UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

LA CALCULADORA GRÁFICA COMO APOYO TECNOLÓGICO EN EL PROCESO ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

MARÍA DEL CARMEN YOUNG ADAMES

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRÍA EN DIDÁCTICA Y TECNOLOGÍA EDUCATIVA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2001

HOJA DE APROBACIÓN

Firma del Estudiante ______________________

Firma del Asesor ______________________

Firma del Jurado ______________________

____

____

Firma del Director del Programa de la Maestría ______________________

Firma del Director de Postgrado ______________________

Fecha: ______________________

HOJA DE APROBACIÓN

Firma del Estudiante ______________________

Firma del Asesor ______________________

Firma del Jurado ______________________

____

____

Firma del Director del Programa de la Maestría ______________________

Firma del Director de Postgrado ______________________

Fecha: 5 / XII 01

DEDICATORIA

Rouxana Judith,...adquiere sabiduría; y sobre todas tus posesiones adquiere inteligencia (Prov. 4:7), solo los valientes son exitosos.

A la memoria de mis abuelitos Ño Jole y Ken ejemplos de integridad, amor y honradez.

AGRADECIMIENTO

A mi **Señor Jesucristo, Dios Todopoderoso**, gracias por haberme dado la sabiduría y el discernimiento necesario para culminar este trabajo.
A mi asesor Magíster Ángel M. Batista gracias
A mi amado Edgardo gracias, siempre puedes contar conmigo.
A mis amigas Nelly y Claudia.
A todos mil gracias

INDICE GENERAL

Pág.

RESUMEN vi
SUMMARY vii
INTRODUCCIÓN viii

CAPÍTULO PRIMERO
EL PROBLEMA Y SUS GENERALIDADES
1. Situación actual del problema 2
2. Planteamiento del problema de investigación 5
2.1. Preguntas al problema de investigación 8
2.2. Supuestos (hipótesis general) 9
2.3. Objetivos generales y específicos
2.4. Restricciones de la investigación 10

CAPÍTULO SEGUNDO
MARCO TEÓRICO
1. La Educación Panameña en el Marco de la Modernización 13
1.1. Generalidades 13
1.2. La Modernización de la Educación y los Fines de la Educación Panameña 15
1.3. La Educación Superior y el Aprendizaje 19
2. Teoría del Aprendizaje en el Proceso Enseñanza Aprendizaje 22
2.1. El Conductismo 22
2.2. El Cognoscitivismo 24
2.3. El Constructivismo 30
2.5. Piaget y su Teoría en el Proceso Enseñanza Aprendizaje de la Matemática 31
3. Importancia de la Enseñanza de las Matemáticas 35
3.1. Métodos de la Enseñanza de las Matemáticas 36
3.2. Factores que inciden en el Fracaso de las Matemáticas 38
3.3. Importancia de la Didáctica en el Proceso Enseñanza Aprendizaje de las Matemáticas 39
4. La Tecnología Educativa como Alternativa para mejorar el Proceso Enseñanza Aprendizaje de las Matemáticas 42
4.1. Evolución de la Tecnología Educativa 44
4.2. Medios Impresos 44
4.3. Recursos Visuales Fijos 45
44. Medios Audiovisuales 46
4.5. Tecnología Teleinformatizada 47
4.6. Consideraciones sobre el uso de la Tecnología Educativa en la Enseñanza de la Matemática 48

4.3. Recursos Visuales Fijos 45
44. Medios Audiovisuales 46
4.5. Tecnología Teleinformatizada 47
4.6. Consideraciones sobre el uso de la Tecnología Educativa en la Enseñanza de la Matemática 48
5. La Calculadora en la Enseñanza de las Matemáticas 49
5.1. La Calculadora Gráfica 49
5.2. La Calculadora Gráfica un Enfoque Constructivista en el Aprendizaje de las Matemáticas 51
5.3. El Proceso de Aprendizaje y las Calculadoras Gráficas 56

CAPÍTULO TERCERO
MARCO METODOLÓGICO 59
1. Tipo y Diseño de la Investigación 59
2. Hipótesis 59
3. Variables 60
4. Sujetos: Población y Muestra 60
5. Técnicas e Instrumentos de Investigación 60
5.1. Instrumento 61
6..Procedimiento 62

CAPÍTULO CUARTO
ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS
1. Presentación y Análisis de Resultados 66
2. La "*t*" de Student. Generalidades 79
3. Contraste de Medias 81
4. Comprobación de las hipótesis
5. Discusión de resultados 83
5.1 Conclusiones 83
5. 2 Recomendaciones 84

CAPÍTULO QUINTO
PROPUESTA 87

BIBLIOGRAFÍA CITADA

ANEXOS

PRE Y POST PRUEBA

ENCUESTA

LECTURAS COMPLEMENTARIAS

INDICE DE CUADROS

Cuadro N° N°.		Pág.
I.	NÚMERO Y PORCENTAJE DE ESTUDIANTES DEL GRUPO CONTROL Y GRUPO EXPERIMENTAL SEGÚN PORCENTAJE OBTENIDO EN LA PRE-PRUEBA	69
II.	NÚMERO Y PORCENTAJE DE ESTUDIANTES DEL GRUPO EXPERIMENTAL, SEGÚN PORCENTAJE OBTENIDO EN LA POST PRUEBA	73
III.	NÚMERO Y PORCENTAJE DE ESTUDIANTES DEL GRUPO CONTROL SEGÚN PORCENTAJE OBTENIDO EN LA POST PRUEBA	75
IV.	NÚMERO Y PORCENTAJE DEL GRUPO CONTROL Y GRUPO EXPERIMENTAL SEGÚN APROBADOS Y REPROBADOS	77

INDICE DE FIGURAS

Figura N°		Pág.
1.	COMPONENTES DE LA TEORÍA DE SKINNER	23
2.	PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN MODELO COGNOSCITIVISTA	26
3.	DISTRIBUCIÓN DE LA TABLA DE ESPECIFICACIONES	67
4.	PUNTOS OBTENIDOS EN LA PRE PRUEBA GRUPO CONTROL	70
5.	PUNTOS OBTENIDOS EN LA PRE PRUEBA GRUPO EXPERIMENTAL	71
6.	PORCENTAJE OBTENIDO EN LA POST PRUEBA GRUPO EXPERIMENTAL	74
7.	PUNTOS OBTENIDOS EN LA POST PRUEBA GRUPO CONTROL	76
8.	PORCENTAJE DE ESTUDIANTES APROBADOS Y REPROBADOS GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL	78
9.	DISTRIBUCIÓN NORMAL	84

INDICE DE TABLAS

Tabla N°		Pág.
1.	TABLA DE ESPECIFICACIONES CÁLCULO DEFERENCIAL E INTEGRAL-FUNCIONES Y GRÁFICAS	66
2.	PUNTOS OBTENIDOS EN LA PRE-PRUEBA GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL	68
3.	PUNTOS OBTENIDOS EN LA POST PRUEBA GRUPO CONTROL Y GRUPO EXPERIMENTAL	72

RESUMEN

El presente trabajo titulado "EL USO DE LA CALCULADORA GRÁFICA COMO APOYO TECNOLÓGICO EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA", es una investigación experimental bajo un diseño cuasiexperimental. En la misma se tomaron dos grupos de estudiantes de primer año de la Licenciatura en Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Panamá de forma aleatoria, a los cuales se le aplicaron las pruebas, las cuales proporcionaron información valiosa sobre los beneficios didácticos de la calculadora gráfica.

Como resultado de esta investigación se comprobó que los estudiantes que utilizaron la calculadora gráfica obtuvieron un mayor rendimiento académico que los estudiantes que no la usaron; también se observaron las ventajas que brinda este valioso recurso como apoyo tecnológico al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Producto de esta conclusión se presenta una propuesta que consiste en el diseño de una guía para el usuario, la cual explica de manera detallada como usar la calculadora gráfica y cada una de las partes de ella tales como modos, iconos, teclas y tablas. La guía consta de cuatro unidades iniciando con la familiarización de las partes físicas de la misma, hasta llevar al estudiante a la construcción ue gráficas.

SUMMARY

The present work entitled "EL USO DE LA CALCULADORA GRÁFICA COMO APOYO TECNOLÓGICO EN EL PROCESO ENSEÑANZA -APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA," is an experimental investigation under an almost experimental design. In this investigation we chose at random two groups of students of first year, who are Bachelors of Engineering in Electricity at the Technological University of Panama, to whom the tests where applied to and which provided us with valuable information about the didactic benefits and advantages of the graphical calculator.

As a result of this investigation we have proved that those students who used the graphical calculator obtained a better academic efficiency than those students who did not use them; we also detected the advantages that this valuable resource gives not only to those who are learning but also as a technological support to the teaching-learning process of the mathematic.

Product of this conclusion, we present a proposal which consist in the design of a guide for the user, which will explain in a very detail way how to use the graphical calculator and each of its parts such as mode, icons, keys, and table. The guide consist of four units beginning with the familiarization of its physical parts, up to the moment it takes the student in teaching him how to construct graphics.

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

La presente investigación titulada *"La Calculadora Gráfica como Apoyo Tecnológico en el Proceso Enseñanza Aprendizaje de las Matemáticas"*, está estructura en cinco capitulos.

El capítulo primero hace una exposición relacionada al problema y sus generalidades donde se describe la situación actual de problema, el planteamiento o formulación del problema, así como la hipótesis general del estudio, sus objetivos. alcance, cobertura o delimitación del estudio, restricciones o limitaciones y la justificación de la investigación.

El capítulo segundo presenta el marco teórico de la investigación, donde se incluyen temas relativos a la Educación Panameña en el Marco de la Modernización, Las Teorías del Aprendizaje, importancia de la Enseñanza de las Matemáticas, La Tecnologia Educativa como alternativa para mejorar el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática y La Calculadora Gráfica en la Enseñanza de la Matemática.

El capítulo tercero incluye los aspectos metodológicos donde se detalla el alcance, cobertura o delimitación del estudio, la formulación de hipótesis, definición conceptual y operacional de variables, tipo y diseño de la investigación, sujetos: población y muestra. instrumentos, materiales, equipos y procedimientos.

El capítulo cuarto presenta el análisis e interpretación de resultados, relativos al análisis e interpretación de los resultados finales.

