

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ**  
**VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y**  
**TECNOLOGÍA**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA**

**PROBLEMAS EPISTEMOLÓGICOS EN EL SURGIMIENTO DE LA**  
**SERIE DE FOURIER Y SUS IMPLICACIONES EN EL**  
**DESARROLLO DE LA MATEMÁTICA.**

**EDILBERTO JOSÉ ADAMES**  
**C.I.P 9-710-2179**

**TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL**  
**GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN**  
**MATEMÁTICA EDUCATIVA**

**VERAGUAS, REPÚBLICA DE PANAMÁ**

**-2017-**

**Aprobado por:**

---

**Dr. Jorge E. Hernández**  
**Presidente**

---

**Mgtr. José A. Camarena**  
**Miembro**

---

**Mgtr. José A. González**  
**Miembro**

---

**Mgtra. Marta Pérez**  
**Representante de la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado**

**Fecha:** \_\_\_\_\_

**Asesor:**

**JORGE E. HERNÁNDEZ U., Ph.D.**

**Departamento de Matemática**

# **AGRADECIMIENTO**

*A Dios Todopoderoso por permitirme todo: la vida, la familia, la salud,  
el amor y la esperanza*

## **Dedicatoria**

*A mi familia y amistades sinceras, a docentes y mentores que me han  
acompañado en este largo camino para alcanzar esta meta*

## ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTO .....	iv
Dedicatoria .....	vi
ABSTRACT .....	x
INTRODUCCIÓN .....	1
CAPITULO 1: RASGOS HISTÓRICOS DE LAS SERIES DE FOURIER.....	5
1.1. Génesis de las Series de Fourier.....	6
1.2 El origen del análisis de Fourier.....	7
1.2.1 La cuerda Vibrante .....	7
1.3. Los primeros matemáticos que criticaron los trabajos de Fourier .....	9
1.3.1. Las tres grandes L: Lagrange, Laplace y Legendre.....	14
CAPITULO 2: UNA ALTERNATIVA PARA EL ESTUDIO DE LAS SERIES DE FOURIER .....	19
2.1 Introducción: .....	20
2.2 Ortogonalidad del sistema trigonométrico básico.....	20
2.3 Funciones del sistema trigonométrico básico y series Trigonómicas .....	22
3.4 Funciones Periódicas.....	25
2.5 Coeficientes de Fourier .....	28
2.6 Funciones de periodos arbitrarios .....	44
2.7 Funciones Pares e Impares.....	47
2.8 Desarrollo de Medio Rango .....	60
2.9 Teoremas básicos de convergencia de la Serie de Fourier. ....	65
2.9.1 Convergencia Puntual de una serie de Fourier .....	75
2.9.2 Convergencia de las medias aritméticas.....	79
2.9.3 Convergencia en media cuadrática de la serie de Fourier .....	84
2.10 Integración y derivación de la serie de la Fourier .....	90
CAPITULO 3: APLICACIONES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER.....	94
3.1 El Fenómeno de Gibbs.....	94
3.2 Ecuación de la Cuerda Vibrante. ....	101
3.3 Ecuación de Calor .....	111

3.4 Sumas infinitas aplicando Series de Fourier.....	118
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	130
REFERENCIA BIBLIOGRAFICAS.....	133

## **RESUMEN**

En este trabajo se pretende hacer un recorrido epistemológico en el desarrollo y evolución de la Serie de Fourier, desde su umbral hasta la forma como se conoce actualmente en los cursos de matemática avanzada, analizando los principales problemas de la física matemática que dan origen a esta teoría de series trigonométricas. Fundamentalmente son dos problemas que sus soluciones llevan al estudio de la solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, por un lado tenemos el de la cuerda vibrante y por el otro la propagación del calor, que comprende las ideas fundamentales de Fourier sobre las series que llevan su nombre. Luego, se propone el diseño de un recurso bibliográfico de las Series de Fourier, donde se destacan importantes resultados sobre su desarrollo y convergencia. Finalmente se presentan algunas de sus más importantes aplicaciones en el desarrollo de matemática

## **ABSTRACT**

This paper intends to make an epistemological journey in the development and evolution of the Fourier Series, from its threshold to the way it is currently known in advanced mathematics courses, analyzing the main problems of mathematical physics that give rise to this theory of trigonometric series. Fundamentally, there are two problems that their solutions lead to the study of the solution of differential equations in partial derivatives; on the one hand, we have the vibrating string and on the other hand, the propagation of heat, which comprises Fourier's fundamental ideas about the series that carry his name. Then, it is proposed a design of a bibliographic resource of the Fourier Series, which highlights important results about its development and convergence. Finally, some of its most important applications in the development of mathematics are presented.

# **INTRODUCCIÓN**

La representación de una función arbitraria por medio de una serie trigonométrica fue estudiada por muchos matemáticos en el siglo XVIII. Uno de estos investigadores fue Joseph Fourier, el cual dio su primera demostración de que cualquier función admite una representación en series de trigonométrica. En este trabajo se trata de abordar una perspectiva histórica que llevó a lo que hoy se conoce como las series de Fourier, uno de los temas matemáticos de mayor impacto en la matemática moderna,

En el primer capítulo se parte desde la génesis del problema, el cual nace con el famoso problema de la cuerda vibrante, el de encontrar una función  $f(x,t)$  que represente el desplazamiento de la cuerda, el mismo puede representarse por esta forma.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

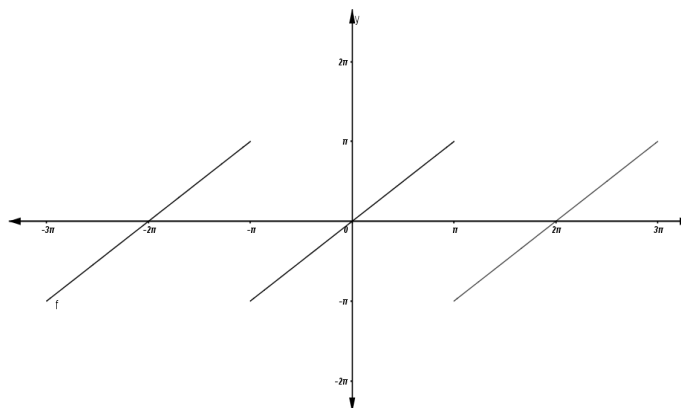
donde  $y$  es el desplazamiento transversal en el instante  $t$  del punto  $x$  de una cuerda uniforme sujeta por los extremos a dos puntos en el eje  $x$ , distantes entre sí  $\pi$ . Posteriormente el problema de Fourier el de transmisión del calor, que está dado por la ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial y}{\partial t}$$

En este recorrido histórico se presenta el aporte de los matemáticos que criticaron los trabajos de Fourier.

En el segundo capítulo se presenta un diseño bibliográfico que recoge los aportes más importantes que pueden ser tratados en el desarrollo de un curso que conlleve inmerso el contenido de las series de Fourier, partiendo desde el estudio de las funciones ortogonales, la ortogonalidad del sistema trigonométrico básico, las funciones periódicas, así como el desarrollo de una función en series de Fourier y la deducción de sus coeficientes.

Se estudiarán situaciones que a la vista de la intuición parecieran contradictorias, como por ejemplo que la función  $y = f(x)$  pueda ser representada por una serie trigonométrica cuya representación gráfica es la siguiente.



**Figura 01**

En cuyo caso se discutirá la implicación del surgimiento de las funciones definidas por expresiones distintas en subintervalos de números reales distintos, lo cual rompe la idea de que las funciones estaban definidas por una sola expresión analítica, lo que se conoce como la liberación del concepto de función (Collette, 1993).

Por ejemplo, si hay muchos puntos en los cuales la función no es continua (Figura 01) y admite desarrollo en series de Fourier, aspecto tratado en las condiciones de convergencia de la serie.

Finalmente, se presentan tres aplicaciones importantes de la serie de Fourier, partiendo del hecho curioso conocido como el fenómeno de Gibbs, luego la

solución de la ecuación de la cuerda vibrante y la ecuación de calor por medio de la aplicación del desarrollo en series de Fourier. Posteriormente se ilustrará con algunos ejemplos la utilidad de este tema en el cálculo de sumas de series.

# **CAPITULO 1: RASGOS HISTÓRICOS DE LAS SERIES DE FOURIER**

### **1.1. Génesis de las Series de Fourier**

No en vano, el matemático y físico francés, cuyas series son el objeto de estudio de esta tesis, afirmaba que el estudio profundo de la naturaleza humana es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos según (Córdoba, 2016, pág. 21.). Esta, sin lugar a dudas, una frase favorita por matemáticos que se empeñan en encontrarle aplicación práctica a esta disciplina, fue quizás una primicia y al mismo tiempo una conclusión, para un apasionado del calor, que al formular una teoría sobre la naturaleza de este fenómeno, ancló no solamente un método, (el de Fourier), sino también instrumentos (series, integrales y transformadas de Fourier) y una disciplina en su conjunto (análisis de Fourier, también llamado Armónico), expresa (Córdoba, 2016, pág. 21).

Si bien el trazado de líneas de investigación parece hoy una de las preocupaciones de los entes académicos acosados por la acreditación universitaria, Almira (2009) refiere que Jean Baptiste Fourier quizás nunca imaginó, que trazaba para su tiempo, lo que sería una línea de investigación que escapaba, para aquel entonces, a los objetivos de la mecánica racional, la mecánica celeste y la física matemática de la época.

## 1.2 El origen del análisis de Fourier

El desarrollo del análisis de Fourier tiene una larga historia, en la cual han participado notables matemáticos y un gran número de personas, así como las investigaciones de muchos fenómenos físicos. Esta idea notable que sobresale en el análisis de Fourier como lo es el empleo de las series trigonométricas, relacionadas armónicamente para describir fenómenos periódicos se remonta a las antiguas civilizaciones, al tiempo de los Babilonios, quienes utilizaron este tipo de ideas para describir los eventos astronómicos, En 1952, Otto Neugebauer descubre que los Babilonios utilizaban un tipo primitivo de la serie de Fourier para la predicción de eventos celestes.

El desarrollo moderno de la serie de Fourier tiene su inicio a mediados del siglo XVI y XVII cuando varios matemáticos estudian el problema clásico que sentó la génesis al concepto central de este estudio.

### 1.2.1 La cuerda Vibrante

Se estudiará con cierto destalle este problema que como se mencionó en el párrafo anterior dio origen a toda la problemática que convergió al desarrollo de la teoría de Fourier. El problema de la cuerda vibrante o ecuación de Onda, como posteriormente se le llamó, fenómeno natural que despertó la curiosidad de los matemáticos y físicos de la época, que plantea la forma que adoptará la función  $y(x,t)$  y que representa el desplazamiento vertical en función del tiempo de cada punto (ubicado en la abscisa  $x$ ) de una cuerda de longitud  $L$  fija en ambos

extremos, siendo dicha cuerda apartada en el instante inicial de su posición de equilibrio y adquiriendo así la forma de una función continua.

$$y(x, 0) = f(x)$$

Johann Bernoulli (1667-1748), afamado matemático suizo propuso una solución a esta ecuación en el año 1727, considerando primero la oscilación de  $n$  masas iguales situadas equidistantes. Para el desplazamiento  $y_k$  de la  $k$ -ésima masa, Bernoulli había obtenido la ecuación en diferencias finitas.

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = a^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

Donde  $a$  depende de la tensión de la cuerda, de la masa total y de la distancia entre las masa puntuales. Bernouilli resolvió esta ecuación y consideró el caso de la cuerda continua haciendo tender  $n$  a infinito formalmente. De esta manera, obtuvo que, en cada instante  $t$ , la cuerda toma una forma sinusoidal, solución de la ecuación

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -ky$$

Con  $k$  función del tiempo. Este resultado había sido obtenido en 1715 por J. Taylor

### 1.3. Los primeros matemáticos que criticaron los trabajos de Fourier

No solamente Víctor Hugo, en su obra *Los Miserables*, dudaría de la genialidad de Fourier. Por el sendero de la indiferencia, transitarían también algunos autores tales como Siméon Denis Poisson (1781-1840) y Jean-Baptiste Biot (1774-1862).

- *Siméon Denis Poisson*

Resulta curioso pensar que Siméon Denis Poisson, uno de los principales detractores de Fourier, haya sido en algún momento, ayudante suyo. Este matemático, astrónomo y físico francés, cuya vida vertió a la investigación y a la enseñanza de las matemáticas, autor (según sus biógrafos) de más de 300 obras, realizó, al igual que Fourier, importantes aplicaciones al análisis matemático.

Como Fourier había conseguido resolver la ecuación del calor mediante el desarrollo de funciones en serie trigonométrica, Poisson pensó que todas las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales podían resolverse mediante series y dedicó grandes esfuerzos a la resolución, mediante este método, de cuestiones relacionadas con la conducción del calor y la teoría ondulatoria, que se publicaron en el *Journal de la Escuela Politécnica* de 1813 a 1823, y en las *Mémoires de la Academia de Francia* en 1823. En estos trabajos Poisson consigue encontrar (1818) una solución para la ecuación de ondas (Escribano, 2016):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Introduciendo (1820) el método de sumación de Abel para series divergentes, que en realidad fue usado por primera vez por el propio Poisson.

Sin embargo, la utilización de las series de Fourier presentaba algunas dificultades. Por un lado, estaba el problema de la convergencia: en 1820 Poisson y Cauchy presentaron dos demostraciones sobre la misma, que fueron tan poco rigurosas como las del propio Fourier. Por otro, los coeficientes de las series de Fourier se obtenían mediante el cálculo de áreas, con los problemas consecuentes en el caso de curvas arbitrarias según (Escribano, 2016).

Por ello, muchos matemáticos intentaron encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de forma explícita, esto es, en términos de funciones elementales y de integrales de tales funciones. El método más conocido para resolver ecuaciones diferenciales de forma explícita fue la integral de Fourier que introdujeron de forma simultánea Fourier, Cauchy y Poisson hacia 1816.

Se denomina integral de Poisson de una función  $f$  a la función definida en el círculo unidad por:

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\phi) + r^2} \right) f(\phi) d\phi$$

que constituye la solución del problema de Dirichlet para el círculo unidad.

El problema de Dirichlet puede enunciarse de la siguiente forma de acuerdo con Escribano (2016) dada una región  $R$  en el plano limitada por una curva cerrada simple  $C$ , y dada una función  $f(P)$  definida y continua en los puntos  $P$  de  $C$ , se pide hallar una función  $F(P)$ , continua en  $R$  y sobre  $C$  y que verifique la ecuación de Laplace en  $R$  y coincida con  $f(P)$  en el contorno  $C$ .

- *Jean Baptiste Biot*

Al parecer, antes de ocuparse del problema de la distribución del calor en sólidos conductores, Fourier había realizado algunas contribuciones al problema de la vibración de los cuerpos sonoros. En particular, se sabe que estaba bien familiarizado con la Mecánica Celeste de Lagrange y las contribuciones de Daniel Bernoulli al problema de la cuerda vibrante. Sobre este tema Almira (2009) lo que no nos es conocido es cuándo y por qué Fourier orientó sus intereses hacia el problema de la distribución del calor, aunque es casi seguro que esto debió suceder alrededor de 1804, tras leer un trabajo de J. B. Biot (1774-1862).

En dicho artículo Biot estudiaba la evolución temporal de la distribución del calor en una barra metálica delgada y muy larga, cuando ésta se calienta desde uno de sus extremos. Biot asumía la conocida ley de enfriamiento de Newton, según la cual la cantidad de calor intercambiada por dos cuerpos que se ponen en contacto es proporcional a la diferencia de sus temperaturas. Sin embargo, su modelo no era correcto, como él mismo reconocería posteriormente. El problema

básico es que Biot asumía el mismo tipo de intercambio de calor entre la superficie de la barra metálica y el aire que en el interior de la barra. Al principio Fourier pensó que evitaría las dificultades con las que se encontró Biot proponiendo un modelo discreto que, aunque resultaba un tanto artificial, podía resolver con técnicas similares a las empleadas por Lagrange en el problema de la cuerda vibrante. Esto fue lo primero que hizo, y tuvo un éxito relativo porque, aunque fue capaz de deducir la expresión general de la solución e incluso demostró algunas propiedades cualitativas de la misma, en ésta aparecían ciertos coeficientes que no pudo hallar sino en ciertos casos especiales (para dos o tres masas). (Curiosamente, sí pudo hacer las cuentas posteriormente para el problema discreto en un anillo, y esto le sirvió también para el cálculo de los coeficientes de Fourier). Entonces decidió volver al problema en el caso continuo. En su primer intento, en 1806, llegó a la ecuación de difusión errónea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - hu$$

pero pronto descubrió su error y, al distinguir el comportamiento del flujo del calor dentro del sólido y en sus puntos superficiales, llegó a la ecuación correcta, la cual es, para los puntos del interior del sólido,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Esta es la ecuación de difusión que incluyó en su memoria de 1807. Fourier estudió entonces el problema de la distribución estacionaria de temperaturas en

una lámina semi-infinita cuya superficie lateral mantenemos a temperatura constante.

En un primer momento Fourier concibió un modelo teórico de transferencia de calor mediante un mecanismo de compuertas. Luego estudió la transferencia de calor en cuerpos continuos. La cuestión que se debatía era si el calor se propagaba en forma lineal o logarítmica y en forma continua o a través de saltos Vito & Suárez ( 1999) afirma.

El calor penetra en los líquidos y determina movimientos interiores producidos por los cambios de la temperatura y por la densidad de las moléculas que se pueden expresar mediante ecuaciones diferenciales e integrales. Esta difícil búsqueda exigía un análisis especial fundado en teoremas nuevos. Estas cuestiones principales que yo he resuelto no habían sido sometidas a cálculo hasta el momento.

