} = S$$

- g) Se deduce directamente de las partes (e) y (f)
- h) Como  $X$  es un espacio de Hilbert y  $\overline{\text{con}(S)}$  es un conjunto convexo y cerrado de  $X$ , por la observación (3) de la Definición 2.4,  $\overline{\text{con}(S)}$  es un conjunto de Chebyshev, el cual es un cono convexo. Luego por las partes (b) y (f) se tiene que

$$S^{\circ\circ} = \left[ \overline{\text{con}(S)} \right]^{\circ\circ} = \overline{\text{con}(S)}$$

Finalmente, por la parte (b) y lo anterior, se tiene que

$$S^{\circ\circ\circ} = \left[ \overline{\text{con}(S)} \right]^{\circ} = S^{\circ}$$

**Observación:** De los Teoremas 3.5 y 3.6, se obtiene que si  $S$  es un cono convexo de Chebyshev de  $X$  entonces  $S$  es un subconjunto cerrado de  $X$ .

A continuación enunciamos otras propiedades de los conos duales

**Propiedades:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  una colección finita de subconjuntos no vacíos de  $X$ . Entonces

$$\text{a) } \left( \bigcup_{i=1}^m S_i \right)^{\circ} = \bigcap_{i=1}^m S_i^{\circ}$$

$$\text{b) } \overline{\sum_{i=1}^m S_i} \subset \left( \bigcap_{i=1}^m S_i \right)^{\circ}$$

c) Si  $0 \in \bigcap_{i=1}^m S_i$ , entonces

$$\left( \bigcap_{i=1}^m S_i \right)^{\circ} = \left( \sum_{i=1}^m S_i \right)^{\circ}$$

Si  $X$  es un espacio de Hilbert y los  $S_i$  son conos convexos cerrados, entonces

$$\left( \bigcap_{i=1}^m S_i \right)^{\circ} = \overline{\sum_{i=1}^m C_i^{\circ}}.$$

A continuación presentamos una caracterización de la mejor aproximación para conos convexos, en la cual se obtiene mayor información que en el Teorema 3.1

**Teorema 3.7:** Sea  $X$  un espacio con producto interno,  $K$  un cono convexo de  $X$ ,  $x \in X$  y  $y_0 \in K$

Los siguientes enunciados son equivalentes

- a)  $y_0 = P_K(x)$
- b)  $x - y_0 \in K^{\circ} \cap \{y_0\}^{\perp}$
- c)  $\langle x - y_0, y \rangle \leq 0$  para todo  $y \in K$  y  $\langle x - y_0, y_0 \rangle = 0$

**Demostración:**

Como  $K$  es un cono convexo, por (d) del Teorema 3.6 se tiene que

$$(K - y_0)^{\circ} = K^{\circ} \cap \{y_0\}^{\perp}$$

Luego, por el Corolario 3.2 se tiene que  $y_0 \in P_K(x)$  si y solo si  $x - y_0 \in K^\circ \cap \{y_0\}^\perp$ , o sea que (a) es equivalente a (b). Pero, obviamente (b) es equivalente a (c), por consiguiente

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$$

Como una consecuencia del Teorema 3.7, presentamos una caracterización de la mejor aproximación para el trasladado de un cono convexo

**Corolario 3.5:** Sea  $X$  un espacio con producto interno,  $C$  un cono convexo de  $X$ ,  $z \in X$ ,  $K = C + z$  y  $y_0 \in K$ . Entonces  $y_0 = P_K(x)$  si y solo si,  $\langle x - y_0, y \rangle \leq 0$  para todo  $y \in C$  y  $\langle x - y_0, y_0 - z \rangle = 0$

**Demostración:**

Como  $C$  es un cono convexo, por el Teorema 3.7,

$$y_0^* = P_C(x) \Leftrightarrow \langle x - y_0^*, y \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in C \text{ y } \langle x - y_0^*, y_0^* \rangle = 0$$

Ahora bien, por el Teorema 2.16,

$$P_K(x) = P_{C+z}(x) = P_{C+z}((x-z) + z) = P_C(x-z) + z$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_0 = P_K(x) &\Leftrightarrow y_0 = P_C(x-z) + z \\ &\Leftrightarrow y_0 - z = P_C(x-z) \\ &\Leftrightarrow \langle (x-z) - (y_0 - z), y \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in C \\ &\text{y } \langle (x-z) - (y_0 - z), y_0 - z \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \langle x - y_0, y \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in C$$

$$\text{y } \langle x - y_0, y_0 - z \rangle = 0$$

A continuación presentamos un ejemplo, en el cual se aplica el Teorema 3.7 para caracterizar la mejor aproximación para el trasladado de un cono convexo dado

**Ejemplo 3.1:** Sea

$$X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / x \text{ es continua}\}$$

con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y(t) dt$$

Tomemos  $v \in X$  y consideremos el conjunto

$$K_v = \{y \in X \mid y(t) \geq v(t) \text{ para todo } t \in [a, b]\}$$

- Note que

$$K_v = C + v$$

donde

$$C = \{y \in X \mid y(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in [a, b]\}$$

es un cono convexo, o sea  $K_v$  es el trasladado de un cono convexo. Por consiguiente,  $K_v$  es un conjunto convexo.

- Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 C^\circ &= \{x \in X. \langle x, y \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in C\} \\
 &= \{x \in X \langle x, y \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in X, y \geq 0\} \\
 &= \left\{ x \in X \int_a^b x(t) y(t) dt \leq 0 \text{ para todo } y \in X, y \geq 0 \right\} \\
 &= \{x \in X. x(t) \leq 0 \text{ para todo } t \in [a, b]\} \\
 &= -C
 \end{aligned}$$

- Sea  $x \in X$ ,  $y_0 \in C$ . Luego por el Teorema 3.7

$$\begin{aligned}
 y_0 = P_C(x) &\Leftrightarrow x - y_0 \in C^\circ \cap \{y_0\}^\perp \\
 &\Leftrightarrow x - y_0 \in (-C) \cap \{y_0\}^\perp \\
 &\Leftrightarrow x - y_0 \leq 0 \quad y \quad \langle x - y_0, y_0 \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow x - y_0 \leq 0 \quad y \quad \int_a^b (x - y_0)(t) y_0(t) dt = 0 \\
 &\Leftrightarrow x - y_0 \leq 0 \quad y \quad (x - y_0) y_0 = 0
 \end{aligned}$$

ya que  $(x - y_0) y_0 \in X$  y  $y_0 \geq 0$

Por consiguiente, como  $y_0 \in C$

$$\begin{aligned}
 y_0 = P_C(x) &\Leftrightarrow x - y_0 \leq 0 \quad y \quad y_0(t) = 0 \text{ si } x(t) - y_0(t) < 0 \\
 &\Leftrightarrow y_0(t) = \max\{x(t), 0\}
 \end{aligned}$$

Recordemos que si  $x \in X$ , entonces la función

$$x^+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x^+(t) = \max\{x(t), 0\}$$

es continua en  $[a, b]$ , o sea  $x^+ \in X$ . Luego de la equivalencia anterior se tiene que

$$y_0 = P_C(x) \Leftrightarrow y_0 = x^+$$

Así pues

$$P_C(x) = x^+$$

para todo  $x \in X$  y  $C$  es un conjunto de Chebyshev, el cual es un cono convexo.

- Por el Teorema 2.17,  $K_v = C + v$  es un conjunto de Chebyshev convexo

Luego, por el Teorema 2.16 (b), para cada  $x \in X$

$$\begin{aligned} P_{K_v}(x) &= P_{C+v}(x) \\ &= P_{C+v}(x - v + v) \\ &= P_C(x - v) + v \\ &= \max \{ x - v, 0 \} + v \\ &= \max \{ x, v \} \end{aligned}$$

Así pues, para todo  $x \in X$ ,

$$P_{K_v}(x) = \max \{ x, v \}$$

El cual caracteriza la mejor aproximación para el trasladado del cono convexo  $K_v$ .