El capítulo quinto comprende la discusión de resultados donde se exponen las Conclusiones y Recomendaciones originadas de la investigación. También aparece la propuesta que consiste en una Guía del Usuario para el uso de la calculadora gráfica.

Finalmente, se presenta la bibliografía que sirvió como fuente de información y los anexos que complementan la investigación.

CAPÍTULO UNO

El PROBLEMA Y SUS GENERALIDADES

EL PROBLEMA Y SUS GENERALIDADES

1. Situación actual del problema.

Todas las sociedades, especialmente la latinoamericana enfrentan el reto de modernizar el sistema educativo, con el fin de superar las deficiencias que subyacen en la aplicación de formas tradicionales de enseñanza que conducen a la limitación del aprendizaje, a la memorización y a la repetición.

Actualmente existe la necesidad de potenciar las capacidades de las nuevas generaciones, de tal forma que respondan al avance de la ciencia y la tecnología, así como a los rápidos cambios de la sociedad moderna que exigen abordar científicamente el problema de la enseñanza, así como de utilizar todos los recursos didácticos que sean necesarios para estimular las capacidades del sujeto que aprende.

Las dificultades observadas en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en matemática, en todos los niveles desde la básica hasta el nivel superior, actualmente ocupan un lugar predominante en el desarrollo de currículo escolar. Esto se debe a que la enseñanza fragmentada imposibilita la correlación real entre los objetivos de esta materia con el resto de las asignaturas. Tal situación también conduce a que cada facilitador se preocupe en forma individual y de éste modo se aísla de los demás, lo cual conduce a una separación y pérdida de la continuidad de los contenidos que deberían vincularse para un mejor desarrollo, comprensión e interés por el tema.

En términos generales, algunas de las dificultades detectadas en la enseñanza de la matemática y que afectan el aprendizaje de los estudiantes e inciden tremendamente en los continuos fracasos pueden resumirse como sigue:

- Falta de una adecuada metodología de enseñanza teórico-práctico de la matemática.
- Necesidad de capacitación del docente en métodos, técnicas y estrategias didácticas con respecto a la enseñanza de la matemática
- Falta de visualización de las gráficas de una función
- Deficiencia en la enseñanza del manejo correcto de las herramientas de apoyo didáctico, como lo son las calculadoras gráficas
- Falta de madurez del estudiante con respecto a conceptos básicos que se debe aprender en el nivel medio superior.
- Fragmentación incorrecta de los contenidos de la asignatura (matemática), lo que afecta el proceso lógico que exige su enseñanza
- Inconsistencia de los programas de matemática del nivel medio secundario y universitario.

Estas dificultades han llevado a muchos autores a reflexionar sobre la enseñanza de la matemática en los diferentes niveles, por ejemplo, tenemos los planteamientos de la doctora Grecia Gálvez quien en su documento sobre Problemas de la Enseñanza de la Matemática, se pregunta.

- "¿ Cómo se prepara el tránsito de observación, de comparación empírica de relaciones, a la geometría deductiva, en la que la validez de las proposiciones es sustentada por la coherencia del razonamiento, por ejemplo cómo pasar de la verificación de que al yuxtaponer los tres ángulos internos de un triángulo se obtiene un ángulo de 180° a la conclusión de que eso debe pasar necesariamente en cualquier triángulo?.
- ¿Cómo coordinar la conceptualización dinámica de los objetos geométricos (ligados por ejemplo al trazado de figuras) con su conceptualización estática (ligada a su presentación gráfica)?
- ¿Cómo compatibilizar el carácter variable, aproximado, de los resultados obtenidos empíricamente, con el carácter único, exacto, de los resultados logrados a través del cálculo?
- ¿Cómo garantizar la comprensión de los procedimientos algoritmos que los alumnos deben aprender? Es evidente que la repetición y su ejecución hasta la memorización de las secuencias de acciones constitutivas, no son suficiente, pero ¿conque sustituir esta estrategia de enseñanza?.
- ¿Cómo organizar el pasaje desde el lenguaje natural, para referirse a las relaciones espaciales, hasta el lenguaje matemático sin generar rupturas?
- ¿Cómo ir relacionando las adquisiciones en el ámbito de las relaciones espaciales con las adquisiciones en el dominio de las relaciones numéricas?" (Gálvez 1998, p. 46)

2. Planteamiento del problema de investigación

Ante la problemática de la enseñanza de la matemática reflejada en ésta asignatura (estudios estadísticos suministrados por expertos que dictan esta asignatura en la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Panamá, período 1993 a 1998) y el bajo interés por su estudio contrasta notablemente con la creciente significación científica y social que ésta amerita, situación que en estos momentos se presenta como crítica, ya que ésta problemática va en crecimiento notable.

La situación expuesta anteriormente merma la preparación del futuro profesional de ingeniería; cuya profesión amerita un sólido conocimiento y dominio de la matemática y otras asignaturas afines.

En este sentido, la calculadora gráfica constituye un recurso didáctico importante, ya que permite con facilidad la interiorización de conceptos básicos y esenciales en la formación del especialista en esta rama.

La calculadora gráfica presenta por medio de grafos un sin número de representaciones de funciones ya sean algebraicas o científicas como si se estuviera dibujando en una pizarra, pero en varias dimensiones lo cual facilita la comprensión de éstos conceptos.

La ventaja de utilizar la ventana de la calculadora gráfica es que permite que el usuario pueda cambiar valores y forma de las funciones que desee graficar, y se convierte en una experiencia dinámica realizada en un mínimo de tiempo. También supone la facilidad de corregir rápidamente si es necesario y modificar la visualización del concepto analizado, sin la necesidad de esperar la ayuda.

En este aspecto, el aprendizaje puede apoyarse en el uso de la calculadora gráfica, con el propósito de ir a la vanguardia del avance científico – tecnológico. A diferencia de la computadora, es accesible a un número mayor de estudiantes por efectos del costo y facilidad de movimiento en caso de trasladarse de un lugar a otro.

Actualmente, se menciona con preocupación e insistencia, que la educación como tal ha perdido su propósito y que su producto, el estudiante graduado, no está capacitado para afrontar los cambios y retos que se le presentan. Es decir, pareciera que el verdadero fin de la enseñanza, el cual es que el estudiante elabore su propio aprendizaje, se ha desviado, navegando en un mar de generalizaciones y de verbalismo.

Asimismo es fácil observar, como la verticalidad de la enseñanza se esta volviendo más horizontal haciéndose más énfasis en la formación, necesidades, formas de estructurar el aprendizaje y motivación del estudiante.

En otras palabras, se puede decir que se está llegando a reconocer que el propósito fundamental de la educación es dirigir el aprendizaje para hacerlo más eficiente. En este sentido, es el estudiante la causa eficiente del sistema educativo, cuyo fin es su propio cambio y el objetivo de la labor didáctica se centra en asegurar que ocurran cambios positivos en la conducta del educando, en un período de tiempo más corto.

Es por lo anterior, que los educadores están tomando conciencia con respecto a la existencia de diferencias individuales en lo que respecta a las habilidades de percepción y aprendizaje del estudiante. Es decir, algunos aprenden de forma más fácil y rápida, a través de informaciones orales o impresas con un mínimo de experiencias, mientras que otros requieren de experiencias más concreta, donde se incluyan otros tipos de herramientas tecnológicas, como es el caso de las calculadoras gráficas.

Es evidente, que la mayoría de los estudiantes requieren de una combinación de los diferentes métodos de aprendizaje y de recursos tecnológicos para lograr un mejor aprendizaje. No obstante, existen también factores culturales que afectan el proceso y la organización de los contenidos de las asignaturas, lo cual requiere mayor participación del estudiante, al igual que los programas educativos que necesitan ser aplicados en términos de eficacia y flexibilidad, en cuanto a tiempo, personal y los recursos disponibles.

Por otra parte, la implicación de los problemas y los intentos por encontrar soluciones, requieren nuevas formas de planteamiento y organización del aprendizaje, según el enfoque constructivita. Esto se debe a que actualmente se reconoce con mayor claridad, que el aprender es una actividad, donde lo que aprenda el estudiante dependerá, exactamente de su participación activa en el proceso enseñanza aprendizaje, en donde los docentes pasan a ser facilitadores, que determinan metas claras y objetivos específicos en los planes y programas, incluyendo a los estudiantes en la toma de decisiones en cuanto a los recursos más convenientes que le permitan lograr los objetivos propuestos.

La educación panameña ha cumplido aunque con limitaciones, las expectativas en la preparación de los estudiantes para su vida profesional. Sin embargo, la revolución tecnológica y la evolución de otros sectores de la sociedad, no están acordes con políticas educativas adecuadas, lo cual origina que la preparación del recurso humano profesional no llene las expectativas y exigencias del mercado laboral, en un país como el nuestro cada vez más influenciado por la globalización.

En este contexto, el uso de la tecnología, obliga a cambiar los métodos rutinarios por otros más acordes a la misma, pero existe una resistencia por parte de los docentes y esto se debe, a que todo cambio provoca una resistencia.

Por otro lado, se cree que los nuevos métodos de enseñanza son deshumanizante, por que se piensa que sustituyen a los docentes y además, que la educación se convierte en autómata, en donde no existe el contacto y calor humano que debe prevalecer entre docente y estudiante.

Lo anterior nos lleva a plantear el problema de investigación a través de la siguiente pregunta:

¿Cómo la tecnología educativa apoya a través de la calculadora gráfica el proceso enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial Integral?

2.1. Preguntas del problema

Para este trabajo de investigación se espera responder entre otras las siguientes preguntas:

- ¿De qué manera el uso de la calculadora gráfica propicia que los alumnos se apropien del código algebraico, como medio para expresar y justificar generalizaciones, asi como plantear y resolver problemas?
- ¿Es necesario confeccionar un instructivo adicional que sirva de guía para el uso de las calculadoras gráficas?

2.2. Hipótesis

La explicación como base del conocimiento científico se vale de la comprobación y verificación de los hechos observados. Para tal efecto se formulan proposiciones, que evaluadas, por la práctica, utilizan procedimientos rigurosamente establecidos; a tales proposiciones se le denomina hipótesis.