Fourier sugirió que el problema se podía resolver mediante un simple patrón sinusoidal que debería atenuarse gradualmente hasta que la temperatura fuera uniforme en todo el cuerpo. No fue fácil de convencer a sus detractores entre los que se hallaba Laplace (1749-1827), Biot (1774-1862) y Poisson (1781-1840). En realidad ellos no comprendían el significado de los términos diferencia de temperatura y gradiente de temperatura (Vito & Suárez, 1999).

### 1.3.1. Las tres grandes L: Lagrange, Laplace y Legendre

Cuando se hacen revisiones bibliográficas de la obra de Fourier, esta se ve opacada grandemente por las críticas de quienes algunos denominan las tres grandes L.: Lagrange, Laplace y Legendre. No obstante, pareciera que la crítica no tiene una contrapartida formal, una propuesta que tenga el rigor matemático que tanto se le critica al autor.

Es osado decir que estos tres autores, así como algunos más que se ilustran en la siguiente tabla, no hicieron (¿ni pudieron?) o acaso no les interesó, elaborar una teoría alterna que permitiese derrumbar o evidenciar las enormes debilidades que le adjudican a la obra de Fourier, de manera puntual, precisa o acaso utilizable, que permitiese hoy las innumerables aplicaciones de las que goza la obra de éste. Pero aunque es un atrevimiento decirlo, la revisión bibliográfica parece demostrarlo.

Efectuando una exploración cronológica y relacional puede evidenciarse también, no solamente una preminencia de ideas, de supervisor doctoral a estudiante, de desdén hacia un parto que parece ignorarse por la diferencia de rasgos en el hijo (la obra en sí), de rastros genéticos o de patronazgo de ideas. Lagrange y Laplace, en su momento, maestros, se sienten ajenos a las ideas revolucionarias o demasiado físicas del discípulo. Como lo dijera (Kahane, 2007) Fourier era, sin duda, demasiado matemático para ser un verdadero físico,

demasiado físico para ser un verdadero matemático. Hoy, por el contrario, Fourier es la prueba emblemática del acercamiento entre la física y la matemática.

Fue quizás ese divorcio reconciliable entre estas dos ciencias que hoy se amenizan como disciplinas diferentes, lo que impidió en su momento, valorar propuestas con postulados que descansaban en teorías consideradas vacías o faltas de rigor.






Kahane (2007) referencia que Fourier trabajaba en el torbellino de la vida pública y en un aislamiento científico total. En 1807 termina la redacción de un imponente manuscrito titulado *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*, lo lleva a Paris, se lo hace conocer a sus colegas Biot y Poisson, que ha encontrado en la *École polytechnique*, y lo presenta a la primera Clase del *Institut national des sciences et des arts* el 21 de diciembre. Lagrange, Laplace, Monge y Lacroix son designados informadores. Una reseña resumida de su trabajo aparece en marzo de 1808, firmada por P. (Poisson). Desestimación, incompreensión, es un verdadero fracaso para Fourier.

Comienza para Fourier una larga marcha. Inicia una correspondencia con Lagrange, la autoridad más respetada del mundo matemático, y Laplace, el más capaz de juzgar su obra. El esperado informe sigue sin llegar. Pero el Instituto nacional propone la propagación del calor como tema para el Grand Prix que debe ser otorgado en 1812. Fourier remodela su texto, lo reorganiza, lo enriquece, y lo

dirige a la primera Clase del Instituto nacional en forma anónima según la costumbre, bajo el hermoso epígrafe *Et ignem regunt numeri* (también el fuego está regido por los números). Su veredicto, favorable a la memoria de Fourier, se emite el 16 de diciembre de 1811 y la coronación de la obra tiene lugar en sesión pública el 6 de enero de 1812. Es por fin la consagración. Pero ya se dibujan las sombras. El informe no es unánimemente elogioso, como lo muestra este extracto:

*Esta obra encierra las verdaderas ecuaciones diferenciales de la transmisión del calor, tanto en el interior de los cuerpos como en su superficie; y la novedad del tema, junto con su importancia, han decidido a la Clase a coronar esta obra, observando, sin embargo, que la manera en la que el autor llega a sus ecuaciones no está exenta de dificultades, y que su análisis para integrarlas deja aún algo que desear, tanto en lo que respecta a la generalidad como incluso del lado del rigor.*

En resumen, el trabajo es innovador, pero no es perfecto. Hay algo más grave aún: el Instituto nacional no decide su publicación. Nuevo fracaso para Fourier” (Kahane, 2007).

Imagen	Nombre	Nació	Murió	Vivió	Nacionalidad	Ocupación	Supervisor Doctoral	Estudiantes
	Joseph-Louis de Lagrange	1736	1813	77	Nac. italiano, nat. francés	Matemático, astrónomo, físico, político y profesor universitario	Leonhard Euler	Jean-Baptiste Joseph Fourier
							Giovanni Battista Beccaria	Siméon Denis Poisson
	Pierre-Simon Laplace	1749	1827	78	Francesa	Astronomía y Matemáticas	Jean d'Alembert	Jean-Baptiste Joseph Fourier
							Christophe Gadbled Pierre Le Canu	Siméon Denis Poisson
	Adrien-Marie Legendre	1752	1833	81	Francesa	Geometría; matemáticas; geodesia		
	Jean-Baptiste Joseph Fourier	1768	1830	62	Francesa	Matemáticas, física e historia	Joseph-Louis de Lagrange	Gustav Dirichlet
								Giovanni Plana
								Claude-Louis Navier
	Jean-Baptiste Biot	1774	1862	88	Francesa	Matemático, físico, astrónomo, ingeniero civil, ingeniero y profesor		



	Siméon Denis Poisson	1781	1840	59	Francesa	Matemático, astrónomo, físico y profesor universitario	Joseph-Louis de Lagrange Pierre-Simon Laplace
	Augustin Louis Cauchy	1789	1857	68	Francesa	Análisis matemático Teoría de grupos Series infinitas Ecuaciones diferenciales Determinantes	

Ilustración 1: Contemporáneos y críticos a la obra de Jean Baptiste Fourier

## **CAPITULO 2: UNA ALTERNATIVA PARA EL ESTUDIO DE LAS SERIES DE FOURIER**

## 2. UNA ALTERNATIVA PARA EL ESTUDIO DE LAS SERIES DE FOURIER

### 2.1 Introducción:

Lo que pudiera ser concebido como un diseño bibliográfico para el desarrollo de un curso de matemática avanzada donde se desarrolla el tema de las series de Fourier, donde lo que se pretende es motivar sobre el estudio más profundo tanto para análisis de resultado como para resolver problemas sencillos.

### 2.2 Ortogonalidad del sistema trigonométrico básico.

En ciertas áreas de la matemática avanzada, a una función se le considera como la generalización de un vector. En esta sección se hará extensivo a funciones los conceptos vectoriales de producto interior, o producto escalar y la ortogonalidad de los vectores.

**Definición 2.1.:** El producto interior de dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  en un intervalo  $(a,b)$  está definido por:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx$$

**Definición 2.2.:** Se dice que dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  son ortogonales en un intervalo  $[a,b]$  si:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = 0$$

**Definición 2.3:** Se dice que un conjunto de funciones con valores reales.

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x) \dots \varphi_n(x)\}$$

es ortogonal en un intervalo  $[a, b]$  si el producto de

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0; \quad m \neq n$$

**Definición 2.4:** La forma normal cuadrada de una función  $\varphi_n(x)$  es:

$$\|\varphi_n(x)\|^2 = (\varphi_n(x), \varphi_n(x))$$

y la norma o su longitud generalizada es:

$$|\varphi_n(x)| = \sqrt{(\varphi_n(x), \varphi_n(x))}$$

En otras palabras, en un conjunto ortogonal  $\{\varphi_n(x)\}$  la norma cuadrada y la norma de función  $\varphi_n(x)$  está dada por

$$\|\varphi_n(x)\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x) dx$$

Es decir,

$$\|\varphi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}$$

**Definición 2.5:** Si  $\{\varphi_n(x)\}$  es un conjunto ortogonal de funciones del intervalo  $[a, b]$  con la propiedad de que

$$\|\varphi_n(x)\| = 1 \quad \text{para } n=0,1,2,\dots$$

Entonces, se dice que  $\{\varphi_n(x)\}$  es un conjunto ortonormal en el intervalo  $[a, b]$ .

### 2.3 Funciones del sistema trigonométrico básico y series Trigonométricas

**Definición 2.6:** Al conjunto  $\{\varphi_n(x)\}$  definido por

$$\{1, \cos x, \sen x, \cos 2x, \sen 2x, \dots\}$$

Se le denomina conjunto trigonométrico básico.

**TEOREMA 2.1:** (ORTOGONALIDAD DEL SISTEMA TRIGONOMÉTRICO BASICO.)

La integral sobre el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$  del producto de cualquier pareja de funciones distintas del sistema trigonométrico básico:

$$\{1, \cos x, \sen x, \cos 2x, \sen 2x, \dots\}$$

Es cero, es decir:

$$i) \int_{-\pi}^{\pi} \sen nx \cos mxdx = 0 \quad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

$$ii) \int_{-\pi}^{\pi} \sen nx \sen mxdx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

$$iii) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 1, 2, 3, \dots \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

Demostración:

i) Como el producto de  $\sen nx \cos mx$  resulta ser una función impar su integral es igual a cero es decir:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sen nx \cos mxdx = 0$$

ii) Sea  $m = n$ , se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sen nx \sen mxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sen^2 nx dx$$

Por la identidad,

$$\sen^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx),$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 nxdx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nxdx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2n} \text{sen} 2nx \right)_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \pi - \frac{1}{2n} \text{sen} 2n\pi + \pi + \frac{1}{2n} \text{sen} 2n\pi \right) \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

iii) Si  $n \neq m$ , de la fórmula

$$\text{sen} x \text{sen} y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen} nx \text{sen} mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n - m)x - \cos(n + m)x] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n - m)x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n + m)x dx \right) \\
 &= \left[ \frac{1}{2(n - m)} \text{sen}(n - m)x - \frac{1}{2(n + m)} \text{sen}(n + m)x \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \left[ \frac{1}{2(n - m)} \text{sen}(n - m)\pi - \frac{1}{2(n + m)} \text{sen}(n + m)\pi \right] \\
 &\quad - \left[ -\frac{1}{2(n - m)} \text{sen}(n - m)\pi + \frac{1}{2(n + m)} \text{sen}(n + m)\pi \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{(n - m)} \text{sen}(n - m)\pi - \frac{1}{(n + m)} \text{sen}(n + m)\pi \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Como  $n$  y  $m$  son enteros  $(n-m)$  y  $(n+m)$  también lo son y además como la función  $\text{sen } k\pi = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ , obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{senn}x \text{sen } mx dx = 0$$

iv) Si  $n \neq m$ , de la fórmula

$$\text{cos}x \text{cos}y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} &= \int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}n x \text{cos}m x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+m)x + \cos(n-m)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n+m)} \text{sen}(n+m)x - \frac{1}{(n-m)} \text{sen}(n-m)x \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n+m)} \text{sen}(n+m)\pi + \frac{1}{(n-m)} \text{sen}(n-m)\pi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+m)} \text{sen}(n+m)\pi + \frac{1}{(n-m)} \text{sen}(n-m)\pi \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Porque  $\text{sen } k\pi = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

v) Sea  $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}n x \text{cos}m x dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi$$

Si  $n = m = 1, 2, 3, \dots$  aplicando la identidad

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

Obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( x + \frac{1}{2n} \operatorname{sen} 2nx \right) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2} [2\pi] \\
&= \pi
\end{aligned}$$

**Definición 2.7:** Una serie trigonométrica o polinomio trigonométrico es una función de  $R$  en  $R$  de la forma

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Donde  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son constantes reales.

### 3.4 Funciones Periódicas.

**Definición 2.8:** Sea  $f: R \rightarrow R$  una función. Decimos que  $f$  es periódica cuando existe un número real  $T$ , no nulo, tal que  $f(x+T) = f(x)$  para todo  $x \in R$ . En este caso se dice que  $T$  es un periodo para  $f$ .

Si  $T$  es un periodo para  $f$  entonces  $\pm T, \pm 2T, \dots, \pm nT, \dots$  también son periodos para  $f$ .

**Ejemplo 2.1:** Las funciones  $f(x) = \text{sen } \theta$  y  $f(x) = \text{cos } \theta$  son funciones periódicas.

**Solución:** La función  $f(x) = \text{cos } \theta$  comparece con la función  $y = a \text{cos } bx$ ,

donde  $|a|$  es la amplitud y el periodo es  $T = \frac{2\pi}{|b|}$ , entonces,

$$T = 2\pi$$

De forma análoga podemos determinar que el periodo de  $f(x) = \text{sen } \theta$  es  $2\pi$

**Ejemplo 2.2:** Encontrar el periodo de  $f(x) = \text{sen}(\sqrt{2}x)$

**Solución:** La función  $f(x) = \text{sen}(\sqrt{2}x)$  comparece con la función  $f(x) = a \text{sen } bx$

, donde el periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{|\sqrt{2}|} = \sqrt{2}\pi$$

**Ejemplo 2.3:** Encontrar el periodo de la función  $f(x) = \cos \frac{x}{5} + \cos \frac{x}{8}$

**Solución:** Si la función  $f(x)$  es periódica con un periodo  $T$ , entonces se tiene

$$\cos \frac{1}{5}(x+T) + \cos \frac{x}{8}(x+T) = \cos \frac{x}{5} + \cos \frac{x}{8}$$

Puesto que  $\cos(\theta + 2\pi m) = \cos \theta$  para cualquier  $m$  se tiene que

$$\frac{1}{5}T = 2\pi m, \quad \frac{1}{8}T = 2\pi n$$

Donde  $m$  y  $n$  son enteros. Por consiguiente

$$T = 10\pi m = 16\pi n$$

Cuando  $m = 80 = n$ , por lo tanto la función es de periodo  $T = 80\pi$

Es claro que si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de periodo  $T$  entonces  $f$  está determinada por sus valores en un intervalo semi – abierto de longitud  $T$ . Supóngase que  $f$  es una función de valores reales definida en un intervalo  $I$  de la forma  $[a,b)$  ó  $(a,b]$ , entonces  $f$  puede ser extendida, en forma natural, a una función de periodo  $T=b-a$ , definida en todo  $\mathbb{R}$  mediante la siguiente igualdad.

$$f(x+nT) = f(x)$$

Para  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema 2.2 :** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de periodo  $T$ . Si  $f$  es integrable sobre un intervalo de longitud  $T$  entonces  $f$  es integrable sobre cualquier intervalo de longitud  $T$  y para cualquier  $a \in \mathbb{R}$  se tiene que:

$$\int_{-a}^{T-a} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

**Demostración:** Sea  $u = x+T$ , entonces  $f(u) = f(u-T)$ , luego

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x)dx &= \int_{T-a}^T f(u-T)du \\ &= \int_{T-a}^T f(u)du \\ &= \int_{T-a}^T f(x)dx \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{-a}^{T-a} f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^{T-a} f(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{T-a}^T f(x)dx + \int_0^{T-a} f(x)dx \\
&= \int_0^{T-a} f(x)dx + \int_{T-a}^T f(x)dx \\
&= \int_0^T f(x)dx
\end{aligned}$$

## 2.5 Coeficientes de Fourier

**Definición 2.9:** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de periodo  $2\pi$ , integrable en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . La serie de Fourier de  $f$  es la serie trigonométrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Donde;

Los coeficientes de Fourier o de Euler-Fourier de la función  $f(x)$  se definen por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)dx \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Primeramente se analizará la fórmula para los coeficientes  $a_0, a_n$  y  $b_n$  en términos de la función  $f(x)$ .

Supongamos que la serie converge a una función integrable  $f(x)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , es decir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

Y que además la serie puede integrarse término a término

- ✓ Primero se determina  $a_0$ ; al integrar en el intervalo de  $[-\pi, \pi]$  ambos miembros de

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

Se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \right] dx$$

es posible integrar la serie término a término, entonces se obtiene.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx \right] \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx \right] \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx \right] \\ &= \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{n} \operatorname{sen}(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{b_n}{n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} (2\pi) + 0 \end{aligned}$$

De donde se tiene que;

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

✓ Para determinar  $a_n$ . Se multiplica por  $\cos mx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \right] \cos mx dx$$

Si se integra término a término, se obtiene,

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) dx \right]$$

Analizando cada integral.

- La primera integral

$$\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \frac{a_0}{2m} \operatorname{sen} mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2m} [\operatorname{sen} m\pi - \operatorname{sen}(-m\pi)] = 0$$

- La segunda integral suponiendo que  $n \neq m$

$$\begin{aligned} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n+m)} \operatorname{sen}(n+m)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{(n-m)} \operatorname{sen}(n-m)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sí  $n = m$ , la integral también queda

$$\begin{aligned} a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx dx &= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx \\ &= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1 + \cos 2mx}{2} \right) dx \\ &= \frac{a_m}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2mx dx \right) \\ &= \frac{a_m}{2} \left( x + \frac{1}{2m} \operatorname{sen} 2mx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{a_m}{2} (2\pi) \\ &= a_m \pi \end{aligned}$$

- La tercera integral suponiendo que  $n \neq m$

$$\begin{aligned} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+m)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-m)x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{(n+m)} \cos(n+m)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{(n-m)} \cos(n-m)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

sí  $n = m$ , es obvio la integral es 0.

Por lo tanto tenemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \pi a_m$$

De donde,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

✓ Para determinar  $b_n$ . Se multiplica por  $\text{sen } mx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen } mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)) \right] \text{sen } mx dx$$

Si se integra término a término tenemos:

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \text{sen}(mx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx \right]$$

Analizando cada integral

- La primera integral

$$\begin{aligned} &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mx dx \\ &= \frac{a_0}{2m} [\cos mx]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{a_0}{2m} [\cos m\pi - \cos(-m\pi)] \\ &= \frac{a_0}{2m} [\cos m\pi - \cos(m\pi)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Analice la segunda integral, para  $n \neq m$

$$\begin{aligned} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(m+n)x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(m-n)x \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(m+n)} \operatorname{sen}(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{(m-n)} \operatorname{sen}(n-m)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sí  $n = m$ , es obvio que la integral es igual a 0.