**Ejemplo 3.2:** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  y  $\ell_2(I)$  el espacio con producto interno definido en el Ejemplo 1.4 (c). Sea

$$C = \{ x \in \ell_2(I) \mid x_i(t) \geq 0 \text{ para todo } i \in I \}$$

Similar al Ejemplo 3.1 se prueba que  $C^0 = -C$ , y que

$$y_0 = P_C(x) \text{ si y solo si } y_0 = \max\{x, 0\} = x^+$$

Por lo tanto,  $C$  es un conjunto de Chebyshev, el cual es un cono convexo

**Ejemplo 3.3:** Consideremos el espacio con producto interno

$$X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / x \text{ es continua}\}$$

el subespacio  $Y$  de  $X$  y el subconjunto  $K$  de  $Y$  definidos en el Ejemplo 2.8. Note que  $K$  es un cono convexo de Chebyshev de  $X$ .

Para el caso  $n = 0$

$$Y = \{x \in X / x \text{ es una función constante}\}$$

y

$$K = \{x \in X / x \text{ es una función constante no negativa}\}$$

Sea  $x \in X$  y  $p_0 \in K$ , entonces existe un  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \geq 0$  tal que

$$p_0(t) = a_0, \text{ para todo } t \in [a, b]$$

Por el Teorema 3.7

$$p_0 = P_K(x) \Leftrightarrow \langle x - p_0, y \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in K \text{ y } \langle x - p_0, p_0 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b (x(t) - a_0) dt \leq 0 \text{ para todo } a_0 \geq 0 \text{ y } \int_a^b (x(t) - a_0) a_0 dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b (x(t) - a_0) dt \leq 0 \text{ y } a_0 \int_a^b (x(t) - a_0) dt = 0$$

- Si  $a_0 = 0$ , entonces  $\int_a^b x(t) dt \leq 0$

- Si  $a_0 \neq 0$ , entonces  $a_0 > 0$  y

$$a_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt > 0$$

Así pues,  $P_K(x) = p_0$ , donde

$$p_0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_0(t) = \max \left\{ 0, \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt \right\}$$

**Ejemplo 3.4:** Consideremos el espacio de Hilbert  $\ell_2(I)$  y el cono convexo de Chebyshev

$$K = \{x \in \ell_2(I) : x(i) \geq 0 \text{ para todo } i \in I\}$$

del Ejemplo 2.7

Sea  $x \in X$ ,  $y_0 \in K$  Entonces por el teorema 3.7

$$y_0 = P_K(x) \Leftrightarrow \langle x - y_0, y \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in K \text{ y } \langle x - y_0, y_0 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in I} (x(i) - y_0(i)) y(i) \leq 0 \text{ para todo } y \in K \text{ y } \sum_{i \in I} (x(i) - y_0(i)) y_0(i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in I} [x(i) - y_0(i)] y(i) \leq 0 \text{ para todo } y \in K \text{ y}$$

$$\sum_{i \in I} [x(i) - y_0(i)] y_0(i) = 0$$

- Si  $i \in I - I_{y_0} = I - \{i \in I : y_0(i) \neq 0\} = I - \{i \in I : y_0(i) > 0\}$ , entonces  $y_0(i) = 0$

Definamos el elemento  $y \in K$  por

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

Como  $\langle x - y_0, y \rangle \leq 0$ , se tiene que

$$x(i) - y_0(i) \leq 0$$

por lo tanto,  $x(i) \leq y_0(i) = 0$

- Si  $i \in I_{y_0}$ , entonces  $y_0(i) > 0$ . Supongamos que  $x(i) \neq y_0(i)$ , y definamos el conjunto

$$I_{y_0}^* = \{i \in I_{y_0} \mid x(i) \neq y_0(i)\}$$

Entonces,  $I_{y_0}^* \neq \emptyset$

Para cada  $i \in I_{y_0}^*$  definamos el elemento  $y_i \in K$  por

$$y_i(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

luego,

$$\langle x - y_0, y_i \rangle = x(i) - y_0(i) \leq 0$$

de donde

$$x(i) - y_0(i) < 0, \text{ ya que } i \in I_{y_0}^*.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x - y_0, -y_0 \rangle \\ &= \sum_{i \in I} [x(i) - y_0(i)] y_0(i) \\ &= \sum_{i \in I_{y_0}} [x(i) - y_0(i)] y_0(i) \\ &= \sum_{i \in I_{y_0}^*} [x(i) - y_0(i)] y_0(i) \end{aligned}$$

pero,

$$\sum_{i \in I_{y_0}^*} [x(i) - y_0(i)] y_0(i) < 0$$

lo que es una contradicción. Por consiguiente,  $I_{y_0}^* = \emptyset$ , es decir,

$$x(i) = y_0(i) > 0 \text{ para todo } i \in I_{y_0}$$

De todo lo anterior se tiene que

$$y_0(i) = \max \{ 0, x(i) \} \text{ para todo } i \in I$$

o sea,

$$P_K(x) = x^+ = \max \{ 0, x \}$$

### 3.3 Caracterización de La Mejor Aproximación para Subespacios.

Cuando el conjunto convexo es un subespacio vectorial, la caracterización de la mejor aproximación es más sencilla y elegante, la cual se presenta en el siguiente teorema

**Teorema 3.8:** Sea  $X$  un espacio con producto interno,  $K$  un subespacio de  $X$ ,  $x \in X$  y  $y_0 \in K$ . Entonces,  $y_0 = P_K(x)$  si y solo si  $x - y_0 \in K^\perp$ . Esto es,  $y_0 = P_K(x)$  si y solo si  $\langle x - y_0, y \rangle = 0$  para todo  $y \in K$ .

**Demostración:**

Por el Corolario 3.2

$$y_0 = P_K(x) \Leftrightarrow x - y_0 \in (K - y_0)^\circ$$



**Teorema 3.9:** Sea  $X$  un espacio con producto interno,  $K$  un subespacio de  $X$  de dimensión finita  $n$ , y  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una base para  $K$ . Entonces  $K$  es un subespacio de Chebyshev, y para cada  $x \in X$ ,

$$P_K(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

donde los escalares  $\alpha_i$  están unívocamente determinados por la ecuación normal

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

En particular, si  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es una base ortonormal para  $K$ , entonces

$$P_K(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i$$

para toda  $x \in X$ , y

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

**Demostración:**

Como  $K$  es un subespacio de dimensión finita,  $K$  es completo, luego por el Corolario 2.2,  $K$  es un subespacio de Chebyshev de  $X$ . Fijemos un  $x \in X$ ,  $y_0 \in K$  entonces existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tales que

$$y_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Por el Teorema 3.8,

$$\begin{aligned} y_0 = P_K(x) &\Leftrightarrow x - y_0 \in K^\perp \\ &\Leftrightarrow \langle x - y_0, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in K \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 y_0 = P_K(x) &\Leftrightarrow \langle x - y_0, x_j \rangle = 0 \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, n \\
 &\Leftrightarrow \left\langle x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_j \right\rangle = 0 \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, n \\
 &\Leftrightarrow \langle x, x_j \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, n \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Así pues, los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  de  $y_0$  están unívocamente determinados por la ecuación normal

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

- Si  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es una base ortonormal de  $K$  entonces,

$$\alpha_j = \langle x, x_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Por consiguiente

$$P_K(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i$$

para todo  $x \in K$

Finalmente, como  $x - P_K(x) \in K^\perp$ , por el Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}
 0 \leq \|x\|^2 &= \|(x - P_K(x)) + P_K(x)\|^2 \\
 &= \|x - P_K(x)\|^2 + \|P_K(x)\|^2
 \end{aligned}$$

de donde

$$\|P_K(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

Nuevamente, por el Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}
 \|P_K(x)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \|\langle x, x_i \rangle x_i\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \|x_i\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2
 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Otra consecuencia del Teorema 3.8 es el siguiente resultado, el cual presenta una caracterización de la mejor aproximación para trasladados de un subespacio (conjunto afin)