La hipótesis de investigación es la siguiente:

"El uso de las calculadoras gráficas como recurso tecnológico didáctico en el aula de clases, influye en el proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Diferencial Integral"

2.2. Objetivos

Objetivo general

El objetivo general del estudio consiste en determinar la efectividad de las calculadoras gráficas en el proceso enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial Integral.

2.4. Restricciones y delimitaciones de la Investigación

Esta investigación se desarrolla en la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Panamá, en donde se hace énfasis en el uso de las calculadoras gráficas, por parte de los estudiantes de licenciatura en Ingeniería Eléctrica, desde el primer semestre del primer año.

Las principales limitaciones de esta investigación se deben a que no todos los estudiantes del grupo E-1 del curso de Licenciatura en Ingeniería Electrónica, que será la muestra de la investigación, poseen calculadoras gráficas. Además, la guía del usuario que traen las calculadoras están incompletas, no existe un salón o laboratorio equipado con calculadora y la gran mayoría de los docentes no cuentan con una calculadora gráfica.

Otras situaciones están asociadas con el tiempo disponible para desarrollar la investigación, debido a los compromisos de trabajo y con la negativa de algunos profesores que se oponen al uso de las calculadoras gráficas en el salón de clases, ya que consideran que los estudiantes se van a mecanizar.

CAPÍTULO DOS

MARCO TEÓRICO

1. LA EDUCACIÓN PANAMEÑA EN EL MARCO DE LA MODERNIZACIÓN.

1.1. Generalidades

En el ámbito mundial la educación se encuentra sometida a grandes cambios al igual que la revisión de los paradigmas sociales y educativos, donde el conocimiento se asume como factor fundamental del desarrollo de un país donde la educación es la llave para tener acceso a éste conocimiento

Como el mundo actual es cambiante, el sistema educativo debe estar en continua evolución para adecuar la enseñanza, tanto a los contenidos como a la metodología, lo cual afecta tanto las condiciones materiales de vida como el espíritu con que los individuos van respondiendo a ellas. En este contexto, si el sistema educativo se descuida y sigue estático o con movimiento lento en comparación con la velocidad exterior, se origina un desfase o divorcio entre la educación y la realidad que hace que los alumnos se sientan poco atraídos por las actividades del aula y busquen adquirir conocimientos por otros medios, que llenen sus expectativas.

No hay duda, que debido a los progresos científicos del siglo actual, los acontecimientos del hombre de hoy son muy superiores a otros tiempos. En este sentido, es necesario que el hombre de hoy disponga de una plataforma básica y de unos conocimientos culturales mucho más poderosos. El problema consiste, en decidir cómo educar a ese hombre actual, que tiene tan poderosas bases y tan grandes posibilidades y que se va adaptando a una tecnología que le permite potentes y posibilidades y que se va adaptando a una tecnología que le permite potentes y variadas maneras de accionar, pero que le exigen también distinto comportamiento y distinta preparación en sus habilidades y destrezas

La vida se ha vuelto más difícil, y la escuela debe evolucionar para preparar a individuos con capacidad para actuar en ese mundo complejo y diversificado Luis Santaló al respecto expresa que:

> "No se trata entonces de incorporar a su manera de vivir una técnica refinada de la que ya no podrá prescindir, y que el hombre se vaya ruborizando, pasando a ser una máquina que actúa por reflejos programados" (Santaló 1995, p 132)

Sin embargo, es seguro que el hombre conservará siempre el aliento que le infundió su Creador y seguirá teniendo un alma y un espíritu, con sus sentimientos, sus miedos, sus pasiones y sus creencias, tal vez distintas de las actuales, pero igualmente rectoras de su conducta que igualmente hay que considerar y tener presente en todo sistema educativo

En este mismo contexto, el referido autor visualiza la misión del educador cuando expresa:

> "Que la misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo en que tendrán que vivir " (Santaló opc.it, p. 158)

Es decir, el educador debe estar capacitado para impartir las enseñanzas neccsarias que le permitan al estudiante adquirir las destrezas y habilidades que van sociedad y para resolver los problemas con que se van encontrando al terminar su vida universitaria para convertirse en profesionales.

1.2. La modernización de la educación y los fines de la educación panameña.

La estrategia decenal de la educación panameña contempla la necesidad de una educación de calidad para formar a las actuales y futuras generaciones con las competencias, conocimientos y los valores deseables de una cultura de paz, que contribuya a fortalecer la convivencia pacífica, tolerante y democrática.

Tal situación el Ministerio de Educación (1999) la concibe así:

> **"Urge repensar y renovar la educación panameña, para convertirla en el agente impulsor de cambios deseados en los nuevos escenarios del siglo XX1"**

Al mencionar el concepto de calidad, se hace referencia no a esa realidad estática codificada por un experto, valiéndose de criterios más o menos acertados, sino de una noción que parte de las necesidades de los partícipes en el proceso educativo y los que lo orientan para ofrecerles lo que necesitan, haciendo de los conceptos de referencia y educación los puntos cardinales de la definición.

Dentro del ámbito mundial se puede decir, que la modernización de la educación panameña ha tomado un nuevo rumbo, ejemplo de ello es la implantación de la Ley de Educación (Ley 34 de julio de1995), que reforma el sistema educativo en general (Ministerio de Educación y Universidades), lo cual implica una revisión completa de sus programas y planes de estudio, a través de ajustes a las necesidades que presenta la nación, para adecuarlo a los cambios acelerados, diversos y profundos que se generen en la economía, la cultura, la ciencia, la tecnología, en el mercado de trabajo, así como en las nuevas teorías de aprendizaje.

En sí de lo que se trata es que la modernización educativa logre replantear el modelo pedagógico y administrativo de los centros educativos, para obtener una educación más equitativa y de calidad, con el fin de mejorar los ambientes de aprendizaje y de asegurar el éxito de todos los que aprenden, así como impulsar formas creativas e innovadoras de enseñanza y aprendizaje, que estimulen el desarrollo de la inteligencia, los pensamientos crítico, la capacidad de resolver problemas, las actitudes y destrezas para lograr estudiar por cuenta propia. Es también de suma importancia, el papel que desempeña el docente para lograr aprendizajes significativos que faciliten la búsqueda, construcción y aplicación del conocimiento por partes de los propios estudiantes.

En esta perspectiva, la educación panameña está llamada a cumplir funciones tanto educativas como sociales, cuya especificidad la determinan las características de la sociedad; el fortalecimiento de la eficiencia de las escuelas y universidades, a fin de que éstas constituyan alianzas entre sí para utilizar mejor los recursos existentes.

Por tal razón, se han agregado objetivos económicos, políticos y sociales, la promoción de los valores, de la convivencia, la democracia y la modernización del Estado, el fortalecimiento de la capacidad competitiva de la economía en el marco de la apertura y de la globalización y el aumento de la equidad social y regional del sistema educativo.

No obstante, La viabilidad y eficacia de la estrategia dependerá de la legitimidad social que posea. Además de su carácter integral y sintético, que analice tanto los programas, planes de estudio, estructura académica, personal docente y los recursos de aprendizaje, entre otros José María Gurrián al respecto manifiesta:

> **"La eficacia y la calidad de las actividades curriculares constituyen un criterio pedagógico central, que debe ser evaluado en términos del cumplimiento de la propuesta de transformación curricular" (Gurrián 1996, p. 85)**

En lo que respecta a la equidad y la calidad, la estrategia se propone asegurar oportunidades de acceso, permanencia exitosa y continuidad dentro del sistema a todos los jóvenes y niños y niñas del país. Y, por último, se dispondrá de un sistema de monitores y evaluación de los procesos y acciones que se impulsen.

El proceso de modernización que se ha propuesto como modelo educativo en nuestro país en los últimos años, también plantea la necesidad de lograr cambios trascendentales en el enfoque que los docentes deben asumir para cumplir con las exigencias y retos de la sociedad actual.

Por ello, no sólo se requiere de una reestructuración del sistema educativo sino de su transformación, lo cual implica cambios en el pensamiento, la percepción o la conducta de los actores del proceso, lo que genera una manera de ser significativamente y fundamental.

Con respecto a tales señalamientos, Segovia y Beltrán indican:

> **"El propósito de cualquier reforma es modificar pautas de conducta y ésta, que se proyecten desde actitudes, función del marco axiológico personal, están fuertemente enraizadas y no se cambian por decreto"(Segovia y Beltrán 1995, p. 63).**

Podemos concluir que el proceso de globalización, o internacionalización, cuya manifestación más relevante es el rompimiento de las altas barreras arancelarias, coloca a los países que suscribieran acuerdos de este tipo, en la necesidad de renovar el concepto de competencia local por el de competencias global. Esto no se traduce solamente en la competencia entre productos, sino también en la competencia entre recurso humano. En otras palabras, el conocimiento es una de las bases más importantes en que se fundamentan las relaciones comerciales de la sociedad actual.

Panamá en este sentido establece en su Estrategia Decenal de Modernización lo siguiente:

> **"El conocimiento se perfila como el factor clave del desarrollo económico y social de los países y el medio moderno para producir, competir y garantizar niveles crecientes de bienestar de la población. Dado que todo parece indicar que el futuro pertenecerá a los más competitivos e innovadores, los países que más inviertan en educación, ciencia, tecnología e innovación, serán también los que mejores oportunidades tengan de ingresar con éxito en el Siglo XXI". (Estrategia Decenal. Ministerio de Educación 1997, pág. 5).**

En este aspecto, al educador le corresponde la tarea de capacitar a los profesionales del futuro y prepararlos para enfrentar una sociedad, donde se demandarán conocimientos, habilidades y destrezas como: Innovación, pensamiento crítico y analítico, capacidad de decisión y una permanente disposición al aprendizaje continuo, así como también brindarles los recursos necesarios para asegurar el éxito en la implantación de los nuevos métodos de enseñanza aprendizaje con el uso de la tecnología.