- Analice la tercera integral, para  $n \neq m$

$$\begin{aligned} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n+m)} \operatorname{sen}(n+m)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{(n-m)} \operatorname{sen}(n-m)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Analice la tercera integral, para  $n = m$

$$\begin{aligned} b_m \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} mx \, dx &= \frac{b_m}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx \, dx \right] \\ &= \frac{b_m}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2mx)) \, dx \right] \\ &= \frac{b_m}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2mx) \, dx \right] \\ &= \frac{b_m}{2} \left[ x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2m} \operatorname{sen}(2mx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{b_m}{2} [2\pi] \\ &= \pi b_m \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx = \pi b_m$$

De donde,

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx dx$$

De lo anterior se puede escribir  $n$  en lugar de  $m$  y en conclusión se tiene las llamadas fórmulas de Euler o coeficientes de Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx \quad n=1, 2, 3, \dots$$

En particular atendiendo a la periodicidad de los integrandos, es decir cuando se consideran funciones de periodo  $2\pi$ , es posible reemplazar el intervalo de integración por cualquier otro intervalo de longitud  $2\pi$ , es decir por ejemplo en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Si de una función periódica con período de  $2\pi$  pueden calcularse los coeficientes  $a_0, a_n$  y por medio de las fórmulas de Euler y formas la serie trigonométrica.

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_1 \operatorname{sen} 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \dots$$

Entonces se dice que está es la serie de Fourier correspondiente a  $f(x)$  y sus coeficientes, obtenidos a través de las fórmulas de Euler, se les llama coeficientes de Fourier de  $f(x)$ .

**Ejemplo 2.4:** Considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ -1, & \text{si } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Calcular la serie de Fourier.

**Solución:** Calculemos los coeficientes de Fourier.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} dx - \int_{\pi}^{2\pi} dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ x \Big|_0^{\pi} - x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} [\pi - 2\pi + \pi] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora calcúlese

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \cos nx dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \operatorname{sennx} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \operatorname{sennx} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} nx dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \cos nx dx \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[ -\cos n\pi + \cos n(0) + \cos n2\pi - \cos n\pi \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[ -2 \cos n\pi + \cos 2n\pi + 1 \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[ -2(-1)^n + 1 + 1 \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2(-1)^{n+1} + 2}{n} \right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto la serie de Fourier de  $f$  es:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2(-1)^{n+1} + 2}{n} \right] \operatorname{sen} nx
\end{aligned}$$

Es decir,

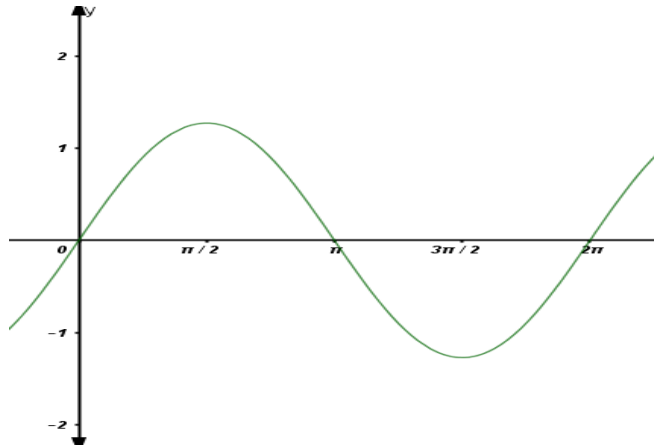
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen} 3x + \frac{4}{5\pi} \operatorname{sen} 5x + \dots + \frac{4}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}(2k+1)x + \dots \\
&= \frac{4}{\pi} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots + \frac{\operatorname{sen}(2k+1)x}{(2k+1)} + \dots \right)
\end{aligned}$$

Consideremos la suma parcial  $S_5$  de esta serie de Fourier, entonces

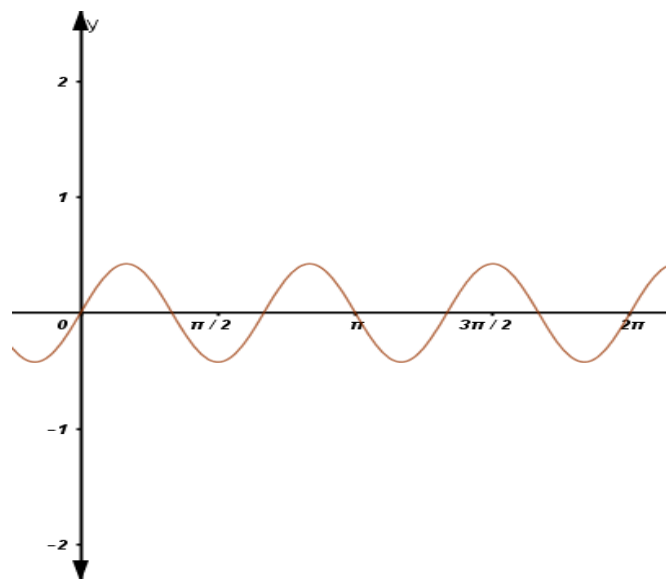
$$S_5 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \right)$$

Para visualizar el gráfico de  $S_5$  trazamos primero los gráficos de las funciones

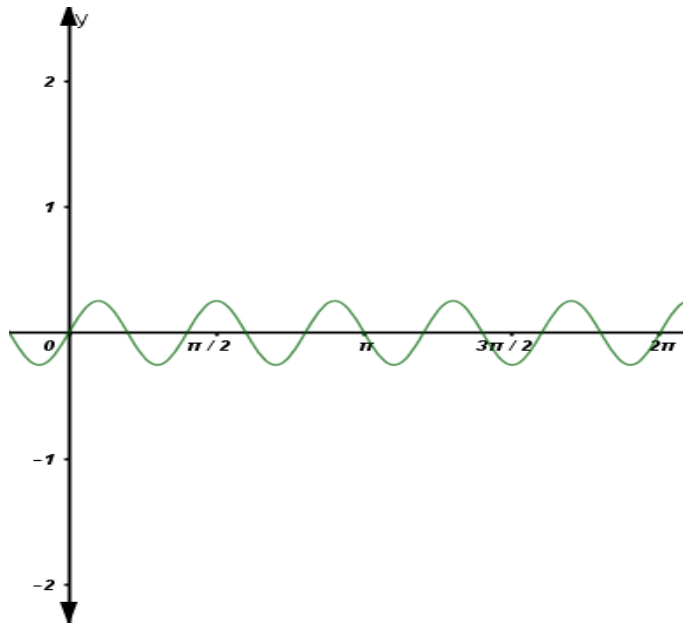
**Grafica 01:** Representación de la Función  $\frac{4}{\pi} \left( \frac{\text{sen}x}{1} \right)$



**Gráfica 02:** Representación de la Función  $\frac{4}{\pi} \left( \frac{\text{sen}3x}{3} \right)$

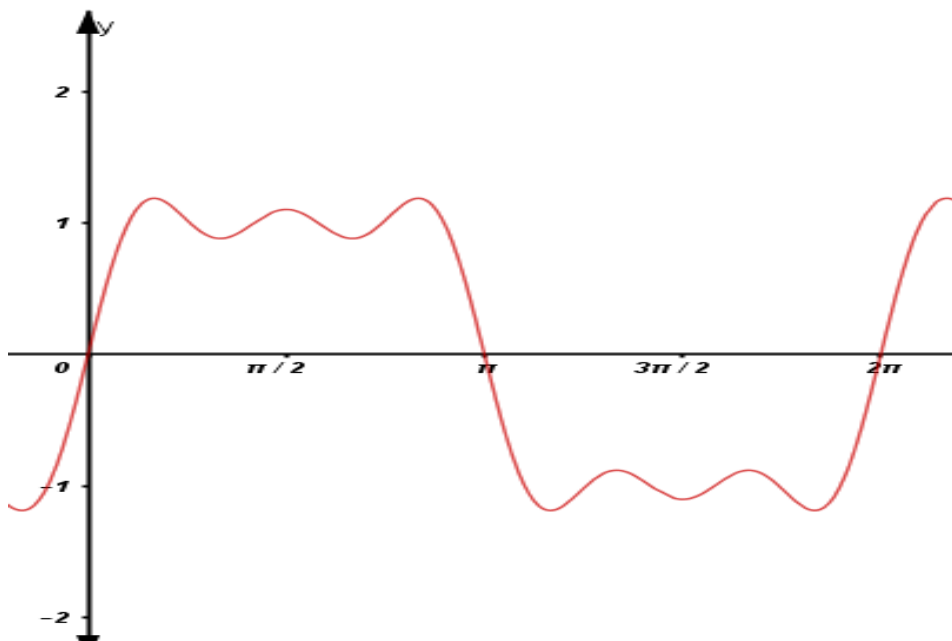


**Gráfica 03:** Representación de la Función  $\frac{4}{\pi} \left( \frac{\text{sen}5x}{5} \right)$



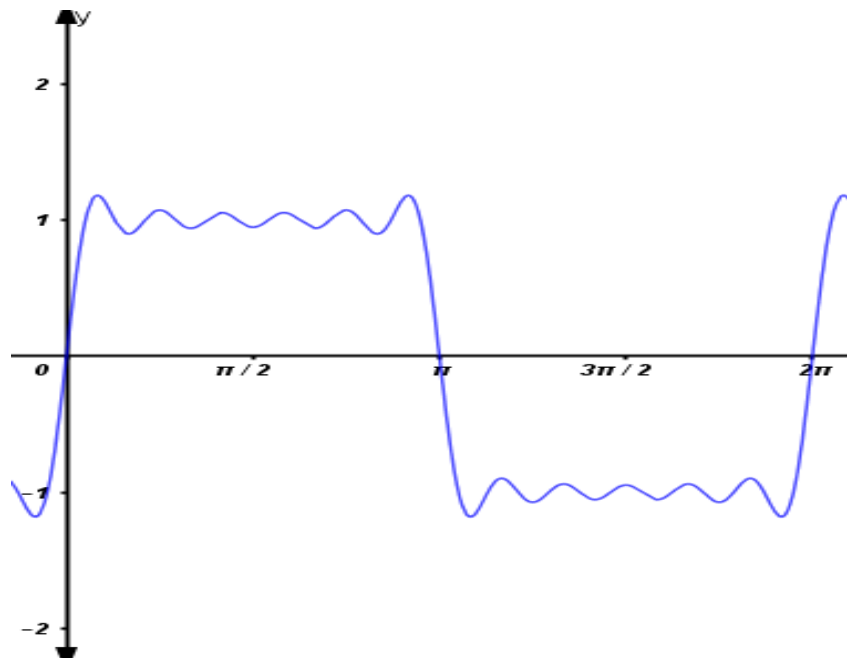
Al trazar el grafico de la suma parciales

**Gráfica 04.** Sumas parciales  $S_5 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\text{sen}x}{1} + \frac{\text{sen}3x}{3} + \frac{\text{sen}5x}{5} \right)$



**Gráfica 05:** Representación de las Sumas parciales

$$S_5 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\text{sen}x}{1} + \frac{\text{sen}3x}{3} + \frac{\text{sen}5x}{5} + \frac{\text{sen}7x}{7} + \frac{\text{sen}9x}{9} + \frac{\text{sen}11x}{11} \right)$$



Estos gráficos sugieren que la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  en cada punto de continuidad.

**Ejemplo 2.5:** Considérese la función

$$f(x) = x \quad \text{si } (-\pi \leq x \leq \pi)$$

Determine la serie de Fourier de  $f$ .

**Solución:** Calcúlese los coeficientes de Fourier.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx ,$$

Integrando por partes tenemos,

$$\begin{aligned}
 u &= x & dv &= \cos nx dx \\
 du &= dx & v &= \frac{1}{n} \operatorname{sen} x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x \operatorname{sen} x}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{n} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{n} dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ - \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ - \frac{1}{n^2} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \cos n(-\pi) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} [0] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx ,$$

Integrando por partes tenemos,

$$\begin{aligned}
 u &= x & dv &= \operatorname{sen} nx dx \\
 du &= dx & v &= -\frac{1}{n} \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-x \cos x}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{n} dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-x \cos x}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\text{senn}x}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-x \cos x}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-\pi \cos n\pi}{n} - \frac{\pi \cos n(-\pi)}{n} \right] \\
&= \frac{-2 \cos n\pi}{n} \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

,Entonces la serie de Fourier es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \text{sen} nx$$

Ahora calcúlese los primeros términos de la serie

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2(-1)^2}{1} \rightarrow b_1 = \frac{2}{1} \\
b_2 &= \frac{2(-1)^3}{2} \rightarrow b_2 = -\frac{2}{2} \\
b_3 &= \frac{2(-1)^4}{3} \rightarrow b_3 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Es decir,

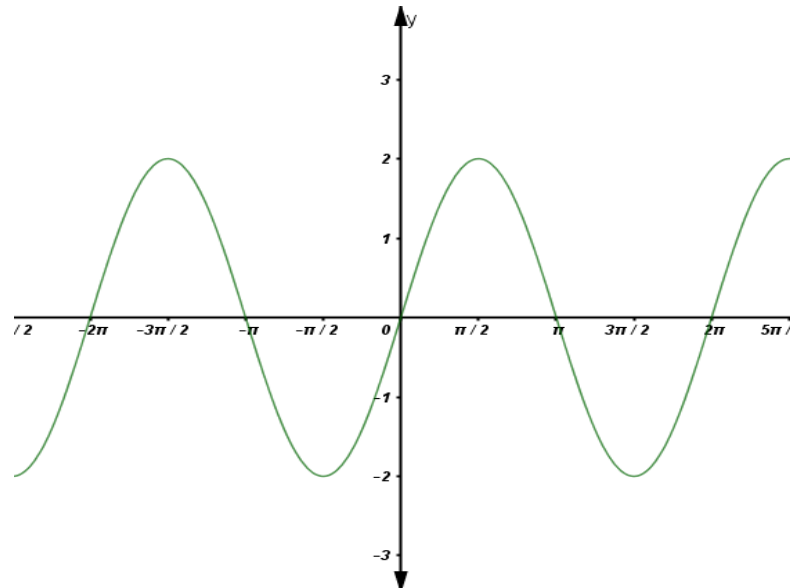
$$f(x) = 2 \left( \text{sen} x - \frac{1}{2} \text{sen} 2x + \frac{1}{3} \text{sen} 3x \dots + (-1)^{k+1} \frac{\text{sen} k x}{k} + \dots \right)$$

Considérese la suma parcial de  $S_3$

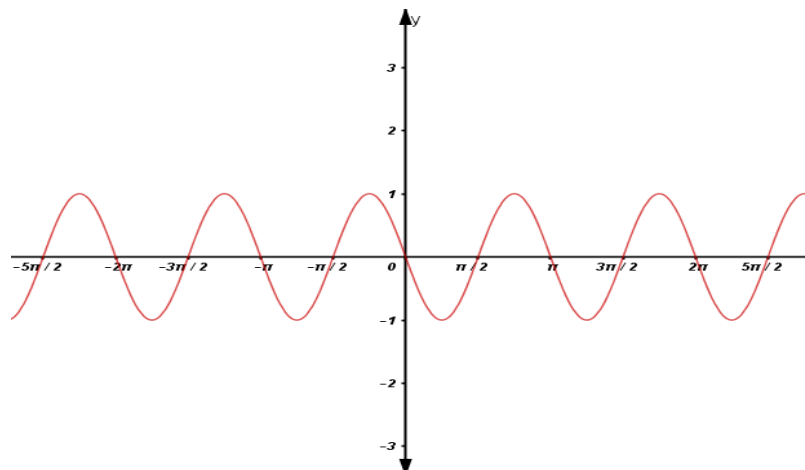
$$S_3 = 2 \left( \frac{\text{sen}x}{1} - \frac{\text{sen}2x}{2} + \frac{\text{sen}3x}{3} \right)$$

Para visualizar el gráfico de  $S_3$  trazamos primero los gráficos de las funciones

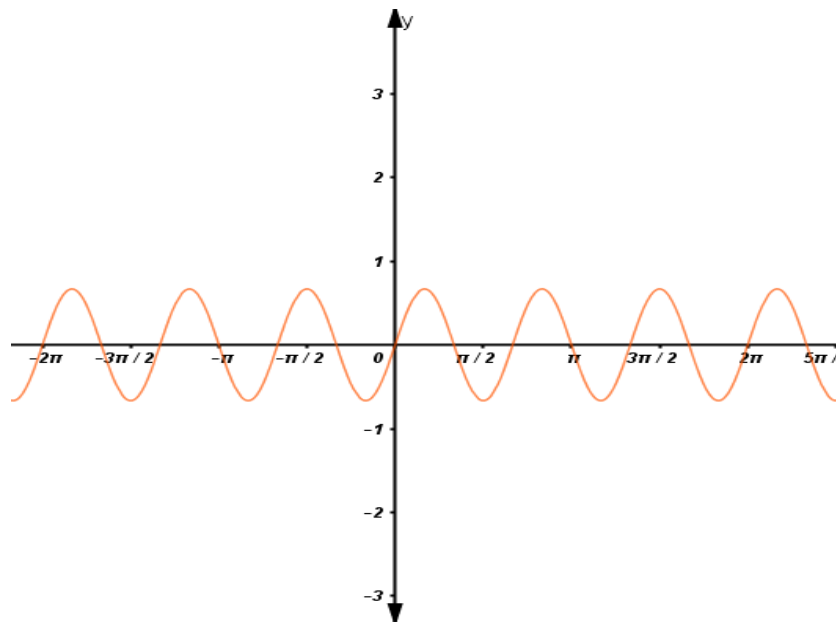
**Gráfica 06:** Representación de la función  $2(\text{sen}x)$