**Corolario 3.6:** Sea  $X$  un espacio con producto interno,  $M$  un subespacio de  $X$ ,

$v \in X$  y  $K = M + v$

a) Sea  $x \in X$ ,  $y_0 \in K$  Entonces

$$y_0 = P_K(x) \text{ si y solo si } x - y_0 \in M^\perp$$

b) Sea  $x \in X$ ,  $z \in M^\perp$ . Entonces

$$P_K(x+z) = P_K(x)$$

**Demostración:**

a) Por los Teoremas 2.16 y 3.8, se tiene que

$$\begin{aligned}
 y_0 = P_K(x) &\Leftrightarrow y_0 = P_{M+v}((x-v)+v) \\
 &\Leftrightarrow y_0 = P_M(x-v) + v \\
 &\Leftrightarrow y_0 - v = P_M(x-v) \\
 &\Leftrightarrow (x-v) - (y_0 - v) \in M^\perp \\
 &\Leftrightarrow x - y_0 \in M^\perp
 \end{aligned}$$

b) Como  $z \in M^\perp$ , por la parte (a) se tiene que

$$\begin{aligned}
 y_0 = P_K(x+z) &\Leftrightarrow (x+z) - y_0 \in M^\perp \\
 &\Leftrightarrow \langle x+z-y_0, y \rangle = 0 \quad \text{para todo } y \in M \\
 &\Leftrightarrow \langle x-y_0, y \rangle = 0 \quad \text{para todo } y \in M \\
 &\Leftrightarrow x - y_0 \in M^\perp \\
 &\Leftrightarrow y_0 = P_K(x)
 \end{aligned}$$

Así pues,  $P_K(x+z) = P_K(x)$

### 3.4. Caracterización de La Mejor Aproximación para Subespacios Completos de Dimensión Infinita.

Para presentar una caracterización de la mejor aproximación para subespacios completos de dimensión infinita es necesario recordar algunos resultados del Análisis de Fourier

Primeramente, recordemos que si  $X$  es un espacio con producto interno y  $M$  es un conjunto ortonormal en  $X$ , entonces por el Teorema 1.10, para cada  $x \in X$  el

conjunto

$$M_x = \{e \in M \mid \langle x, e \rangle \neq 0\}$$

es enumerable. Más aún, si escribimos

$$M_x = \{e_1, e_2, \dots\}$$

entonces, por el Teorema 1.7

$$\sum_{e \in M} |\langle x, e \rangle|^2 = \sum_{e \in M_x} |\langle x, e \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{desigualdad de Bessel})$$

La **serie de Fourier** de  $x$  relativa al conjunto ortonormal  $M$  se define por

$$\sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e = \sum_{e \in M_x} \langle x, e \rangle e = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

si este límite existe, y es independiente del ordenamiento de los elementos  $M_x$

(Esto se probará en el Teorema 3.10). Los escalares  $\langle x, e \rangle$  son llamados los

**coeficientes de Fourier de  $x$**  relativos al conjunto  $M$ . Si  $M_x = \emptyset$ , entonces la

serie de Fourier de  $x$  es el vector  $0$ .

**Teorema 3.10:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subconjunto ortonormal de  $X$ . Si  $x \in \overline{[M]}$ , entonces

$$x = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e$$

**Demostración:**

Sea  $x \in \overline{[M]}$ . Si  $M_x = \emptyset$ , entonces  $\langle x, e \rangle = 0$  para todo  $e \in M$ . Luego,

$$x \in M^\perp = [M]^\perp = (\overline{[M]})^\perp$$

y

$$x \in [\overline{M}] \cap ([\overline{M}])^\perp = \{0\}$$

por consiguiente,  $x = 0$  y es igual a su serie de Fourier

- Supongamos que  $M_x = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  es finito. Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe un  $y \in [M]$  tal que

$$\|x - y\| < \varepsilon$$

Luego existen vectores  $s_1, s_2, \dots, s_m \in M$  y escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  tal que

$$y = \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i$$

Por el Teorema 3.9

$$\left\| x - \sum_{i=1}^m \langle x, s_i \rangle s_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i \right\| = \|x - y\| < \varepsilon$$

Note que si  $\langle x, s_m \rangle = 0$ , entonces

$$\sum_{i=1}^m \langle x, s_i \rangle s_i = \sum_{i=1}^{m-1} \langle x, s_i \rangle s_i$$

y

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i \right\|^2 &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle x, s_i \rangle + \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \\ &\geq \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \langle x, s_i \rangle + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^2 \\ &= \left\| x - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i s_i \right\|^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{m-1} \langle x, s_i \rangle s_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i s_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i \right\| = \|x - y\| < \varepsilon$$

Repetiendo este argumento, podemos eliminar los términos  $\langle x, s_i \rangle s_i$  y  $\alpha_i s_i$ ,

de las sumas  $\sum_{i=1}^m \langle x, s_i \rangle s_i$  y  $\sum_{i=1}^m \alpha_i s_i$ , respectivamente, para los cuales

$\langle x, s_i \rangle = 0$ ; o sea que  $s_i \notin M_x$ . Esto quiere decir que, sin pérdida de

generalidad, podemos tomar  $y \in [M_x] = [e_1, e_2, \dots, e_n]$ . Para estos  $y \in [M_x]$  se

tiene que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$$

Así pues,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\| < \varepsilon$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Esto implica que

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Finalmente, supongamos que  $M_x = \{e_1, e_2, \dots\}$  es un conjunto infinito

enumerable. Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe un  $y \in [M]$  tal que

$$\|x - y\| < \varepsilon.$$

Siguiendo un razonamiento similar al del caso anterior se concluye que  $y$

se puede tomar del subespacio  $[M_x]$ . Luego existe un número natural  $n$  lo

suficientemente grande tal que

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

con  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  Por el Teorema 3.9

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| = \|x - y\| < \varepsilon$$

Así pues, existe un número natural  $N$  tal que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\| < \varepsilon$$

para todo  $n \geq N$

Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = x$$

Si los elementos de  $M_x$  son ordenados de otra forma, digamos

$M_x = \{e'_1, e'_2, \dots\}$  Entonces tomemos un  $N_1$  tal que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, e'_i \rangle e'_i \right\| < \varepsilon$$

para todo  $n \geq N_1$ . Tomemos ahora un  $N_2 \geq N_1$  tal que

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{N_1}\} \subset \{e'_1, e'_2, \dots, e'_{N_2}\}$$

Luego para todo  $n \geq N_2$ ,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, e'_i \rangle e'_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon$$

por consiguiente

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \langle x, e'_i \rangle e'_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e'_i \rangle e'_i$$

El Teorema anterior nos dice que la serie de Fourier de  $x$  converge para todo  $x \in \overline{M}$  y converge al vector  $x$ . Además, la serie de Fourier no depende de la ordenación de  $M_x$ .

**Teorema 3.11:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subconjunto ortonormal de  $X$ . Si

$$x = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e \quad y \quad y = \sum_{e \in M} \langle y, e \rangle e$$

entonces,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle$$

donde

$$\sum \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$$

y  $\{e_1, e_2, \dots\}$  es cualquier enumeración del conjunto enumerable  $M_x \cup M_y$ .

