UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

EL PROCESO DE JERARQUÍA ANALÍTICA EN LA TOMA DE DECISIONES

DIGNA E. CAMARENA

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar al grado de Maestra en Ciencias con Especialidad en Investigación de Operaciones.

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

-1998-

AGRADECIMIENTO.

A Dios Todopoderoso por permitirme llegar a esta etapa de mi vida

A mi asesora Dra. Manuela Foster Vega por la ayuda y el apoyo brindado durante todo el desarrollo de este trabajo

A mis profesores, por el conocimiento brindado al impartir sus clases

A mis compañeros de estudio, por los gratos momentos que compartimos

A todos, muchas gracias

AGRADECIMIENTO.

A Dios Todopoderoso por permitirme llegar a esta etapa de mi vida.

A mi asesora Dra. Manuela Foster Vega por la ayuda y el apoyo brindado durante todo el desarrollo de este trabajo

A mis profesores, por el conocimiento brindado al impartir sus clases

A mis compañeros de estudio, por los gratos momentos que compartimos

A todos muchas gracias

DEDICATORIA.

Con todo mi cariño y amor

A mis hijos

Karen Lisseth,

Cristian Javier

A mi madre

Digna E Sanchez,

por su comprensión y apoyo

INDICE

RESUMEN

Generalmente tomar una decisión involucra situaciones complejas ya que la decisión debe tomarse teniendo en cuenta diversos criterios en conflicto que deben ser resueltos, en muchas ocasiones, considerando a varios decisores, cada uno de los cuales tiene su propio punto de vista; el método que se elija para tomar la decisión debe tomar en cuenta estas situaciones. En este trabajo se presenta "El Proceso de Jerarquía Analítica" desarrollado por Thomas Lorie Saaty como un método de ayuda para la toma de decisiones, que puede aplicarse en distintas actividades humanas.

En el Proceso de Jerarquía Analítica, los elementos básicos del problema se estructuran en niveles que representan la estructura del sistema en el que se enmarca el problema, luego, a través de simples comparaciones por pares, que reflejan la fuerza relativa de las preferencias y los sentimientos del decisor, este proceso permite tomar decisiones efectivas en problemas complejos, simplificando y aligerando el proceso natural de toma de decisiones a través de tres principios que se aplican en la solución de los problemas.

SUMARY

To make a decision, generally involves complex situations since decision should be made by taking in to account different criteria in conflict, and they should be solved various decisors in which each one has its own point of view. The method, chosen to make a decision should take in to account this situation In this work it is presented the Analytic Hierarchy Process developed by Thomas Lorie Saaty as a helping method to make decisions and it can be applied in different human activities.

In the Analytic Hierarchy Process the structure of the system in which the problems is involved, then by means of simple comparisons in pair that reflect the relative strength of preference and the sentiments of the decision make, it allows us to make decision effectively in complex problems, simplifying and fastening the natural process of making decisions by means of three principles that are applied in solving problems

INTRODUCCION

Resolver un problema de toma de decisiones se traduce en la acción de elegir, entre varias alternativas, la mejor. Esta elección está apoyada por acciones de medición de las alternativas y/o de los atributos, a través de una función objetivo, una función de utilidad, o una función de valor, entre otras. Es el caso de los problemas que se resuelven por programación lineal, dinámica, o no lineal, por los métodos de sobreclasificación y por el proceso de jerarquía analítica.

La variedad de técnicas de medición se han derivado por la consideración de algunos parámetros, tales como el riesgo o la incertidumbre en las preferencias, el número de atributos tomados en cuenta, el número de decisiones, la independencia preferencial entre los atributos, u otras serie de aspectos. El resultado es una medida única para cada alternativa, lo que las convierte, cualitativamente, en elementos comparables para los efectos de la elección.

El Proceso de Jerarquía Analítica (PJA) es un método de ayuda en la toma de decisiones, usada para evaluar alternativas descritas a través de múltiples atributos con objetivos en conflicto entre uno a más actores, este ha recibido especial atención desde su desarrollo por Thomas Lorie Saaty en 1971 para dar soluciones a problemas de planeación de contingencias militares.

Esta técnica ha probado ser una metodología útil en gran variedad de situaciones, que van desde problemas personales simples hasta problemas de decisiones complejas que involucran grandes sumas de dinero. Entre las áreas de aplicación se pueden mencionar: planificación, decisiones secuenciales, diseños, finanzas, pronósticos, mercadeo, ecología, medicina, leyes, transferencia de tecnología, sector público, hidráulica, control de vuelos, ingeniería y administración.

En 1988 Thomas Lorie Saaty publica el libro The Analytic Hierarchy Process, revisión y ampliación del libro con el mismo título publicado en 1980, en el cual expone el fundamento teórico del método. Aparte de este, se han publicado un gran número de artículos por él y otros investigadores en los que se profundiza el método, se extiende, se modifica y se vincula con otras teorías.

En este trabajo se presenta El Proceso de Jerarquía Analítica como una técnica en la Toma de Decisiones Multiatributos

El trabajo se estructura de la siguiente manera: En el Capítulo I se mencionan los componentes de un problema de Toma de Decisiones Multiatributos en forma general y se explica cómo estas componentes pueden estructurarse y dar lugar a arreglos matriciales.

En el Capítulo II se presenta una descripción del Proceso de Jerarquía Analítica, se explica cómo el proceso se desarrolla con base en tres principios fundamentales y se analizan el fundamento axiomático del proceso y algunos resultados teóricos

En el Capítulo III se ilustra el proceso en un problema de aplicación sobre selección de una cartera de inversión.

CAPITULO I
COMPONENTES DE UN PROBLEMA DE TOMA DE DECISIONES MULTIATRIBUTO

1.1. GENERALIDADES

El proceso de toma de decisiones no consiste únicamente en seleccionar una alternativa entre un conjunto de ellas. En la práctica, la toma de una decisión es el resultado de un proceso analítico que consta de varias etapas una de las cuales es la selección. Este proceso es el desarrollo de confrontaciones permanentes entre las preferencias de los interventores dentro de las esferas donde ellos se mueven. En algunos casos la decisión se reduce solo a un acto de elección final que en ocasiones es inapropiada ya que en el proceso pueden aparecer opciones intermedias no consideradas en la selección final, sobre todo cuando se selecciona con base en decisiones anteriores, que en conjunto constituyen la decisión final como síntesis de las anteriores.

La decisión puede ser tomada por un solo individuo o por un conjunto de ellos, a estos actores se les denomina decisores. El decisor es el que precisa los objetivos que se persiguen en el proceso de decisión.

Para tomar una buena decisión se deben tomar en cuenta los siguientes aspectos:

1 Enumerar la mayor cantidad de posibilidades que puedan ser consideradas como objeto de la decisión.

2. Analizar las consecuencias de cada una de las posibilidades enumeradas, con el fin de detectar sus ventajas y desventajas.

3 Evaluar las diferentes posibilidades para detectar el valor relativo o los defectos de cada una de ellas.

4 Clasificar las conclusiones de las evaluaciones de los decisores.

En resumen, hay que tener en cuenta que para tomar una buena decisión se debe contar con excelente información, un análisis científico y una deducción rigurosa.

1.2. TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO

En la segunda guerra mundial, cuando la investigación de operaciones empezó a tener auge, los problemas de decisión tomaban la forma de la optimación de una función objetivo (por ejemplo, de la función de utilidad). Esto representaba una ventaja porque la situación se presenta como un problema matemático bien definido, pero con el inconveniente, en muchos casos, de apartarse de la realidad. Posteriormente surgen nuevos enfoques que tratan de solucionar estos impedimentos y de ser más realistas en los supuestos acerca de las propiedades matemáticas de las relaciones de preferencias, tomando en cuenta múltiples criterios y decisores

La toma de decisiones multicriterio es un término que se usa para referirse a los métodos de solución para tomar decisiones en problemas multiobjetivos y/o multiatributos y a aquellos que utilizan relaciones binarias de sobreclasificación. Aunque en la bibliografía universal sobre el tema no se presenta una separación entre multiobjetivo y multiatributo, vale la pena aclarar que, conceptualmente, multiobjetivo se refiere a los objetivos del decisor, mientras que los atributos múltiples caracterizan a las alternativas y determinan la medida en que se logra cada objetivo. Las técnicas referentes a situaciones de atributos múltiples requieren de la preferencia del decisor sobre el espacio de atributos, mientras que las de objetivos múltiples requieren información de las preferencias sobre los distintos objetivos y de la forma en que estas son medidas a través de los atributos

El número de posibles alternativas de solución al problema de toma de decisión multicriterio, define dos categorías: El área de la Toma de Decisiones Multiobjetivo que se dedica a los problemas con un número infinito de alternativas y el área de la Toma de Decisiones Multiatributo cuyo rasgo distinguible es que estudia modelos en los que, usualmente, existe un número finito de alternativas. Convencionalmente ambos grupos de problemas asumen un único decisor o al menos un conjunto de opiniones ya unificadas.

1 2.1 Toma de Decisiones Multiatributo

En un problema de toma de decisiones multiatributos las alternativas predeterminadas están asociadas a un nivel de logro de ciertos atributos (no necesariamente cuantificables) que sirven de base para la toma de la decisión. La selección final de la alternativa se efectúa con la ayuda de comparaciones inter e intra atributos que pueden estar vinculadas a tasas de sustituciones implícitas o explícitas

En la toma de decisiones multiatributos las opiniones de los decisores varían en forma y profundidad. Las preferencias se pueden indicar a través de los atributos o de las alternativas.

Se puede concluir que en todo problema de toma de decisiones multiatributo destacan tres componentes: las alternativas, los criterios y los decisores. En esta sección se mostrará cómo estos componentes pueden combinarse y conformar diferentes matrices Esto nos llevará a una discusión sobre la ponderación y valores en cada matriz y a la revisión de los procedimientos para estandarizarlas.

Sean $\mathbb{A}$ un conjunto de m alternativos $A_1, A_2, \ldots, A_m$; C un conjunto de n criterios $C_1, C_2, \ldots, C_n$, y **D** un conjunto de L decisores $D_1, D_2, \ldots, D_L$; éstas tres componentes se pueden combinar y formar arreglos matriciales como los siguientes:

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_j \\ \vdots \\ C_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ S_{ji} \\ \\ \\ \end{array} \right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_j \\ \vdots \\ C_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} D_1 & D_2 & \cdots & D_k & \cdots & D_L \end{array} \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ S_{jk} \\ \\ \\ \end{array} \right] \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & D_1 & D_2 & \cdots & D_k & \cdots & D_L \\
\hline
A_1 & & & & & & \\
A_2 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
A_i & & & & S_{ik} & & \\
\vdots & & & & & & \\
A_m & & & & & &
\end{array}
$$

donde:

S_{ji}, es la ponderación de la alternativa i de acuerdo con el criterio j.

S_{jk}, es la ponderación del decisor k para el criterio j.

S_{ik}, es la ponderación del decisor k para la alternativa i.

Otras matrices que describen relaciones entre las componentes son las de las alternativas, las de los criterios y las de los decisores, que serian ofrecidas por un grupo de decisores o por cada uno en particular, al hacer composiciones internas entre cada uno de estos componentes.

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_m \\
\hline
A_1 & & & & & & \\
A_2 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
A_i & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
A_m & & & & & &
\end{array}
$$

Matriz de Alternativas

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_n \\
\hline
C_1 & & & & & & \\
C_2 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
C_j & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
C_n & & & & & &
\end{array}
$$

Matriz de Criterios

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_k & \cdots & D_L \end{matrix} \\
\begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_1 \\ \vdots \\ D_L \end{matrix} & \left[\begin{matrix} & & & & & \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right]
\end{array}
$$

Matriz de Decisores

En las matrices de decisores se tiene el problema de establecer quén debe dar la ponderación. Cada decisor debe ser capaz de identificar los asuntos commes entre ellos, al igual que los puntos de contraste y confrontación.

En esta primera etapa se trató la formación de un conjunto de matrices que suministran un marco de trabajo útil para manejar el debate de la descripción de las alternativas, los criterios y los decisores. Posteriormente se debe considerar cómo se puede derivar la ponderación de cada una de ellas y cómo pueden ser usadas.

1.3. PONDERACIONES

Una vez que se ha decidido qué matriz se va a examinar, la siguiente tarea es obtener la ponderación para las entradas. Para esto pueden ser utilizadas algunas escalas de medidas que se describen brevemente:

Escala de Proporción: Contiene información para ser usada como punto de partida, proporciona el origen y la magnitud de la unidad de medida

Escala Nominal: Provee información categórica, lo que hace difícil su uso para propósitos comparativos.

Escala Ordinal: Es empleada frecuentemente por planificadores Si se usa debe tenerse cuidado y asegurarse de que no se realicen operaciones aritméticas con ella Esta escala no da detalles de magnitudes de diferencias.