**Gráfica 07:** Representación de la función  $2\left(\frac{\text{sen}2x}{2}\right)$

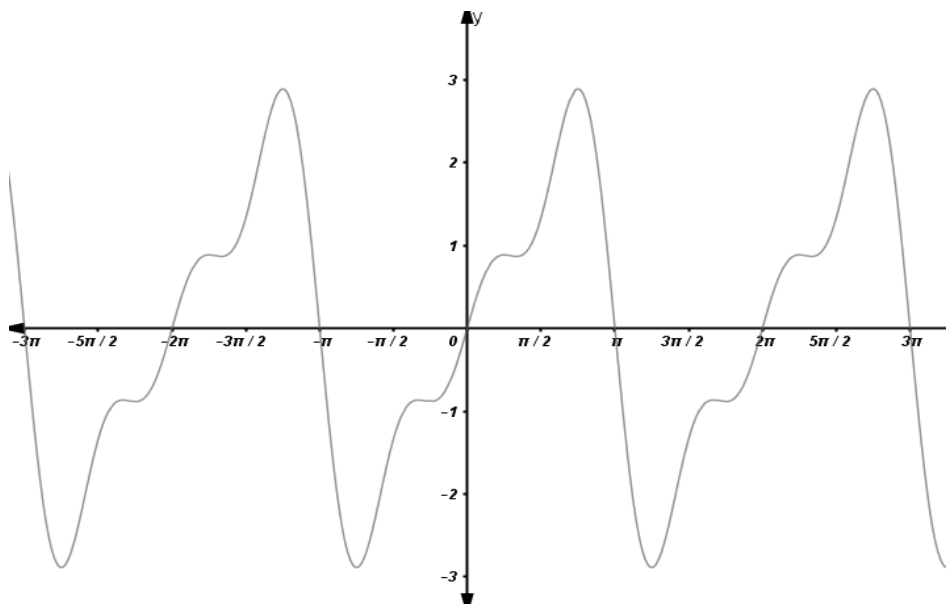


**Gráfica 08:** Representación de la función  $2\left(\frac{\text{sen}3x}{3}\right)$



Al trazar las gráficas de las sumas parciales de  $S_3 = 2\left(\frac{\text{sen}x}{1} - \frac{\text{sen}2x}{2} + \frac{\text{sen}3x}{3}\right)$

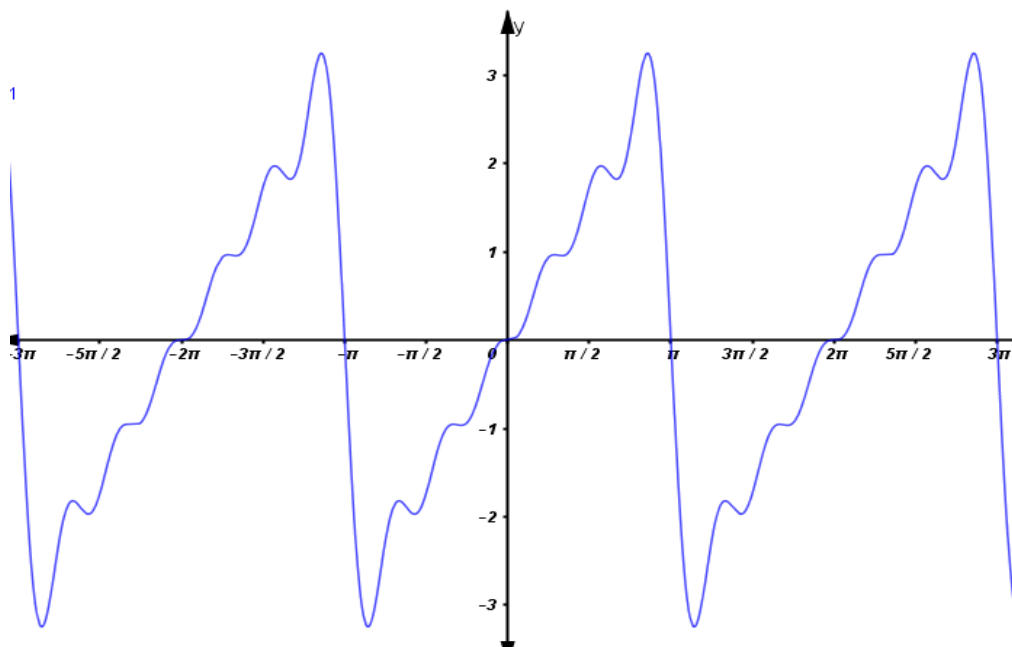
**Gráfica 09:** Representación de la función  $S_3 = 2\left(\frac{\text{sen}x}{1} - \frac{\text{sen}2x}{2} + \frac{\text{sen}3x}{3}\right)$



Y para  $S_6$

**Gráfica 10:** Representación de la función

$$S_6 = 2 \left( \frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{6} \right)$$



Como podemos observar estos gráficos sugieren que la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  en cada punto de continuidad.

## 2.6 Funciones de periodos arbitrarios

**Definición 2.10 :** Sea  $f : R \rightarrow R$  una función de período  $2T$  ( $T > 0$ ), si definimos  $\varphi(x) : R \rightarrow R$  por

$$\varphi(x) = f\left(\frac{Tx}{\pi}\right)$$

Donde  $\varphi$  tiene período  $2\pi$  .

Este cambio de variable permite trasladar, en forma muy natural y sencilla, los resultados que hemos obtenido para funciones de período  $2\pi$  a funciones de período  $2T$  .

**Definición 2:11:** Una función de periodo  $2T$ , integrable en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , tiene una serie de Fourier generalizada de la forma.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$$

Donde,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

**Ejemplo 2.6:** Encontrar la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x < -1 \\ l & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Solución: Calculemos los coeficientes, es necesario que sepamos que  $2T = 4$ , de donde  $T = 2$ .

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-2}^2 f(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ l \int_{-1}^1 dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} [l(2)] \\
 &= l
 \end{aligned}$$

Luego, para calcular,  $a_n$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 l \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\
 &= \frac{l}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{l}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{l}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{-n\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{2l}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

De donde

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2l}{n\pi}, & \text{si } n = 1, 5, 9 \\ \frac{-2l}{n\pi}, & \text{si } n = 3, 7, 11 \end{cases}$$

Para calcular  $b_n$ , tenemos que,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 l \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\
&= -\frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Big|_{-1}^1 \\
&= -\frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{l}{n\pi} \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto la serie de Fourier de  $f$  es

$$f(x) = \frac{l}{2} + \frac{2l}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} x - + \dots \right)$$

## 2.7 Funciones Pares e Impares

Si aplicamos el concepto de funciones pares e impares y sus propiedades en el análisis de la serie de Fourier es posible evitar trabajo innecesario o cálculos un tanto tediosos, pero para ello es necesario recordar algunos resultados importantes.

**Definición 2.12:** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo simétrico con respecto al origen y sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función.

- i. Se dice que  $f$  es par si

$$f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in I$$

- ii. Se dice que  $f$  es impar si

$$f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in I$$

**Ejemplos 2.7:** Demostrar que:

- i. El producto de dos funciones pares es una función par.
- ii. El producto de dos funciones impares es una función par
- iii. El producto de una función par por una impar, el resultado es una función impar.

**Solución:**

**Para probar (i)**

Sea  $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ . Si  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  son funciones pares, entonces

$$\begin{aligned} f(-x) &= f_1(-x)f_2(-x) \\ &= f_1(x)f_2(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Lo que prueba que  $f(x)$  es una función par

**Para probar (ii)**

Sea  $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ . Si  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  son impares, entonces

$$\begin{aligned} f(-x) &= f_1(-x)f_2(-x) \\ &= -f_1(x)[-f_2(x)] \\ &= f_1(x)f_2(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Lo que prueba que  $f(x)$  es una función par.

Para probar (iii)

Sea  $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ . Si  $f_1(x)$  es una función para y  $f_2(x)$  es una función impar, entonces

$$\begin{aligned} f(-x) &= f_1(-x)f_2(-x) \\ &= f_1(x)[-f_2(x)] \\ &= -f_1(x)f_2(x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Lo que prueba que  $f(x)$  es una función impar.

**Ejemplo 2.8:** Demostrar que cualquier función  $f(x)$  se puede expresar como la suma de dos funciones componentes, de las cuales una es par y la otra impar.

**Solución:** Cualquier función  $f(x)$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(-x) \\ &= \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{aligned}$$

Sea  $f_p(x)$  la componente par de la función  $f(x)$ , la cual denotaremos así

$$f_p(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$$

Sea  $f_i(x)$  la componente impar de la función  $f(x)$ , la cual denotaremos así

$$f_i(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f_p(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] \\ &= f_p(x) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} f_i(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] \\ &= -\frac{1}{2}[f(x) - f(x)] \\ &= -f_i(x) \end{aligned}$$

De donde,

$$f(x) = f_p(x) + f_i(x)$$

**Ejemplo 2.9:** Encontrar las componentes par e impares de la función definida por.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Solución: De acuerdo con la función  $f(x)$  presentada anteriormente se tiene que

$$f(-x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$$

Por las definición de la componente par se tiene que

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & x > 0 \\ \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Y la componente impar que quedaría así

$$f_i(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & x > 0 \\ -\frac{1}{2}e^x, & x < 0 \end{cases}$$

**Teorema 2.3:** Sea  $f(x)$  una función par en el intervalo de  $[-\pi, \pi]$ . Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_0^{\pi} f(x)dx$$

**Demostración:** Se tiene que en el intervalo de  $[-\pi, \pi]$  la integral se define así

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^0 f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx$$

Hágase el cambio de variable  $x = -t$ , entonces se tiene que

$$\int_{-\pi}^0 f(x)dx = \int_{\pi}^0 f(-x)(-dx)$$

$$= \int_0^{\pi} f(-x)dx$$

Como  $f(x)$  es par, es decir  $f(-t) = f(t)$ , se tiene que

$$\int_0^{\pi} f(-t)dx = \int_0^{\pi} f(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi} f(x)dt$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} f(x)dx$$

**Teorema 2.4:** Sea  $f(x)$  una función impar en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

**Demostración:** Se tiene que en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , se define la integral así

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^0 f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx \\ &= \int_0^{\pi} f(-x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx \end{aligned}$$

Puesto que  $f(x)$  es impar, es decir,  $f(-x) = -f(x)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= -\int_0^{\pi} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Teorema 2.5:** Sea  $f$  una función de periodo  $2T$ , integrable en el intervalo de  $[-\pi, \pi]$  con serie de Fourier.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

Donde se tiene que

- i. Si  $f$  es una función par entonces

$$b_n = 0, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Y además,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

- ii. Si  $f$  es una función impar entonces

$$a_n = 0, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Y además,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \text{ para } n=1,2,\dots$$

**Demostración:**

El desarrollo en serie de Fourier de la función  $f(x)$  es

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

Luego por la definición (2.11), se tiene,

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \text{ para } n=0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \text{ para } n=1,2,\dots$$

Para probar (i):

Puesto que la función  $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$  es una función impar y por hipótesis  $f(x)$  es

par, el producto de

$$f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

es una función impar. Por consiguiente, por el teorema 2.4, se tiene que

$$b_n = 0, \text{ para } n=1,2,\dots$$

Por otro lado como la función  $\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$  es una función par, y por hipótesis se

tiene que  $f(x)$  es par, el producto de

$$f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

es una función par, por consiguiente por el teorema 2.3, se tiene que

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Para probar (ii)

Por hipótesis  $f(x)$  es una impar y  $\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$  es una función par, el producto

$$f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

Es una función impar. Por consiguiente de acuerdo al el teorema 2.4, se tiene que,

$$a_n = 0, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Por otro lado como  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$  es una función impar, y por hipótesis  $f(x)$  es impar, el producto de

$$f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

Es una función par. Por consiguiente por el teorema 2.3, se tiene que

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\pi} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Supóngase que tenemos una función  $f$ , definida en un intervalo de la forma  $[-T, T]$ , donde  $T > 0$ .

Si definimos,

$$g(x) = \begin{cases} f(-x), & \text{si } -T \leq x \leq 0 \\ f(x), & \text{si } 0 \leq x \leq T \end{cases}$$

Entonces  $g(x)$  es una función par de  $f$  al intervalo  $[-T, T]$ . La función  $g(x)$  tiene una extensión de periodo  $2T$  a toda la recta. La expansión de Fourier de  $g(x)$  es lo que se le conoce como el desarrollo en series de cosenos de  $f(x)$ .

Si definimos,

$$h(x) = \begin{cases} -f(-x), & \text{si } -T \leq x \leq 0 \\ f(x), & \text{si } 0 \leq x \leq T \end{cases}$$

Entonces  $h(x)$  es una extensión impar de  $f$  al intervalo  $[-T, T]$ . La función  $h(x)$  tiene una extensión de periodo  $2T$  a toda a recta. La expansión de Fourier de  $h(x)$  es lo que se conoce como el desarrollo en serie de senos de  $f(x)$ .

**Definición 2.13:** Si  $f: [-T, T] \rightarrow R$  es una función integrable, de periodo  $2T$  entonces,

- i. Si  $f(x)$  es una función par, su desarrollo en serie de Fourier es una serie cosenoidal de Fourier o serie de cosenos de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

donde,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx$$

y

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

- ii. Si  $f(x)$  es una función impar, su desarrollo en serie de Fourier es una serie senoidal de Fourier o serie de senos de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

donde,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

**Ejemplo 2.9:** Desarrolle en serie de Fourier la función

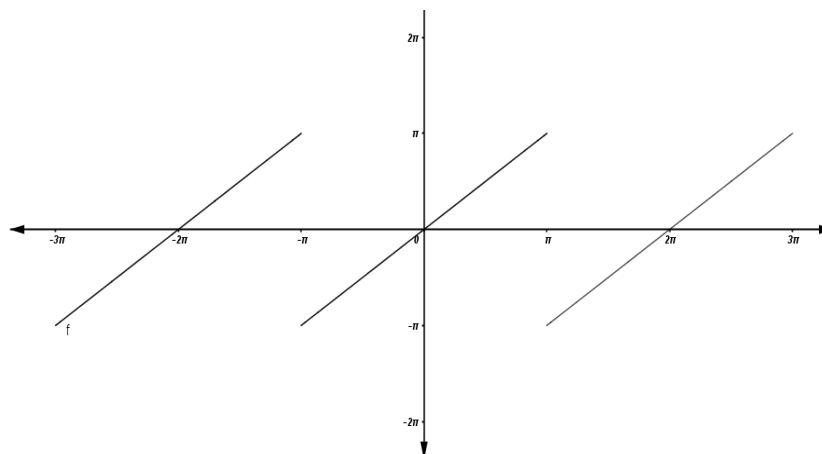
$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

**Solución:** Calculemos el periodo fundamental de la función en el intervalo dado

$$\begin{aligned} T &= \pi - (-\pi) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

La gráfica de la función  $f(x)$  se presenta así

**Gráfica 11:** Representación de la función  $f(x) = x$ , con  $T = 2\pi$



Como  $f(x) = x$ , es una función impar, entonces la serie de Fourier queda definida por una serie de senos.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

donde,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \end{aligned}$$

Integrando por partes, nos queda

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \operatorname{sen} nx \, dx \\ du &= dx & v &= -\frac{1}{n} \cos nx \end{aligned}$$

De donde se tiene que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} n\pi + 0 - 0 \right] \\ &= \frac{2}{n} [-\cos n\pi] \\ &= \frac{2}{n} [(-1)^{n+1}] \end{aligned}$$

Por lo tanto la serie senoidal de Fourier es

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] \operatorname{sen} nx$$

Es decir que su expansión para los primeros  $n = 1, 2, 3, 4 \dots$

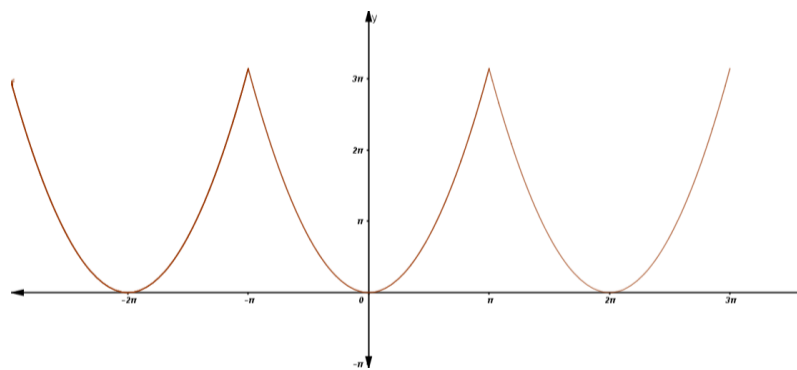
$$f(x) = 2 \left[ \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + \dots \right]$$

**Ejemplo 2.10:** Determine la serie de Fourier de la función

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

**Solución:** La grafica de la función  $f(x)$

**Gráfica 12:** Representación de la función  $f(x) = x^2$ ,



Como la función  $f(x) = x^2$  una función par, entonces las serie de Fourier de  $f(x)$  es una serie de cosenos o serie cosenoidal.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

donde,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{3} (\pi^3 - 0) \right] \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

Luego para calcular  $a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx \end{aligned}$$

Integrando por parte esta impresión dos veces obtenemos que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2\pi}{n^2} \cos n\pi \right] \\ &= \frac{4}{n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

Luego la serie de Fourier de  $f(x)$  es

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx \right) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n \cos nx \end{aligned}$$

De donde su expansión para los primeros  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left[ -\cos x + \frac{1}{2^2} \cos 2x - \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{4^2} \cos 4x - + \dots \right]$$

## 2.8 Desarrollo de Medio Rango

Una función no periódica, definida en cierto intervalo finito  $(0, l)$ , se puede desarrollar en una serie de Fourier, la cual está definida solamente en el intervalo  $(0, l)$ . Es posible desarrollar  $f(t)$  en una serie de Fourier con cualquier frecuencia fundamental deseada; además  $f(t)$  se puede representar por una serie de términos de seno o coseno solamente, lo cual se puede hacer construyendo una función periódica adecuada que sea idéntica a  $f(t)$  en el intervalo  $(0, l)$ , y que satisfaga las condiciones de simetría que conduzcan a la forma deseada de las series de Fourier.