**Demostración:**

Como  $x, y \in \overline{M}$ , por el Teorema 3.10 se tiene

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \langle y, e_i \rangle e_i$$

Por la continuidad del producto interno,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \langle x, e_i \rangle e_i, \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \langle y, e_i \rangle e_i \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle e_i \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle \right\rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \right\rangle
 \end{aligned}$$

y como el producto interno  $\langle x, y \rangle$  no depende de la ordenación de  $M_x \cup M_y$  se tiene que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle.$$

**Teorema 3.12:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subconjunto ortonormal de  $X$ . Consideremos los siguientes enunciados.

a)  $\overline{M} = X$

b) Para todo  $x \in X$ ,

$$x = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e$$

c) Para todo  $x, y \in X$ ,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle$$

d) Para todo  $x \in X$ ,

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in M} |\langle x, e \rangle|^2$$

e)  $M$  es un subconjunto ortonormal maximal. Esto es, que ningún conjunto ortonormal de  $X$  contiene propiamente a  $M$ .

f)  $M^\perp = \{0\}$

g) Si  $\langle x, e \rangle = \langle y, e \rangle$  para todo  $e \in M$ , entonces  $x = y$

Entonces,

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Rightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g)$$

Más aún, si  $[\overline{M}]$  es completo (o  $X$  es completo) entonces los siete enunciados son equivalentes

**Demostración:**

(a)  $\Rightarrow$  (b) Sea  $x \in X$ , entonces  $x \in [\overline{M}]$  Luego, por el Teorema 1 10

$$x = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e$$

(b)  $\Rightarrow$  (c) Fue probado en el Teorema 1 11

(c)  $\Rightarrow$  (d) Sea  $x \in X$ , entonces

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle \langle e, x \rangle \\ &= \sum_{e \in M} |\langle x, e \rangle|^2 \end{aligned}$$

(d)  $\Rightarrow$  (a) Sea  $x \in X$  y  $M_x = \{e_1, e_2, \dots\}$  Entonces

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 &= \|x\|^2 - 2 \left\langle x, \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle + \left\| \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, como  $\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \in [\overline{M}]$ , se tiene que  $x \in [\overline{M}]$  Así pues,

$$[\overline{M}] = X$$

De lo anterior se tiene que

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$$

(d)  $\Rightarrow$  (e) Supongamos que  $M$  no es un conjunto maximal. Luego, existe un

$x \in X - M$  tal que  $M \cup \{x\}$  es un conjunto ortonormal

Luego  $x \in M^\perp$  y  $\|x\| = 1$  Por lo tanto,

$$\langle x, e \rangle = 0 \text{ para todo } e \in M$$

Lo que implica que

$$\sum_{e \in M} |\langle x, e \rangle|^2 = 0$$

Pero esto contradice que

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in M} |\langle x, e \rangle|^2$$

Así pues,  $M$  es maximal como conjunto ortonormal

(e)  $\Rightarrow$  (f) Supongamos que  $M^\perp \neq \{0\}$ , entonces existen  $x \in M^\perp$  con  $x \neq 0$

Por lo tanto, el conjunto  $M \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$  es un conjunto ortonormal que contiene

propriadamente al conjunto  $M$ , lo que contradice el carácter maximal de  $M$  Por

consiguiente,  $M^\perp = \{0\}$

(f)  $\Rightarrow$  (g) Sean  $x, y \in X$  tal que

$$\langle x, e \rangle = \langle y, e \rangle, \text{ para todo } e \in M$$

Luego,

$$\langle x - y, e \rangle = 0, \text{ para todo } e \in M$$

Por lo tanto,  $x - y \in M^\perp = \{0\}$  y  $x = y$

(g)  $\Rightarrow$  (e) Supongamos que  $M$  no es un conjunto maximal, entonces existe un  $x \in X$  tal que  $M \cup \{x\}$  es un conjunto ortonormal. Luego  $x \in M^\perp$  y  $\|x\| = 1$

Por lo tanto,

$$\langle x, e \rangle = 0 = \langle 0, e \rangle, \quad \text{para todo } e \in M$$

Esto implica que  $x = 0$ , lo que es una contradicción. Así pues,  $M$  es un conjunto maximal, como conjunto ortonormal.

De todo lo anterior se deduce que

$$(d) \Rightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g)$$

En conclusión,

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Rightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g)$$

Por último, supongamos que  $\overline{M}$  es completo y probemos que (f)  $\Rightarrow$  (a). En efecto, supongamos que  $M^\perp = \{0\}$  y que  $\overline{M} \neq X$ . Sea  $x \in X - \overline{M}$ . Como  $\overline{M}$  es convexo y completo, por el Corolario 2.2,  $\overline{M}$  es un conjunto Chebyshev. Luego, por el Teorema 3.8

$$x - P_{\overline{M}}(x) \in \overline{M}^\perp = M^\perp$$

pero  $x - P_{\overline{M}}(x) \neq 0$ . Por consiguiente,  $M^\perp \neq \{0\}$ , lo que es una contradicción.

Así,  $\overline{M} = X$ .

De lo anterior se concluye que los siete enunciados de este Teorema son equivalentes.

**Corolario 3.7:** Sea  $X$  un espacio con producto interno,  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$  y  $M$  un subconjunto ortonormal de  $Y$ . Considere los siguientes enunciados

a)  $\overline{M} = Y$

b) Para todo  $x \in Y$ ,

$$x = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e$$

c) Para todo  $x, y \in Y$ ,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle$$

d) Para todo  $x \in Y$ ,

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in M} |\langle x, e \rangle|^2$$

e)  $M$  es un subconjunto ortonormal maximal de  $Y$

f)  $Y \cap M^\perp = \{0\}$

g) Sean  $x, y \in Y$ . Si

$$\langle x, e \rangle = \langle y, e \rangle, \text{ para todo } e \in M$$

entonces,  $x = y$

Entonces,

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Rightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g)$$

Más aún, si  $Y$  es completo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes

**Definición 3.3:** Sea  $X$  un espacio con producto interno  $Y$  un subespacio de  $X$  y  $M$  un subconjunto ortonormal de  $Y$ .  $M$  es una **base ortonormal** para  $Y$  si  $Y = \overline{M}$

**Observaciones:**

- 1 Si  $Y$  posee una base ortonormal, entonces  $Y$  es un subespacio cerrado de  $X$
2. Por el Corolario 3.7,  $M$  es una base ortonormal para  $Y$  si y solo si

$$x = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e$$

para todo  $x \in Y$

- 3 Si  $M$  es una base ortonormal para  $Y$  y  $M$  es un conjunto finito, entonces  $M$  es una base algebraica para  $Y$  y  $Y$  es un espacio de dimensión finita. Recíprocamente, por el proceso de Gram-Schmit, todo subespacio de dimensión finita posee una base ortonormal.
- 4 Por el Corolario 3.7, para probar que un espacio con producto interno completo tiene una base ortonormal, es suficiente probar que el espacio contiene un subconjunto ortonormal maximal.
- 5 Dado un espacio con producto interno  $X$  y  $M$  un subconjunto ortonormal de  $X$ ,  $M$  es una base ortonormal para  $X$  si y solo si  $M$  es total en  $X$ .

**Teorema 3.13:** Todo espacio con producto interno  $X \neq \{0\}$  posee un conjunto ortonormal maximal.

**Demostración:**

Sea  $\mathcal{C}$  la familia de todos los subconjuntos ortonormales de  $X$

- Como  $X \neq \{0\}$ , existe un  $x \in X$ ,  $x \neq 0$ . Luego,  $\left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$  es un subconjunto ortonormal de  $X$ . Por lo tanto,  $C \neq \emptyset$ .

- Definamos la relación  $\prec$  en  $C$  por  $M_1 \prec M_2$  si y solo si  $M_1 \subset M_2$ .

Note, que  $\prec$  es una relación de orden parcial sobre  $C$ .

Sea  $\mathcal{F}$  un subconjunto no vacío totalmente ordenado de  $C$ . y sea,

$$M^* = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} M.$$

- Sean  $x, y \in M^*$ . Como  $\mathcal{F}$  es totalmente ordenado, existe un  $M \in \mathcal{F}$  tal que  $x, y \in M$ . Por lo tanto

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Así pues,  $M^*$  es un conjunto ortonormal y  $M^* \in C$ .

Note que  $M \prec M^*$  para todo  $M \in \mathcal{F}$ . Por lo tanto,  $M^*$  es una cota superior

de  $M \in \mathcal{F}$  en  $C$ . Por el **Lema de Zorn**,  $C$  contiene un elemento maximal  $M$ .

Por consiguiente  $M$  es un subconjunto ortonormal maximal de  $X$ .

**Teorema 3.14:** Todo subespacio completo  $Y \neq \{0\}$  de un espacio con producto interno  $X$  tiene una base ortonormal. En particular, todo espacio de Hilbert tiene una base ortonormal.