La estrategia decenal de la educación panameña contempla entre sus fines fundamentales:

> **"asegurar la ampliación de oportunidades educativas y mejorar la calidad de los aprendizajes de todos los niños, jóvenes y adultos, como condición esencial para su realización personal, su contribución inteligente al progreso económico ,social, científico-técnico, político y cultural del país, y como respuesta a los desafíos que plantea la inserción de Panamá al siglo XXI".(Bernal, Juan,1997. p 157)**

1.3 La educación superior y el aprendizaje

El concepto de educación superior indica más que nada cierto nivel de jerarquía. Se trata de la etapa de la enseñanza, a la que se ingresa después de haber terminado satisfactoriamente el nivel primario y la enseñanza media.

No obstante, la educación superior no sólo es enseñanza en su sentido más estricto, ya que la función del docente universitario consiste principalmente en orientar el aprendizaje a través de al investigación creadora y el descubrimiento. Según el escritor Francisco Larrollo:

> **"La enseñanza superior es, por principio, comunicación. Se mantiene y medra gracias a un doble movimiento: producción e información". (Larrollo 1994, p. 91)**

proceso que lleva el germen cambiante y ascendente del pensamiento humano y de sus estructuras organizacionales.

Cabe destacar, que no se puede afirmar con certeza, que existe un conocimiento claro y preciso del desarrollo del proceso de aprendizaje. Pero sí se puede aceptar, que todo proceso es dinamico, cambiante y complejo libre de esquemas invariables. Por tal razón, no existen recetas de aplicación general para todas las situaciones, pero sí es posible determinar diversos componentes que pueden ser identificados en toda ocasión de aprendizaje.

En tal sentido, se debe comenzar por entender, que se trata de una interacción entre el sujeto y algún referente, y que el producto de este intercambio estará constituido por un nuevo repertorio de repuestas y adaptaciones.

De acuerdo con Pedro D. Lafourcade, tanto el proceso como el producto se hayan condicionados por diversos factores.

> "En lo que respecta al sujeto, actuarán su bagaje intelectual, sus motivaciones específicas, su capacidad para percibir y estructurar la información, sus actitudes, creencias y normas de acción. En relación a los referentes se incluyen: los docentes, la infraestructura escolar y el ambiente indiferenciado" (Lafourcade 1984, p 98)

El sujeto puede interactuar en diversos planos con sus referentes. La manera de hacerlo está configurada por la naturaleza de la relación. Puede ser de dominación, cuando el referente impone sus ideas y sus procedimientos, o puede ser de libre gestión, cuando el propio sujeto es quien fundamentalmente crea, define y conduce

Según Lafaurcade (op cit. p: 101), lo que se espera del producto terminal de la interacción en el nivel universitario, tiene que ver con lo siguiente

- Una proporcion adecuada de conceptos, principios, generalizaciones y teorías que le facilitarán la comprensión de nuevos datos, y cuya permanencia en el tiempo será mayor que la de la categoría anterior
- Cierta cantidad de información sobre datos y hechos específicos que le servirán durante algún tiempo y que debera ir renovando paulatinamente en el ejercicio futuro de su carrera
- Cierta habilidad para organizar estrategias que le posibiliten abordar y resolver con éxito la mayor aparte de los problemas que plantea al ejercicio de su especialidad
- Habilidades cognoscitivas que le permitan efectuar su uso inteligente. cada vez que deba estructurar alguna estrategia en especial
- Actitudes que le garanticen un continuo perfeccionamiento, un empleo ético del conocimiento, compromiso social que le impulse al mejoramiento de las condiciones de vida y de trabajo propio y de los demás.
- Técnicas y procedimientos que lo habiliten para el desempeño de las tareas específicas de su campo.

Finalmente, cada uno de los productos citados movilizará una amplia variedad de combinaciones entre sus componentes, lo cual determinará su aprendizaje y su conducta profesional y ciudadana.

2. Teorías del Aprendizaje en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje.

Los científicos en áreas relacionadas con la educación, han elaborado teorías que intentan explicar el aprendizaje. Entre las que más se mencionan está la Conductista, la Cognoscitiva y el Constructivismo Según Margarita Castañeda, Teoría del Aprendizaje es

> "un punto de vista sobre lo que significa aprender. Es una explicación racional, coherente, científica y filosóficamente fundamentada acerca de lo que debe entenderse por aprendizaje, las condiciones en que se manifiesta éste y las formas que adopta; esto es, en qué consiste, como ocurre y a qué da lugar el aprendizaje" (Castañeda 1998,p. 68)

Como se puede ver, la diferencia entre las teorías de aprendizaje se derivan de los distintos puntos de vista de ver un problema, ya que ninguna de éstas es capaz de explicar completamente el proceso de aprendizaje.

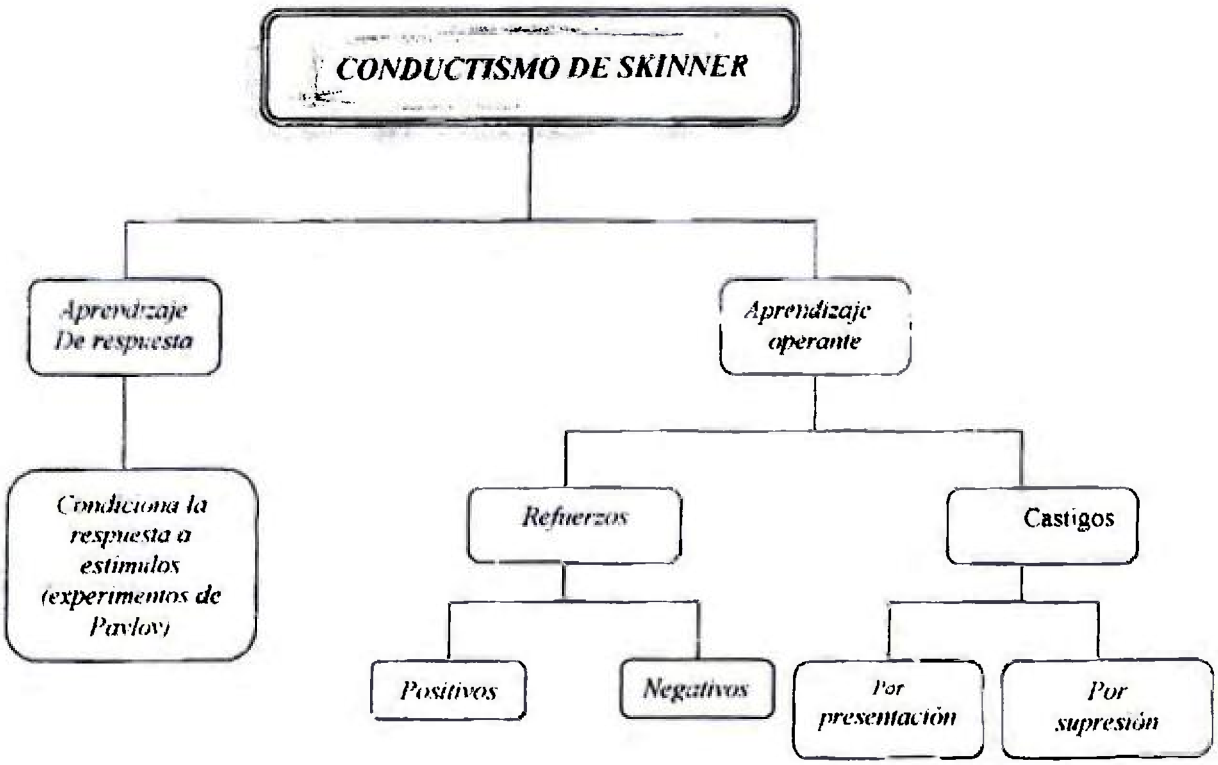
2.1. El conductismo

El conductismo se caracteriza por la atención a los cambios de conducta observables, donde se dejan por fuera todos los procesos internos del aprendizaje y se concibe al cerebro como una caja negra.

La postura epistemológica del conductivismo puede ser caracterizada como objetivista; es decir, para los conductistas el conocimiento es algo que existe de manera externa al estudiante, se puede observar que no se interesan por la conducta significativa, ni intentan explicarla y consideran el aprendizaje como algo que le ocurre al estudiante y no algo que éste realiza activamente.

Skinner es exponente que más influencia ha tenido en este campo. En el siguiente cuadro podemos apreciar los componentes principales de su teoría, denominados aprendizaje de respuesta y el aprendizaje operante.

Fig.1
Componentes de la Teoría de Skinner



FUENTE Escamilla, José G. Selección y uso de Tecnología Educativa. Pág.31

El aprendizaje de respuesta es involuntario, principalmente emocional o fisiológico, en este sentido contribuyeron los estudios del ruso Ivan Pavlov, dando como resultado lo que se conoce hoy como Conductismo Clásico. o lo que Skinner llama aprendizaje de respuesta

También se tiene el aprendizaje operante que es el que se adquiere cuando la conducta es controlada por las consecuencias de las acciones efectuados por el sujeto y no por los estímulos o eventos que preceden a las mismas. Para Skinner, la mayoría de las conductas pueden ser explicadas observando sus efectos, y que el control cuidadoso de las mismas permite desarrolla las conductas deseadas. Para él aprendizaje operante ocurre gracias al refuerzo. positivo o negativo, o al castigo, por supresión

2.2. El cognoscitivismo

En la práctica no existe un modelo cognoscitivista único, sino más bien un conjunto de modelos relacionados, que se basan en el procesamiento de información. Aunque esta terminología no es universal, ya que existen algunos teóricos que agrupan bajo este nombre tanto al modelo del procesamiento de la información, como a los enfoques constructivita.