Existe la necesidad muchas veces de aplicar las series de Fourier a funciones  $f(t)$  que sólo están definidos sobre un intervalo finito. Es decir que  $f(t)$  está definida sobre un intervalo  $0 \leq t \leq l$  y, sobre este intervalo se desea representar  $f(t)$  mediante una serie de Fourier. Con este fin, puede aplicarse el teorema 2.5. Es posible hacer que el intervalo  $0 \leq t \leq l$  corresponda al intervalo de integración  $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ , es decir, que puede hacerse  $\frac{T}{2} = l$ , o bien  $T = 2l$ .

**Definición 2.14:** Sea  $f(t)$  una función de periodo  $T = 2l$ . Si  $f(t)$  es par, entonces se obtiene una serie de Fourier en términos de coseno así

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t$$

Con coeficientes

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \left( \frac{n\pi}{l} t \right) dt$$

Si  $f(t)$  es impar, entonces se obtiene una serie de Fourier en términos de seno así:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} t$$

Con coeficiente

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{l} t \right) dt$$

**Ejemplo 2.11:** Encontrar los desarrollos de medio rango de a función

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{l} t & \text{si } 0 < t < \frac{l}{2} \\ \frac{2k(l-t)}{l} & \text{si } \frac{l}{2} < t < l \end{cases}$$

**Solución:** Calculando los coeficientes tenemos.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l f(t) dt \\ &= \frac{1}{l} \left[ \frac{2k}{l} \int_0^{l/2} t dt + \frac{2k}{l} \int_{l/2}^l (l-t) dt \right] \\ &= \frac{1}{l} \left[ \frac{2kt^2}{2l} \Big|_0^{l/2} + \left( \frac{2klt}{l} - \frac{2kt^2}{2l} \right) \Big|_{l/2}^l \right] \\ &= \frac{1}{l} \left[ \frac{kl}{4} - 0 + 2kl - kl - kl + \frac{kl}{4} \right] \\ &= \frac{1}{l} \left[ \frac{kl}{2} \right] \\ &= \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Luego se calcula  $a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \\ &= \frac{2}{l} \left[ \frac{2k}{l} \int_0^{l/2} t \cos\left(\frac{n\pi}{l}\right) t dt + \frac{2k}{l} \int_{l/2}^l (l-t) \cos\left(\frac{n\pi}{l}\right) t dt \right] \end{aligned}$$

Integrando por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{l/2} t \cos\left(\frac{n\pi}{l}\right) t dt &= \frac{lt}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}\right) t \Big|_0^{l/2} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{l/2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}\right) t dt \\ &= \frac{l^2}{2n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \left( \cos\frac{n\pi}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

De la misma manera integramos

$$\int_{l/2}^l (l-t) \cos\frac{n\pi}{l} t dt = \frac{l^2}{2n\pi} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n^2\pi^2} \left( \cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2} \right)$$

Luego se obtiene que,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{l^2}{2n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \left( \cos\frac{n\pi}{2} - 1 \right) + \frac{l^2}{2n\pi} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n^2\pi^2} \left( \cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \frac{4k}{n^2\pi^2} \left( 2 \cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1 \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a_1 = \frac{4k}{1^2 \pi^2} \left( 2 \cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi - 1 \right)$$

$$= 0$$

$$a_2 = \frac{4k}{2^2 \pi^2} (2 \cos \pi - \cos 2\pi - 1)$$

$$= \frac{16k}{2^2 \pi^2}$$

$$a_3 = \frac{4k}{3^2 \pi^2} (2 \cos 3 \frac{\pi}{2} - \cos 3\pi - 1)$$

$$= 0$$

$$a_4 = \frac{4k}{4^2 \pi^2} (2 \cos 2\pi - \cos 2\pi - 1)$$

$$= 0$$

$$a_5 = \frac{4k}{5^2 \pi^2} \left( 2 \cos 5 \frac{\pi}{2} - \cos 5\pi - 1 \right)$$

$$= 0$$

$$a_6 = \frac{4k}{6^2 \pi^2} (2 \cos 3\pi - \cos 6\pi - 1)$$

$$= \frac{-16k}{6^2 \pi} (4)$$

$$= \frac{16k}{6^2 \pi^2} (2 \cos 3\theta - \cos 3 - 1)$$

$$= \frac{16k}{6^2 \pi^2}$$

·  
·  
·

De donde el desarrollo de medio rango de  $f(t)$  es

$$f(t) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \left( \frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi}{l} t + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi}{l} t + \dots \right)$$

Esta serie representa la extensión periódica par de la función  $f(t)$ .

Análogamente obtenemos el coeficiente  $b_n$ .

$$b_n = \frac{2}{l} \left[ \frac{2k}{l} \int_0^{l/2} t \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} t dt + \frac{2k}{l} \int_{l/2}^l (l-t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} t dt \right]$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^{l/2} t \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} t dt &= -\frac{lt}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} t \Big|_0^{l/2} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{l/2} \cos \left( \frac{n\pi}{l} t \right) t dt \\ &= -\frac{l^2}{2n\pi} \cos \frac{1}{2} n\pi + \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} n\pi \end{aligned}$$

Análogamente integramos

$$\int_{l/2}^l (l-t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{l} t \right) t dt = \frac{l^2}{2n\pi} \cos \frac{1}{2} n\pi + \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} n\pi$$

Luego, se tiene que

$$b_n = \frac{8k}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} n\pi$$

De donde el desarrollo de medio rango de  $f(t)$  es:

$$f(t) = \frac{8k}{\pi^2} \left( \frac{1}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} t - \frac{1}{3^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{l} t + \frac{1}{5^2} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{l} t - + \dots \right)$$

Esta serie representa la extensión periódica impar de  $f(t)$ .

## 2.9 Teoremas básicos de convergencia de la Serie de Fourier.

**Teorema 2.6: (Identidad de Parseval):** Sea  $f : R \rightarrow R$  una función periódica de periodo  $2\pi$ , si la serie de Fourier  $f(x)$  converge uniformemente en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  entonces

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Demostración:

Por hipótesis  $f(x)$  es continua, ya que es límite uniforme de funciones continuas. Por lo tanto  $f(x)^2$  es integrable en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Entonces,

$$(f(x))^2 = \frac{a_0 f(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x) \cos nx + b_n f(x) \operatorname{sen} nx$$

y la convergencia es uniforme.

Integrando obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx \right)$$

Luego,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 \pi + b_n^2 \pi)$$

Este resultado se le conoce como la Identidad de Parseval.

**Teorema 2.7 (Desigualdad de Bessel):** Sea  $f : R \rightarrow R$  una función continua de periodo  $2\pi$  y sean  $a_n$  y  $b_n$  los coeficientes de Fourier de  $f(x)$ . Para cualquier entero positivo  $n$  se cumple que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$

Demostración:

Consideremos las sumas parciales de la serie de Fourier de  $f(x)$ , esto es para  $n \geq 1$  sea

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Tenemos que

$$(f(x))^2 - 2f(x)S_N(x) + (S_N(x))^2 = (f(x) - S_N(x))^2 \geq 0$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( (f(x))^2 - 2f(x)S_N(x) + (S_N(x))^2 \right) dx \geq 0$$

Así,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \geq 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_N(x) - \int_{-\pi}^{\pi} (S_N(x))^2 dx$$

Luego, multiplicando  $S_N(x)$  por  $f(x)$  e integremos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , así obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_N(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^N \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nxdx \right)$$

Luego,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_N(x)dx = \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right)$$

Aplicado el Teorema 3.6 a la sumas parciales  $S_N(x)$ , se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (S_N(x))^2 dx = \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx &\geq 2\pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right) - \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right) \\ &= \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$

**Teorema 2.8 :** Sea  $f$  una función integrable en  $[a,b]$ . Demostrar que para  $\varepsilon > 0$ , existe una función escalonada  $h(x)$ , definida en  $[a,b]$ , tal que

$$\int_a^b |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon$$

**Teorema 2.9 (Riemann-Lebesgue):** Sea  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable.

Entonces,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$$

**Demostración:**

Para la demostración consideremos los siguientes casos:

- i.  $f(x)$  es la función característica de un intervalo  $[c, d]$  contenido en  $[a, b]$ , es decir

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [c, d] \\ 1, & \text{si } x \in [c, d] \end{cases}$$

En este caso,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_c^d \operatorname{sen}(\lambda x) dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda x) \right]_c^d \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} [-\cos(\lambda d) + \cos(\lambda c)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que la función  $\cos x$  es acotada.

- ii.  $f(x)$  es una función escalonada

En este caso  $f(x)$  es una combinación lineal finita de funciones características de intervalos contenidos en  $[a, b]$ , por la linealidad de la integral el resultado para este caso se obtiene inmediatamente del caso 1, es decir,

Sea  $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{A_i}$  con  $\alpha_i$  constante y  $A_i$  intervalos contenidos en

$[a, b]$ , donde:

$$A_i = \{x \in [a, b] / f(x) = \alpha_i\}$$

y

$$X_{A_i} = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A_i \\ 1, & \text{si } x \in A_i \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{A_i} \operatorname{sen}(\lambda x) dx \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b X_i \operatorname{sen}(\lambda x) dx \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b \operatorname{sen}(\lambda x) dx \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda x) \right]_a^b \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donde  $A_i = [a_i, b_i]$  y  $\cos x$  es una función acotada.

iii. Caso general, sea  $f(x)$  integrable en el intervalo  $[a, b]$

Sea  $\varepsilon > 0$ , por el teorema 3.8 existe una función escalonada  $h(x)$ , definida en  $[a, b]$ , tal que

$$\int_a^b |f(x) - h(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo probado en el caso anterior existe un  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , suficientemente grande tal que  $\lambda \geq \lambda_0$ , entonces

$$\left| \int_a^b h(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Así para todo  $\lambda \geq \lambda_0$  se tiene que

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - h(x) + h(x)) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
&\leq \left| \int_a^b (f(x) - h(x)) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| + \left| \int_a^b h(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
&\leq \int_a^b |(f(x) - h(x)) \operatorname{sen}(\lambda x)| dx + \left| \int_a^b h(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
&\leq \int_a^b |f(x) - h(x)| dx + \left| \int_a^b h(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Análogamente se demuestra que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$$

El teorema de Riemana –Lebesgue tiene como consecuencia importante el siguiente resultado.

Corolario 2.1: Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de periodo  $2\pi$ , integrable en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Si  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son sus coeficientes de Fourier, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\} = 0$$

Demostración:

**Teorema 2:11:** Si  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$  y  $n$  es un número natural, entonces

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

**Demostración:**

Partimos de que

$$\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos x + \dots + 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos nx$$

Por identidad trigonométrica se tiene que

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx) &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - nx\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + nx\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)x\right) + \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)x\right) \\ &= -\operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) + \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) + \dots - \operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) + \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

**Definición 2:13:** El núcleo de Dirichlet es la sucesión de funciones  $\{D_n(x)\}$

definida así

$$D_n(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\pi\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

o bien

$$D_n(x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nx \right)$$

**Teorema 2.12:** El núcleo de Dirichlet satisface las siguientes propiedades

- i)  $D_n(x)$  es par, es decir  $D_n(x) = D_n(-x)$
- ii)  $D_n(x)$  es una función periódica con periodo  $2\pi$ , es decir,  
 $D_n(x) = D_n(x + 2\pi)$
- iii)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$ , es decir

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

**Demostración:**

- i.  $D_n(x)$  es par, es decir  $D_n(x) = D_n(-x)$

$$D_n(-x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(-nx).$$

Ahora como  $\cos(-nx) = \cos(nx)$ , entonces:

$$D_n(-x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) = D_n(x).$$

- ii.  $D_n(x)$  es una función periódica, de periodo  $2\pi$

$$\begin{aligned} -D_n(x + 2\pi) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(x + 2\pi). \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx + 2n\pi). \end{aligned}$$

Como  $\cos(nx + 2n\pi)$ , es decir es periódica de periodo  $2\pi$ , entonces

$$D_n(x+2\pi) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) = D_n(x).$$

iii.  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$  , se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) \right) dx &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx + \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} (\pi - 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Teorema 3.13:** (Integral de Dirichlet). Sea  $f : R \rightarrow R$  una función integrable en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , periódica con periodo  $2\pi$ . Sea  $S_n(x)$  la  $n$ -ésima suma parcial de la serie de Fourier generada por  $f(x)$ , definida por.

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Donde  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier de  $f(x)$ . Entonces  $S_n(x)$  se puede representar como una integral definida en la forma

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

**Demostración:**

Sustituyendo los valores de los coeficientes  $a_0, a_n$  y  $b_n$  generados por la serie de Fourier, se tiene:

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{m=1}^m \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \cos(nx) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \sin(nx) dt \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^m \cos(nt) \cos(nx) + \sin(nt) \sin(nx) \right\} f(t) dt
\end{aligned}$$

Aplicando la identidad trigonométrica

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y).$$

Se tiene que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^m \cos n(t-x) \right\} f(t) dt$$

Luego por la definición 2.13 (núcleo de Dirichlet)

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt$$

Haciendo el cambio de variable  $u = t - x$ , tenemos que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) D_n(u) du$$

Como  $f(x)$  toma los mismos valores en el intervalo  $[-\pi - x, \pi - x]$  que en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , la última igualdad puede escribirse como

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du$$

Esta fórmula es conocida como la *Integral de Dirichlet*.

### 2.9.1 Convergencia Puntual de una serie de Fourier

**Definición 2.14:** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado y acotado, sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Diremos que  $f$  es continua a trozos en  $I$  si  $f(x)$  tiene una cantidad finita de discontinuidades de salto, es decir si:

- i)  $I$  se puede dividir en una cantidad finita de sub-intervalos  $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{n-1}, z_n]$ , con  $(z_0 < z_1 < \dots < z_n)$ , tales que  $f$  es continua en cada uno de los intervalos  $(z_{i-1}, z_i)$ .
- ii) Para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ , los siguientes límites existen y son finitos

$$\lim_{x \rightarrow z_i^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow z_i^-} f(x)$$

- iii) Los siguientes límites existen y son infinitos

$$\lim_{x \rightarrow z_0^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow z_n^-} f(x)$$

**Teorema 2.14:** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de periodo  $2\pi$ , tal que:

- i)  $f(x)$  es continua a trozos en  $[-\pi, \pi]$
- ii) Es posible subdividir  $[-\pi, \pi]$ , en sub-intervalos  $[z_{i-1}, z_i]$ , de manera que  $f(x)$  sea derivable en  $(z_{i-1}, z_i)$  y existen las derivadas laterales

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(z_i + h) - f(z_i^+)}{h} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(z_i + h) - f(z_i^-)}{h}$$

Entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , la serie de Fourier de  $f(x)$  converge a

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

**Demostración:**

Para  $x \in \mathbb{R}$ . Sea  $\{S_n(x)\}$  la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f(x)$ , entonces

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$$

Luego,

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt - f(x^+) \int_0^{\pi} D_n(t)dt - f(x^-) \int_{-\pi}^0 D_n(t)dt \\ &= \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x^+))D_n(t)dt + \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x^-))D_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{f(x+t) - f(x^+)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} \right) \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left( \frac{f(x+t) - f(x^-)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} \right) \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \end{aligned}$$

Para  $t \in [-\pi, \pi]$  sea

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x^+)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

Claramente

$$g(t) = \left( \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \right) \left( \frac{t}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} \right)$$

de la hipótesis sobre  $f(x)$  sigue inmediatamente que existe  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$  y

que si definimos  $g(0)$  como este límite entonces  $g(x)$  es continua a

trozos en  $[-\pi, \pi]$ .

Por el Teorema 3.9 (Riemann –Lebesgue) se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{f(x+t) - f(x^+)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} \right) \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0$$

De manera análoga se prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left( \frac{f(x+t) - f(x^-)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} \right) \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Es importante destacar que si  $f(x)$  satisface las hipótesis del teorema anterior entonces su serie de Fourier converge puntualmente a  $f(x)$  en cada punto de continuidad.

**Corolario 2.2:** Si  $f(x)$  satisfacen las hipótesis del teorema anterior y todos sus coeficientes de Fourier son iguales a cero entonces  $f(x)$  es nula, salvo en una cantidad finita de puntos.

**Corolario 2.3:** Si  $f(x)$  y  $g(t)$  satisfacen las hipótesis del Teorema anterior y los coeficientes de Fourier de  $f(x)$  son iguales a los de  $g(t)$  entonces  $f(x) = g(t)$  salvo en una cantidad finita de puntos.

**Ejemplo 2:11** Demostrar que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \dots$$

A partir de la serie de Fourier de la función

$$f(x) = x, \text{ para } -\pi < x < \pi$$

Solución:

Por el ejemplo 3.15, tenemos que el desarrollo en serie de Fourier de la función  $f(x)$  es

$$f(x) = 2 \left[ \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + \dots \right]$$

Se puede observar que los puntos de discontinuidad de la función son  $x = -\pi$  y  $x = \pi$ .

Para  $x = \pi$  tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \pi \text{ y } \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = -\pi$$

Luego,

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$$

De manera análoga para  $x = -\pi$ .

Lo que indica que en los puntos de discontinuidad de  $f(x)$ , todas las sumas parciales tienen valor cero.