**Demostración:**

Por el Teorema 3.13,  $Y$  posee un subconjunto ortonormal maximal  $M$ . Luego por la segunda parte del Corolario 3.7,  $\overline{[M]} = Y$ . Esto implica que  $M$  es una base ortonormal para  $Y$ .

En el siguiente teorema presentamos una caracterización de la mejor aproximación para subespacios completos de dimensión infinita; la cual nos dice que si se conoce una base ortonormal para el subespacio completo  $Y$  entonces, en principio, es sencillo calcular la mejor aproximación a  $x$  por elementos de  $Y$ , utilizando los resultados del Análisis de Fourier.

**Teorema 3.15:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $Y$  un subespacio completo de  $X$ . Si  $M$  es una base ortonormal para  $Y$ , entonces

$$P_Y(x) = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e$$

para todo  $x \in X$ . Es decir, que  $P_Y(x)$  es exactamente igual a la serie de Fourier de  $x$  con respecto al conjunto ortonormal  $M$ .

**Demostración:**

Por el Corolario 2.2,  $Y$  es un subespacio de Chebyshev y por el Teorema 3.14,  $Y$  posee una base ortonormal.

Sea  $M$  una base ortonormal para  $Y$  y sea  $x \in X$ ,  $y_0 = P_Y(x)$ .

Por el Corolario 3.7,

$$y_0 = \sum_{e \in M} \langle y_0, e \rangle e$$

y por el Teorema 3.8,

$$x - y_0 \in Y^\perp$$

Pero como

$$Y^\perp = [\overline{M}]^\perp = M^\perp$$

se tiene que  $x - y_0 \in M^\perp$ ; o sea

$$\langle x - y_0, e \rangle = 0, \text{ para todo } e \in M$$

es decir,

$$\langle x, e \rangle = \langle y_0, e \rangle, \text{ para todo } e \in M$$

Por consiguiente,

$$P_Y(x) = y_0 = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e$$

para todo  $x \in X$

### 3.5 La Proyección Métrica Sobre Conos Convexos.

En esta sección probaremos algunas propiedades de continuidad de la proyección métrica, cuando ella es una función univaluada (es decir,  $P_K(x)$  es un conjunto unitario para todo  $x \in X$  y  $K$  es un conjunto de Chebyshev).

**Teorema 3.16:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un cono convexo de Chebyshev de  $X$ . Entonces,

a)  $K^\circ$  es un cono convexo de Chebyshev

b) Para cada  $x \in X$ ,

$$x = P_K(x) + P_{K^o}(x) \quad \text{y} \quad P_K(x) \perp P_{K^o}(x)$$

Más aún, esta representación es única (o sea que si  $x = y + z$ ,  $y \in K$ ,

$z \in K^o$  y  $y \perp z$ , entonces  $y = P_K(x)$ ,  $z = P_{K^o}(x)$ )

c) Para cada  $x \in X$ ,

$$\|x\|^2 = \|P_K(x)\|^2 + \|P_{K^o}(x)\|^2 = [d(x, K)]^2 + [d(x, K^o)]^2$$

d)  $K^o = \{x \in X \mid P_K(x) = 0\}$  y

$$K = \{x \in X \mid P_{K^o}(x) = 0\} = \{x \in X \mid P_K(x) = x\}$$

e) Para cada  $x \in X$ ,

$$\|P_K(x)\| \leq \|x\|$$

Más aún,

$$\|P_K(x)\| = \|x\| \quad \text{sí y solo sí,} \quad P_{K^o}(x) = 0$$

es decir,

$$\|P_K(x)\| = \|x\| \quad \text{sí y solo sí,} \quad x \in K$$

f)  $K^{oo} = K$

g)  $P_K$  es positivamente homogéneo, es decir,

$$P_K(\lambda x) = \lambda P_K(x)$$

para todo  $x \in X$  y  $\lambda \geq 0$ .

**Demostración:**

a) Sea  $x \in X$  y definamos el elemento

$$y_o = x - P_K(x)$$

Entonces, por el Teorema 3.7

$$x - (x - y_0) \in K^\circ \cap \{x - y_0\}^\perp$$

luego,

$$y_0 \in K^\circ \quad \text{y} \quad y_0 \perp x - y_0$$

Por otro lado, para todo  $y \in K^\circ$  se tiene que

$$\langle x - y_0, y \rangle = \langle P_K(x), y \rangle \leq 0$$

por lo tanto,

$$x - y_0 \in (K^\circ)^\circ \quad \text{y} \quad x - y_0 \perp y_0$$

o sea

$$x - y_0 \in (K^\circ)^\circ \cap \{y_0\}^\perp$$

Aplicando nuevamente el Teorema 3.7 (pero esta vez al conjunto  $K^\circ$ ) se tiene

$$y_0 = P_{K^\circ}(x).$$

Por consiguiente,  $K^\circ$  es un conjunto proximal. Pero por el Teorema 3.5,  $K^\circ$  es un cono convexo cerrado. Así, por el Teorema 2.7,  $K^\circ$  es un cono convexo cerrado de Chebyshev.

b) Por la parte (a) se tiene que

$$x = y_0 + P_K(x) = P_{K^\circ}(x) + P_K(x) \quad \text{y} \quad P_K(x) \perp P_{K^\circ}(x)$$

Probaremos ahora la unicidad de la representación. En efecto, supongamos que

$$x = y + z, \quad y \in K, \quad z \in K^\circ, \quad y \perp z$$

Sea  $u \in K$ , entonces

$$\langle x - y, u \rangle = \langle z, u \rangle \leq 0$$

y

$$\langle x - y, y \rangle = \langle z, y \rangle = 0$$

luego,

$$x - y \in K^\circ \cap \{y\}^\perp$$

Por el Teorema 3.7, se tiene que  $y = P_K(x)$ . Similarmente,

$$x - z \in (K^\circ)^\circ \cap \{z\}^\perp$$

y

$$z = P_{K^\circ}(x)$$

Por consiguiente, la representación es única

c) Como  $x = P_K(x) + P_{K^\circ}(x)$  y  $P_K(x) \perp P_{K^\circ}(x)$ , por el Teorema de

Pitágoras, se tiene que

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|P_K(x) + P_{K^\circ}(x)\|^2 \\ &= \|P_K(x)\|^2 + \|P_{K^\circ}(x)\|^2 \\ &= \|x - P_{K^\circ}(x)\|^2 + \|x - P_K(x)\|^2 \\ &= [d(x, K^\circ)]^2 + [d(x, K)]^2 \end{aligned}$$

d) Por la parte (b) se tiene que

$$\begin{aligned} x \in K^\circ &\Leftrightarrow P_{K^\circ}(x) = x \\ &\Leftrightarrow P_K(x) = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$K^\circ = \{ x \in X \mid P_K(x) = 0 \}$$

De igual forma,

$$K = \{ x \in X : P_{K^\circ}(x) = 0 \} = \{ x \in X : P_K(x) = x \}$$

e) Sea  $x \in X$ , entonces por la parte (c),

$$\|P_K(x)\| \leq \|x\|$$

Más aún,

$$\begin{aligned} \|P_K(x)\| = \|x\| &\Leftrightarrow \|P_{K^\circ}(x)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow P_{K^\circ}(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in K \end{aligned}$$

f) Como  $K$  y  $K^\circ$  son conos convexos cerrados de Chebyshev, por (d) se tiene que

$$K^{\circ\circ} = (K^\circ)^\circ = \{ x \in X : P_{K^\circ}(x) = 0 \} = K$$

g) Sea  $x \in X$  y  $\lambda \geq 0$ . Entonces, por (b)

$$x = P_K(x) + P_{K^\circ}(x)$$

luego,

$$\lambda x = \lambda P_K(x) + \lambda P_{K^\circ}(x)$$

Como  $K$  y  $K^\circ$  son conos convexos,  $\lambda P_K(x) \in K$  y  $\lambda P_{K^\circ}(x) \in K^\circ$ .