Escala de Intervalo: Contiene información de magnitudes de diferencias

Al colocar números en las matrices se debe declarar la escala, de manera que se eviten ambigüedades y se alcance la máxima precisión. Una simple anotación de números sin explicaciones puede llevar a conclusiones falsas

1 4 ESTANDARIZACION DE DATOS EN BRUTO

La razón para estandarizar los datos se encuentra en el argumento de que los valores estandarizados dan una estructura uniforme a la información. Si se desea combinar valores de un conjunto de criterios es necesario que las escalas que se usen sean conmensuradas, de manera que los datos en bruto puedan ser estandarizados. Hay varias formas de estandarizar la información; entre estas:

a. $$\frac{\text{Ponderación del criterio}}{\sum \text{todas las ponderaciones}}$$

b. $$\frac{\text{Ponderación del criterio}}{\text{Ponderación máxima}}$$

c. $$\frac{\text{Ponderación del criterio - Ponderación mínima}}{\text{Ponderación máxima - Ponderación mínima}}$$

d. $$\frac{\text{Ponderación del criterio}}{\sqrt{\Sigma\,(\text{Ponderacion en bruto})^2}}$$

1.5. ERRORES EN LA ESTIMACION DE PONDERACIONES

Un reconocimiento explícito de posibles errores asociados a valores en las matrices puede ayudar a reducir la incidencia de alternativas con errores. Posiblemente el enfoque más satisfactorio sea el usar pruebas de sensibilidad asumiendo diferentes cantidades de errores. Las estimaciones para los errores se pueden obtener por análisis técnico o examinando pasadas experiencias. También pueden hacerse ajustes arbitrarios con el propósito de identificar la máxima cantidad de errores que se necesita con el fin de cambiar una clasificación. Este enfoque parece ser el más fuerte; ya que un pequeño cambio en la ponderación de un criterio particular puede alterar dramáticamente el atractivo de una alternativa. En otros casos puede que las variaciones consideradas en la ponderación produzcan la misma clasificación.

1.6. ORDEN DE LOS CRITERIOS

La aplicación de una técnica particular de toma de decisiones con múltiples criterios exige el ordenamiento de los criterios. Unas posibles estrategias para establecer este orden serían:

1. Asumir que todos son de igual importancia.
2. Ordenarlos subjetivamente de mayor a menor importancia.
3. Asignarle peso a los criterios para indicar su importancia relativa.

Con relación a esta última forma, se cuenta con un método para asignar peso a los criterios, basándose en la formación de matrices positivas recíprocas. Este método, propuesto por Thomas L. Saaty, es el objeto de este trabajo, y será descrito con profundidad en el siguiente capítulo

CAPITULO II
EL PROCESO DE JERARQUIA ANALITICA

2.1. INTRODUCCION

En el proceso de toma de decisiones, el problema básico es el de tener que elegir la mejor opción dentro de un conjunto de alternativas competitivas, que son evaluadas bajo criterios en conflicto

Un método de ayuda a la toma de decisiones es el Proceso de Jerarquía Analítica (PJA) que fue desarrollado por Thomas Lorie Saaty en 1971 para dar solución a problemas de planeación de contingencias militares, y que, desde entonces. ha encontrado aplicación en distintas actividades humanas que involucran toma de decisiones EL PJA brinda un marco de trabajo comprensivo para resolver problemas que pueden ir desde los de índole personal hasta los de carácter nacional, desde los más simples hasta los más complejos.

El PJA es una técnica que presenta a los elementos de un problema organizados en jerarquías con base en la racionalidad, los desglosa en sus componentes más pequeños y luego, a través de simples comparaciones de juicios, desarrolla prioridades en cada jerarquía.

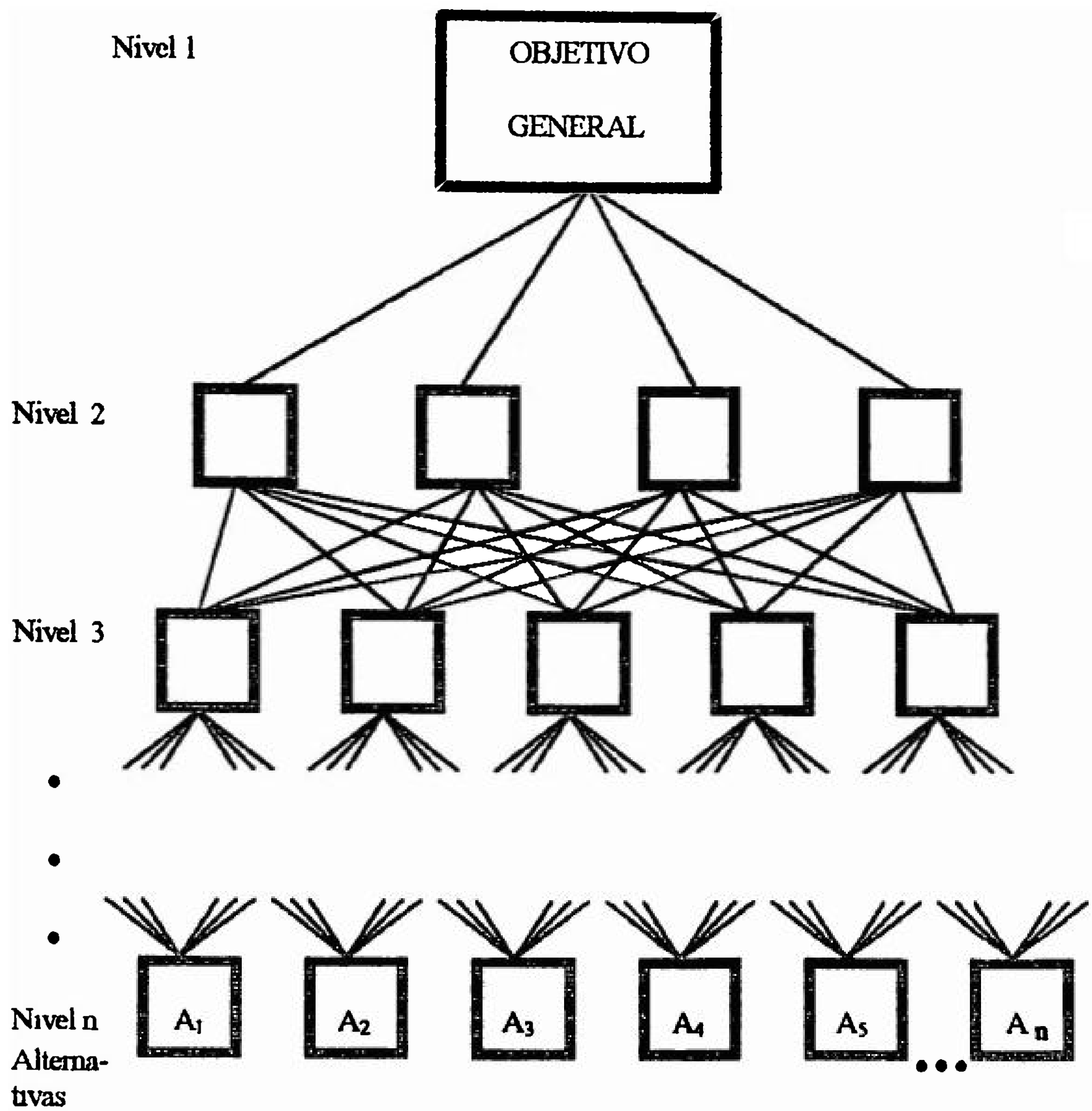
En este capítulo se presentan los tres principios que rigen el PJA y los axiomas y teoremas que lo fundamentan.

2.2. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL PJA

El Proceso de Jerarquía Analítica se basa en tres principios fundamentales: el principio de descomposición, el de juicio comparativo o de comparación y el de síntesis de prioridades.

2.2.1. Principio De Descomposición

El principio de descomposición se aplica en la estructuración de la jerarquía que representa la relación entre los elementos que intervienen en el problema de decisión. Una vez que se han reunido todos los elementos básicos del problema se debe armar la estructura correspondiente. Una manera efectiva de hacer esto es trabajar de arriba hacia abajo, ubicando en la cima de la jerarquía el objetivo general o principal del problema, éste será el primer nivel. Los niveles más bajos contienen criterios o atributos, que contribuyen a la calidad de la decisión y cuyos detalles aumentan a medida que se baja de nivel. El último nivel contiene las posibles alternativas de solución al problema. Los elementos en cada nivel pueden ser considerados como refinamiento o descomposición de los elementos del nivel inmediato superior. En la siguiente figura se muestra la estructura general de una jerarquía.



Estructura de una jerarquía

Figura 1

Jerarquías Completas O Incompletas

Surge aquí la pregunta ¿Cuántos niveles se deben incluir en una jerarquía? En la práctica no hay un procedimiento general establecido para generar los objetivos, criterios, atributos y subcriterios que deben ser incluidos en una jerarquía. Una regla general al construir la jerarquía es que ésta debe ser suficientemente compleja para captar y mostrar la situación, pero pequeña y suficientemente flexible para ser sensible a los cambios

Una jerarquía es **completa** cuando todos los elementos de un nivel tienen a todos los elementos del nivel que le sigue como descendientes. De otra manera se dice que la jerarquía es **incompleta.**

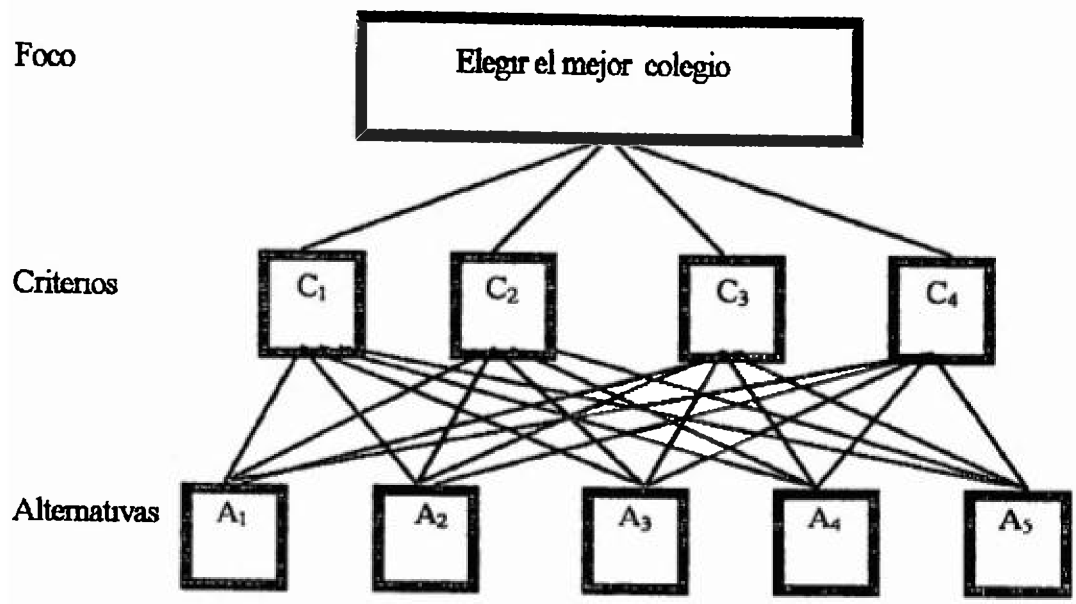
A continuación se presenta un problema de decisión y se muestra la jerarquía que lo representa.

Ejemplo 1:

El padre de un estudiante desea seleccionar el mejor colegio secundario para su hijo, de acuerdo a cuatro criterios que ha establecido: C_1 localización, C_2: reputación, C_3. religión, C_4 excelencia académica. Como el costo es

casi el mismo en todos los colegios candidatos, este no está incluido como un criterio. Después de analizar muchas alternativas, el padre seleccionó a cinco de ellas: A_1 San Agustín, A_2.

San Vicente de Paul, A_3 Instituto Panamericano, A_4. Javier, A_5. Episcopal San Cristóbal. De acuerdo con estos elementos distinguidos del problema, la jerarquía que lo representa constará de tres niveles que se estructuran así.



Jerarquía Completa

2.2 2 Principio De Juicio Comparativo

En esta etapa del proceso se determinan algunos datos importantes a partir de comparaciones por pares de los elementos que intervienen en la decisión. Estos datos de entrada del problema se deducen de comparaciones por pares concernientes a la importancia relativa entre los elementos de un nivel de la jerarquía con respecto a los elementos del nivel inmediato superior y conforman una matriz cuadrada, llamada de comparacion

Matrices de Comparación

Según la propuesta de Saaty, las matrices de comparaciones empleadas en el PJA son recíprocas positivas. Una matriz cuadrada A de orden n es recíproca positiva si:

$$a_{ij} > 0, \text{ para toda } i, j = 1, \ldots, n$$

$$a_{ii} = 1, \text{ para toda } \quad i = 1, \ldots, n$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}, \text{ para toda } i, j = 1, \ldots n$$

Supongamos que el nivel k de una jerarquía está formado por n elementos y que b es un elemento en el nivel inmediato superior. Se denotará por A a la matriz cuadrada de comparaciones de los elementos del nivel k. Sus filas y columnas corresponden a los n elementos del nivel. Las entradas de esta matriz de orden n se obtienen de lo siguiente se comparan por pares los elementos del nivel en relación al grado de importancia de uno sobre el otro respecto al elemento b. Se evalúa la importancia, por ejemplo del i-ésimo elemento sobre el j-ésimo, de acuerdo con una escala numérica y se coloca el numero asignado en la entrada a_{ij} de la matriz. De esto se deduce que en la comparación de la importancia del j-ésimo elemento sobre el i-ésimo, la calificación deberá ser $\frac{1}{a_{ij}}$ y que sobre la diagonal las entradas serán iguales, pues se compara cada elemento con él mismo

Escala de Comparación:

Para calificar la comparación se usa una escala proporcional del 1 a 9, siguiendo las ideas de Saaty (1980). En la tabla #1 se presenta esta escala. En ella, un valor de 1 indica que en la comparación de las dos alternativas, criterios, decisores etc., ambos tienen "idéntica importancia". Un valor de 9 indica que el primer elemento del par es "absolutamente más importante" que el segundo. Una ponderación de 3 indica que el primero del par es "débilmente más importante". 5 sugiere que el primero del par es "fuertemente más importante" y 7 que el primero es de una "importancia mucho más fuerte" que el otro. En general la entrada a_{ij} de la matriz A de comparación representa la importancia relativa, según la opinión del decisor, del elemento i sobre el elemento j.