Ahora como  $f(x)$  es continua en el intervalo  $(-\pi, \pi)$ , entonces la serie converge a su valor y su suma es  $f(x)$ , por lo tanto.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \left[ \begin{aligned} &\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\text{sen}2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\text{sen}3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\text{sen}4\left(\frac{\pi}{2}\right) + \\ &\frac{1}{5}\text{sen}5\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{6}\text{sen}6\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{7}\text{sen}7\left(\frac{\pi}{2}\right) \dots \end{aligned} \right]$$

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left[ 1 - 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7} \right]$$

$$\frac{\pi}{2} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \dots$$

Es decir que,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \dots$$

## 2.9.2 Convergencia de las medias aritméticas

**Definición 2.15:** Sea  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  una sucesión de números reales. La sucesión de las medias de Cesaro, o medias aritméticas, de la sucesión  $\{\lambda_n\}$  es la sucesión  $\{\beta_n\}$  definida por

$$\beta_n = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n+1}$$

Es importante analizar qué ocurre con las sumas de Cesaro de las sumas parciales de la serie de Fourier.

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de periodo  $2\pi$ , integrable en el intervalo de  $[-\pi, \pi]$  y sea  $\{S_n\}$  la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f(x)$ .

Consideremos sus medias de Cesaro

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}$$

Lo cual es lo mismo que,

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left( \frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n+1} \right) dt$$

**Definición 2.16:** El núcleo de Fejer es la sucesión de Funciones  $\{K_n\}$  definido

por

$$K_n = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n+1}$$

Donde  $\{D_n\}$  es el núcleo de Dirichlet.

Notablemente el núcleo de Fejer podemos escribirlo así.

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt$$

Teorema 3.15: Sea  $K_n(t)$  el núcleo de Fejer. Entonces se cumple que

i.  $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$

ii. 
$$K_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left( \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2$$

iii.  $K_n(t) \geq 0$

Demostración:

Para probar (i).

Partimos del teorema 3.12, (iii), donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Entonces claramente,

$$\int_{\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$$

Para probar (ii).

Por las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \text{ y } \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

Se tiene que,

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2\pi \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right) \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2\pi \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}t\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{1 - \cos t} \right) \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} K_n(t) &= \frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n+1} \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \left( \frac{1 - \cos(n+1)t}{1 - \cos t} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \left( \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2 \end{aligned}$$

Para probar (iii)

Sigue inmediatamente del caso anterior, por lo tanto  $K_n(t) \geq 0$

**Teorema 2.15:** Sea  $f : R \rightarrow R$  una función continua de periodo  $2\pi$ , sea  $\{\sigma_n\}$  la sucesión de las medias de Cesaro de las sumas parciales de la serie de Fourier de  $f(x)$ . Entonces  $\{\sigma_n\}$  converge uniformemente a  $f(x)$  en  $R$ .

**Demostración:**

Se tiene que  $f(x)$  es continua, acotada en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y periódica, entonces,  $f(x)$  es uniformemente continua y acotada en todo  $R$ . Es decir existe un  $M > 0$  talque,

$$|f(x)| \leq M, \text{ para todo } x \in R$$

y además para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  talque,

$$|f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ si } |x - x'| < \delta, \text{ para todo } x', x \in R$$

Sea  $x \in R$ , por las medias de Cesaro, tenemos que

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) K_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt + \\ &\quad \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt + \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt + 2M \int_{\delta}^{\pi} K_n(t) dt + 2M \int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt + \frac{2M}{2\pi(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt + \frac{2M}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \end{aligned}$$

La función  $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$  es creciente para  $0 \leq x \leq \pi$ . Luego

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}, \text{ para } \delta \leq x \leq \pi$$

Por lo tanto

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \leq (\pi - \delta) \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} \right) = 0$$

Existe un entero positivo  $N_0$  tal que  $n \geq N_0$  entonces

$$\frac{2M}{(n+1)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Tenemos que si  $n \geq N_0$ , entonces

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Lo que implica que  $\{\sigma_n\}$  converge a  $f(x)$  cuando  $n$  tiende al infinito, para todo  $x \in R$ .

**Corolario 2.4** . Sea  $f : R \rightarrow R$  una función continua de periodo  $2\pi$ . Si  $x \in R$  y existe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$$

**Teorema 2.16:** (Aproximación de Weierstrass). Toda Función continua a valores reales, definida en un intervalo cerrado y acotado puede ser aproximada uniformemente por polinomios trigonométricos en  $R$ .

### 2.9.3 Convergencia en media cuadrática de la serie de Fourier

**Definición 2.17:** Si  $f: R \rightarrow R$  es una función de periodo  $2\pi$ , continua a trozos, se define

$$\|f\|_2 = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Teorema 2.17.** Sea  $f: R \rightarrow R$  una función de periodo  $2\pi$ , continua a trozos. Demostrar que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $g: R \rightarrow R$ , continua y de período  $2\pi$  talque

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon$$

**Teorema 2.18** (Desigualdad de Cauchy-Scharwartz). Si  $f: R \rightarrow R$  y  $g: R \rightarrow R$  son funciones de período  $2\pi$  y continuas a trozos entonces

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx \right| \leq \left( \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración: Sea  $\lambda \in R$ , entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \lambda g(x))^2 dx \geq 0$$

de donde,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - 2\lambda \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int_{-\pi}^{\pi} (g(x))^2 dx \geq 0$$

La expresión de la izquierda es un polinomio de grado 2 en la variable  $\lambda$ , por lo tanto su discriminante es menor o igual que cero, es decir

$$4\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} (g(x))^2 dx\right) \leq 0$$

De donde,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Teorema 2.19:** Si  $f: R \rightarrow R$  y  $g: R \rightarrow R$  son funciones de período  $2\pi$  y continuas a trozos entonces

- i.  $\|f\|_2 = 0$  si y sólo si  $f$  es nula, salvo en una cantidad finita de puntos.
- ii.  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$
- iii. Si  $\lambda \in R$ , entonces  $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$

Sea  $f: R \rightarrow R$  una función de período  $2\pi$ , continua a trozos y sea

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^n a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

La sucesión de sumas parciales de su serie de Fourier.

Sea  $N$  un entero positivo y sea  $P$  un polinomio trigonométrico de la forma

$$P(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx$$

Entonces,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - P(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)P(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (P(x))^2 dx$$

Como,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (P(x))^2 dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)P(x) dx &= \\ &= \frac{\alpha_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^N \alpha_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + \beta_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} n x dx \\ &= \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n a_n + \beta_n b_n \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - P(x))^2 dx &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - 2 \left( \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n a_n + \beta_n b_n \right) + \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2 \\ &= \|f\|_2^2 + \frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n - \alpha_n)^2 + (b_n - \beta_n)^2 - \left( \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2 \right) \end{aligned}$$

**Teorema 2.20:** Sea  $f : R \rightarrow R$  una función de periodo  $2\pi$ , continua a trozos, sea  $N$  un entero positivo y sea  $P$  un polinomio trigonométrico de grado  $N$ . Sea  $\{S_n\}$  la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ . Entonces

$$\|f - S_N\|_2 = \|f - P\|_2$$

y hay igualdad si y sólo si  $P = S_N$

Demostración:

**Teorema 2.21:** (Desigualdad de Bessel). Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de periodo  $2\pi$ , continua a trozos y sean  $a_n$  y  $b_n$  sus coeficientes de Fourier. Entonces

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \leq \|f\|_2^2$$

para todo entero positivo  $N$ .

**Demostración:** Sean  $\{S_n\}$  la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ , como

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - P(x))^2 = \|f\|_2^2 + \frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n - \alpha_n)^2 + (b_n - \beta_n)^2 - \left( \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2 \right)$$

para  $P(x) = S_n(x)$ , se obtiene que

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2 = \|f\|_2^2 - \left( \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2 \right)$$

Entonces,

$$0 \leq \|f\|_2^2 - \left( \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2 \right)$$

Es decir,

$$\left( \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2 \right) \leq \|f\|_2^2$$

Corolario : Sea  $f : R \rightarrow R$  una función de periodo  $2\pi$ , continua a trozos y sean  $a_n$  y  $b_n$  sus coeficientes de Fourier. Entonces la Serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Es convergente.

**Teorema 2.22.** Sean  $f : R \rightarrow R$  una función de periodo  $2\pi$ , continua a trozos y sea  $\{S_n\}$  la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_2 = 0$$

**Demostración:**

Supongamos que  $f$  es continua. Sea  $\{\sigma_n\}$  la sucesión de las medias de Cesaro de las sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ . Por el teorema 3.15  $\{\sigma_n\}$  converge uniformemente a  $f$  en  $R$ , por lo tanto.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \sigma_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Por el teorema 2.20 se tiene que

$$\|f - S_n\|_2 = \|f - \sigma_n\|_2$$

para cada  $n \in N$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n\|_2 = 0$$

Sea  $f$  continua a trozos y de periodo  $2\pi$

Dado  $\varepsilon > 0$  existe una función  $g$  continua y de periodo  $2\pi$  tal que

$$\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sean  $\{S_{g,n}\}$  la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $g$ , por lo que acabamos de probar, existe un entero positivo  $N_0$  tal que si  $n \geq N_0$  entonces

$$\|g - S_{g,n}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por el teorema 2.15, se tiene que, para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f - S_{g,n}\|_2$$

Sea  $n \geq N_0$ , entonces

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f - S_{g,n}\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - S_{g,n}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

**Teorema 2.23:** (Identidad de Parseval). Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de periodo  $2\pi$ , continua a trozos y sean  $a_n$  y  $b_n$  sus coeficientes de Fourier. Entonces

$$\left( \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2 \right) = \|f\|_2^2$$

Demostración: Sea  $\{S_n(x)\}$  la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ . Se sabe que

$$\|f - S_n\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 = \|f\|_2^2 - \left( \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2 \right)$$

Aplicando límite cuando  $n$  tienda a infinito y por el Teorema 3.22, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|f\|_2^2 - \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^n a_n^2 + b_n^2 \right) \right) = 0$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_2^2 = \left( \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \beta_n^2 \right)$$

## 2.10 Integración y derivación de la serie de la Fourier

**Teorema 2.24:** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado y acotado,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua a trozos. Sea  $x_0 \in I$  y sea  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Entonces  $F$  es continua en  $I$  y que  $F$  posee derivadas laterales en cada punto de  $I$ .

Demostración:

En las series de Fourier la integración término a término es posible, por lo que se tiene que.

**Teorema 2.25:** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de periodo  $2\pi$ , continua a trozos en  $[-\pi, \pi]$ , con serie de Fourier.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Entonces, para  $a, b \in \mathbb{R}$ , se cumple

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{n=1}^k \frac{a_n(\operatorname{sen} nb - \operatorname{sen} na) - b_n(\cos nb - \cos na)}{n}$$

Demostración: Sea  $F$  la función definida por

$$F(x) = \int_0^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt$$

Por el teorema 3.23,  $F$  es continua y posee derivadas laterales en cada punto de la recta, más aún, por el teorema 3.2 se tiene que

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt \\ &= \int_0^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt + \int_x^{x+2\pi} \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt \\ &= F(x) + \int_0^{2\pi} \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt \\ &= F(x) + \int_0^{2\pi} f(t) dt - \pi a_0 \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $F(x)$  tiene período  $2\pi$ .

Por el Teorema 3.14 la serie de Fourier de  $F$  converge a  $F$  en cada punto de la recta, es decir, si  $A_n$  y  $B_n$  son los coeficientes de Fourier de  $F$ , se tiene que para cada  $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

Para calcular  $A_n$  y  $B_n$ . Integrando por partes se obtiene que, para  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ F(x) \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \left( f(x) - \frac{a_0}{2} \right) \sin nx dx \\ &= -\frac{b_n}{n} \end{aligned}$$

De forma análoga se obtiene

$$B_n = \frac{a_n}{n}$$

Por lo tanto

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \operatorname{sen} nx - b_n \operatorname{cos} nx}{n}$$

De donde

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \operatorname{sen} nx - b_n \operatorname{cos} nx}{n}$$

Luego se evalúa este resultado en  $x=b$ , en  $x=a$  y restamos, obteniendo así

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\operatorname{sen} nb - \operatorname{sen} na) - b_n(\operatorname{cos} nb - \operatorname{cos} na)}{n}$$

Es importante destacar que esta conclusión se puede expresar de la siguiente manera.

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \operatorname{cos} ntdt + b_n \int_a^b \operatorname{sen} ntdt$$

Es decir, la serie se puede integrar término a término.

**Corolario 2.5:** Si  $f : R \rightarrow R$  es una función de periodo  $2\pi$ , continua a trozos en

$[-\pi, \pi]$ , con serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{cos} nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

Converge.

**Teorema 2.26:** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, de periodo  $2\pi$  con serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Si  $f'$  es continua a trozos, entonces la serie de Fourier de  $f'$  es

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \operatorname{sen} nx)$$

Es decir, la serie de Fourier de  $f'$  se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de  $f$ .

**Demostración:** Sean  $a'_n$  y  $b'_n$  los coeficientes de Fourier de  $f'$ . Entonces

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0$$

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nxdx \\ &= \frac{1}{\pi} [f(x) \cos nx]_{-\pi}^{\pi} + n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nxdx \\ &= nb_n \end{aligned}$$

De forma análoga se obtiene

$$b'_n = -na_n$$

# **CAPITULO 3: APLICACIONES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER**

## **3.1 El Fenómeno de Gibbs**

Una de las tantas consecuencias interesantes, aunque desde luego no la más importante, a que ha dado lugar al análisis de Fourier, es el llamado fenómeno de Gibbs o fenómeno de Gibbs-Wilbrahan., hecho observado en 1848 por H. Wilbrahan el cual mostraba que en puntos cercanos a una discontinuidad de una función  $f$ , las sumas parciales de la serie de Fourier presentan un comportamiento oscilatorio anómalo que hacía que las gráficas de las sumas parciales excedieran en aproximadamente 9% del valor del salto de la discontinuidad.

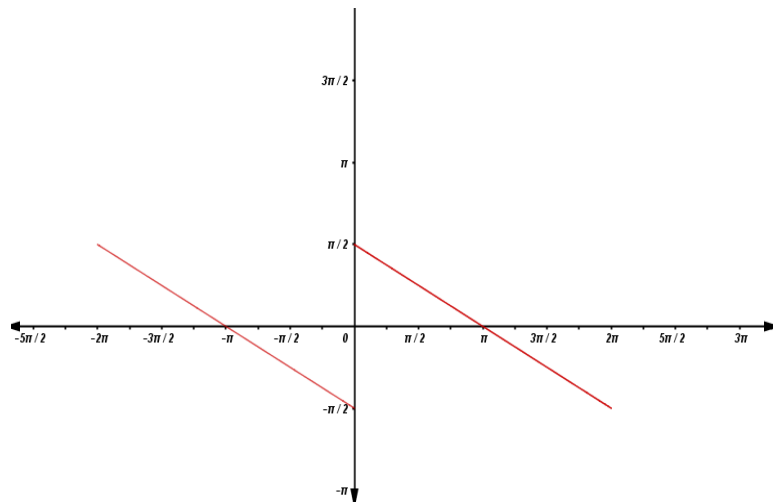
El matemático J.W. Gibbs en el año 1899, investigó y explico este fenómeno basándose en la no convergencia uniforme de la serie de Fourier en las cercanías de un punto de discontinuidad. En esta oportunidad se ilustrara el fenómeno de Gibbs a través del siguiente ejemplo.