Además,  $\lambda P_K(x) \perp \lambda P_{K^\circ}(x)$ . Luego, por la unicidad de la representación, se

tiene que

$$P_K(\lambda x) = \lambda P_K(x) \quad \text{y} \quad P_{K^\circ}(\lambda x) = \lambda P_{K^\circ}(x).$$

**Observación:** De la parte (b) del Teorema 3.16, se obtiene que

$$I = P_K + P_{K^0}$$

donde  $I: X \rightarrow X$  es el operador identidad de  $X$ . En particular, esta relación implica que determinar la mejor aproximación a  $x$  por elementos de  $\tilde{K}$  es equivalente a determinar la mejor aproximación a  $x$  por elementos de  $K^0$ . Este resultado, nos permite escoger el caso más sencillo entre el cálculo de  $P_K(x)$  y de  $P_{K^0}(x)$ .

**Corolario 3.8:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subespacio de Chebyshev de  $X$ . Entonces,

a)  $M^\perp$  es un subespacio de Chebyshev

b) Para todo  $x \in X$ ,

$$x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$$

Más aún, esta representación es única en el sentido de que si  $x = y + z$ ,  $y \in M$ ,

$z \in M^\perp$ ; entonces,  $y = P_M(x)$ ,  $z = P_{M^\perp}(x)$ .

c) Para todo  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2 \\ &= [d(x, M)]^2 + [d(x, M^\perp)]^2 \end{aligned}$$

d)  $M^\perp = \{x \in X \mid P_M(x) = 0\}$  y

$$M = \{x \in X \mid P_{M^\perp}(x) = 0\} = \{x \in X \mid P_M(x) = x\}$$

e) Para cada  $x \in X$ ,

$$\|P_M(x)\| \leq \|x\|$$

y

$$\|P_M(x)\| = \|x\| \quad \text{sí y solo sí, } x \in M$$

f  $M^{\perp\perp} = M$

g  $P_M$  es positivamente homogéneo

**Demostración:**

Como  $M$  es un subespacio de  $X$ , entonces por el Teorema 3.6 (e),  $M^\circ = M^\perp$ .

Luego, este corolario se deduce del Teorema 3.16.

**Definición 3.4** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $A, B$  subconjuntos de  $X$ .  $X$  es la **suma ortogonal** de  $A$  y  $B$ , y la denotamos por  $X = A \boxplus B$  si cada  $x \in X$  tiene una representación única de la forma  $x = a + b$ , donde  $a \in A$ ,  $b \in B$  y  $a \perp b$ .

**Teorema 3.17:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $K$  un cono convexo de  $X$ . Entonces  $K$  es de Chebyshev sí y solo sí

$$X = K \boxplus K^\circ$$

**Demostración:**

Supongamos que  $K$  es de Chebyshev, entonces por la parte (b) de Teorema 3.16 se tiene que

$$X = K \boxplus K^\circ$$

Recíprocamente, supongamos que  $X = K \boxplus K^\circ$ . Sea  $x \in X$ , entonces existe  $y \in K$ ,  $z \in K^\circ$  únicos, tales que  $y \perp z$  y  $x = y + z$ . Luego,

$$x - y \in K^\circ \quad \text{y} \quad x - y \perp y$$

o sea que

$$x - y \in K^\circ \cap \{y\}^\perp$$

Luego, por el Teorema 3.7,  $y \in P_K(x)$

Así,  $P_K(x) \neq \emptyset$  para todo  $x \in X$  y  $K$  es un conjunto proximal. Entonces, por la Observación (5) de la Definición 2.5, se tiene que,  $K$  es un conjunto de Chebyshev.

**Corolario 3.9:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subespacio de  $X$ . Entonces  $M$  es de Chebyshev si y solo si

$$X = M \oplus M^\perp$$

En particular, si  $M$  es un subespacio cerrado y  $X$  es un espacio de Hilbert, entonces

$$X = M \oplus M^\perp$$

**Demostración:** Esto es consecuencia inmediata del Teorema 3.6 (e) y el Teorema 3.17 (ver también Teorema 2.12).

**Observación:** Si  $K$  es un cono convexo del espacio con producto interno  $X$ , entonces de los Teoremas 3.16 y 3.17 se deduce que si  $X = K \boxplus K^\circ$  y  $x = y_0 + z_0$  con  $y_0 \in K$ ,  $z_0 \in K^\circ$ , entonces  $y_0 = P_K(x)$ ,  $z_0 = P_{K^\circ}(x)$

Finalizaremos esta sección con un teorema sobre la continuidad de la proyección métrica, que generaliza los resultados de la observación del Teorema 2.12

**Teorema 3.18:** Sea  $X$  un espacio con producto interno y  $M$  un subespacio de Chebyshev de  $X$ . Entonces

- a)  $P_M$  es un operador lineal acotado, y  $\|P_M\| = 1$ , y  $M \neq \{0\}$ .
- b)  $P_M$  es idempotente
- c)  $P_M$  es auto-adjunto, es decir,

$$\langle P_M(x), y \rangle = \langle x, P_M(x) \rangle$$

para todo  $x, y \in X$

- d) Para todo  $x \in X$

$$\langle P_M(x), x \rangle = \|P_M(x)\|^2$$

- e)  $P_M$  es no negativo, o sea

$$\langle P_M(x), x \rangle \geq 0$$

para todo  $x \in X$

**Demostración:**

- a) Sean  $x, y \in X$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces, por el Corolario 3.8,

$$x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x), \quad y = P_M(y) + P_{M^\perp}(y)$$

luego,

$$x - P_M(x) \in M^\perp, \quad y - P_M(y) \in M^\perp$$

Como  $M^\perp$  es un subespacio,

$$(\alpha x + \beta y) - [\alpha P_M(x) + \beta P_M(y)] \in M^\perp$$

Pero,  $\alpha P_M(x) + \beta P_M(y) \in M$ . Luego, por el Corolario 3.8 (b) se tiene que

$$P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha P_M(x) + \beta P_M(y)$$

lo que implica que  $P_M$  es un operador lineal.

Además, por el corolario 3.8 (e), se tiene que

$$\|P_M(x)\| \leq \|x\|$$

para todo  $x \in X$ . Por consiguiente,  $P_M$  es un operador lineal acotado y

$$\|P_M\| \leq 1$$

Finalmente, supongamos que  $M \neq \{0\}$ , y sea  $x \in M$ ,  $x \neq 0$ . Entonces,

$$P_M(x) = x \quad \text{y} \quad \|P_M(x)\| = \|x\| \quad \text{Por lo tanto,} \quad \|P_M\| = 1.$$

b) Sea  $x \in X$ , entonces  $P_M(x) \in M$ . Por lo tanto,

$$P_M^2(x) = P_M(P_M(x)) = P_M(x)$$

Así pues,  $P_M^2 = P_M$  y  $P_M$  es idempotente

c) Sean  $x, y \in X$ . Entonces por el Corolario 3.8 (b),

$$P_M(x) \in M, \quad y - P_M(y) \in M^\perp$$

luego,

$$\langle P_M(x), y - P_M(y) \rangle = 0$$

de donde,

$$\langle P_M(x), y \rangle = \langle P_M(x), P_M(y) \rangle$$

De igual manera se prueba que

$$\langle P_M(y), x \rangle = \langle P_M(y), P_M(x) \rangle = \langle P_M(x), P_M(y) \rangle.$$

Por consiguiente,

$$\langle P_M(x), y \rangle = \langle P_M(y), x \rangle = \langle x, P_M(y) \rangle$$

d) Tomado  $y = x$  en la demostración de (c) obtenemos

$$\langle P_M(x), x \rangle = \langle P_M(y), P_M(x) \rangle = \|P_M(x)\|^2$$

e) Es una consecuencia inmediata de (d)

### 3.6 Aplicaciones.

Finalizaremos este capítulo con unos ejemplos en los cuales se aplica directamente la teoría de la mejor aproximación desarrollada en este trabajo.