TABLA 1

ESCALA DE IMPORTANCIA RELATIVA

INTENSIDAD DE IMPORTANCIA	DEFINICION	EXPLICACION
1	Igual importancia	Las dos actividades contribuyan igualmente al objetivo.
3	Importancia débil de una sobre la otra.	Las experiencias y el juicio favorecen ligeramente a una actividad sobre la otra.
5	Importancia fuerte.	Las experiencias y el juicio favorecen a una actividad sobre la otra.
7	Importancia muy fuerte y demostrada.	Una actividad es favorecida muy fuertemente sobre la otra; su dominio está demostrado en la práctica.
9	Importancia absoluta.	La evidencia que favorece a una actividad sobre la otra es del mayor orden posible de confirmación.
2, 4, 6, 8	Valores intermedios entre valores adyacentes de la escala.	Se usa cuando se necesita otro nivel de precisión
Recíproco o inverso	Si se asigna a_{ij} al comparar la actividad i sobre la j, entonces se asigna $\frac{1}{a_{ij}}$ al comparar la j con la i.	

Por ejemplo, se considera la matriz A de comparaciones del último nivel, el de las m alternativas $A_1, A_2, ... A_m$ de una jerarquía. Algunas entradas de la matriz son las siguientes:

$$
A = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_m \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 9 & \cdots & 1/3 & \cdots & 1 \\
1/9 & 1 & & 1/4 & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \\
3 & 4 & & 1 & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \\
1 & & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Estas entradas han sido dispuestas de acuerdo a la escala de comparación de la tabla 1:

Las entradas de la diagonal son 1.

$a_{12} = 9$ indica que la alternativa 1 "es absolutamente más importante" que la 2.

$a_{i1} = 3$ indica que la alternativa i es "débilmente más importante" que la 1.

$a_{m1} = 1$ indica que la alternativas 1 y m son de "igual importancia".

Además, los valores recíprocos, de éstos son colocados en las entradas simétricas:

$$a_{12} = \frac{1}{9}$$

$$a_{i1} = \frac{1}{3}$$

$$a_{m1} = 1$$

Justificacion de la escala de 1 a 9

La justificación de esta escala está dada por la Ley Psicofísica de Weber - Fechner formulada en 1846.

Para formular su ley, Ernest H. Weber considera un estímulo como un elemento medible, por ejemplo, de medida s. Se incrementó s en una cantidad mínima Δs hasta obtener un punto donde los sentidos pudieran distinguir entre s y s + Δs (Δs es llamada la diferencia notable justa); se denota por r al cociente Δs/s

La Ley establece que el cambio en la sensación es notorio cuando el estímulo es incrementado por un porcentaje constante del propio estímulo, y es válida en rangos donde Δs es pequeña comparada con s, en consecuencia, falla cuando s es muy pequeña o muy grande.

En 1860 Gustav T. Fechner consideró una secuencia de estímulos notablemente creciente. Denotó a la primera medida del estímulo como s_0. A la medida del siguiente estímulo notable, por:

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0 = s_0 - \frac{\Delta s_0}{s_0} s_0 = s_0 (1+r),$$ utilizando la Ley de Weber. Similarmente

$$s_2 = s_1 + \Delta s_1 = \frac{s_1 - \Delta s_1}{s_1} s_1 = s_1 (1+r) = s_0 (1+r)^2 = s_0 \alpha^2$$

con $\alpha = 1 + r$.

En general

$$s_n = s_{n-1}\alpha = s_o\alpha^n \quad (n = 0, 1, ...)$$

Así los estímulos de diferencias notables siguen secuencialmente en una progresión geométrica. Fechner pensó que las sensaciones correspondientes podrían seguir una a la otra en una secuencia aritmética que ocurre en puntos discretos en los que se dan diferencias notables justas. Esto se obtiene cuando se resuelve la última expresión para n. Se tiene que:

$$\log s_n = \log s_o + n \log \alpha$$

$$n \log \alpha = \log s_n - \log s_o$$

$$n = \frac{\log s_n - \log s_o}{\log \alpha}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{s_n}{s_o}\right)}{\log \alpha}$$

En psicofísica la sensación es función lineal del logaritmo del estímulo. Luego si M es la sensación y s el estímulo entonces:

$$M = a \log s + b, \; a \neq 0$$

Se asume que el estímulo surge al realizar comparaciones por pares de actividades relativamente comprables, e interesan las respuestas cuyos valores numéricos están en forma de razones.

De esta manera $b = 0$, de donde se obtiene que $\log s_o = 0$ ó bien que $s_o = 1$.

La siguiente respuesta notable se debe al estímulo

$$s_1 = s_0 \alpha = \alpha$$

Esto produce una respuesta de

$$\frac{\log \alpha}{\log \alpha} = 1$$

El siguiente estímulo es

$$s_2 = s_0 \alpha^2$$

que conduce a una respuesta de 2.

En conclusión, para una secuencia de estímulos crecientes (como la secuencia de comparaciones), la secuencia de respuestas es 1, 2,3, .

Por otro lado existen algunas razones que justifican que el límite superior sea 9 Experimentos psicológicos han mostrado que la habilidad humana para diferenciar es muy restringida dentro de ciertos límites y que cuando hay disparidad entre los objetos o actividades que son comparados, los juicios tienden a ser arbitrarios y, comúnmente, lejos de ser verdaderos. Esto sugiere que la escala a utilizar deba tener límites finitos.

Se observa también que la habilidad para realizar distinciones cualitativas está bien representada por cinco atributos: igual, débil, fuerte, muy fuerte y absoluto, y que se pueden hacer arreglos entre atributos adyacentes cuando se necesita mayor precisión. En total, una persona puede comparar 7 ± 2 valores y éstos deben ser consecutivos para distinguir las diferencias.

La ley de Weber - Fechner y las razones que se acaban de exponer justifican que la escala de valores que propone Saaty sea de 1 a 9

Consistencia y Transitividad

El PJA no requiere que los juicios emitidos por el decisor sean consistentes y transitivos Si el criterio del decisor es "perfecto" en todas las comparaciones, entonces se tendrá que $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ para toda i, j, k y se dirá entonces que la matriz A es consistente

Cuando el decisor emite sus juicios cualitativamente y se traducen en valores numéricos de acuerdo a una escala, no se puede esperar consistencia cardinal, ya que las preferencias varían de acuerdo a muchos factores y no obedecen una regla fija. Tampoco se puede esperar consistencia ordinal pues las preferencias de las personas no necesariamente son transitivas Por ejemplo, si la importancia relativa de c_1 es mayor que la de c_2 y la importancia relativa de c_2 es mayor que la de c_3, entonces la relación de importancia de c_1 no necesariamente es mayor que la de c_3, esto ocurre comúnmente con los criterios del ser humano. Por supuesto que un modelo puede requerir transitividad interna. Kenneth May [10] estudió la idea de que la intransitividad, en medio de las preferencias, puede ser un fenómeno natural y no una consecuencia de criterios errados

El Vector de Prioridades Relativas como un vector característico

Se consideran n criterios $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en cierto nivel de una jerarquía. Se desea encontrar sus pesos relativos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ conforme a algún criterio del nivel anterior. El recurso básico es una matriz de números, que represente las opiniones sobre las comparaciones por pares. El vector característico de esta matriz es el escogido para proporcionar las prioridades.

Se denotará por c_{ij} al número que indica la magnitud de la comparación de c_i sobre c_j, y por $C = (c_{ij})$ a la matriz conformada por éstos números. La matriz C también es recíproca, es decir: $c_{ji} = \frac{1}{c_{ij}}$.

Si las comparaciones están basadas en medidas exactas, es decir, si los pesos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son conocidos, entonces:

$$c_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad i, j = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

por lo tanto la matriz C resulta consistente pues

$$c_{ik} = c_{ij} c_{jk}$$

y

$$c_{ji} = \frac{1}{\left[\frac{w_i}{w_j}\right]} = \frac{1}{c_{ij}}$$

De la ecuación (1) se puede escribir

$$c_{ij} \bullet \frac{w_j}{w_i} = 1, \qquad i, j = 1, .., n$$

y en consecuencia que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_j = \frac{1}{w_i} = n, \qquad i = 1, ..., n$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_j = n w_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

lo que equivale a escribir

$$CW = nW \tag{2}$$

Esta ecuación expresa que W es un vector característico de la matriz C con valor característico n. En forma matricial se tiene:

$$\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

En el caso práctico, en el que c_{ij} no se basa en medidas exactas, sino en juicios subjetivos, c_{ij} podrá desviarse de la relación ideal $\frac{w_i}{w_j}$ y por consiguiente la ecuación (2) podría no satisfacerse. En la teoría de matrices se tienen dos resultados importantes:

El primero es que si $\lambda_1, .., \lambda_n$ son los valores característicos de C, es decir, si se satisface la ecuación

$$Cx = \lambda x, \quad \lambda = (\lambda_1 \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

y si $c_{ii} = 1$, para toda i, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$$

por lo tanto si la ecuación (1) se cumple, entonces todos los valores características de C son cero excepto uno, que es igual a n.

El segundo es que si el valor de la entrada c_{ij} de una matriz recíproca positiva C cambia en cantidades muy pequeñas, entonces los valores característicos de C cambian también en pequeñas cantidades.

Combinando estos resultados se tiene que si la diagonal de la matriz C está formada por 1's y si C es consistente, entonces pequeñas variaciones de c_{ij} mantienen el mayor valor característico λmáx, próximo a n, y los valores característico restantes próximos a cero.

Este hecho y el de que W es el vector propio de la matriz $\left(\frac{w_i}{w_y}\right)_{ij}$ llevan a pensar que si c_{ij} está próximo a $\frac{w_i}{w_j}$, s decir, λmáx próximo a n, entonces el vector W solución de la ecuación

$$CW = \lambda\text{máx } W$$

es una buena aproximación de vector real de pesos W.

El problema entonces es el siguiente: si C es la matriz de comparaciones por pares de un conjunto de criterios, para encontrar su vector de prioridades se debe determinar el vector W que satisfaga la ecuación

$$CW = \lambda máx\ W$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones, sin embargo, se puede asegurar la unicidad normalizando W, es decir, estableciendo

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

y reemplazando W por $\frac{w}{\alpha}$

$\lambda máx$ es el máximo valor característico de la matriz, y su proximidad a n es una medida de la consistencia de las opiniones emitidas. Esto conduce a definir el índice de consistencia (IC) de la matriz de comparaciones como

$$IC = \frac{\lambda máx - n}{n - 1}$$

En general se considera aceptable que este número sea menor o igual a 0.1. En caso contrario se deben revisar las opiniones.

2.2.3. **Principio de Síntesis de Prioridades**:

En el PJA las prioridades relativas o locales obtenidas de las comparaciones por pares son sintetizadas desde el segundo nivel hacia abajo, multiplicando la matriz cuyas columnas respectivas son las prioridades locales de los elementos de ese nivel respecto a los criterios del nivel superior, por el vector de prioridades de estos criterios.

Esto dará como resultado el vector de prioridades de ese nivel, que luego será usado para ponderar las prioridades locales de los elementos del nivel inferior, y así sucesivamente, hasta llegar al nivel más bajo, el de las alternativas de decisión. De esta manera se llega a la determinación de la prioridad global de las alternativas con respecto al objetivo general del problema.

2.3. AXIOMATIZACIÓN DEL PROCESO DE JERARQUIA ANALITICA

2.3.1 **Antecedentes**

En esta sección se analiza la estructura axiomática en la que se fundamenta el PJA y se muestra cómo se desarrolla la teoría de este proceso a partir de ciertos axiomas básicos. Los axiomas resaltan:

1. La prioridad recíproca, que es fundamental en la realización de las comparaciones por pares.
2. La homogeneidad, que es la característica de la habilidad de las personas para hacer comparaciones entre cosas que no son muy disímiles, respecto a una propiedad común.
3. La dependencia de un nivel bajo, del nivel adyacente más alto.
4. La idea de que un resultado puede solamente reflejar expectativas cuando éste está bien representado en la jerarquía.