Con respecto al punto de vista cognoscitivista, Woolfolk afirma que:

> "Desde el punto de vista cognoscitivista el aprendizaje se orienta a sustentar que todo cambio de conducta tiene un trasfondo interno al sujeto, el cual incluye aspectos tales como procesos mentales,

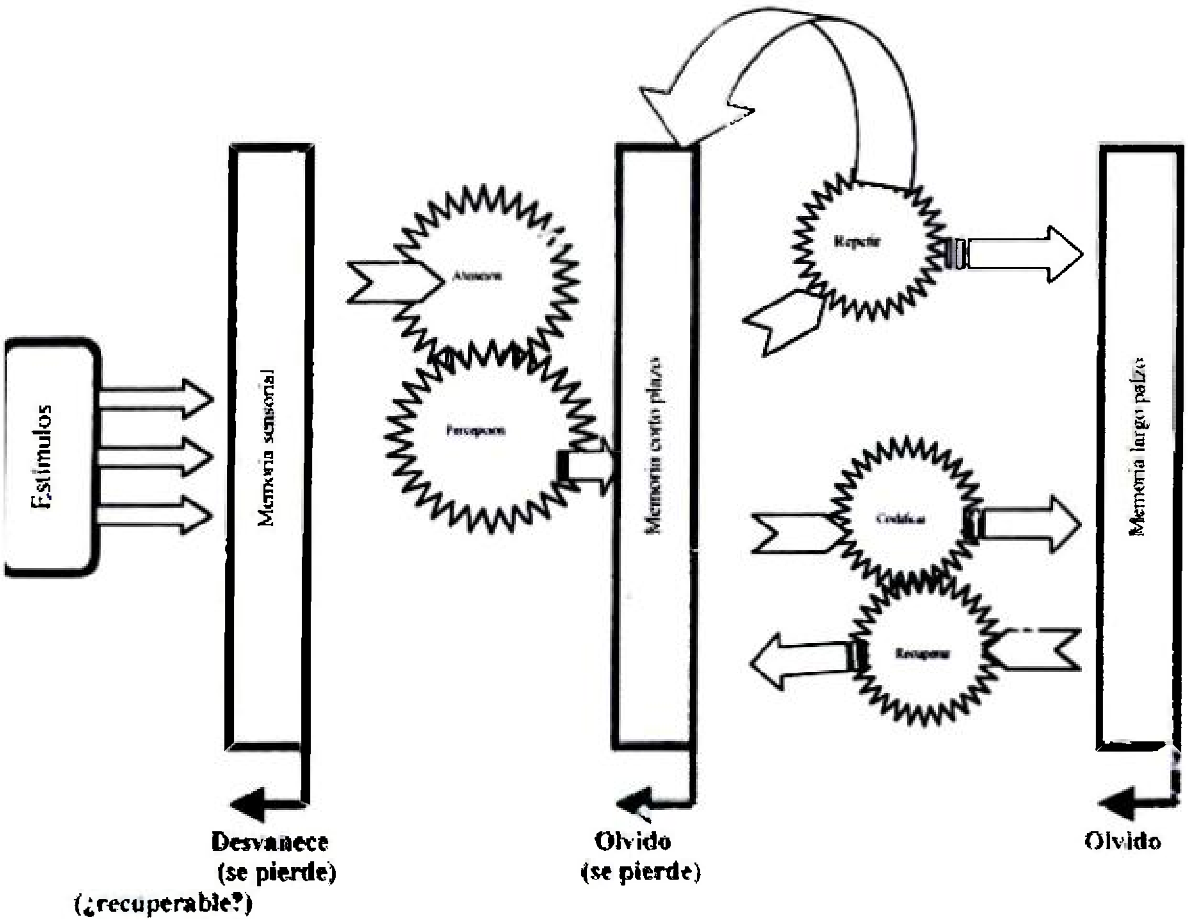
> estados y disposiciones de naturaleza mental". (Woolfolk 1984 En Escamilla de los Santos)

En esta concepción, el estudiante es un ser activo y creador de su propio aprendizaje; ademas se le concibe como una persona que puede tener logros de aprendizaje; es decir, ya no es un ser pasivo que recibe estimulos y responde a los mismos de manera mecánica.

El modelo cognoscitivita tiene su origen en la analogía que existe entre el funcionamiento del celebro humano y el de una computadora. En vista de las características que tienen las computadoras para manejar al informacion, también se le denomina modelo de procesamiento de la información. Esta teoria propone que el celebro posee, al igual que la computadora, registros o memorias y la capacidad de ejecutar procesos. En la Fig. N° 2 se puede observar un modelo del procesamiento de la información.

Fig. 2

Procesamiento de la Información
Modelo Cognoscitivita



FUENTE: Escamilla, J.

La Fig. N°2 presentada, muestra los diferentes tipos de memoria en forma de rectángulos y los procesos mentales están constituidos por los engranajes, lo que quiere decir que éstos hacen posible la transferencia de la información de una memoria a la otra. Asimismo, los engranajes que embonan constituyen procesos cognoscitivos íntimamente ligados

Las siguientes etapas describen las memorias y los procesos cognitivos en orden lógico y representan las etapas desde el momento en que se presenta un estímulo, que pasa por distintos procesos y memorias, hasta que el mismo se almacena y posteriormente puede ser recuperado o recordado

El modelo cognoscitivita se caracteriza por estar formado por elementos inconscientes y conscientes. Un ejemplo de los primeros lo constituyen los registros sensoriales, es decir, aquellos que tienen que ver con los sentidos del oído, el tacto, el gusto y la visión en donde la huella de un estímulo tiene una duración corta y luego se desvanece poco a poco.

La atención representa el primer elemento consciente del modelo cognoscitivita; el mismo permite a las personas orientarse al estímulo sensorial de su elección. En este aspecto, la atención puede ser de forma intencional por el profesor, a través de estímulos físicos, provocativos, emocionales o enfáticos. Un ejemplo muy simple en el caso de la clase de matemática, es cuando se le dice al estudiante el siguiente paso es fundamental para resolver la siguiente operación Preste mucha atención.

La percepción es el proceso inmediato que sigue al de al atención Por tal razón, en la Figura N°2 los engranajes que corresponden a esos procesos encuentran unidos. En otras palabras, este proceso es el que da significado o interpretación a las experiencias vividas por una persona, ya que en primera instancia es el que transfiere la información proveniente de los registros sensoriales a la memoria a corto plazo

Cabe destacar, que la memoria a corto plazo o de trabajo es temporal y caracteriza por ser limitada en capacidad y en tiempo de almacenamiento, lo cual depende de la edad y madurez del individuo No obstante, una de las funciones principales de esta memoria, es que es el lugar en donde se realiza las operaciones mentales, como es el caso de los cálculos aritméticos, de lo cual deriva su nombre de memoria de trabajo.

Por las limitaciones de la memoria temporal, se le conoce como el cuello de botella del modelo cognoscitivita. Esto debe ser tomado en cuenta por el profesor a la hora de impartir la clase, ya que si se pretende que ingrese información en exceso en la memoria de trabajo, de un estudiante, la situación originará una sobre carga en su capacidad de procesamiento, afectando así el aprendizaje.

José Guadalupe Escamilla, presenta algunas soluciones a fin de contrarrestar estas limitaciones; al respecto manifiesta:

> "Se deben realizar pautas durante las presentaciones para sondear, mediante preguntas, el nivel de comprensión de los estudiantes, y de este modo evitar la sobrecarga. También se pueden agrupar las unidades significativas de información de un nivel superior de abstracción" (Escamilla op.cit, p. 48)

Otro proceso presentado en la Fig. N°2 guarda relación con la repetición; es decir, el proceso de volver sobre cierta información, en voz alta o mentalmente, una y otra vez. Se cumple en dos etapas, la primera es de mantener información en la memoria de trabajo por un plazo mayor al esperado y la segunda es la codificar la información en la memoria por largo plazo

Después de lo expuesto es evidente, que la memoria a largo plazo es la permite al individuo almacenar información de manera permanente Su capacidad es ilimitada y lo que se almacena en ella no tiene caducidad, ya que se almacena para siempre y no se puede olvidar

La memoria a corto plazo es la fuente de informacion de la memoria a largo plazo, la cual fluye hacia la misma mediante los procesos de repetición o de codificación; en la misma se almacenan hechos, conceptos, generalizaciones, y reglas, así como también las estrategias para la solución de problemas y otras habilidades mentales. Cabe destacar, que según algunos autores versados en el tema como (Eggen, 1992), los conocimientos que se adquieren en la escuela se almacenan en la memoria semántica, que es parte de la memoria a largo plazo

La recuperación y el olvido también constituyen elementos importantes en el proceso de la información. Como se indicó, en los registros sensoriales la información se desvanece rápidamente, mientras que en la memoria a largo plazo la información se olvida si no se repite continuamente o no es almacenada correctamente

Según las teorías cognoscitivas, cuando se hace difícil recordar una información, esto puede ser a causa de una interferencia producto de una nueva información, o a una falla en el proceso de recuperación debido a deficiencias en el proceso de codificación.

2.3. El constructivismo

La mayoría de los escritores sobre las diferentes teorías del aprendizaje consideran, que el constructivismo no constituye una teoría única, sino que en realidad lo que existe es una combinación de las mismas, que en conjunto tratan de explicar los procesos mentales internos que intervienen en el aprendizaje. No obstante, estas se diferencian de las teorías cognoscitivitas del procesamiento de la información en su orientación.

Cabe destacar, que el enfoque de las teorías cognoscitivas es analítico; o sea, puede estudiarse un todo dividiéndolo en sus partes constituyentes, porque ese todo es exactamente igual a la suma de sus partes. El constructivismo por su lado, tiene un enfoque sistémico, según el cual la suma de las partes no siempre tiene que ser igual al todo.

Otro aspecto fundamental que diferencia a estas dos teorías se deriva de que el cognoscitivismo se sustenta en un punto de vista objetivista, está orientado al producto, su razonamiento es deductivo la naturaleza del aprendizaje es por asociación y su origen interno. Las teorías constructivitas se basan en la subjetividad, hacen énfasis en el proceso, su razonamiento es inductivo, el aprendizaje por reestructuración y su origen de cambio externo.

Atendiendo a todo lo anterior, es que constantemente surgen nuevas expectativas dentro del campo de la educación y asimismo los docentes se ven motivados a buscar diferentes estrategias para tratar de comprender cómo operan sus procesos mentales de los estudiantes en sus tareas de aprender, y para que éstos puedan optimizar su potencialidad de aprendizaje

2.4. Piaget y su teoría en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática

Uno de los cognoscitivista con mayor influencia es el biólogo y psicólogo suizo Jean Piaget, que en sus estudios nunca se preocupó por el aprendizaje formal. sino más bien por el desarrollo intelectual del ser humano. El objeto de sus estudios fueron los niños durante las diferentes etapas de su desarrollo y la manera como éstos iban adquiriendo diversas habilidades mentales Piaget estaba en contra de la instrucción y entendia que el término cognición, estaba relacionado con un proceso activo no pasivo.