**Ejemplo 3.5:** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  no vacío y  $\ell_2(I)$  el espacio con producto interno definido en el Ejemplo 1.4 (c). El conjunto

$$M = \{e_j, j \in I\}$$

donde

$$e_j: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$e_j(i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

es un conjunto ortonormal de  $\ell_2(I)$ . Además,  $\ell_2(I)$  con la norma

$$\|x\| = \left[ \sum_{i \in I_x} x^2(i) \right]^{\frac{1}{2}}$$

es completo, o sea que  $\ell_2(I)$  es un espacio de Hilbert.

Sea  $I_0$  un subconjunto no vacío de  $I$ , y definamos el conjunto

$$Y_{I_0} = \{x \in X \mid x(i) = 0 \text{ para } i \in I - I_0\}$$

Es claro que  $Y_{I_0}$  es un subespacio de  $\ell_2(I)$

- Probaremos que  $Y_{I_0}$  es cerrado en  $\ell_2(I)$ . En efecto, sea  $x \in \overline{Y_{I_0}}$ , entonces existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $Y_{I_0}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$$

Sea

$$I^* = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{x_n} \right) \cup I_x$$

luego,  $I^*$  es un conjunto enumerable y

$$\|x - x_n\| = \left[ \sum_{i \in I^*} (x(i) - x_n(i))^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

por lo tanto

$$|x(i) - x_n(i)| \leq \left[ \sum_{i \in I^*} (x(i) - x_n(i))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \|x - x_n\|$$

para todo  $i \in I^*$

Sea  $i \in I - I_0$ . Entonces

$$i \notin I^* \Rightarrow |x(i) - x_n(i)| = 0 \leq \|x - x_n\|$$

$$i \in I^* \Rightarrow |x(i) - x_n(i)| \leq \|x - x_n\|$$

o sea que

$$|x(i) - x_n(i)| \leq \|x - x_n\|$$

para todo  $i \in I - I_0$ .

Pero  $x_n(i) = 0$  para todo  $i \in I - I_0$ , por lo tanto

$$|x(i)| \leq \|x - x_n\|$$

Así pues

$$0 \leq |x(i)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$$

Esto implica que  $x(i) = 0$  para todo  $i \in I - I_0$ . Por lo tanto,  $x \in Y_{I_0}$  y  $Y_{I_0}$  es

un subespacio cerrado del espacio de Hilbert  $\ell_2(I)$

Por la observación (4) de la Definición 2.4, se tiene que  $Y_{I_0}$  es un

subespacio completo y de Chebyshev de  $\ell_2(I)$ .

Consideremos el conjunto

$$M_{I_0} = \{e_i \mid i \in I_0\}$$

luego,  $M_{I_0}$  es un subconjunto ortonormal de  $Y_{I_0}$ .

- Probemos que  $Y_{I_0} \cap M_{I_0}^\perp = \{0\}$ . En efecto, Si  $x \in Y_{I_0} \cap M_{I_0}^\perp$ , entonces

$$x(i) = 0 \text{ para todo } i \in I - I_0$$

y

$$\langle x, e_i \rangle = x(i) = 0 \text{ para todo } i \in I_0$$

Por consiguiente,

$$x = 0 \text{ y } Y_{I_0} \cap M_{I_0}^\perp = \{0\}$$

Como  $Y_{I_0}$  es un subespacio completo de  $\ell_2(I)$ , por el Corolario 3.7 se tiene

que  $M_{I_0}$  es una base ortonormal de  $Y_{I_0}$ .

Por el Teorema 3.15, se tiene que para todo  $x \in \ell_2(I)$ ,

$$P_{Y_{I_0}} x = \sum_{e \in M_{I_0}} \langle x, e \rangle e = \sum_{i \in I_0} x(i) e_i$$

En particular, si  $I_0 = I$ , entonces

$$M_{I_0} = M \quad , \quad Y_{I_0} = \ell_2(I)$$

o sea que  $M$  es una base ortonormal para  $\ell_2(I)$ , y

$$x = \sum_{i \in I} x(i) e_i = \sum_{i \in I} x(i) e_i$$

para todo  $x \in \ell_2(I)$ .

**Ejemplo 3.6:** Sea

$$\Gamma = \{ (t_i, x(t_i)) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, 2, \dots, m \}$$

un conjunto de datos. Para cada  $n < m$  fijo, determinar un polinomio

$$p(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k$$

de grado a lo sumo  $n$ , tal que la expresión

$$\sum_{k=1}^m |x(t_k) - p(t_k)|^2$$

sea mínima

En efecto, sea  $0 \leq n < m$  fijo,  $I = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  y consideremos el espacio con

producto interno  $\ell_2(I)$  definido en el Ejemplo 1.4 (c). Denotemos por  $M$  el

subespacio de  $\ell_2(I)$  formado por los polinomios de grado a lo sumo igual a  $n$

Note que la función  $x: I \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo grafo es el conjunto  $\Gamma$  es un elemento de  $\ell_2(I)$ . Además, para todo  $p \in M$  se tiene que

$$\|x - p\|^2 = \sum |x(t_k) - p(t_k)|^2$$

Por otro lado, como  $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$  es una base para el subespacio  $M$  de

$\ell_2(I)$ , por el Teorema 3.9 se tiene que  $p(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$  es la mejor aproximación

a  $x$  por elementos de  $M$  si y solo si los  $\alpha_i$  satisfacen la ecuación normal

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \langle t^i, t^j \rangle = \langle x, t^j \rangle, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

donde

$$\langle x, t^j \rangle = \sum_{k=1}^m x(t_k) t_k^j$$

Por lo tanto, la ecuación normal (3.1) se puede escribir como

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \left( \sum_{k=1}^m t_k^{i+j} \right) = \sum_{k=1}^m x(t_k) t_k^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

En particular:

a) En el caso de la mejor aproximación a  $x$  por medio de constantes (o sea

$n=0$ ), la ecuación normal (3.2) se reduce a

$$\alpha_0 \sum_{k=1}^m 1 = \sum_{k=1}^m x(t_k)$$

de donde,

$$\alpha_0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x(t_k)$$

b) En el caso de la mejor aproximación a  $x$  por medio de polinomios lineales ( $n=1$ ),

$$c) p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$$

donde  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  están determinados por el sistema

$$\alpha_0 \sum_{k=1}^m 1 + \alpha_1 \sum_{k=1}^m t_k = \sum_{k=1}^m x(t_k)$$

$$\alpha_0 \sum_{k=1}^m t_k + \alpha_1 \sum_{k=1}^m t_k^2 = \sum_{k=1}^m t_k x(t_k)$$

o sea

$$\alpha_0 = \frac{\left( \sum_{k=1}^m t_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^m x(t_k) \right) - \left( \sum_{k=1}^m t_k \right) \left( \sum_{k=1}^m t_k x(t_k) \right)}{m \left( \sum_{k=1}^m t_k^2 \right) - \left( \sum_{k=1}^m t_k \right)^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{m \left( \sum_{k=1}^m t_k x(t_k) \right) - \left( \sum_{k=1}^m t_k \right) \left( \sum_{k=1}^m x(t_k) \right)}{m \left( \sum_{k=1}^m t_k^2 \right) - \left( \sum_{k=1}^m t_k \right)^2}$$

**Ejemplo 3.7:** Consideremos el siguiente sistema de  $m$  ecuaciones lineales

con  $n$  incógnitas

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m$$

Utilizando matrices, este sistema se puede escribir como

$$Ax = b$$

donde

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$$

En este problema se desea minimizar la expresión

$$\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right)^2$$

Para resolver este problema utilizaremos los resultados de la teoría de la mejor aproximación desarrollada en este trabajo. En efecto, sea  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  y consideremos el espacio con producto interno  $\ell_2(I)$  definido en el Ejemplo 1.4 (c)