La aplicación de los cuatro axiomas que fundamentan el PJA se realiza a través de los tres principios mencionados en la sección anterior: el principio de descomposición, el de comparación y el de síntesis de prioridades. Previamente se destacan algunos conceptos necesarios para la formulación de estos axiomas

Comparaciones Binarias

Sean $\mathcal{A}$ un conjunto finito de n elementos llamados alternativas y C un conjunto de criterios con respecto a los cuales son comparados los elementos de $\mathcal{A}$. Dado un criterio C de C, se definen en $\mathcal{A}$ las dos relaciones binarias:

$>_C$" más preferida que, con respecto al criterio C";

$\sim_C$"indiferente a con respecto al criterio C"

De aquí que, dado dos elementos $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ siempre se puede establecer que:

$A_i >_C A_j$ ó

$A_j >_C A_i$ ó

$A_i \sim_C A_j$, para toda $C \in \mathbf{C}$

Se usará.

$A_i \geq_C A_j$, para indicar que "A_i es más preferido o indiferente a A_j respecto al criterio C"

Sea **B** el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ en R^+ y f una función de **C** en B tal que a $C \in \mathbf{C}$ le hace corresponder la aplicación P_c en **B**.

P_c asigna un número real positivo a_{ij}, a cada par $(A_i, A_j) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ Para cada $C \in \mathbf{C}$, la terna $(\mathbb{A} \times \mathbb{A}, R^+, P_c)$ se llamará una *escala fundamental* Una escala fundamental es una correspondencia de objetos a un sistema numérico

Definición 2.1 :

Para todo $A_i, A_j \in \mathbb{A}$ y $C \in \mathbf{C}$

$A_i >_C A_j$ si y solo si $P_c(A_i, A_j) > 1$

$A_i \sim_C A_j$ si y solo si $P_c(A_i, A_j) = 1$

Si $A_i >_C A_j$ se dice que A_i domina a A_j con respecto a $C \in \mathbf{C}$

De esta manera P_c representa la intensidad o fuerza de preferencia de una alternativa sobre la otra.

2.3.2. **Axioma 1 (del recíproco)**

Para toda $A_i, A_j \in \mathbb{A}$ y $C \in \mathbf{C}$

$$P_c(A_i, A_j) = \frac{1}{P_c(A_j, A_i)}.$$

Dado que al hacer comparación por pares se consideran simultáneamente los dos elementos enfrentados, al hacer la comparación inversa es natural que el resultado sea el recíproco del anterior.

Sea $A = (a_{ij})_{ij} \equiv (P_c(A_i, A_j))$ la matriz resultante al comparar en parejas las alternativas de $\mathbb{A}$ con respecto a un criterio $C \in \mathbf{C}$. Por el axioma 1, A es una matriz recíproca positiva, a partir de la cual se desea obtener una escala de dominio relativo (u ordenamiento) de las alternativas comparadas

Hay una manera natural de derivar el dominio relativo del conjunto de alternativas a partir de la matriz de comparaciones por pares.

Sea $R_{m(n)}$ el conjunto de matrices recíprocas (n x n), $A = (a_{ij})_{ij} \equiv (P_c(A_i, A_j))$ para todo $C \in \mathbf{C}$. Sea $[0, 1]^n$ el enésimo producto cartesiano de [0, 1] y sea la aplicación

$\Psi : R_{m(n)} \rightarrow [0,1]^n$. Para $A \in R_{m(n)}$, $\psi(A)$ es un vector n - dimensional cuyos componentes están en el intervalo [0, 1].

La terna $(R_{m(n)}, [0, 1]^n, \psi)$ se llama *escala derivada*. Una escala derivada no es más que una correspondencia entre dos sistemas numéricos relacionados.

Es importante señalar que el orden dado por una escala derivada puede no coincidir con el orden dado en las comparaciones por pares. De la definición 2.1. se tiene que si $A_i, A_j \in \mathbb{A}$, $A_i >_c A_j$ implica que $P_c(A_i, a_j) > 1$. Sin embargo si $P_c(A_i, A_j) > 1$ la escala derivada podría implicar que $\psi_j(A) > \psi_i(A)$, donde $\psi_i(A)$ es la iésima componente de $\psi(A)$ y denota el dominio relativo de la iésma alternativa. Esto ocurre si el dominio de la fila i no se da. Es decir si para $A_i, A_j \in \mathbb{A}$ y $C \in \mathbf{C}$,

$P_c(A_i, A_k) \geq P_c(A_j, A_k)$ no se cumple para toda $A_k \in \mathbb{A}$.

En otra palabras, puede ocurrir que $P_c(A_i, A_j) > 1$ y que para alguna alternativa $A_k \in \mathbb{A}$ se tenga que $P_c(A_i, A_k) < P_c(A_j, A_k)$

Una condición más restrictiva se da en la siguiente definición.

Definición 2.2.:

La aplicación P_c se dice que es consiste si y solo si:

$P_c(A_i, A_j)P_c(A_j, A_k) = P_c(A_i, A_k)$ para toda i, j y k, consecuentemente la matriz A es consistente si y solo si

$$a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik} \qquad \text{para toda i,j y k.}$$

Luego, si P_c es consistente, por el axioma 1 se sigue inmediatamente que el orden de rango inducido por ψ coincide con el de la comparación por parejas.

2.3 3. **Axiomas Jerárquicos**

Se puede considerar una jerarquía como un tipo especial de juego ordenado ó como un caso particular de un grafo. La segunda interpretación es la base para, en este contexto, ofrecer una definición formal de jerarquía. Antes, se mencionan algunos conceptos útiles para esta formalización.

Definición 2.3. :

Un conjunto parcialmente ordenado S es aquel en el que se ha definido una relación binaria $\leq$ que satisface las condiciones de reflexividad, antisimetría y transitividad:

Reflexividad: para todo $x \in S, x \leq x$

Antisimetría: para toda $x, y \in S$, si $x \leq y$, $y \leq x$ entonces $x = y$.

Transitividad: para toda $x, y, z, \in S$, si $x \leq y$, y, $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Definición 2.4.:

Para cualquier relación $\leq$ de este tipo, se puede definir $x < y$ para indicar que $x \leq y$, y, $x \neq y$. Se dirá que y cubre o domina a x, si $x < y$ y $x < t < y$ no es posible para alguna t.

Un conjunto parcialmente ordenado, con un número finito de elementos, puede ser convenientemente representado por un grafo dirigido, donde cada elemento del sistema es representado por un vértice, de manera que haya un arco dirigido de y a x si x < y. En este sentido, se denota:

$x^{-} = \{y/x \text{ cubre o domina a } y\}$ y

$x^{+} = \{y/y \text{ cubre o domina a } x\}$

para toda x en el conjunto ordenado.

Definición 2.5.:

Sea S un conjunto parcialmente ordenado y E un subconjunto de S. se dice que E está acotado superiormente si hay un elemento $s \in S$ de manera que $x \leq s$ para toda $x \in E$. El elemento s es llamado cota superior. E tiene un elemento supremo si tiene cotas superiores y si el conjunto de cotas superiores U tiene un elemento u_1, de manera que $u_1 \leq u$ para toda $u \in U$. El elemento u_1 es único y es conocido como el supremo de E en S. Definiciones similares pueden formularse para conjuntos acotados inferiormente.

Se definirá jerarquía a partir de un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 2.6.:

Sea H un conjunto parcialmente ordenado con "elemento mayor" b. H es una jerarquía si satisface las siguientes condiciones:

1. Existe una partición de H en conjuntos. L_k, $k = 1, ..., h$, llamados niveles, donde $L_1 = \{b\}$.

2. $x \in L_k$ implica que $x^- \subset L_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n-1$.

3. $x \in L_k$ implica que $x^+ \subset L_{k-1}$, $k = 2, \ldots, n$.

Definición 2.7.:

Una jerarquía es completa si para toda $x \in L_k$, $x^+ = L_{k-1}$ para toda $k = 2, \ldots, h$.

Definición 2.8.:

Dado un número real positivo $\rho \geq 1$, un conjunto no vacío $x^- \subseteq L_{k+1}$ se dice que es ρ-homogéneo con respecto a $x \in L_k$, si para cada par de elementos $y_1, y_2 \in x^-$

$$\frac{1}{\rho} \leq P_c(y_1, y_2) \leq \rho$$

En particular, el axioma del recíproco implica que $P_c(y_i, y_i) = 1$

a. Axioma 2:

Dada una jerarquía **H**, $x \in$ **H** y $x \in L_k$, entonces:

$x^- \subseteq L_{k+1}$ es ρ-homogéneo para $k = 1, \ldots, h-1$.

Las nociones de escala fundamental y escala derivada pueden extenderse a $x \in L_k$, $x \in L_{k+1}$, reemplazando C y A respectivamente. La escala derivada resultante de una comparación de los elementos en $x^- \subset L_{k+1}$ con respecto a $x \in L_k$ es llamada *escala derivada* local o prioridades locales.

Dados los niveles L_k, $L_{k+1} \subset H$ se denotará la escala derivada para $y \in x^-$ y $x \in L_k$ por: $\Psi_{k+1}(y/x)$, $k = 2, 3, \ldots, h-1$. Sin perder generalidad se puede asumir que:

$$\sum_{Y \in x^-} \Psi_{k+1}(y/x) = 1$$

Se denotará como $\Psi_k(L_k / L_{k-1})$ a la matriz cuyas columnas son las escalas derivadas locales de los elementos en el nivel L_k con respecto a los elementos en el nivel L_{k-1}

Definición 2.9.:

Un conjunto A se dice que es dependiente hacia el exterior en C, si es posible definir una escala fundamental en A con respecto a cualquier C ∈ C.

Definición 2.10.:

Sea A dependiente hacia el exterior en C. Los elementos de A se dicen dependientes hacia el interior con respecto a C ∈ C si para alguna A ∈ A, A es dependiente hacia el exterior en A.

El siguiente axioma muestra la relación de dependencia entre los niveles de la jerarquía.

b. Axioma 3:

Sea H una jerarquía con niveles $L_1, \ldots, L_n$. Para cada L_k, $k = 1, 2, \ldots, h-1$

1 L_{k+1} es dependiente hacia el exterior en L_k

2 L_{k+1} no es dependiente hacia el interior con respecto a toda $x \in L_k$

3 L_k no es dependiente hacia el exterior en L_{x+1}

Principio de Composición Jerárquica

Si el axioma 3 se cumple, entonces la escala derivada global de cualquier elemento en la jerarquía es obtenida de lo siguiente:

$$\psi_1(b) = 1$$

$$\Psi_2(L_2) = \Psi_2 \; b^- / b$$

$$\vdots$$

$$\Psi_k(L_k) = \Psi_k(L_k / L_{k-1})\Psi_{k-1}(L_{k-1}), \; k = 3, \ldots, h$$

Si se omite el axioma 3, el principio de composición jerárquica no se aplica, porque la dependencia exterior e interior que son necesarias, no forman una jerarquía.

2.3.4 **Axioma 4:** (de espectativas)

Las expectativas de un decisor son sus creencias acerca del ordenamiento de las alternativas, originadas por conocimientos apriori. Si un decisor tiene un ordenamiento logrado intuitivamente, de un conjunto finito de alternativas con respecto al conocimiento previo de criterios de C, entonces él tiene espectativas sobre el rango de las alternativas. El axioma de espectativas señala que

$$C \subset H - L_h, A = L_n$$

El axioma afirma que el modelo jerárquico debe responder a las espectativas del decisor. Todos sus juicios sean racionales o no, deben ser adecuadamente representados en el modelo.

2.4 CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS

Sea $R_{c(n)} \subset R_{m(n)}$, el conjunto de las matrices consistentes de orden n.

TEOREMA 1:

Sea $A \in R_{m(n)}$, $A \in R_{c(n)}$ si y solo si rango(A) = 1.

Demostración:

Si $A \in R_{c(n)}$, entonces $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$ para toda i, j, y k. Luego, dada una fila de A, $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ todas las otras filas se pueden obtener a partir de la relación:

$$a_{jk} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}},$$

Por lo tanto rango(A) = 1

Se supone ahora que rango(A) = 1. Dada una fila $a_{jh}\left(j \neq i, h = 1, 2, \ldots, n\right)$ entonces $a_{jh} = M a_{ih}\left(h = 1, 2, \ldots, n\right)$, donde M es una constante positiva.

Además, para cualquier matriz recíproca se cumple que $a_{ii} = 1$ ($i = 1, \ldots, n$).

Así, para $i = h$ se tiene que $a_{ji} = Ma_{ii} = M$ y además $a_{jh} = a_{ji}\, a_{ih}$ para toda i, j y k, es decir, A es consistente.

TEOREMA 2:

Sea $A \in R_{m(n)}$. $A \in R_{c(n)}$ si y solo si su principal valor característico λmáx es igual a n.

Demostración:

Sea $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores característicos de A. Por el teorema 1 se tiene que rango(A) = 1. Además, los valores característicos de A son cero, excepto uno.