Definida la función  $f$  por la función

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), \text{ para } -\pi < x < \pi$$

La grafica de esta función es

**Gráfica 13** : Representación de la función  $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$



Es evidente la discontinuidad en los puntos  $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

La serie de Fourier de  $f$  la podemos obtener rápidamente

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\pi - x) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \pi \int_0^{2\pi} dx - \int_0^{2\pi} x dx \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{2} - 0 + 0 \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} [0] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Calculando el coeficiente  $a_n$ ,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{(\pi - x)}{n} \sin x - \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ 0 - \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi + -0 + \frac{1}{n^2} \cos 0 \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

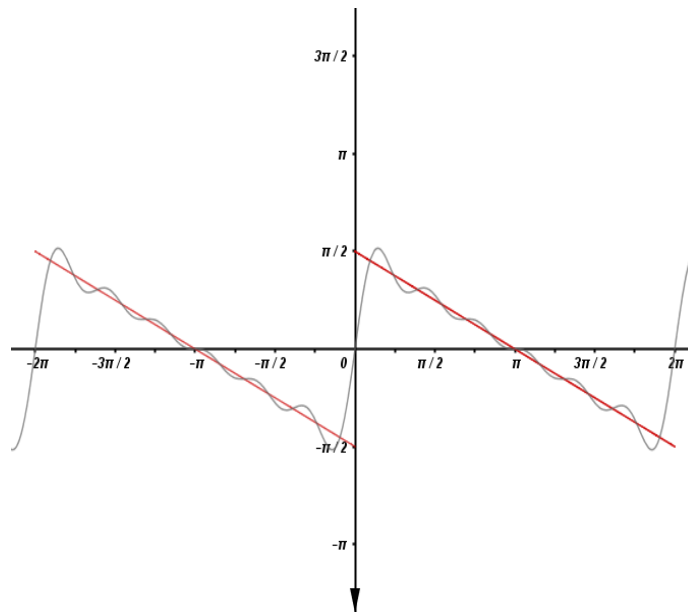
Y el coeficiente  $b_n$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{(\pi - x)}{n} \cos nx - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx dx \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{(\pi - x)}{n} \cos x - \frac{1}{n^2} \sin x \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{(\pi - 2\pi)}{n} \cos 2n\pi - 0 + \frac{\pi}{n} \cos n(0) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} \right] \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

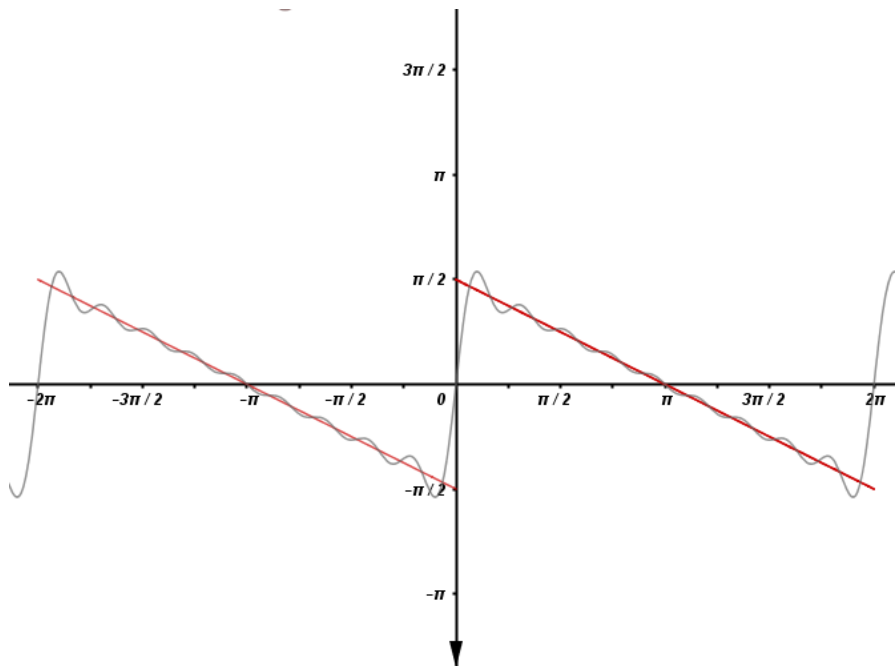
Luego la Serie de Fourier es

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin x) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \sin x
\end{aligned}$$

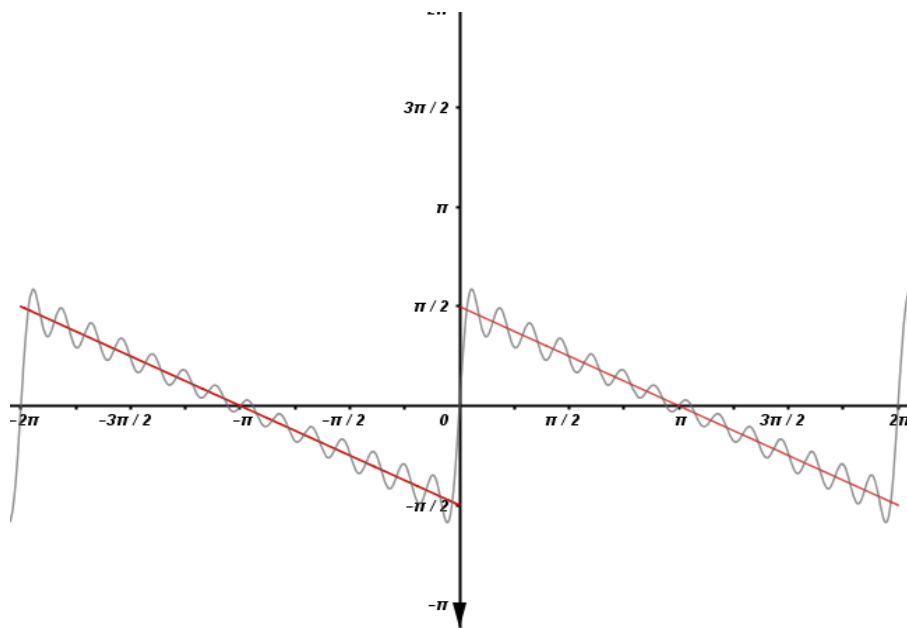
Gráfica 14 : Sumas parciales  $S_6 = \sum_{n=1}^6 \frac{\text{sen } nx}{n}$



Gráfica 15 : Sumas parciales  $S_9 = \sum_{n=1}^9 \frac{\text{sen } nx}{n}$



**Gráfica 16 :** Sumas parciales  $S_{15} = \sum_{n=1}^{15} \frac{\text{sen } nx}{n}$



**Ejemplo 3.1:** Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } t}{t} dt$$

Sugerencias: Identificar  $S_n\left(\frac{\pi}{n}\right)$  con una suma de Riemann para la integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{sen } t}{t} dt$$

**Ejemplo 3.2:** Demostrar que

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{sen } t}{t} dt \approx 1,85$$

Solución: Aplicando el desarrollo en serie de Taylor de  $\text{sen } x$

$$\operatorname{sent} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - + \dots$$

Se tiene que dividiendo ambos miembros por  $t$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sent}}{t} &= \frac{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - + \dots}{t} \\ \frac{\operatorname{sent}}{t} &= 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \frac{t^8}{9!} - + \dots \end{aligned}$$

Luego integrando ambos miembros

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sent}}{t} dt &= \int_0^\pi \left( 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \frac{t^8}{9!} - + \dots \right) dt \\ &= \int_0^\pi dt - \int_0^\pi \frac{t^2}{3!} dt + \int_0^\pi \frac{t^4}{5!} dt - \int_0^\pi \frac{t^6}{7!} dt + \int_0^\pi \frac{t^8}{9!} dt \dots \\ &= \left[ t - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^5}{5 \cdot 5!} - \frac{t^7}{7 \cdot 7!} + \frac{t^9}{9 \cdot 9!} - + \dots \right]_0^\pi \\ &= \pi - \frac{\pi^3}{3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{7 \cdot 7!} + \frac{\pi^9}{9 \cdot 9!} + \dots \\ &\approx 3,1416 - 1,7226 + 0,5100 - 0,0856 + 0,0091 - + \dots \\ &\approx 1,8525 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} S_n \left( \frac{\pi}{n} \right) - f(0^+) &\approx \int_0^\pi \frac{\operatorname{sent}}{t} dt - f(0^+) \\ &= \int_0^\pi \frac{\operatorname{sent}}{t} dt - \frac{\pi}{2} \\ &\approx 1,85 - 1,5708 \\ &\approx 0,28 \\ &\approx 0,09\pi \end{aligned}$$

Por otro lado, la altura del salto de  $f$  en 0 es

$$f(0^+) - f(0^-) = \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

Por lo tanto, para  $n$  bastante grande,

$$S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) - f(0^+) \approx 0,09(f(0^+) - f(0^-))$$

De lo que se puede concluir, a la derecha de 0, las sumas parciales  $S_n$  difieren del valor de  $f$  en aproximadamente un 9% del valor del salto.

### 3.2 Ecuación de la Cuerda Vibrante.

Consideremos una cuerda de longitud  $L$  que se encuentra fija en sus extremos. Si esta cuerda realiza movimientos de vibración en un plano, entonces este movimiento se puede describir mediante una función de dos variables  $u(x,t)$  de la siguiente manera:

Sea  $xu$  el plano en el que vibra la cuerda, supongamos que la posición de equilibrio de la cuerda queda a lo largo del eje  $x$ . La función  $u(x,t)$  tiene por dominio el conjunto  $\{(x,t): 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$  y para cada  $t \geq 0$  el gráfico de la función  $x \rightarrow u(x,t)$  es la forma de la cuerda en el instante  $t$ .

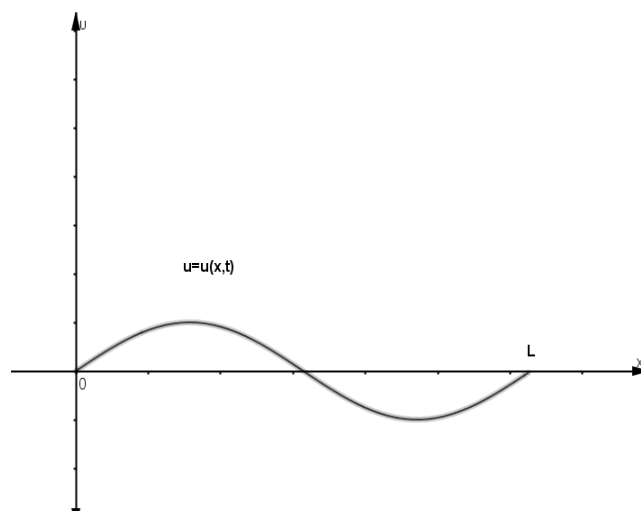


Figura 4,1: Cuerda Vibrante

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

- i. La amplitud de la cuerda es pequeña y cada punto de la misma se mueve en dirección vertical.
- ii. Todas las fuerzas de fricción, tanto internas como externas, pueden despreciarse.
- iii. La masa de la cuerda, por unidad de longitud, es pequeña en relación con la tensión de la misma, por lo que la fuerza de gravedad puede ser despreciada.

Entonces la función  $u$ , que describe el movimiento de la cuerda, satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Donde  $a$  es una constante positiva, que depende de la tensión y otras características físicas de la cuerda.

Como aplicación de las Series de Fourier, resolvamos la ecuación con las siguientes condiciones de fronteras y condiciones iniciales.

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Donde  $f$  y  $g$  se suponen funciones conocidas.

La interpretación física es sencilla, tal como se señaló anteriormente la función  $u(x,t)$  describe el movimiento de una cuerda ideal de longitud  $L$ , cuya

posición de equilibrio coincide con el eje  $x$  y cuyos extremos se encuentran fijos en  $x=0$  y en  $x=L$ .

Suponemos que la forma inicial de la cuerda es conocida y está dada por el gráfico  $f$ , también suponemos conocida la velocidad inicial de cada punto de la cuerda y que está dada por  $g$ .

Las soluciones no triviales de la ecuación

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Que tengan la forma

$$u(x,t) = \psi(x)\phi(t)$$

Y que satisfagan

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

En este caso se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi''(x)\phi(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \psi(x)\phi''(t)$$

Sustituyendo en la ecuación que describe el movimiento de una cuerda vibrante.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Se obtiene que,

$$\psi''(x)\phi(t) = \frac{1}{a^2}\psi(x)\phi''(t)$$

Por lo tanto

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{\phi''(t)}{\phi(t)}$$

El primer miembro solo depende de  $x$  y el segundo miembro solo depende de  $t$ , por lo tanto cada uno de los miembros de esta ecuación tiene que ser constante.

Si llamamos  $\lambda$  a esta constante, obtenemos

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{\phi''(t)}{\phi(t)}$$

Es equivalente al par de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned}\psi''(x) - \lambda\psi(x) &= 0 \\ \phi''(t) - \lambda a^2\phi(t) &= 0\end{aligned}$$

Se analizará primero la ecuación

$$\psi''(x) - \lambda\psi(x) = 0$$

Como  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  para  $t \geq 0$ , se debe cumplir que  $\psi(0) = \psi(L) = 0$

Considérense tres casos:

- Si  $\lambda > 0$ , entonces la solución general de la ecuación

$$\psi''(x) - \lambda\psi(x) = 0$$

Esta dada por

$$\psi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Donde  $A$  y  $B$  son constantes reales. Es fácil verificar que si se satisface la condición  $\psi(0) = \psi(L) = 0$  entonces  $A = B = 0$ . Luego, en este caso, sólo se obtiene la solución trivial.

- Si  $\lambda = 0$  entonces la solución general de la ecuación

$$\psi''(x) - \lambda\psi(x) = 0$$

Esta dada por

$$\psi(x) = Ax + B$$

Donde  $A$  y  $B$  son constantes reales. Es fácil verificar que si se satisface la condición  $\psi(0) = \psi(L) = 0$  entonces  $A = B = 0$ . Luego, en este caso, sólo se obtiene la solución trivial

- Si  $\lambda < 0$ , entonces la solución general de la ecuación

$$\psi''(x) - \lambda\psi(x) = 0$$

Esta dada por

$$\psi(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\text{sen}(\sqrt{-\lambda}x)$$

Donde  $A$  y  $B$  son constantes reales. Como  $\psi(0) = 0$  tiene que ser  $A = 0$ . Como  $\psi(L) = 0$  tiene que ser  $B\text{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0$ , por lo tanto para que la solución no sea trivial se debe cumplir.

$$\text{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

De donde

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Para algún entero positivo  $n$ .

De la solución general

$$\psi(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)$$

Se obtiene que para cada entero positivo  $n$ , la función  $\psi_n$  definida por

$$\psi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

es una solución de la ecuación

$$\psi''(x) - \lambda\psi(x) = 0.$$

Por otro lado reemplazando el valor de  $\lambda$ , en la ecuación

$$\phi''(t) - \lambda a^2 \phi(t) = 0$$

Se obtiene que

$$\phi''(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} a^2 \phi(t) = 0$$

La solución general de esta ecuación es

$$\phi_n(t) = B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}at\right) + B_n^* \left(\frac{n\pi}{L}at\right)$$

Donde  $B_n$  y  $B_n^*$  son constantes reales,  $n=1,2,3\dots$

En conclusión, para cada entero positivo  $n$ , tenemos una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

De la forma

$$u_n(x,t) = \left( B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} at\right) + B_n^* \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} at\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Donde  $B_n$  y  $B_n^*$  son constantes reales y  $n=1,2,3\dots$  .

Supóngase que la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Que satisface las condiciones

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Se puede expresar en la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} at\right) + B_n^* \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} at\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Entonces se tendrá que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = f(x)$$

Es decir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Además supóngase que es posible derivar la serie término a término.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -B_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}at\right) + B_n^* \frac{n\pi a}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}at\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

De donde,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Luego del desarrollo de series de Fourier de senos de una función vistas en capítulo anterior se obtiene que

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Donde  $B_n$  son los coeficientes de la serie de Fourier seno de  $f(x)$  y

$$B_n^* = \frac{2}{an\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Donde  $B_n^*$  son los coeficientes de la serie de Fourier seno de  $g(x)$ .

**Teorema 3.1:** Sea  $L$  un número real positivo y sean  $f, g : [0, L] \rightarrow R$  funciones reales tales que:

i.  $f, f', f''$  son continuas en  $[0, L]$  y

$$f(0) = f''(0) = f(L) = f''(L) = 0$$

ii.  $g$  y  $g'$  son continuas en  $[0, L]$  y

$$g(0) = g(L) = 0$$

Para  $n \geq 1$  sean

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$B_n^* = \frac{2}{an\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Entonces la serie

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}at\right) + B_n^* \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}at\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Converge uniformemente y absolutamente a una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Con condiciones de fronteras y condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

**Ejemplo 3.3:** Encuentre la solución a la ecuación de onda dada por la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x, & \text{si } 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-x), & \text{si } \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Y con velocidad inicial igual a cero, es decir  $g(x) = 0$ .

**Solución:**

Se tiene que para calcular  $B_n$  se procede así

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
 &= \frac{2}{L} \left[ \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2k}{L} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2k}{L} (L-x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] \\
 &= \frac{4k}{L^2} \left[ \int_0^{\frac{L}{2}} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + L \int_{\frac{L}{2}}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx - \int_{\frac{L}{2}}^L x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] \\
 &= \frac{4k}{L^2} \left[ \left[ \frac{-xL}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_0^{\frac{L}{2}} - \frac{L^2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_{\frac{L}{2}}^L \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{-xL}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_{\frac{L}{2}}^L \right] \\
 &= \frac{4k}{L^2} \left[ \frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{4k}{L^2} \left[ \frac{2L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{8k}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

De donde,

$$B_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{8k}{n^2\pi^2} (-1)^n, & \text{si } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Por otro lado como  $g(x) = 0$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
 B_n^* &= \frac{2}{an\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
 &= \frac{2}{an\pi} \int_0^L (0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}at\right) + B_n^* \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}at\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{8k}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}at\right) + 0 \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
 &= \frac{8k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}at\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$u(x,t) =$$

$$\frac{8k}{\pi^2} \left[ \frac{1}{1^2} \cos\left(\frac{\pi a}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) - \frac{1}{3^2} \cos\left(\frac{3\pi a}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(\frac{5\pi a}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{L}x\right) - + \dots \right]$$

### 3.3 Ecuación de Calor

Considérese una barra homogénea de longitud  $L$ , delgada y aislada en forma tal que su calor no puede perderse a través de su superficie. Supongamos además que la temperatura de la barra es constante en cada una de sus secciones transversales. Entonces la temperatura en la barra se puede escribir mediante una función  $u(x,t)$ , donde  $0 \leq x \leq L$  y  $t \geq 0$ .

Se sabe que la función  $u(x,t)$  satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Donde  $a$  es una contante positiva que depende de la naturaleza del material.

Para resolver esta ecuación diferencial sujeta a las condiciones de fronteras y condición inicial

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Donde  $f$  es una función que se supone conocida

Se describirá la distribución de la temperatura en una barra, cuyos extremos se mantienen a temperatura constante igual a 0 y cuya distribución inicial de temperatura está dada por la función  $f$ .

Al igual que la solución de la cuerda vibrante se inicia buscando las soluciones no triviales de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

que tengan la forma

$$u(x,t) = \psi(x)\phi(t)$$

y que satisfaga las condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

Se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi''(x)\phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)\phi'(t)$$

Sustituyendo este resultado en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

se obtiene

$$\psi''(x)\phi(t) = a^2\psi(x)\phi'(t)$$

De donde

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}$$

Siempre que  $\psi(x)\phi(t) \neq 0$

Al igual que el problema de la cuerda vibrante, cada uno de los miembros de esta ecuación tiene que ser una constante. Llámese  $\lambda$  esa constante, luego se obtiene que la ecuación

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}$$

Equivale al par de ecuaciones

$$\begin{aligned}\psi''(x) - \lambda\psi(x) &= 0 \\ \phi'(t) - \frac{\lambda}{a^2}\phi(t) &= 0\end{aligned}$$

Las consideraciones son similares a las correspondientes del problema de la cuerda vibrante, en donde se obtiene solución no trivial para el caso  $\lambda < 0$ , véase.

- Si  $\lambda < 0$  la solución de general de la ecuación

$$\psi''(x) - \lambda\psi(x) = 0$$

Esta dada por

$$\psi(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

Donde  $A$  y  $B$  son constante reales. Como  $\psi(0) = 0$  tiene que ser  $A = 0$ .