El punto central de las teorías piagetianas, es la búsqueda del equilibrio. Para Piaget, existe algo innato que nos motiva a buscar orden, estructura y predecibilidad en las cosas que nos rodean. Cuando nuestras estructuras internas explican lo que ocurre en el entorno, existe equilibrio. Por tal razón, cuando éstas no son capaces de explicar lo sucedido, existe un desequilibrio y comienza aquí una lucha por alcanzarlo.

Según Jean Piaget, el aprendizaje sólo se producirá cuando se introduce ese equilibrio. Además, este propone que el conocimiento es almacenado en esquemas o patrones mentales. Un esquema es una estructura que permite almacenar conceptos, por ejemplo: un niño se ha formado un esquema de una mesa cuadrada cuando este identifica la mesa y reacciona llamandola por su nombre, no son más que procedimientos y relaciones que utilizamos para entender y actuar en el mundo.

Para Piaget en su libro La Construcción de lo Real en el Niño (Piaget, 1973), se encuentra una notable descripción del desarrollo de las categorías básicas de objeto, espacio, causa y tiempo, en los primeros años de la vida del niño, correspondiente al desarrollo de la inteligencia sensoriomotriz, Con respecto al espacio, Piaget demuestra que, inicialmente el sujeto elabora espacios específicos para cada dominio sensoriomotriz, heterogéneos y no coordinados entre sí.

Piaget también estudia la intuición como factor en la constitución de la geometría objetiva del espacio. Para ello, recurre a su experiencia a través de representaciones gráficas (dibujos). La intuicion geométrica es considerada como naturaleza operatoria, según una distinción entre los elementos figurativos (imágenes) y operativos (acciones internalizadas) en el curso del pensamiento.

La tesis fundamental de Piaget es que en el dominio de la geometría, el orden genético de adquisición de las nociones espaciales es inverso al orden histórico del proceso de la ciencia. Es decir, el niño considera primero las relaciones topológicas de una figura, y sólo posteriormente las proyectivas y euclidianas, que son construidas de un modo simultáneo.

Piaget distingue las operaciones lógicas, que implican la manipulación de clases y relaciones establecidas a partir de elementos discretos, y las operaciones infralógicas, e hizo aportes en el área de lenguaje, asegurado que los niños menores se limitan a clasificar objetos sobre los que previamente han construido un modelo del conjunto al que pertenecen. Para ellos, los eventos se desarrollan en continuamente en el tiempo.

Para Piaget, las mezclas de clasificación se dificultan al niño pequeño y su comunicación es muy egocéntrica. Esto significa, que ven al mundo sólo en relación con ellos mismos y así lo expresan, desde su propia perspectiva. Pero asimismo, conforme el niño se desarrolla, la interacción con el medio ambiente es más profunda y sofisticada, lo cual aumenta la capacidad del entendimiento y también se incrementa grandemente la expresión del lenguaje.

Piaget encontró que la interacción es fundamental para lograr el desarrollo intelectual de un niño. Si no se da la interacción social con adultos y compañeros, entonces cada cual desarrollará su propia cultura. Sin embargo, éste supone que el estudiante construye una comprensión del mundo prácticamente solo. No obstante, la teoría del aprendizaje social es una propuesta del psicólogo ruso Vygotsky, quien plantea ideas similares al de Piaget, pero da una mayor importancia a la interacción social y al uso del lenguaje.

El conocimiento esta atado por así decirlo, de esta maduración, que tiene un trasfondo biológico. Por eso Piaget habla de etapas de desarrollo a la maduración intelectual para formar un modelo y poder trabajar con él. Si se altera este tipo de etapas de crecimiento cognitivo en los niños y se trata de enseñarles conceptos para los cuales éstos no están preparados, entonces se produce lo que pudiera ser un pseudo- aprendizaje. Es decir, cuando los niños de alguna manera memorizan las respuestas correctas sin verdaderamente entender lo que están diciendo.

Piaget fue un personaje que vivió en contraste con su epoca, ya que sus formas de pensar iban en contra de las creencias que predominaban. Él demostro que en la naturaleza misma de los niños existe una especie de calendario o secuencia de desarrollos cognitivos que no pueden ser saltados ni obviados.

Entre sus seguidores está su discípulo S. Pappert (1995), quién fue más allá del pensamiento de su maestro Piaget y postuló, que si bien no pueden saltarse las etapas del conocimiento, éstas pueden acelerarse hasta cierto nivel que depende de cada niño y del medio ambiente selectivo a que está expuesto. O sea, no se pretende forzar al niño, pero si darle oportunidad a que se desarrolle ofreciéndole una gran gama de experiencias selectivas.

Aunado a lo anterior, también se pretende que también el niño pueda profundizar las etapas que normalmente pasa sólo por ellas. Así es como a través de una calculadora o computadora y la programación adecuada, que el desarrollo del niño en este medio ambiente puede ser aumentado a una gran velocidad, profundizado y enriquecido de experiencias.

Piaget también señala, que es casi hasta la adolescencia cuando el niño comienza a manejar muy bien y de manera efectiva los conceptos abstractos, por lo cual resulta mucho más fácil enseñarle a éstos a tener la oportunidad de enseñárselos. Esto se debe, a que en principio resulta mejor para el niño pequeño manipular las cosas directamente.

Otra implicación del constructivismo, es que los estudiantes deben ser capaces de "descubrir" el conocimiento (descubrir no significa descubrir algo nuevo o que aporte algo nuevo a la ciencia, sino más bien que sé redescubran las cosas).

No obstante, el aprendizaje por descubrimiento puede tomar más tiempo a la hora de aplicarse en clase; sin embargo, lo aprendido así es mejor comprendido y más difícil de olvidar. Por tal razón, para lograr este aprendizaje, el ambiente debe proporcionar alternativas que den lugar a la percepción por parte del alumno, de las relaciones y similitudes entre los contenidos presentados. Así, los estudiantes deben tomar un papel activo, de manera que el docente tiene el compromiso de proveerles las condiciones para que la información les sea significativa.

3. Importancia de la Enseñanza de las Matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas, siempre ha sido un desafío, además no es tarea fácil, ya que supone un esfuerzo mayor del campo intelectual en sí combinado con la falta de preparación del docente o su desinterés por la asignatura, así como por el uso de métodos empíricos para dar sentido tratar de comunicar las ideas.

En el proceso de la enseñanza de las matemáticas, lo esencial es que estas ideas se vean reflejadas en el salón de clases, es decir, es importante que la instrucción matemática sea un medio para que los estudiantes participen en la construcción de su aprendizaje y encuentren sentido a las mismas. Por tal razón, mientras más experiencia tenga el estudiante con objetos físicos de su medio ambiente, más probable es que desarrolle un conocimiento apropiado de ellas

3.1. Métodos de enseñanza de la Matemática

Los objetivos que debe perseguir todo método de enseñanza de las matemáticas, es que el alumno sea capaz de diseñar resolver problemas de matemáticas, comunicarse matemáticamente, razonar matemáticamente, valorar las matemáticas y confiar en su propia capacidad con respecto a la materia.

En la práctica existen varios métodos que se han propuesto para conseguir reducir los fracasos de los alumnos y, de este modo, alcanzar los objetivos propuestos. Según Clute (1984) en estos casos aplican dos métodos diferentes de enseñanza, uno basado en el descubrimiento por parte de los alumnos y el otro en la exposición efectuada por el docente.

Katz y Tomazic (1988), partiendo de lo anterior específicamente utilizan un método de enseñanza de la matemática no cuantitativa, basado en el aprendizaje mediante el análisis, haciendo énfasis en la comprensión de la racionalidad y a la aplicación de las técnicas, y no tanto en el cálculo o las fórmulas. Éstos sustentan su tesis, con base a estudios realizados con diversos grupos de cuyos resultados disminuyeron los índices de fracasos, demostrando así, que con esta técnica de enseñanza se puede mejorar el nivel de aprendizaje de las matemáticas.

Otros investigadores como Hendel y Davis (1978), centran su análisis en un método de intervención que consiste en la acción conjunta del consejo personal y la aplicación de modos de enseñanza adecuada, llegando a la conclusión que si se logra eliminar la ansiedad, se pueden lograr mejores resultados en el aprendizaje de las matemáticas.

No obstante, independientemente del método utilizado para enseñar matemáticas, el propósito principal debe ser que el estudiante aprenda a pensar y a resolver situaciones problemáticas de tipo matemático, a través del pensamiento vivo, dinámico, razonable y funcional, que se ocupe de generalizar a partir de observaciones e intuiciones, de establecer analogías y de extraer conceptos y estructuras matemáticas de una situación en particular.

Para lograr este objetivo, el docente debe asimilar vitalmente algunos principios: un aprendizaje activo (es decir aprender una cosa por sí mismo, además hacer a los estudiantes partícipes en la redacción de actividades problemáticas y ejercicios), lo cual permita que el que aprende haga suyo ese aprendizaje

El aprendizaje interesante, también constituye una motivación, permitiéndole al estudiante satisfacción en las actividades que realiza y la capacidad para encontrar solución a los problemas. Por último, el aprendizaje progresivo, para instar al estudiante a buscar en cada situación una ley, un principio, un modelo matemático, una norma o un algo matemático, a través de diferentes etapas (un número, una figura geométrica, una operación una estructura).

Es necesario aclarar, que en cada situacion de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas es imprescindible adaptarse al nivel de madurez del estudiante, tomando en cuenta que éste en cada edad puede aprender algo nuevo, pero no antes; si se alteran las diferentes etapas, el proceso y todo intento por enseñar se puede transforma en inútil.

3.2. Factores que inciden en los fracasos en matemática

La mayoria de los informes presentados por el Ministerio de Educación de nuestro país, con respecto a las cifras de fracasos escolares de los estudiantes, indican que los índices de deficiencia en las asignaturas del plan de estudios del nivel básico y medio muestran una mayor incidencia en la asignatura de Matematica.

Uno de los motivos por los cuales se dan los fracasos en esta asignatura se deben a la falta de preparación del docente de los niveles preescolar, básico y medio. Con base en esto, la Universidad de Panamá, creó la Escuela de Matemática con el objetivo de formar y capacitar docentes del nivel medio y universitario; sin embargo, se deja de la preparación del docente de preescolar, lo cual trae consecuencias negativas para todo el proceso.