Dado que traza $(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = n$ y que traza $(A) = \sum_{k} \lambda_k = n$,

se concluye que $\lambda\text{máx} = \lambda_1 = n$

Por otro lado, si λmáx = n entonces

$$n\,\lambda\text{máx} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i}$$

$$= n + \sum_{1 \le i \le j < n} \left(\frac{a_{ij} w_j}{w_i} + \frac{a_{ji} w_i}{w_j} \right)$$

$$= n + \sum_{1 \le i \le j \le n} y_{ij} + \frac{1}{y_{ij}}$$

como $y_{ij} + \frac{1}{y_{ij}} \ge 2$ y $n\,\lambda\text{máx} = n^2$, la igualdad se obtiene únicamente cuando $y_{ij} = 1$, es decir

$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ · por lo tanto:

$$a_{ij}a_{jk} = \frac{w_i}{w_j} \cdot \frac{w_j}{w_k}$$

$$= \frac{w_i}{w_k}$$

De donde $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$ para toda i, j, k

TEOREMA 3:

Sea $A = (a_{ij})_{ij} \in R_{c(n)}$. Existe una función Ψ, $\Psi = (\Psi_1, \Psi, ..., \Psi_m)$, Ψ: $R_{C(n)} \rightarrow [0,1]$ tal que para toda i, j = 1, .. , n.

i) $a_{ij} = \Psi_i(A)/\Psi_j(A)$

ii) El dominio relativo de la iésima alternativa Ψ_i (A) es la i-ésima componente del principal vector característico derecho de A.

iii) Dadas dos alternativas $A_i, A_j \in \mathbb{A}$, $A_i \gtrsim A_j$ si y solo si $\Psi_i(A) \geq \Psi_j(A)$

Demostración:

Si $A \in R_{c(n)}$ entonces $a_{ij} = \frac{a_{ik}}{a_{jk}}$ para toda i, j y k. Por el teorema 1 se tiene que rango (A) =1 y se puede escribir $a_{ij} = \frac{x_i}{x_j}$, donde $x_i, x_j > 0$ (i, j = 1, ..., n). Multiplicando A por el vector $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ se obtiene

$$Ax = n\,x,$$

dividiendo ambos lados de esta expresión por $\sum_{i=1}^{n} x_i$ y escribiendo

$$w = \frac{x}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

se tiene $Aw=nw$, y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Por el teorema 2, n es el máximo valor característico positivo real de A, y w es el correspondiente vector característico derecho.

Como $a_{ij} = \frac{x_i}{x_j} = \frac{w_i}{w_j}$ para toda i, j, se tiene que $\Psi_i(A) = w_i$, $i = 1, 2, ..., n$

De esta manera se prueban (i) y ii).

Por el axioma 1, para $A \in R_{c(n)}$, $A_i \geq A_j$ si y solo si $a_{ij} \geq 1$ para toda i, j, de aquí que $\Psi_i(A) \geq \Psi_j(A)$ para toda i, j,

TEOREMA 4:

Sea $A \in R_{c(n)}$, y sean $\lambda_1 = n$ y $\lambda_2 = 0$ los valores característicos de A con multiplicidad 1 y n^{-1} respectivamente. Dado $\in > 0$, existe $\delta = \delta(\in) > 0$ de modo que si

$|a_{ij} + \tau_{ij} - a_{ij}| = |\tau_{ij}| \leq \delta$ para $i, j = 1,2,...,n$, entonces la matriz $B = (a_{ij} + \tau_{ij})_{ij}$ tiene exactamente 1 y $n-1$ valores característicos en los círculos $|\mu - n| < \in$ y $|\mu - 0 < \in$ respectivamente.

Demostración:

Sea $\in_0 = \frac{1}{2}(n)$, y sea $\in < \frac{n}{2}$. Los círculos C_1: $|\mu - n| = \in$ y C_2: $|\mu - 0| = \in$ son disjuntos. Sea $f(\mu, A)$ el polinomio característico de A. Sea $r_j = \min |f(\mu, A)|$ para μ en C_j. Nótese que $\min |f(\mu, A)|$ está definido porque f es una función continúa de μ, y $r_j > 0$ puesto que las raíces de $f(\mu, A) = 0$ son los centros de los círculos.

$f(\mu, B)$ es una función continúa de las $1 + n^2$ variables μ y $a_{ij} + \tau_{ij}$, $i,j = 1, 2, ..., n$, y para algún $\delta > 0$, $f(\mu, B) \neq 0$ para μ en cualquier C_j, $j = 1, 2$, si $|\tau_{ij}| \leq \delta$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

De la teoría de variable compleja, el número de raíces μ de $f(\mu, B) = 0$ que están en C_j, $j = 1, 2$ está dado por:

$$n_j(B) = \frac{1}{2\Pi_i}\int C_j \frac{f'(\mu, B)}{f(\mu, B)} d\mu, \quad j = 1,2,$$

que es también una función continúa de las n^2 variables $a_{ij} + \tau_{ij}$ con $|\tau_{ij}| \leq \delta$

Para $B = A$, se tiene que $n_1(A) = 1$ y $n_2(A) = n - 1$. Como $n_j(B)$, $j = 1, 2$, es continúa, se tiene que $n_j(A)$ y $n_j(B)$ son iguales y tienen el valor $n_1(B) = 1$ y $n_2(B) = n - 1$ para toda B con

$$|a_{ij} + \tau_{ij} - a_{ij}| \leq \delta, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

TEOREMA 5:

Sea $A \in R_{c(n)}$ y sea w su principal vector característico derecho. Sea $\Delta A = (\delta_{ij})$ una matriz de perturbaciones de las entradas de A de modo que $A' = A+\Delta A \in R^2_{M(n)}$ y sea w' su principal vector característico derecho. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ de modo que si $|\delta_{ij}| < \delta$ para toda i, j entonces $|w'_i - w_i| \leq \varepsilon$ para toda $i = 1, 2, .., n$.

Demostración:

Por el teorema 4, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que si $|\delta_{ij}| \leq \delta$ para toda i y j, el principal valor característico de A' satisface $|\lambda máx - n| \leq \varepsilon$. Sea $\Delta A = \tau B$. Wilkinson (1965) demostró que para τ, suficientemente pequeño, λmáx puede ser dado por una serie de potencia convergente, $\lambda máx = n + k_1 \tau + k_2 \tau^2 + ...$ Ahora,

$$\lambda máx \to 0 \text{ conforme } \tau \to 0 \text{ y } |\lambda máx - n| = O(\tau) \leq \varepsilon.$$

Sea w el vector característico derecho correspondiente al valor característico simple n de A. Como n es un valor característico simple, (A−nI) tiene por lo menos un menor no nulo de orden (n−1). Se puede suponer, sin perder generalidad, que estos están en las primeras (n−1) filas de (A−nI).

De la teoría de ecuaciones lineales, los componentes de w pueden tomarse de la forma (A_{n1}, A_{n2}, ..., A_{nn}), donde A_{ni} denota el cofactor del elemento (n, i) de (A−nI), y es un polinomio en n de grado no mayor que (n−1).

Los componentes de w' son polinomios en λmáx y τ, y puesto que la expansión de la serie de potencia de λmáx es convergente para todo τ suficientemente pequeño, cada componente de w' es representada por una serie de potencia convergente en τ Se tiene

$$w' = w + \tau z_1 + \tau^2 z_2 + ... \text{ y } |w' - w| = O(\tau) \leq \varepsilon$$

Por los teorema 4 y 5, se sigue que una perturbación pequeña A' de A transforma el problema de valor característico de $(A - nI)\,w = 0$ en el de $(A' - \lambda máx\, I)\,w' = 0$

TEOREMA 6: (Estimación de Razón).

Sea $A \in R_{M(n)}$ y sea w su principal vector característico derecho. Sea $\varepsilon_{ij} = a_{ij}\dfrac{w_j}{w_i}$ para toda i, j, y sea $1 - \tau < \varepsilon_{ij} < 1 + \tau$, $\tau > 0$, para toda i, j. Dado $\varepsilon > 0$ y $\tau < \varepsilon$, existe un $\delta > 0$ de modo que para todo $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i > 0$, $i = 1, ..., n$, si

$$1-\delta < \frac{a_{ij}}{x_i/x_j} < 1+\delta \quad , \tag{3}$$

para toda i, j entonces

$$1-\varepsilon < \frac{\left(\dfrac{w_i}{x_j}\right)}{\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)} < 1+\varepsilon \quad \text{para toda i, j} \tag{4}$$

Demostración:

Sustituyendo $\dfrac{a_{ij}}{\varepsilon_{ij}}$ por $\dfrac{w_i}{w_j}$ en (4) se tiene

$$\left|\frac{\left(\dfrac{w_i}{w_j}\right)}{\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)} - 1\right| = \left|\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\ \frac{a_{ij}}{\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)} - 1\right| \leq \frac{1}{\varepsilon_{ij}}\left|\frac{a_{ij}}{\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)} - 1\right| + \left|\frac{1}{\varepsilon_{ij}} - 1\right|$$

por definición $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{\varepsilon_{ij}}$, para toda i, j, y se tiene

$$\left|\frac{\left(\frac{w_i}{w_j}\right)}{\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}-1\right| = \varepsilon_{ij}\left|\frac{a_{ij}}{\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}-1\right| + |\varepsilon_{ij}-1| < (1+\tau)\delta+\tau$$

Dado $\varepsilon > 0$ y $0 < \tau\,\varepsilon$, existe un $\delta = \dfrac{(\varepsilon-\tau)}{(1+\tau)} > 0$ de modo que (3) implica (4).

Este teorema afirma que si el coeficiente de comparación por pares a_{ij} está cerca de la razón $\frac{x_i}{x_j}$, entonces igualmente lo está $\frac{w_i}{w_j}$ y puede ser usada como una aproximación a ésta.

TEOREMA 7:

Sea $A = (a_{ij})_{ij} \in R_{m(n)}$. Sea λmáx su principal valor característico y sea w su correspondiente vector característico con $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, , entonces λmáx $\geq$ n

Demostración:

Sea $a_{ij} = w_j \dfrac{\varepsilon_{ij}}{w_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Como $AW = \lambda$máx W, y $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_j = \lambda$max, se tiene $\lambda\text{max} - n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_j - n = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} - n$

Por definición la matriz $(\varepsilon_{ij}) \in R_{M(n)}$. Por lo que se tiene que $\varepsilon_{ii} = 1$ para toda i, además $\varepsilon_{ij} > 0$ para toda i, j. De aquí se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{ij} - n = \sum_{i\neq j}\varepsilon_{ij} > 0$$

De donde se deduce el resultado.

TEOREMA 8:

Sea $A \in R_{M(n)}$. Sea λmáx el principal vector característico de A y se W su correspondiente vector característico derecho con $\sum_{i,j=1}^{n} w_i = 1$, entonces

$$\mu = \frac{(\lambda\text{máx} - n)}{(n-1)}$$

es una medida del alejamiento promedio de la consistencia.

Demostración:

Como $A \in R_{c(n)} \subset R_{M(n)}$, por el teorema 2 se tiene que λmáx = n y de allí que $\mu = 0$.

Para $A \in R_{M(n)} - R_{c(n)}$, sea $a_{ij} = w_i \dfrac{\varepsilon_{ij}}{w_j}$ para toda i, j

Se tiene que $\lambda\text{máx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{w_j}{w_i} = \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}$

$$n\,\lambda\text{máx} = \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{ij} = n + \sum_{1\le i<j\le n}^{n}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}}\right)$$

$$\frac{\lambda\text{máx} - n}{n-1} = -1 + \frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}}\right)$$

Conforme $\varepsilon_{ij} \to 1$, es decir, se tiende a la consistencia, entonces $\mu \to 0$. Luego μ es grande o pequeña dependiendo de que ε_{ij} esté cerca o lejos de la unidad, respectivamente, es decir, cerca o lejos de la consistencia.

2.5. ELEMENTOS DE TEORIA DE GRAFOS EN LA PRIORIZACION

En esta sección se usa la teoría de grafos para justificar una interpretación geométrica del significado de las relaciones entre las actividades u objetivos de un nivel jerárquico.

¿Cómo se puede asegurar que una actividades más favorecida en la matriz de comparación por pares obtenga un mayor valor prioritario?

Además de poder responder a esta pregunta con un enfoque algebraico, esta puede ser resuelta intuitivamente a través de conceptos de la teoría de grafos, asociando, a cada una de las actividades en el procedimiento de comparación por pares, un nodo en un grafo dirigido.

Definición 2.11.:

Se denotarán los nodos de un grafo dirigido G por 1, ..., n. A cada arco dirigido x_{ij} del nodo i al nodo j, se asocia un número no negativo $0 < q_{ij} < 1$, llamado la intensidad del arco (se permiten lazos y arcos múltiples).

Definición 2.12.:

Un camino en un grafo dirigido es una secuencia alternada de nodos y arcos de manera que cada nodo es la meta del arco precedente en la secuencia, y es la fuente del arco que le sigue.

La longitud de un camino es el número de arcos en la secuencia. Un camino de longitud k será llamado un k - camino.

Definición 2.13.:

La intensidad de un camino de longitud k del nodo i al nodo j, es el producto de las intensidades de los arcos en el camino.

Definición 2.14.:

La intensidad total de los k - caminos del nodo i al nodo j es la suma de las intensidades de esos caminos.