Como  $\psi(L) = 0$  entonces  $B \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) = 0$ , es decir que

$$\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) = 0$$

de donde

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Para  $n$  entero positivo.

De la solución general

$$\psi(x) = A \operatorname{cos}(\sqrt{-\lambda}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)$$

Se obtiene que, para cada entero positivo  $n$ , la función  $\psi_n(x)$  definida por

$$\psi(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Es una solución de la ecuación

$$\psi''(x) - \lambda\psi(x) = 0$$

Ahora si se reemplaza el valor de  $\lambda$ , en la ecuación

$$\phi'(t) - \frac{\lambda}{a^2}\phi(t) = 0$$

Se obtiene que

$$\phi'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2 a^2}\phi(t) = 0$$

Donde la solución general de esta ecuación es

$$\phi_n(x) = B_n e^{\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2 a^2} t\right)}$$

donde  $B_n$  es una constante real para  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

En conclusión para cada entero positivo  $n$ , tenemos una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

de la forma

$$u_n(x, t) = B_n e^{\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2 a^2} t\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

donde  $B_n$  es una constante real.

Supóngase que la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

que satisface las condiciones de frontera y la condición inicial

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Se puede expresar de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2 a^2} t\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Entonces por las condiciones iniciales se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = f(x)$$

es decir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Del capítulo anterior del desarrollo en serie de una función seno, se obtiene que

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Donde  $B_n$  son los coeficientes de la serie de Fourier de la función seno de  $f(x)$ .

Al igual que en el caso anterior de la cuerda vibrante se tiene que si los coeficientes  $B_n$  se definen por

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

y  $f(x)$  satisface ciertas condiciones, la serie

$$u_n(x, t) = B_n e^{\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2 a^2} t\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Converge a una solución de la ecuación.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Que satisface las condiciones de frontera y condición inicial

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

**Ejemplo 3.4:** Encuentre la temperatura de una barra aislada de longitud  $L$  condiciones, cuyos extremos se mantiene a una temperatura de 0 suponiendo que la temperatura inicial es

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < \frac{L}{2} \\ L-x, & \text{si } \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

**Solución:** Se procede a calcular  $B_n$  así

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left[ \int_0^{\frac{L}{2}} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] \\ &= \frac{2}{L} \left[ \left( -\frac{xL}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} + \right. \\ &\quad \left. \left( -\frac{L^2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \left( -\frac{xL}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \right) \Big|_{\frac{L}{2}}^L \right] \\ &= \frac{2}{L} \left[ \frac{2L^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{4L}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$B_n = 0, \quad \text{si } n \text{ es par}$$

$$B_n = \frac{4L}{n^2\pi^2}, \quad \text{si } n = 1, 5, 9, \dots$$

$$B_n = -\frac{4L}{n^2\pi^2}, \quad \text{si } n = 3, 7, 11, \dots$$

Por lo tanto

$$u(x,t) = \frac{4L}{\pi^2} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) e^{\left(\frac{-\pi^2}{L^2a^2}\right)t} - \frac{1}{3^2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{L}\right) e^{\left(\frac{-3^2\pi^2}{L^2a^2}\right)t} + \dots \right]$$

### 3.4 Sumas infinitas aplicando Series de Fourier

Una de las más importantes aplicaciones de las series de Fourier es poder determinar el valor de una serie, la cual por otros medios es un tanto difícil determinar su sumatoria. En esta sección se ilustra esta aplicación con algunos ejemplos que buscan enaltecer la importancia de este contenido matemático.

**Ejemplo 3.5:** Probar que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

**Solución:**

Consideremos la función periódica

$$f(x) = x, \text{ para } -\pi < x < \pi$$

La serie de Fourier de  $f$  es

$$f(x) = 2 \left[ \operatorname{sen}x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen}3x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}4x + \dots \right]$$

Aplicando la identidad de Parseval obtenemos

$$\begin{aligned}
2^2 \left[ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(\pi)^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2\pi^3}{3} \right] \\
&= \frac{2\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

Es decir que

$$\left[ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right] = \frac{\pi^2}{6}$$

**Ejemplo 3.6 :** Hallar el Valor de

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

**Solución:**

Consideremos la función

$$f(x) = x^2, \text{ para } -\pi < x < \pi$$

La serie de Fourier de la función  $f$  es

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left[ -\cos x + \frac{1}{2^2} \cos 2x - \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{4^2} \cos 4x - \dots \right]$$

Aplicando la igualdad de Parseval

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi^4}{9} + 4^2 \left[ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^5}{5} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(\pi)^5}{5} - \frac{(-\pi)^5}{5} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2\pi^5}{5} \right] \\
&= \frac{2\pi^4}{5}
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
4^2 \left[ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right] &= \frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} \\
&= \frac{18\pi^4 - 10\pi^4}{45} \\
&= \frac{8\pi^4}{45}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

**Ejemplo 3.7:** Demostrar que

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

A partir del desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4}, \text{ para } -\pi < x < \pi$$

**Solución:** Calculemos los coeficientes.

Como la función  $f(x) = \frac{x^2}{4}$  una función par, entonces la serie de Fourier de

$f(x)$  es una serie de cosenos o serie cosenoidal.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

donde,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \\ &= \frac{2}{4\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{3} (\pi^3 - 0) \right] \\ &= \frac{1}{6} \pi^2 \end{aligned}$$

Luego para calcular  $a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \end{aligned}$$

Integrando por parte esta impresión dos veces obtenemos que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2\pi}{n^2} \cos n\pi \right] \\ &= \frac{1}{n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

Luego la serie de Fourier de  $f(x)$  es

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \\
 &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} (-1)^n \cos nx\right) \\
 &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n \cos nx
 \end{aligned}$$

De donde su expansión para los primeros  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{2^2} \cos 2x - \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{4^2} \cos 4x - + \dots$$

Como  $f(x)$  es continua, entonces la serie de Fourier de  $f(x)$  converge en todo los punto del intervalo y tiene como suma  $f(x)$ .

Para tal efecto tómesese,  $x = 0$  y evalúese en la serie de Fourier de la función  $f(x)$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{2^2} \cos 2x - \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{4^2} \cos 4x - + \dots \\
 f(0) &= \frac{\pi^2}{12} - 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - + \dots
 \end{aligned}$$

De donde,

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + - \dots$$

**Ejemplo 3.8:** Demostrar que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

A partir de la serie de Fourier de la función

$$f(x) = x, \text{ para } -\pi < x < \pi$$

**Solución:**

En el ejemplo 3.5 se probó la igualdad

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

A partir del desarrollo en series de Fourier de la función  $f(x) = x$  para

$$-\pi < x < \pi.$$

En el ejemplo 3.7, se probó la igualdad

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

A partir del desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4}, \text{ para } -\pi < x < \pi$$

Luego sumando ambas igualdades miembro a miembro obtenemos:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \\ 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots = \frac{\pi^2}{12} \\ \hline 2 + 0 + \frac{2}{9} + 0 + \frac{2}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} \end{array}$$

De donde,

$$\begin{aligned} 2 \left[ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right] &= \frac{2\pi^2 + \pi^2}{12} \\ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots &= \frac{3\pi^2}{24} \\ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.9:** Demostrar que

$$\frac{1}{1^2 3^2} + \frac{1}{3^2 5^2} + \frac{1}{5^2 7^2} + \dots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

Sugerencias: Desarrollar  $f(x) = \operatorname{sen} x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  en series cosenos.

**Solución:** Calcúlese los coeficiente de Fourier de  $f(x)$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi} [\cos \pi - \cos 0] \\ &= -\frac{1}{\pi} [-2] \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Calculando  $a_n$  se tiene,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} x \cos nx \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\operatorname{sen}(1+n)x + \operatorname{sen}(1-n)x] \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+n)} \cos(1+n)x - \frac{1}{(1-n)} \cos(1-n)x \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(1+n)} \cos(1+n)\pi - \frac{1}{(1-n)} \cos(1-n)\pi + \frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1-n)} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1 - \cos(1+n)\pi}{(1+n)} + \frac{1 - \cos(1-n)\pi}{(1-n)} \right] \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2}{(1+n)} + \frac{2}{(1-n)} \right] & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}
\end{aligned}$$

Análogamente se calcula el coeficiente  $b_n$

Analícese el caso cuando  $n=1$ , es decir,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x \, dx \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \pi - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi - 0 + 0 \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} [\pi] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Para cuando  $n=2,3,4,\dots$ ,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{sen} nx \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(1-n)x - \cos(1+n)x] \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\operatorname{sen}(1-n)x}{(1-n)} - \frac{\operatorname{sen}(1+n)x}{(1+n)} \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\operatorname{sen}(1-n)\pi}{(1-n)} - \frac{\operatorname{sen}(1+n)\pi}{(1+n)} - \frac{\operatorname{sen}(1-n)0}{(1-n)} + \frac{\operatorname{sen}(1+n)0}{(1+n)} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} [0] \\
&= 0
\end{aligned}$$

De donde la serie de Fourier de la función  $f(x)$  es:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1-n)} \right) \cos nx \right]$$

Es decir,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2x + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4x + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6x + \dots \right)$$

Ahora bien aplicando la igualdad de Parseval se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{1}{1 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots \right) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2\pi} [\pi] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{1}{1 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots \right) &= \frac{1}{2} \\ \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{1}{1 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots \right) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{2\pi^2 - 8 - \pi^2}{4\pi^2} \\ &= \frac{\pi^2 - 8}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\left( \frac{1}{1 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

**Ejemplo 3.10:** Hallar el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \right)^6$$

**Solución:** Partimos del desarrollo de la serie de Fourier de la función

$$f(x) = x^2, \text{ para } -\pi < x < \pi$$

La serie de Fourier de la función  $f$  es

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

Luego aplicando el Teorema 2.25, es decir que integramos esta serie

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \\
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2}{3} dx + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx dx \\
 \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx &= \frac{\pi^2}{3} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{4(-1)^n}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\
 \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} &= \frac{\pi^2}{3} x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{4(-1)^n}{n^3} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen } nx dx \Big|_{-\pi}^{\pi}
 \end{aligned}$$

De donde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^3} \text{sen } nx = \frac{x}{3} (x^2 - \pi^2)$$

Es decir que el desarrollo en series de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{x}{3} (x^2 - \pi^2),$$

En el intervalo  $-\pi < x < \pi$  es,

$$f(x) = \frac{4(-1)^n}{n^3} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen } nx$$

Ahora bien aplicando la igualdad de Parseval

$$\begin{aligned}
 16 \left( 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots \right) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{x}{3} (x^2 - \pi^2) \right]^2 dx \\
 &= \frac{1}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^6 - 2\pi^2 x^4 + \pi^4 x^2) dx \\
 &= \frac{1}{9\pi} \left[ \frac{x^7}{7} - \frac{2}{5} \pi^2 x^5 + \frac{\pi^4}{3} x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{9\pi} \left[ \frac{2\pi^7}{7} - \frac{4\pi^7}{5} + \frac{2\pi^7}{3} \right] \\
 &= \frac{1}{9} \left[ \frac{16}{105} \pi^6 \right]
 \end{aligned}$$

De donde,

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots = \frac{1}{9(16)} \left[ \frac{16\pi^6}{105} \right]$$

Es decir,

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945}$$

De esta forma se ha probado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \right)^6 = \frac{\pi^6}{945}$$

## **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

Se nota con claridad en la bibliográfica consultada que el trabajo de Fourier sobre la propagación del calor coloca un sello importante en el desarrollo de las Series de Fourier, donde expande la idea fundamental de la expansión en series trigonométricas con el cálculo de los coeficientes de Fourier y la utilización de la ortogonalidad de funciones en sus estudios sobre los modos normales de vibración en sus experimento, haciendo así una gran brecha en el campo de la física hasta ese entonces inexplorado y abre una trocha importante en la aplicación fundamental en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales.

Es importante dejar claro que la memoria de los trabajos de Fourier, tuvo una pésima acogida por los miembros del comité encargado de analizar dicho trabajo, el mismo conformado por las tres grandes L (Lagrange, Laplace, Legendre) y también Monge. Pero a pesar de las críticas de su trabajo y del no reconocimiento de este aporte al desarrollo de la matemática, tampoco presenta, este comité un escrito contundente, claro y con rigor matemático que incongruencias presentaban los aportes de Fourier. Pues lo único que expresaron fue un escrito de Poisson estudiante estrella de Laplace, el cual simplemente expresa que Lagrange no ve claro las deducción de Fourier, las cuales hoy en día son correctas y que Fourier no citaba los trabajos Euler.

La génesis de la series de Fourier juegan un papel importante en desarrollo moderno de esta teoría, pues llena de motivación por el verdadero estudio profundo y riguroso de este tema de gran importancia en la matemática moderna, por tal motivo las series de Fourier deben ser analizadas considerando el desarrollo histórico, sus alcances y limitaciones, las cuales

deben ser anclándolos con el Teorema de Dirichlet, también conocido como la condición de convergencia puntual de Dirichlet.

El tratamiento un tanto formal de las Series de Fourier es lo que nos abre el camino hacia una verdadera práctica educativa formal sobre la enseñanza y aprendizaje de este tema. Las condiciones necesarias para la convergencia de una serie de Fourier son el camino clave para encontrar su aplicación en problemas de lo abstracto a lo sencillo.

El análisis de las series de Fourier no es solamente uno de los resultados más brillantes de la matemática, sino que se convierten en una herramienta fundamental en el desarrollo de la matemática moderna, convirtiéndose en un puente fundamental en la resolución de problemas tanto matemáticos como físicos.

A todos los encargados de dirigir un curso de Matemática Superior donde se desarrolle el tema de las Series Fourier les exhorto a desarrollar con rigor este tema y que tienen en sus manos un aporte fundamental para la resolución de problemas que involucren las ecuaciones diferenciales parciales así como la suma de series infinitas.

## **REFERENCIA BIBLIOGRAFICAS**

1. DUANDIKOETXEA, J. (2000). **Fourier Analysis**, American **Mathematical Society**, United States of America.
2. AGARWAL, R. (2009). **Ordinary and Partial Differential Equations**, Springer, New York.
3. ALMIRA, J.M.(2009). **Análisis de Fourier Aplicado**. Universidad de Jaén. España.
4. BACHMAN, G. (2000). **Fourier and wavelet analysis**, springer New York.
5. BAYON, L (2010). **Aprendizaje interactivo en Matemáticas Utilizando el Wolfram Demonstrations Project**. Cuieet-2010, Pág 12.
6. BOGGERSS, A. (2009) . **A First Course In Wavelets With Fourier Analysis**, Texas University, Prentice Hall, 2ª Edition.
7. BOMBAL F. (2003) , **La Serie de Fourier y el Desarrollo del Análisis en el siglo XIX**. Las Series de Fourier (pág. 23). España: Universidad Complutense de Madrid.
8. BOYER, C (2010). **Historia de la Matemática**. Madrid: Alianza Editorial.
9. BRANDOLINI, L. (2004). **Fourier Analysis and Convergence**, Birkhauser, New York
10. CAMARENA J. & RODRÍGUEZ C. (2015). **Funciones Continuas y no diferenciable en punto alguno**, Tesis de Maestría en Matemática Educativa, Universidad de Panamá.
11. CAÑADO, A. (2000). **Una perspectiva histórica de la serie de Fourier**. Relime, páginas 239-320,
12. CHAVES, S (2003). **O fracasso na aprendizagem de cálculo**

- diferencial e integral:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA), 1-25.
13. CHU, E. (2008). **Discrete and Continuous Fourier Transforms**, CRC Press, United States of America.
  14. COLLETTE, J. (1993). **Historia de las matemáticas II** (3ª ed. en castellano). Madrid: Siglo XXI.
  15. CÓRDOBA, A. (2016). **Fourier y el estudio profundo de la naturaleza**. Periódico, El País, España.
  16. DUOANDIKOETXEA, J. (2003). **Lecciones sobre las Series y Transformadas de Fourier**. UNAM –Managua. 172 p.
  17. DUOANDIKOETXEA, J. (2007). **200 años de convergencia de la Serie de Fourier**. La Gaceta De La Rsmé, paginas 651-688.
  18. ESCRIBANO, J. (2016). **Historia de las Matemáticas**, Instituto Valle del Cidaco, Calahorra, Centro virtual de divulgación de las matemáticas.
  19. GODEMENT, R. (2005). **Analysis II Differential and Integral Calculus, Fourier Series**, Springer, The Netherland.
  20. KAHANE, J.P. (2007). **El retorno de Fourier**. (C. R'éminisciences, Ed.)  
Obtenido de <http://www.academie-sciences.fr/membres/inmemoriam/Generalites/>
  21. KAMMLER, D. W. (2007). **A First Course in Fourier Analysis**, Cambridge, University Press, New York.
  22. MORALES A., F. (2013). **El modelo matemático de Fourier para el calentamiento terrestre**. (T. d. Izcalli, Ed.) Ciencia y Tecnología, 293-307.
  23. RILEY, K.F. (2006). **Mathemaical Methods for Physics and**

- Engineerring**, Cambridge, Thir Edition, New York
24. ROMENO, P. (2014). **Estilos de aprendizaje de los estudiantes de ecuaciones diferenciales**. MATUA-Universidad del Atlántico, 51-59.
25. SHAKARCHI, R (2003). **Fourier Analysis an Introduction**, Princeton University Press, Princeton and Oxford,. United States of America.
26. ULLOA, G. (2013) . **Series de Fourier con Mathematica**. Depto. de Ciencias - Pontificia Universidad Católica de Perú, 1-7.
27. VRETBLAD, A. (2003). **Fourier Analysis and its Applications**, Springer, New York.
28. ZILL D. G. (2011). **Matemática Avanzada para Ingeniería**. 4<sup>a</sup> ed. México. McGraw-Hill.697p.