Cabe destacar, que aunque hasta la fecha se han estructurado cinco (5) veces los planes de estudio de la licenciatura en Matemática, aún así éstos no satisfacen las necesidades del personal en formación para los niveles básico y medio.

Para un profesor de matemáticas, la propia formación es esencial. En este contexto, es preciso no sólo saber matemática, sino también saber enseñarla; por tal razón, si el docente no tiene una experiencia real, entonces todo trabajo de enseñanza aprendizaje de la matemática, en cualquier nivel, se reduce a actuar en situaciones de tipo problemático, que contribuyen a generar más fracasos.

No obstante, multiples investigaciones realizadas en los ultimos años han corroborado, que una de las mayores preocupaciones de los docentes es adquirir un dominio de los contenidos y su forma de transmisión correctamente. Esto es importante, porque los docentes constituyen los agentes de innovación más importante para el sistema educativo.

Por tal razón, si los planes de modernización de la educación panameña hacen énfasis en la necesidad de nuevas técnicas para reforzar el proceso de enseñanza, con recursos didácticos que contribuyan a disminuir los fracasos, el mejor aporte del educador es a través del esfuerzo que realice para mejorar su condición profesional para así cumplir más eficientemente su labor docente.

3.2 Importancia de la didáctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

La didáctica puede utilizar un lenguaje propio en matemática (geometría) unificado, generalizado y con él describir las estructuras dinámicas del acto didáctico. La importancia del lenguaje es fundamental; un lenguaje lógico, expresivo y rico hace posible la didáctica estructural de la matemática como ciencia. No obstante, a parte del lenguaje y contenido, la didáctica requiere de unos canales de comunicación efectivos, los cuales son numerosos; pero quizás el más valioso sea el acto de la investigación personal de una situación problemática de carácter matemático.

La tarea más didáctica es el dominio de los procesos de información: acto didáctico, comunicación y aprendizaje de contenido matemático; de ahí la importancia de las formas técnicas del trabajo escolar. Por consiguiente, una guía didáctica de matemática supone cuando se lee, una transmisión de información.

La relación didáctica entre el profesor y el alumno es más eficaz, cuando se trasmite conocimiento y se hacen preguntas, el alumno contesta y hace a su vez nuevas preguntas. La tarea del profesor puede ser realizada en cierta medida por una máquina, tal es el caso de las calculadoras gráficas, un texto programado o una guía de aprendizaje. Otras veces, cuando el profesor y el alumno leen un mismo libro, surge un acoplamiento paralelo, pero también es muy eficaz el auto acoplamiento, es decir, cuando el alumno se pregunta a si mismo y se da su propia respuesta.

En tal sentido, la información más urgente que hay que transmitir en un sistema de acoplamiento son los modelos matemáticos más sencillos que la realidad, pero isómorfo con ella y de gran generalidad aplicada a esos campos. El lenguaje general, el lenguaje matemático formalizado y el lenguaje didáctico estructural, son modos de comunicación; éstos deben ser sencillos y claros, para que el mensaje a través de la comunicación sea efectivo.

El proceso didáctico está condicionado por varios factores de los cuales se mencionan:

- El socio estructura del ambiente que exige una formación matemática.

- La psico – estructura del niño, sus conocimientos previos, sus motivos.
- El medio escolar con sus numerosas posibilidades.
- El objetivo, la asimilación de unas estructuras matemáticas que conforman su modo de pensar.

El interés por la eficiencia de los métodos y medios de enseñanza, a producido en la didáctica contemporánea técnicas valiosa, entre las que se mencionan las individualizadas y en equipo.

Los métodos individualizados tienen el riesgo del empobrecimiento por falta de contacto humano, lo cual comienza a notarse tanto en el lenguaje natural como en el matemático. Sólo el contacto humano es enriquecedor y puede contrastar la educación demasiado simplificada, pero la educación debe ser a la vez individualizada y socializada. No sólo porque así el estudiante se prepara para su vida social y se estimula su aprendizaje con relaciones de estimulación e intercambio intelectual, sino por razones de eficiencia.

Los métodos de grupo de trabajo en lugar de actuar sobre el sentimiento voluntad, actúan sobre la inteligencia por cooperación; y es mucho más efectivo cuando se le incorporan medios técnicos.

Por lo general, en la matemática escolar desde el punto de vista individualizado y socializador, donde las innovaciones técnicas hagan posible ante una renovación didáctica de tipo tecnológico, a base de una enseñanza programada o guiada y una enseñanza por máquina, quizás sea la forma viable para atender los

Pero lo más importante, es que se lleve a cabo mediante un proceso que facilite la transferencia de conocimientos básicos de un campo a otro, y en donde el profesor adquiera un papel cada vez más activo en cuanto a pensamiento, planificación y control y que con su personalidad y destreza consiga en el niño reacciones auto activas, que son la base del desarrollo de su personalidad total.

4. La Tecnología Educativa como Alternativa para Mejorar el Proceso de Enseñanza – Aprendizaje de la Matemática

Según estudios realizados, se dice que una persona está capacitada tecnológicamente cuando:

> **"Comprende el rol y el impacto de la tecnología sobre la sociedad, acepta las responsabilidades asociadas de vivir en la era de la información,... y usa la tecnología como herramienta para obtener, organizar y manipular información y para una comunicación y expresión creativa". (Consejo de Educación. Estado de Michigan, 1996).**

Hoy día, la Tecnología Educativa se ha introducido en todos los rincones de nuestra vida diaria y por tal razón la educación debe estar a la vanguardia de esta situación.

A la Tecnología Educativa se le atribuyen una serie de definiciones que van desde la aplicación de tecnologías a situaciones pedagógicas, hasta las que plantean, que es más que una disciplina aplicada o técnica; sin embargo ninguna de ellas esclarece el papel de la tecnología referida a la educación. Desde un enfoque

Hoy día, la Tecnología Educativa se ha introducido en todos los rincones de nuestra vida diaria y por tal razón la educación debe estar a la vanguardia de esta situación

A la Tecnología Educativa se le atribuyen una serie de definiciones que van desde la aplicación de tecnologías a situaciones pedagógicas, hasta las que plantean, que es más que una disciplina aplicada o tecnica, sin embargo ninguna de ellas esclarece el papel de la tecnología referida a la educación Desde un enfoque sistemático, la misma plantea la educación como un todo organizado. que pretende alcanzar logros a nivel cualitativo y cuantitativo

Según Eric Santamaría, desde el enfoque cognitivo, la Tecnología Educativa consiste en lo siguiente:

> "El diseño y construcción de situaciones de enseñanza y aprendizaje que llevan una alto grado de aprendizaje por parte del alumno donde él es un participante activo en el proceso educativo y no está simplemente sujeto a tal proceso" (Santamaría 1998, p. 45)

Desde este punto de vista, a través de la tecnología educativa no sólo se enseñan procesos y habilidades para el desarrollo de la inteligencia(estrategias cognitivas) y de posibilidades individuales, sino que también deberá facilitar el conocimiento, la innovación, la transformación que exigen los cambios de la sociedad

4.1. Evolución de la tecnología educativa.

Paralelo al desarrollo de las sociedades y los cambios que en ella se han producido, la tecnología ha estado presente de una u otra forma, en el proceso de enseñanza - aprendizaje, como un recurso importante al servicio de la educación Actualmente, las tecnologías educativas suelen agruparse de varias formas, entre estas: medios impresos, recursos visuales fijos, medios audiovisuales y la tecnología teleinformatizada de más reciente data.

4.2. Medios impresos

Los medios impresos son los recursos más antiguos de transmisión del conocimiento y siguen siendo importantes a pesar del auge de la digitalización y los medios electrónicos de información. Esto se debe, a que a pesar de las nuevas tecnologías, sólo el libro es capas de ofrecer grandes cantidades de información textual, gráficas y fotografías, en un espacio sumamente reducido y a un precio accesible a al gran mayoría de las personas.

Además, el medio impreso es excelente para la representación de conceptos abstractos y densos, razonamiento lógico y argumentación, como en caso de las matemáticas;, además permite presentar dibujos, pinturas y diagramas. No obstante, para que estos llenen su cometido, los libros requieren de un escritor de gran habilidad y de la experiencia de los diseñadores, así como también de ser combinadós con otras tecnologías por parte del profesor, ya que el mismo no permite la interacción con los estudiantes. Es decir, es una tecnología de un solo sentido.

4.3. Recursos visuales fijos

En la actualidad el profesor utiliza una gama de recursos visuales fijos para complementar la clase; entre éstos están el tablero y la tiza, los marcadores, cartulinas, diapositivas y fotos, filminas y otros.

El tablero o pizarrón y la tiza son los útiles de ayuda en clase mas antiguo y es una de las más difíciles de utilizar, ya que escribir correctamente con la tiza en el tablero, requiere de mucha práctica. Aunque en muchos casos ya no se justifica su uso, este recurso sigue siendo importante, pero debe ser complementado con otras técnicas, que permitan ahorrar tiempo en clase para la reflexión y la discusión.

Las cartulinas y rotafolios sirven como complemento al pizarrón y permiten desplegar información importante para la clase; los mismos son confeccionados por el profesor o por los estudiantes con fines específicos. No obstante, se de tener cuidado de que el tamaño de las letras y el estilo facilite la lectura desde cualquier punto del salón de clases.

Por otro lado, el uso de fotos hoy día ha disminuido debido a que su tamaño dificulta la apreciación desde cualquier lugar del salón. Con más frecuencia se utilizan las diapositivas proyectadas en una pantalla. En muchos países se prefiere el uso de filminas o acetatos, debido a que esta técnica permite una proyección sin tener que oscurecer el salón de clases y el profesor puede colocarse al frente del grupo al mismo tiempo que explica la clase, lo cual no puede darse en el caso del uso de diapositivas.

4.4. Medios audiovisuales

Entre las técnicas audiovisuales más utilizadas están las teleconferencias, radio y televisión y los medios grabados. Las teleconferencias son tecnologías que permiten mantener una conferencia o conversación a distancia, aplicaciones que se dan a través de Internet o del Web. Estas tecnologías se abocan al nivel discursivo del marco conversacional, ya que permiten la interacción entre el estudiante y el profesor, donde cada uno expresa su opinión sobre algún tema en particular.