Obsérvese que para determinar la intensidad total de los 1-caminos, se toma la suma de las intensidades de los 1-caminos de i a j, que son simplemente los arcos (i, j).

Todas las intensidades a lo largo de (i, j) son asumidos iguales. Así la intensidad total de i a j está dada por $t_{ij} = p_{ij}\, q_{ij}$, donde p_{ij} es el número de arcos de i a j y q_{ij} es la intensidad de los arcos

Definición 2.15.:

Dado un grafo dirigido, la matriz de intensidad - incidencia se define como aquella cuya entrada (i, j) está dada por t_{ij} para toda i, j. El caso de $q_{ij} = 1$ reduce la matriz de intensidad-incidencia a la de incidencia, cuya k-ésima potencia da el número de caminos de longitud k.

Definición 2.16.:

Un ciclo es un camino que termina en su punto de partida.

TEOREMA 9:

Si $A \in R_{c(n)}$, la intensidad de todos los ciclos son iguales a a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración:

$A \in R_{c(n)}$ implica que $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$ para toda i, j y k. De aquí se tiene que $a_{ii} = a_{ij}\, a_{jk}\, a_{ki} = 1$ para toda $i = 1,2\ldots, n$.

Por inducción, si $a_{ii_1} \ldots a_{i_n i_{n-1}}$ para toda $i_1, \ldots, i_{n-1}$, entonces $a_{ii_1}, \ldots, a_{i_{n-1} i_n}, a_{i_n i} = 1$, de donde se deduce el resultado.

TEOREMA 10:

Si $A \in R_{c(n)}$, la intensidad de todos los caminos de i a j es a_{ij}.

Demostración:

Se deduce del hecho que $a_{ij} = a_{ik}\, a_{kj}$ para toda i, j y k.

COROLARIO 1.

Si $A \in R_{c(n)}$, la entrada en la posición (i,j) puede ser interpretada como la intensidad de los caminos de cualquier longitud que empiezan en i y terminan en j.

PRUEBA.

Se deduce del teorema 10.

COLORARIO 2.

Si $A \in R_{c(n)}$ la entrada en la posición (i,j) es la intensidad promedio de los caminos de longitud k de i a j y $A^k = n^{k-1} A$ $(k \geq 1)$.

PRUEBA.

Por el teorema 10, la intensidad de un camino de cualquier longitud de i a j es igual a a_{ij}

Una entrada arbitraria de A^k es dada por

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{n} a_{ij}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}j}$$

como $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$ para toda i, j y k se tiene que:

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{n} a_{ij} = n^{k-1} a_{ij}$$

Por inducción, si

$$a_{ij}^{(k)} = n^{k-1} a_{ij} \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

para k = m se tiene que

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n} a_{ii_1} \cdots a_{i_{m-1}j}$$

$$= n^{m-2} \sum_{i_{m-1}=1}^{n} a_{ii_{m-1}} a_{i_{m-1}j}$$

$$= n^{m-1} a_{ij}$$

De aquí que

$$a_{ij} = \frac{1}{n^{m-1}} a_{ij}^{(m)} \quad \text{para toda } m \geq 1$$

y se obtiene el resultado deseado.

TEOREMA 11:

Si $A \in R_{c(n)}$ la entrada en la posición (i,j) está dada por el promedio de todas las intensidades de los caminos que comienzan en i y terminan en j.

Demostración:

Por el corolario 2 del teorema 10 se tiene que

$$a_{ij} = \frac{1}{n^{m-1}} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{n} a_{ii_1} \cdots a_{i_{m-1}j}$$

Por lo tanto

$$a_{ij} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{n^{m-1}} a_{ij}^{(m)}$$

y se deduce el resultado deseado.

TEOREMA 12:

Si $A \in R_{n(c)}$ la escala de dominio relativo está dada por cualquiera de sus columnas normalizadas y coincide con el principal vector característico derecho de A.

Demostración:

Sea a^j la j-ésima columna de A.

$$A.\ a^j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} \right) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij} \right) = (n, a_{ij}) \ (i, j = 1, 2, \ldots, n) \ (i,j = 1,2,\ldots,n)$$

y cualquiera columna de A (esté o no normalizada a la unidad) es una solución del problema del valor característico $Ax = nx$.

Por el corolario 2 del teorema 10 se tiene que $A^k = n^{k-1} A$.

Se tiene que

$$\Psi(A)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{A^{K}e}{e^{T}A^{K}e}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{Ae}{e^{T}Ae}=\frac{Ae}{e^{T}Ae}$$

De aquí

$$\Psi_i(A)=\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}}{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}}$$

$$=a_{ih}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}a_{hj}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ih}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_{hj}\right)}$$

$=\dfrac{a_{ih}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ih}}$ para toda i, h con lo que se obtiene el resultado buscado.

COLORARIO

El principal vector característico es único salvo la multiplicación por una constante.

PRUEBA

Se deduce de la prueba del teorema 12.

TEOREMA 13:

Si $A \in R_{M(n)}$ la intensidad de todos los caminos de longitud k de i a j está dada por

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{n} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{k-1} j}$$

Demostración:

Es sabido que el número de sucesiones de arcos de longitud n entre cualquier par de vértices en un grafo dirigido con matriz de incidencia V se obtiene de V^n. Si además cada arco tiene asociado un número ($\neq 1$) que representa la intensidad (o capacidad) del arco, entonces V^n representa la intensidad de las sucesiones de arcos de longitud n entre dos vértices.

Sea V = A. Las entradas de la matriz A^k dan la intensidad de todos los caminos de longitud k entre dos vértices. Sea $A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$. Por construcción se tiene que

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{n} a_{ii_1} \cdots a_{i_{k-1} j}$$

de donde se demuestra lo planteado.

TEOREMA 14:

Sea $A \in R_{M(n)}$, $A \notin R_{\sigma(n)}$. El principal vector característico derecho de A está dado por el límite de la intensidad normalizada de los caminos de longitud k,

$$w_i = \lim_{m \to \infty} \frac{a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, para toda $n = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración:

Puede mostrarse que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(k)}} = \lim_{m\to\infty}\frac{a_{is}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n} a_{is}^{(k)}} \quad ,h, s = 1, 2, \ldots, n.$$

La prueba de esta suposición es dada por Saaty y Vargas [13] Se sabe también que el principal vector característico derecho de A está dado por:

$$w'_i = \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{h=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_{ih}^{(k)}} \quad ,i = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

multiplicando y dividiendo el lado derecho de (5) dentro del límite, por $\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(k)}$ y reordenando los términos se tiene que

$$w'_i = \lim_{k\to\infty}\left[\sum_{h=1}^{n}\frac{a_{ih}^{(k)}}{\sum_{h=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{n}\left[\lim_{k\to\infty}\frac{a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}\right]\left[\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}\right]$$

De (5) se tiene que

$$w'_i = \left[\lim_{k\to\infty} = \frac{a_{is}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{is}} \right] \sum_{h=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i,h=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}$$

de donde se obtiene el resultado deseado.

COROLARIO

Sea $A \in R_{M(n)}$, $A \notin R_{c(n)}$ El principal vector característico derecho de A es único salvo multiplicación por una constante

PRUEBA

Se sigue de la prueba del teorema 14

TEOREMA 15:

Sea $\mathbb{A}$ un conjunto finito de los n elementos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y sea $C \in \mathbf{C}$ un criterio que tienen en común todos los elementos de $\mathbb{A}$. Sea A la matriz de comparaciones por pares resultante. La iésima componente del principal vector característico derecho de la matriz recíproca de comparaciones por pares A da el dominio relativo de los A_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

Demostración:

Por el teorema 14 el principal vector característico derecho de A está dado por

$$w'_i = \lim_{m\to\infty} = \frac{a_{ih}^{(m)}}{\sum_{i,j=1}^{n} a_{jh}^{(m)}},\quad i = 1, 2, \ldots, n$$

para cualquier h=1,2,. .,n. Por el teorema 7.13 en Saaty [11] se tiene que

$$w'_i = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}}{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces, el dominio relativo de una alternativa a lo largo de todos los caminos de longitud $k \leq m$ esté dado por

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(k)}}$$

Sea

$$S_k = \frac{a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(k)}} \quad y \quad t_m = \frac{1}{m} \sum_{m}^{m} S_k$$

Puede demostrarse que si $\lim_{m\to\infty} S_k$ existe, entonces $\lim_{m\to\infty} t_m$ t_m también existe y coinciden. Por el teorema 14 se tiene que $S \to W$, conforme $k \to \infty$, donde W es el principal vector característico derecho de A Así, $t_m \to W$ cuando $m \to \infty$ y $\Psi_i(A) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$

Este teorema destaca el hecho de que el vector característico derecho da el dominio relativo de cada alternativa sobre las otras alternativas, a lo largo de los caminos de longitud arbitraria. Esto es válido para una matriz recíproca que no necesita ser consistente.

2.6 VENTAJAS DEL PROCESO DE JERARQUIA ANALITICA

El uso del PJA para la solución de problemas de toma de decisiones multiatributo, nos ofrece muchas ventajas, entre las cuales se mencionan las siguientes.

1. Es conceptualmente simple lo que permite su fácil utilización.
2. El proceso simula la actividad de la mente cuando se enfrenta a la necesidad de analizar una situación. Para un conocimiento detallado, la mente estructura realidades complejas en sus partes constitutivas, estas a su vez en otras y así jerárquicamente. De esta manera se integra una gran cantidad de información y se forma una imagen completa acerca del sistema completo.
3. La necesidad de descomponer el problema en los elementos más relevantes que intervienen, hacen que las personas involucradas afinen su conceptualización acerca de él.
4. Organiza el problema de manera que permite pensar en no más de dos elementos a la vez.
5. El PJA maneja la consistencia lógica al utilizar la habilidad humana para establecer relaciones entre objetos e ideas de manera coherente. Ofrece una manera para medir esa consistencia al momento de emitir opiniones.

6. Incorpora los aspectos cualitativos y cuantitativos del pensamiento humano: el cualitativo al definir el problema y su jerarquía y el cuantitativo al expresar las opiniones y las preferencias en forma precisa. El proceso está diseñado para integrar estas propiedades duales, de las cuales, la cualitativa es básica para tomar decisiones firmes en situaciones complejas en las que se necesita determinar prioridades y hacer intercambios.
7. Integra los sentimientos y los valores personales a la opinión en una forma lógica.
8. Utiliza una escala que permite reflejar pequeñas diferencias entre las opiniones, identificar sus efectos en los resultados y, un aspecto sumamente importante, medir valores intangibles (bienestar, satisfacción, comodidad, adaptación, etc.) de manera semejante a las escalas desarrolladas para medir cualidades físicas y que limitan la naturaleza de ideas con las que se puede tratar.
9. Es suficientemente flexible para permitir revisiones, ya sea en las opiniones o en la estructuración jerárquica que conforma el problema.
10. Permite tomar en consideración las prioridades relativas que existen entre los componentes del sistema.
11. Conduce a un estudio global de la "bondad" de las alternativas.
12. Provee un marco para la participación en grupo, en la solución de un problema de toma de decisiones

CAPITULO III
PROBLEMA DE APLICACION: SELECCION DE UNA CARTERA DE INVERSION

En este capítulo se ilustra una aplicación del Proceso de Jerarquía Analítica al problema de determinación de una cartera en el manejo de inversión.

3.1. **Antecedentes**

Hay cinco pasos importantes en el manejo de inversión :

1 Establecer los objetivos de la inversión. Para instituciones que manejan fondos de pensiones y compañías de seguros de vida, los objetivos pueden ser una especificación del flujo de caja para satisfacer un compromiso a pagar en una fecha futura o de una serie de compromisos a pagar en diferentes fechas futuras. Para otras, como las que trabajan con fondos mutuos, el objetivo de inversión puede ser maximizar la ganancia.

2 Establecer la política de la inversión, es decir, establecer los lineamientos para satisfacer los objetivos.

3 Seleccionar una estrategia de cartera consistente con los objetivos y lineamientos de la institución. Las estrategias de cartera pueden ser clasificadas como estrategias pasivas o estrategias activas.

Lo esencial para todas las estrategias activas son las expectativas acerca de los factores que influyen en el desempeño de una clase de activos. Por ejemplo, las estrategias de activos de valores pueden incluir pronósticos de futuros salarios o dividendos de costos de salarios. Las estrategias de carteras activas envuelven seguros externos que requieren pronósticos de futuras tasas de cambio.

Las estrategias pasivas involucran una mínima expectativa de inversión. El tipo de estrategia pasiva más popular es el índice. El objetivo del índice es el de duplicar el desempeño de otro predeterminado. Mientras que el método del índice ha sido empleado extensamente en el manejo de cartera de valores, el uso del índice es relativamente una novedad en el manejo de cartera de impuestos. Entre los extremos de estrategias de carteras activas y pasivas han surgido estrategias que tienen elementos de ambas

4. La selección de activos: después de seleccionar una cartera, el siguiente paso es la selección de un activo específico que sea incluido en la cartera. Según la teoría financista, es en esta fase en la que el inversionista debe construir una cartera óptima y eficiente: Es la que provee la más grande esperanza de ingreso para un nivel de riesgo.