Note que en este caso,  $\ell_2(I) = \mathbb{R}^n$  y nuestro problema equivale a encontrar un  $x \in \mathbb{R}^n$  que minimice la expresión

$$\|y - b\|^2 = \|Ax - b\|^2 = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right)^2$$

donde

$$y = Ax = \left( \sum_{j=1}^n a_{1j}, \sum_{j=1}^n a_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} \right)$$

Denotemos

$$M = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Como  $M$  es el rango de  $A$ ,  $M$  es un subespacio cerrado de  $\mathbb{R}^m$ . Por consiguiente, este problema puede ser reformulado como sigue

Determinar la mejor aproximación  $y_0 = Ax_0$  a  $b$  por elementos del subespacio  $M$  de  $\mathbb{R}^m$

Por el Teorema 3.8,  $y_0 = P_M(b)$  sí y solo sí  $b - y_0 \in M^\perp$ , es decir,

$$\langle b - y_0, Ax \rangle = 0$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto,  $y_0 = P_M(b)$  sí y solo sí

$$\langle A^t(b - y_0), x \rangle = 0$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  donde  $A^t$  es la matriz transpuesta de  $A$ . Pero,

$$\langle A^t(b - y_0), x \rangle = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A^t(b - y_0) = 0$$

Por lo tanto,

$$y_0 = P_M(b) \text{ sí y solo sí } A^t b = A^t y_0$$

Ahora bien, como  $y_0 \in M$ , existe un  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $y_0 = Ax_0$ . Por consiguiente,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es una solución de este problema si y solo si

$$A^t Ax_0 = A^t b$$

En particular, si la matriz  $A^t A$  es invertible, entonces existe una única solución  $x_0$  al problema, dada por

$$x_0 = (A^t A)^{-1} A^t b$$

Sin embargo, si  $A^t A$  no es invertible, entonces el problema tiene infinitas soluciones, las cuales son las soluciones del sistema

$$A^t Ax = A^t b$$

Queremos puntualizar que esto, de ninguna manera, contradice la unicidad de la mejor aproximación en el Corolario 2.2, ya que a pesar que existen varios  $x \in \mathbb{R}^n$  que minimizan la expresión dada, todos estos vectores tiene la propiedad de que  $Ax = y_0$ , donde  $y_0$  es la mejor aproximación (única) a  $b$  por elementos de  $M$

**Ejemplo 3.8:** Sea  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Para un número natural fijo  $n$ , se desea determinar un polinomio

$$p(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i,$$

de grado a lo sumo  $n$ , que minimice la expresión

$$\int_a^b (x(t) - p(t))^2 dt$$

En efecto, sea

$$X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / x \text{ es continua}\}$$

con el producto interno dado por

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y(t) dt$$

y  $M$  el subespacio de  $X$  de los polinomios de grado a lo sumo igual a  $n$

Como  $M$  es de dimensión finita,  $M$  es un subespacio completo, y por lo tanto cerrado, de  $X$

Usando el resultado de la teoría de la mejor aproximación, el problema consiste en determinar la mejor aproximación a  $x$  por elementos del subespacio  $M$ .

Como  $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$  es una base para  $M$ , por el Teorema 3.9 se tiene que

$$p(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$$

es la mejor aproximación  $x$  por elementos de  $M$  si y solo si los  $\alpha_i$  satisfacen la ecuación normal

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \langle t^i, t^j \rangle = \langle x, t^j \rangle, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Así pues,

$$p(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$$

es la mejor aproximación a  $x$  por elementos de  $M$  si y solo si

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \int_a^b t^{i+j} dt = \int_a^b t^j x(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

o equivalentemente

$$\sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{i+j+1} (b^{i+j+1} - a^{i+j+1}) = \int_a^b t^j x(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

En particular, la mejor aproximación a  $x$  por constantes (o sea  $n = 0$ ) está dada por

$$\alpha_0 (b - a) = \int_a^b x(t) dt$$

sea que

$$\alpha_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt$$

es el valor medio de la integral de  $x$

**BIBLIOGRAFÍA**

- 1 W Arveson A Short Course on Spectral Theory, Springer- Verlag, 2002
- 2 E Asplund Chebysev sets in Hilbert space, Trans Amer Math Soc, 1969
- 3 J.P Ausbin Applied Funtional Analysis, Wiley-Intersciencie, New York, 1979
- 4 G Bachman and L Narici, Functional Analysis, Academic University Press, Cambridge, 1996
- 6 S K Berberian, Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag, 1988.
7. M Berger, Nonlinearity and Functional Analysis, Academic Press, New York, 1977
- 8 N Boccara, Functional Analysis, an Introduction for Physicists, Academic Press, New York, 1990
- 9 B Bollobas, Linear Analysis an Introductory Course, Cambridge University Press, Cambridge, 1990
- 10 N Borubaki, Elements of Mathematics Funtions of a Real Variable Elementary Theory, Springer-Verlag, New York, 2004
- 11 D Braess, Nonlinear Approximation Theory, Springer-Verlag, New York, 1986
- 12 Conway, A course in Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1990
- 13 Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1985
- 14 F Deutsch Best Approximation in Inner Product Spaces Springer-Verlag, New York, 2001
- 15 J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003
- 16 D. Estep, Practical Analysis in One Variable, Springer-Verlag, New York, 2002
- 17 F Fabian, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, Springer-Verlag, 2001

- 18 R V Gamkrelidze (Ed), Analysis II, Springer-Verlag, New York, 1990
- 19 J Giles, Introduction to the Analysis of Normed Linear Spaces, Cambridge University Press, Cambridge, 2000
- 20 R Godement, analysis I, Springer-Verlag, New York, 2004
- 21 H G Heuser, Functional Analysis, John Wiley and Sons, New York, 1982.
- 22 H Hochstadt, Integral Equations, John Wiley and Sons, New York, 1973
- 23 L Kantorovich and G Akilov, Functional Analysis, Pergamon Press, New York, 1982
- 24 L Kantorovich and G Akilov, Functional Analysis in Normed Spaces, Macmillan, New York, 1964
- 25 R P Kanwal, Linear Integral Equations, Birkhauser, 1996
- 26 R Kress, Linear Integral Equations, Springer-Verlag, New York, 1989
- 27 E Kreyszig Introductoty Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York, 1978
- 28 C S Kubrusly, Elements of Operator Theory, Birkhauser, 2000
- 29 S Lang, Analysis II, Addiso-Wesley , Reading,Massachusetts, 1969.
- 30 S M Nikol'skii (Ed), Analysis III, Springer-Verlag, New York, 1991
- 31 E Meggison, An Introduction to Banach Space Theory, Springer-Verlag, New York, 1998
- 32 M Phillips, Interpolation and Approximation by Polinomials, Springer-Verlag, New York, 2003
33. D Portes and D Stirling; Integral Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1990
- 34 C C Pugh, Real Mathematical Analysis, Springer-Verlag, New York, 2004
- 35 G Ramm, A simple Proof of the Fredholm Alternative and a Characterization of the Fredholm Operators, Amer Math. Monthly 108 (2001), 855-860
36. M Robbera, A Conciense Approach to Mathematical Analysis, Springer-Verlag, New York, 2004
- 37 W Rudin, Functional Analysis, Mc Graw Hill, New York, 1973

- 38 K Saxe, Beginning Functional Analysis Springer-Verlag, New York, 2000
- 39 V S Sunder, Functional Analysis, Birkhäuser, Cambridge, 1998
- 40 M Takesaki, Theory of Operator Algebras I, Springer-Verlag, 2002
- 41 M Takesaki, Theory of Operator Algebras II, Springer-Verlag, 2003
- 42 M Takesaki, Theory of Operator Algebras III, Springer-Verlag, 2003
- 43 A Vretblad, Fourier Analysis and its Applications, Springer-Verlag, New York, 2003.
- 44 P Walker, Examples y Theorems in Analysis, Springer-Verlag, New York, 2004
- 45 Zeidler, Nonlinear Functinal Analysis and its Applications I Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986
- 46 V A Zorich, Mathematical Analysis I, Springer-Verlag, New York, 2004
- 47 V A Zorich, Mathematical Analysis II, Springer-Verlag, New York, 2004.