5. Medir y evaluar el desempeño.

La medida y evaluación del desempeño de inversión es el último paso en el proceso de manejo de la inversión. Realmente decir que es el último paso es impropio, ya el manejo de inversión es un proceso interminable. Este paso encierra medir el desempeño y evaluar que todo desempeño esté acorde con una "tabla de mercado" realista.

Cuando el desempeño de la cartera se compara con la "tabla de mercado" puede mostrarse un desempeño superior, pero esto no significa necesariamente que la cartera satisfaga su objetivo de inversión.

3 2. EL PROBLEMA

Una industria se enfrenta a la selección de activos o portafolio. Cuando considera el número de posibles activos y las diversas proporciones en los que se podrían manejar, el proceso de inversión parece agobiante o abrumador. La teoría de toma de decisiones, particularmente el Proceso de Jerarquía Analítica, puede estructurar este problema de tal manera que se escoja un número de alternativas funcionales, es decir, una cartera de inversión funcional

El modelo jerárquico consiste en tres jerarquías separadas: una basada en factores extrínsecos, una basada en factores intrínsecos y una tercera basada en los objetivos del inversionista. Las firmas consideradas son ordenadas (ponderadas) según los criterios en cada jerarquía. Posteriormente los pesos son combinados para obtener una lista de preferencia global de las firmas. La figura 3 da una visión general del modelo

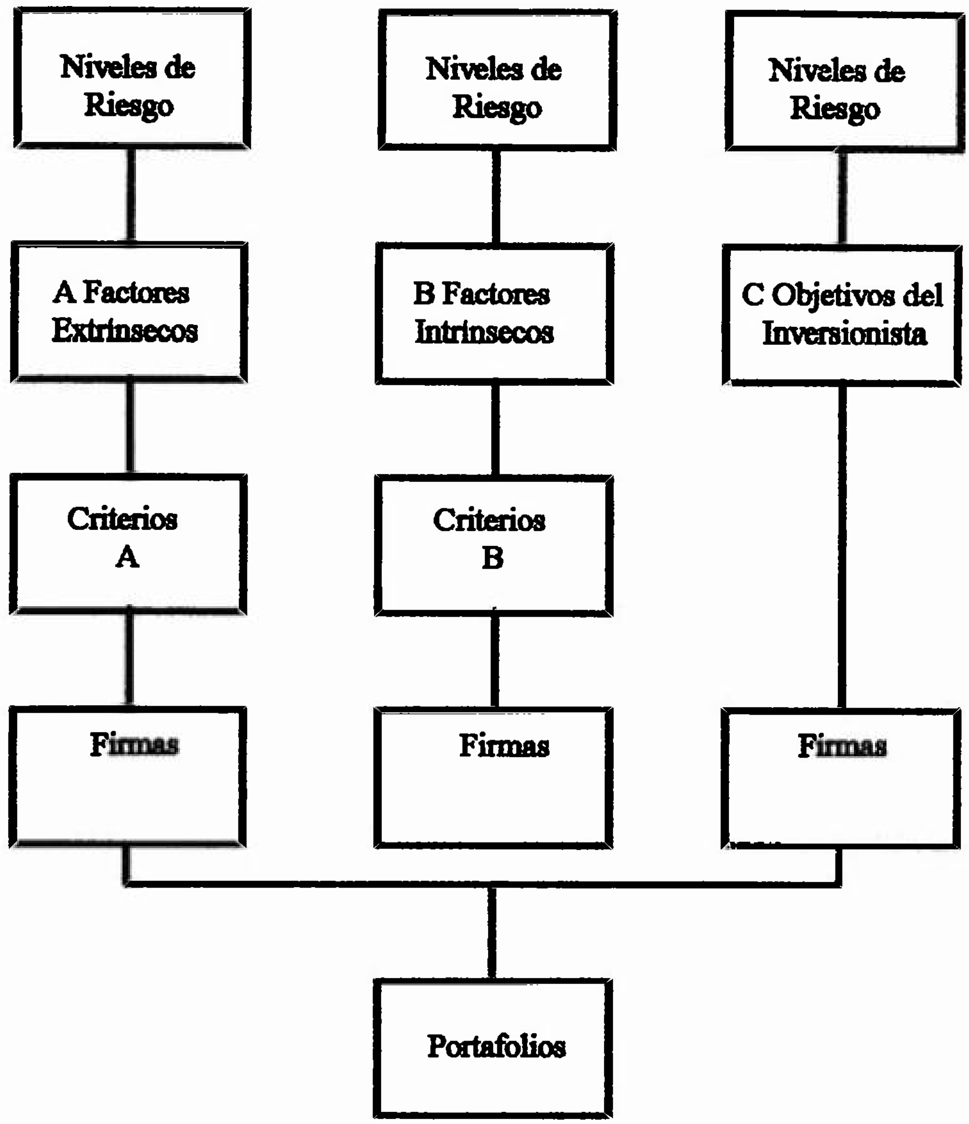


Fig. 3. Modelo Jerárquico para la Selección de un Portafolio

Son varios los factores y objetivos que influyen en la selección de las firmas para la cartera:

Factores Extrínsecos: (A) Estos son factores externos o características ambientales que afectan el desarrollo de la firma, sin tener influencia directa en ellos Los factores son económicos, políticos, sociales y técnicos. Para incorporar el análisis de las variables extrínsecas se puede determinar la sensibilidad de una firma por cambios en éstos factores

Factores Intrínsecos: (B) Estos son los factores internos o característicos operacionales de la firma. Pueden ser considerados como una medida de la forma como la firma está tomando sus decisiones o, en general, una medida de la capacidad de la firma para competir satisfactoriamente Estos factores son rentabilidad, tamaño, tecnología y filosofía.

Objetivos de los Inversionistas: (C) Estos son los valores que definen las acciones de los intentos de los inversionistas en el mundo de los negocios. Se anuncia una gran cantidad de objetivos que un inversionista puede tener, pero para simplificar el modelo se consideran cuatro objetivos mutuamente exclusivos: rentabilidad, seguridad, entusiasmo y control.

Puesto que se trabaja con un modelo que está basado en condiciones futuras, hay que considerar riesgos (la inseguridad de futuros eventos). El modelo incorpora la inseguridad del ambiente de negocios en general, el comportamiento de la firma (alto, medio, bajo riesgo), y la clase de riesgos del inversionista (alto, medio, bajo).

Como primer paso se considera la jerarquía de los factores extrínsecos. En el segundo nivel se tienen los principales factores extrínsecos primarios que afectan el comportamiento de la firma. Y en el siguiente nivel se tienen los criterios que influyen en cada uno de estos factores

Factores extrinsecos	Criterios
	Condiciones de trabajo
	Elasticidad de la demanda
Económicos (E)	Elasticidad de la oferta
	Economía internacional
	Tasasdeinterés
	Regulaciones gubernamentales
Políticos (P)	Exposicion internacional
	Condiciones detrabajo
	Desintegración familiar
	Distribución de la edad
Sociales (S)	Alcance educacional
	Condiciones de trabajo
Tecnológicos (T)	Estado de la tecnología
	Participación del gobierno

Los factores extrínsecos son comparados por pares para un ambiente de alto riesgo, un ambiente de mediano riesgo y un ambiente de bajo riesgo como se observa en la figura 4.

	Alto Riesgo				Mediano Riesgo				Bajo Riesgo			
Firma	E	P	S	T	E	P	S	T	E	P	S	T
Económico	1	3	4	$\frac{1}{3}$	1	5	7	1	1	5	$\frac{1}{3}$	4
Político	$\frac{1}{3}$	1	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	2
Sociales	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	3	5	1	5
Tecnológico	3	5	8	1	1	5	6	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Fig. 4. Comparaciones por pares de los factores extrínsecos.

En cada caso las comparaciones se basan en las pregunta. ¿Qué factor tiene mayor impacto en el comportamiento de la firma y por cuánto? Se observa que en un ambiente de alto riesgo, el grupo que construyó la matriz considera que la tecnología tiene, generalmente, influencia fuerte en el comportamiento de las firmas en comparación con los otros factores.

En la siguiente tabla se muestran las prioridades para cada uno de los factores, para cada nivel de riesgos

Riesgo	Económico	Política	Social	Tecnológico
Alto	0.25	0.12	0.06	0.57
Mediano	0.43	0.11	0.05	0.41
Bajo	0.30	0.10	0.54	0.07

Prioridades para cada nivel de riesgo.

Estas prioridades señalan que en un ambiente de alto riesgo, los factores tecnológicos futuros tienen los mayores impactos en la firma. En un ambiente de mediano riesgo los factores económicos y tecnológicos tienen la mayor influencia y en un ambiente de bajo riesgo, los factores sociales son los más importantes Los factores económicos tienen impacto apreciable en todos los niveles, mientras que el impacto de las acciones políticas es mas bien bajo.

Se puede realizar el análisis para cada uno de los tres niveles de riesgos, pero para propósitos ilustrativos se usará el valor promedio de cada factor. Promediando se obtienen los siguientes pesos:

económico	político	social	tecnológico
0.32	0.11	0.22	0.36

Ahora se comparan los criterios para cada factor para determinar su orden de importancia. En cada par de comparaciones se procede a efectuar preguntas como: ¿Qué criterios tiene mayor impacto en el factor y por cuánto?

En el caso de la tecnología y sus dos criterios, la matriz de comparaciones se muestra en la figura 5,

	E	G
Estado de la tecnología (E)	1	4
Participación del Gobierno (G)	$\frac{1}{4}$	1

Fig. 5. Matriz de comparación para la tecnología.

Esta matriz muestra que el estado de la tecnología tiene algo más de impacto que la participación del gobierno. Esta matriz y las otras tres correspondientes a los otros conjuntos de criterios producen los siguientes conjuntos de pesos de los criterios.

Económicos 0.32	Condiciones de trabajo 0.16	Elasticidad de la demanda 0.45	Elasticidad de la oferta 0.07
	Economía Internacional 0.05	Tasa de interés 0 27	
Política 0.11	Regulaciones Gubernamentales 0.24	Exposición internacional 0 06	Condiciones de trabajo 0.70
Sociales 0.22	Desintegración familiar 0.30	Distribución de la edad 0 11	
	Logros educacionales 0 11	Condiciones de trabajo 0 48	
Tecnológicos 0.36	Estado de tecnología 0.80	Participación del gobierno 0.20	

Para obtener el peso final de un criterio se multiplica el peso recién calculado del criterio por el peso del factor asociado con ese criterio. De esta manera se obtienen las siguientes ponderaciones:

Económicos	Condiciones de trabajo 0.05	Elasticidad de la demanda 0.14	Elasticidad de la oferta 0.02
	Economía Internacional 0.02	Tasa de interés 0.09	
Políticos	Regulaciones Gubernamentales 0.02	Exposición internacional 0.01	Condiciones de trabajo 0.07
Sociales	Desintegración familiar 0.07	Distribución de la edad 0.02	
	Logros educacionales 0.02	Condiciones de trabajo 0.11	
Tecnológicos	Estado de tecnología 0.29	Participación del gobierno 0.07	

Se procede ahora a enlistar los criterios con mayor peso, para cada factor. Para que la suma de los pesos sea 1, se divide cada peso por el total de los pesos de la lista, se obtiene así la lista de los criterios mejor ponderados, de los factores extrínsecos:

Estado de tecnología 0.33	Condiciones de trabajo 0.26	Elasticidad de demanda 0 16
Tasa de Interés 0.10	Desintegración familiar 0.08	Participación del gobierno en la tecnología 0.08

Se procede ahora a priorizar las firmas consideradas (8 en el ejemplo) con relación a cada uno de los 6 criterios. Este proceso sigue los mismos procedimientos de las comparaciones por pares y de ponderación que se ha venido explicando.

Cuando se comparan por pares las firmas con relación al estado de la tecnología, se pregunta por ejemplo: ¿Qué firma responderá más favorablemente al ambiente tecnológico del futuro? La matriz para este criterio se ilustra en la figura 6

Tecnología	GS	BD	CE	FR	CN	BI	GH	BG
Grupo Sucasa	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	6	5
Banco Disa (BD)	3	1	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	7	6
Cia de Finanzas (CF) y Servicios	5	4	1	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	6	5
Financiera El Robles (FR)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	4	3
Cervecería Nal. (N)	5	4	2	6	1	$\frac{1}{3}$	7	6
Banco del Istmo (BI)	7	6	4	7	3	1	9	7
Grupo Tu Hogar (GH)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{3}$
Banco General (BG)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	3	1

Fig. 6. Matriz de comparaciones de las firmas con relación al estado de la tecnología.

La siguiente tabla resume los pesos que obtuvieron las 8 firmas para cada uno de los criterios. Se observa que el Banco del Istmo, La Cervecería Nacional y L Compañía de Finanzas y Servicios, en un ambiente tecnológico, son fuertemente favorecidos como se esperaba. El Grupo Sucasa y La Cervecería Nacional son beneficiados si las condiciones de trabajo son buenas. El mercado de consumo de El

Grupo Sucasa es en aplicación (80% de ventas) y el de La Cervecería Nacional en sus productos (35% de ventas).

FIRMAS	(0.33) Estado de Tecnología	(0.26) Condiciones de Trabajo	(0.16) Elasticidad de la demanda	(0.10) Tasa de Interés	(0.08) Desintegración Familiar	(0.07) Participación del Gobierno
Grupo Sucasa	0.07	0.36	0.03	0.03	0.45	0.03
Banco Disa	0.10	0.05	0.05	0.07	0.02	0.10
Cía de Finanzas y S.	0.17	0.14	0.05	0.05	0.12	0.18
Financiera El Roble	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.03
Cervecería Nacional	0.21	0.23	0.12	0.12	0.21	0.38
Banco del Istmo	0.38	0.02	0.23	0.23	0.10	0.20
Grupo Tu Hogar	0.02	0 06	0.17	0.17	0.06	0.02
Banco General	0 04	0.11	0.31	0.30	0.02	0.06

Para obtener una lista priorizada de las firmas con respecto a los factores extrínsecos, se multiplican todos los pesos de las firmas de acuerdo a un criterio dado, por el peso del criterio (señalado entre paréntesis en la tabla). Entonces, se suman estos nuevos pesos para cada firma, obteniéndose:

Grupo Sucasa	Banco Disa	Financiera El Roble	Cía de Finanzas y Serv
0.16	0.07	0.03	0.13
Cervecería Nacional	Banco del Istmo	Banco General	Grupo Tu Hogar
0.20	0.21	0.13	0.07

Para propósitos ilustrados se usarán solo las 4 con los mayores pesos normalizados, como se hizo cuando se acortó la lista de criterios. Entonces la lista priorizada de las firmas con relación a los criterios extrínsecos es la siguiente:

Cervecería Nacional	Grupo Sucasa	Banco del Istmo	Cía de Finanzas y Serv.
0.29	0.23	0 30	0.19

Para los factores intrínsecos se sigue el mismo proceso: se construye una jerarquía de dos niveles de factores y criterios; se obtienen los pesos para los factores, luego para los criterios, relativos al correspondiente factor y después la lista global de los criterios ponderados; finalmente se prepara la lista priorizada de las firmas. La jerarquía de los factores intrínsecos contiene lo siguiente:

Factores intrínsecos	Criterios
Rentabilidad	Calidad de manejo Comportamiento de lmercado Ahorros Carencias de innovaciones Diversidad Razón de pagos
Tamaño	Ventas Fuerza la boral Activos Estructura de mercado
Control Tecnológico	Calidad de los proyectos tecnológicos Distribución de la edad del producto Dependencia de la energía Efectos de contaminación
Filosofía Comercial	Respondabilidad social Toma de decisiones participativas

Después de comparar por pares los cuatro factores intrínsecos en cada uno de los tres niveles de riesgo se toma el promedio de los tres pesos resultantes y se obtiene la siguiente lista de factores:

Rentabilidad	Tamaño	Control Tecnológico	Filosofía Comercial
0.51	0.17	0.26	0.06

Se observa que la rentabilidad y el control tecnológico ejercen cerca de un 76% de la influencia total en el comportamiento de la firma cuando se consideran solo los factores intrínsecos. La filosofía comercial parece no tener mucho impacto.

Después de obtener los pesos de los criterios para cada uno de los factores y multiplicarlos, se obtiene la lista de los 16 criterios ponderados. Usando los cuatro cuyos pesos combinados son aproximadamente el 60% del total, se obtiene una lista abreviada de los criterios intrínsecos.

Carencia de innovaciones	Calidad de manejo	Calidad de los proyectos tecnológicos	Ventas
0.45	0.21	0.17	0.16

Las cuatro firmas en la lista de los factores extrínsecos son ahora comparadas por pares según cada uno de los criterios intrínsecos. Estos resultados se resumen en la siguiente tabla:

Firma	Carencia de Innovaciones	Calidad de manejo	Calidad de proyectos tecnológicos	Ventas
Cervecería Nal.	0.34	0.32	0.12	0.25
Grupo Sucasa	0.27	0.03	0.04	0.05
Banco del Istmo	0.30	0.55	0.74	0.52
Cia. De Finanzas y Servicios	0.09	0.10	0.10	0.18

Pesos de las firmas para cada criterio intrínseco

La lista final de las firmas ponderadas relativas a los criterios intrínsecos (después de multiplicar y sumar) es:

Cervecería Nacional	Grupo Sucasa	Banco del Istmo	Cía de Finanzas y Serv.
0.29	0.13	0.47	0.11

Los objetivos de los inversionistas con sus pesos computados bajo una clase de riesgo promedio son:

Rentabilidad	Control	Seguridad	Entusiasmo
0.34	0.28	0.25	0.13

Los pesos de las firmas para los objetivos de los inversionistas se muestran en la siguiente tabla.

FIRMAS	(0 34) Renta	(0.28) Control	(0 25) Seguridad	0.10) Entusiasmo
Cervecería Nacional	0.27	0.06	0.04	0.38
Grupo Sucasa	0.03	0.04	0.13	0.03
Banco del Itsmo	0.63	0.75	0.29	0.55
Cía. de Finanzas y Servicios	0 07	0.15	0 54	0.04

Pesos de las firmas según los objetivos de los inversionistas

La lista final de los pesos de las firmas con relación a los objetivos de los inversionistas es:

Cervecería Nacional	Grupo Sucasa	Banco del Itsmo	Cía. de Finanzas y Servicios
0.17	0.05	0.58	0.20

Para obtener la prioridad final de las firmas (el portafolio) se pondera cada grupo de criterios (extrínseco, intrínseco, objetivos) y se efectúan la multiplicación y suma correspondiente En la siguiente tabla se muestran los pesos finales para cuatro esquemas de ponderación de los criterios.

FIRMA	Criterios			Esquemas de Ponderación			
	Extrínsecos	Intrínsecos	Objetivos de los Inversionistas	1:1:1	1:1:2	2:1:1	1:2:2
Cervecería Nacional	0.29	0.29	0.17	0.25	0.23	0.26	0.26
Grupo Sucasa	0.23	0.13	0.05	0.16	0.13	0.19	0.15
Banco del Istmo	0.30	0.47	0.58	0.44	0.47	0.40	0.45
Cía. de Finanzas y Serv.	0.19	0.11	0.20	0.15	0.17	0.15	0.14

Pesos finales de las firmas

Se observa que el Banco del istmo y la Cervecería Nacional están en posiciones primera y segunda, respectivamente, en todos los esquemas de ponderación. Sin embargo, la Compañía de Finanzas y Servicios y el Grupo Sucasa mantienen la misma posición relativa a menos que sean enfatizados los objetivos de los inversionistas Aquí se muestra cierto tipo de estabilidad

¿Qué sucede si se quiere usar estos pesos como guía para asignar fondos entre las acciones?.

Si se usa el esquema de ponderación de los criterios (2:1:1) donde los criterios extrínsecos son considerados doblemente más importantes que los otros dos, se invierte aproximadamente un 40% en el Banco del Istmo, cerca de un 26% en la Cervecería Nacional, un 19% en el Grupo Sucasa y un 15% en la Cía de Finanzas y Servicios

3.1. VALIDACION DEL PROCESO

La validez del PJA como una herramienta para la toma de decisiones ha sido confirmada comparando las prioridades derivadas del proceso con aquellas que toman decisores independientemente. Por ejemplo, la matriz de comparaciones en la figura 6 fue desarrollada durante una discusión con los principales planeadores de una empresa comercial grande. Se les preguntó cómo el presidente del consejo veía los diversos sectores de la actividad de la corporación. Fue juzgada la importancia relativa de los sectores en términos de la asignación del esfuerzo de la corporación y las prioridades fueron computadas. Al final dos planeadores de la corporación se fueron de la sala y retornaron con un libro que tenía información sobre la cantidad de capital actual invertido en cada actividad. Esta cantidad es mostrada en la figura 7.

	A	B	C	D	E	Prioridad	Inversión
Empresa A	1	7	6	4	2	0.45	0.45
Empresa B	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	0.05	0.04
Empresa C	$\frac{1}{6}$	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0.07	0.105
Empresa D	$\frac{1}{4}$	3	3	1	$\frac{1}{3}$	0.14	0.145
Empresa E	$\frac{1}{2}$	5	4	3	1	0.28	0 25

Fig. 7. Matriz de pares de comparación.

Se pudo probar que los resultados obtenidos a través del PJA están estrechamente aproximados con los que se obtuvieron por métodos tradicionales.

CONCLUSIONES

El uso del Proceso de Jerarquía Analítica en la toma de decisiones en grupo es eficaz Está demostrado que esta técnica es una metodología útil en una gran variedad de problemas, desde problemas personales simples hasta aquellos que implican decisiones complejas en áreas como: planificación, diseño, finanzas, pronóstico, mercadeo, selección de portafolio, transporte, educación, ecología, medicina, leyes, transferencia de tecnología, control de vuelos, ingeniería etc. Estas involucran grandes sumas de dinero o el destino de algún país.

El proceso de Jerarquía Analítica es una técnica para la toma de decisiones usadas para evaluar alternativas multatributos con objetivos en conflicto entre uno o más actores.

Este proceso involucra la descomposición jerárquica del problema total de evaluación en subproblemas que pueden ser fácilmente comprendidos y evaluados. Es decir, el proceso simula la actividad de la mente cuando se enfrenta a la necesidad de analizar una situación. Para un conocimiento detallado, la mente estructura realidades complejas en sus partes constitutivas, éstas a su vez las descomponen en otras en orden jerárquicos. De esta manera, se integra una gran cantidad de información y se forman una imagen completa del sistema total.

La necesidad de descomponer el problema en los elementos más relevantes que intervienen en el proceso hace que las personas involucradas afines su conceptualización acerca de este problema

Utiliza una escala que permite reflejar pequeñas deferencias entre las opiniones; identificar sus efectos en los resultados y medir valores intangibles (bienestar, satisfacción, comodidad, adaptación, etc) de manera semejante a las escalas desarrolladas para medir cualidades físicas, y que limitan la naturaleza de ideas con las que se puede tratar.

La utilización del Proceso de Jerarquía Analítica al problema de aplicación probó que los resultados obtenidos a través de él son muy aproximados a los que se obtienen por los métodos tradicionales.

El proceso de Jerarquía Analítica ha sido aplicado con buenos resultados en una variedad de campos a saber: un plan para distribuir la energía a las industrias; el diseño de un sistema de transporte para el Sudán; planificando el futuro de una corporación y midiendo el impacto de los factores ambientales en su desarrollo; el diseño de escenarios futuros para la educación superior de Estados Unidos. El uso del proceso se facilita grandemente a través de la disponibilidad de software para microcomputadoras.

En nuestro país, también el proceso fue utilizado para la asignación de precios a los terrenos de ocupación espontánea del Sector Oeste de la Provincia de Panamá [5].

BIBLIOGRAFÍA.

1. Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T. (1993): **Introducción a los Modelos Cuantitativos para Administración.** 2da edición Editorial Iberoaméricana .

2. Ayres, F. Jr., (1985): **Matrices.** McGraw-Hill, México.

3. Buffa, E. Dyer, S. (1983): **Ciencias de la Administración e Investigación de Operaciones.** Formulación de Modelos y Métodos de Solución. 7ª. Edición. Editorial Limusa.

4. Elton, Edwin J. Y otros; (1990): **Modern Portfolio Theory and Investment Analisis.** John Wiley and Sons. E. U. A.

5. Foster, M., (1991): **Un método para la agregación de opiniones en la toma de decisiones multiatributo con varios decisores.** Tesis Doctoral. México. D.F.

6. Gould, F., Eppen, D (1987)· **Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa.** 2da. Edición. Prentice Hall.

7. Harker, P. T., (1987): **Alternative Modes of Questioning in the Analytic Hierarchy Process.** Math Modelling Vol. N° 3-5. p. 353-360.

8. Makarov, I. M. y otros, (1987): **The Theory of Choice and Decision Making.** Mir Publisher, Moscow.

9 Massam, Bryan H., (1988): **Multi-Criterio Decision Making Techniques in Planning.** Pergamon Press. Ontario Canadá

10 May, Kenneth O., (1954). **Intransitivity, Utility, and the Aggregation of Preference Patterns.** Econometrica Vol. 22, N° 1 january 1954

11. Saaty, T L , (1980)· **The Analytic Hierarchy Process.** McGraw-Hill, New York

12. Saaty, T. L., (1982). **Decision Making for Leaders.** Lifetime Learning Publications. Belmort, Cal.

13. Saaty, T. L., y Vargas, L., (1984)· **Inconsistency and Rank Preservation.** Mathematical Psychology Vol N° 28, 205-214

14. Saaty, T. L., (1986): **Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process.** Management Science, vol 32, N° 7, july, 841-855.

15. Saaty, T L., (1987): **The AHP-What it is and how it is Used.** Math Modelling, vol N° 9 3-5.

16. Solow, D. y Mathur, K. (1996): **Investigación de Operaciones: El Arte de la Toma de Decisiones.** Prentice Hall.

17. Schroeder, R. G. (1994): **Administración de Operaciones.** Toma de decisiones en la función de operaciones 3ª edición, Editorial McGaw-Hill