La audioconferencia consiste en una discusión telefónica que utiliza un altavoz y un micrófono especial, mientras que la videoconferencia, permite la comunicación auditiva y visual con movimiento por medio de cámaras y monitores de televisión. En este último caso, para su transmisión se utilizan líneas telefónicas, redes digitales, redes de microondas o satélites y otros medios. Se dice que la comunicación es punto/punto, cuando se da en ambos sentidos; es decir entre el profesor y el alumno; caso contrario, se le denomina punto/multipunto, porque es en un solo sentido.

Por otro lado, los medios grabados (audio y videocasete, videodisco, CD y DVD, son de un solo sentido y proporcionan cierto control al alumno. Cabe destacar, que éstos poseen las mismas características pedagógicas que las teleconferencias, siempre y cuando se les utilice para distribuir cátedras o conferencias previamente grabadas Su costo es relativamente reducido en comparación a la radio y la televisión, sobre todo cuando se trabaja con grupos reducidos de estudiantes

4.5. Tecnología teleinformatizada

Dentro de este grupo se clasifica a las computadoras multimedia y a las computadoras en red. Los primeros tienen que ver con la combinación de varios medios de información y en la actualidad este término se reserva exclusivamente para los equipos computacionales capaces de reproducir textos, visuales fijos, visuales con movimiento a colores y audio en estéreo

La computadora en red y la WWW, incluyen las aplicaciones de Internet, tecnologías sincrónicas tecnologías textuales asincrónicas. En este aspecto sobresale la denominada red de redes, o internet, que es un conjunto de computadoras unidas entre ellas a través de líneas telefónicas, cable coaxial, fibra óptica y satélite, con el fin de intercambiar información.

Debido a la capacidad que tiene la red para transmitir información destinada a distintos canales sensoriales, por su potencial de comunicación multipunto/multipunto y por su número de usuarios y servicios existentes, su potencial es enorme.

Se dice que la información es sincrónica, cuando su transmisión es en tiempo real, de uno a uno o de uno a muchos o de muchos a muchos En este caso, las herramientas más utilizadas son el Chat, Talt, IRC y el ICQ. Cuando el medio se limita a transferencia de información textual o de archivos por medio de anexos, se le denomina tecnología asincrónica, tal es el caso del correo electrónico Con fines educativos se utiliza para recepción y envío de tareas, interacción a distancia profesor – alumno e interacción a distancia alumno - alumno

Finalmente, la WWW, o simplemente Web, es una especie de cliente servidor, donde el navegador del usuario es el cliente que solicita páginas al servidor Web que las posee En la actualidad los estudiantes y profesores la utilizan como bancos de información, lo cual facilita la labor investigativa de los estudiantes y fortalece el proceso enseñanza aprendizaje

4.6. Consideraciones sobre el uso de tecnología en la enseñanza de la Matemática.

La tecnología en la educación implica el aprovechamiento de recursos de computación como software, dispositivos, redes, equipos de telecomunicación, las calculadoras gráficas y otros. En la actualidad existe un gran número de éstos y están al alcance de usuarios comun , como los estudiantes. Estos equipos tecnológicos, son de gran utilidad en la formación académica del estudiante, ya que permiten su capacitación eficiente para el uso y aplicación tanto en el campo profesional como personal.

Para implementar de forma exitosa la tecnología en la educación, es necesario considerar aspectos como.

- Un plan estratégico para la implementación de la tecnología en la educación, de acuerdo a las necesidades existentes.

Cambios en los métodos de enseñanza – aprendizaje, es decir, se debe cambiar la manera tradicional de enseñar al estudiante, donde lo primordial debe ser enseñarles a aprender y a buscar el conocimiento por si solo)

- Hacer cambios o ajustes en los planes de estudio, de tal manera que se contemple el uso de la tecnología como parte de los mismos
- Capacitación técnica permanente en los programas de docencia, para garantizar el éxito en el uso de la tecnología(calculadora gráfica)
- Contar con las herramientas que se van a introducir como apoyo en la enseñanza aprendizaje de la matemática.
- La calculadora gráfica (TI82) en el aprendizaje de Cálculo Diferencial

5. La Calculadora Gráfica en la Enseñanza de la Matemática

5.1. La calculadora gráfica

La utilización de las calculadoras en las clases de matemática, por muchos años a sido objeto de discusión y criticas a los estudiantes, tales como "no sabe restar ni multiplicar, sino tiene una calculadora a mano" y nunca se aprenderá las tablas de multiplicar", entre otros. Por estos y muchos perjuicios más, es que le atribuye a la calculadora que puede ser perjudicial para el aprendizaje de la matemática, en el sentido de que el uso de este recurso tecnológico evita que el estudiante realice cierto tipo de actividades y por consiguiente, implica que se restrinjan sus habilidades, destrezas y técnicas importante en su aprendizaje.

Las calculadoras estándar, están siendo utilizadas en las clases de nivel medio, es decir, aquellas que sólo contienen las cuatro operaciones elementales, igualmente se emplea en este nivel la calculadora científica, que pueden ser utilizadas en contenidos correspondientes a las funciones algebraicas de orden superior, para calcular valores de las funciones trigonométricas. logarítmicas y exponenciales, lo cual remplazó el método tedioso de las tablas matemáticas.

En el nivel universitario, además de las calculadoras científicas se utilizan las calculadoras programables y las calculadoras gráficas Estas últimas se distinguen por algunas características que varían de un modelo a otro, entre éstas se mencionan

- Pantalla de presentación
- Presentación de gráficas de funciones y datos estadísticos
- Permiten la resolución de sistemas de ecuacione lineales y de orden superior
- Facilitan la manipulación de matrices
- Permiten operaciones con series
- Sirven para realizar operaciones con números complejos
- Diferenciación e integración
- Son programables
- Tienen memoria y comunicación con otras calculadoras, se conectan a la computadora e impresoras y retroproyectores.

Se debe reconocer. que en las últimas décadas el desarrollo tecnológico ha crecido en forma vertiginosa en el ámbito mundial y nuestro país no escapa de ello.

Paralelo a este crecimiento, entre los docentes de matemática surgen algunas controversias con respecto a los métodos y técnicas de enseñanza, al igual que los diferentes enfoques y paradigmas a seguir en la enseñanza de las ciencias exactas

Con este desarrollo tecnológico surgen las calculadoras gráficas, que presentan una serie de ventajas para la enseñanza de las matemáticas, entre las cuales se mencionan las siguientes:

- Desarrolla capacidades cognitivas y creativas
- Forma y desarrolla habilidades en computacion y algoritmicas
- El aprendizaje es reflexivo
- Las estructuras son construidas por el estudiante
- Construye gráficas paso a paso
- Le permite al estudiante desarrollar un razonamiento lógico
- Permite el acceso individual a los estudiantes
- Es portátil. Liviana, manual y opera con bateria
- Puede ser utilizada en el hogar, en el aula de clases, en la biblioteca, sala de estudio y en cualquier otro lugar.
- Construye gráficas instantáneamente
- El costo es menor que el de una computadora.

Como es lógico, a las calculadoras gráficas también se le atribuyen algunas desventajas, entre las cuales están:

- Esta tecnologia es inaccesible para algunos estudiantes, escuelas y docentes.

- Sólo es utilizada por un grupo minoritario, debido a que los manuales estan en inglés y las traducciones muchas veces tienen errores
- Su uso en la clase de matematica, a veces convierte al estudiante en mecánico
- El uso de la calculadora a veces evita que el estudiante realice cierto tipo de actividades y por lo tanto, esto induce a una aprendizaje restringido de destrezas y técnicas importantes

5.2. La calculadora gráfica: un enfoque constructivista en el aprendizaje de la matemática.

La calculadora gráfica es un instrumento que ha revolucionado nuestra sociedad, porque ha traido ahorro de tiempo, dinero y personal a la mayoría de las organizaciones que la monopolizan. En el campo educativo, también se ha introducido esta herramienta, cuyo aporte ha sido significativo en la solución de algunas situaciones especiales.

La introducción de las Calculadoras Gráficas a la educación, responde al interés de proveer a las generaciones futuras la capacitación que les permita enfrentar retos y a la vez, crear un ambiente educativo que facilite el aprendizaje, lo que ha propiciado la elaboración de un diseño de calculadoras gráficas más completas y versátiles.

El desarrollo tecnológico educativo en las últimas décadas, en todo el mundo, ha dado lugar a la elaboración y difusión de la calculadora gráfica, y a la par de esto, su utilización como herramienta en la enseñanza y aprendizaje, constituyen una oportunidad para crear nuevas formas de aprendizaje que permitan formar profesionales preparados, creativos, innovadores e interesados en el mundo que los rodea

La matematica como ciencia exacta, está utilizando la calculadora gráfica para un mejor desarrollo de los conceptos abstractos y también para un proceso más rápido y exacto en muchas de las operaciones. En tal sentido, las calculadoras gráficas juegan un papel importante en el proceso de aprendizaje, ya que permiten la visualización de conceptos de manera clara y precisa, y por supuesto, con menos costo que el de una computadora, ya que esta última necesita de un lugar más amplio para su uso Las calculadoras además son más versátiles, económicas ocupan menos espacio y son más accesibles a los estudiantes.

El modelo utilizado se basa en el paradigma cognitivo y constructivista, donde el aprendiz forma su propia estructura mental, el docente crea un ambiente motivador y agradable, lo que permite al estudiante desarrollar sus propias estructuras mentales.

Debemos reconocer, que el aprendizaje es un proceso activo, en el que el sujeto tiene que realizar una serie de actividades para asimilar los contenidos informativos que recibe Según repita, reproduzca o relacione los conocimientos; así mismo, realizará un aprendizaje repetitivo, reproductivo o significativo. Por tal razón, las actividades de los programas convienen que estén en consonancia con las tendencias pedagógicas actuales, para que su uso en las aulas y demás entornos educativos provoque un cambio metodológico en este sentido

Los programas bien estructurados, entonces, evitarán la simple memorización y presentarán entornos heurísticos centrados en los estudiantes que tengan en cuenta las teorías constructivistas y los principios del aprendizaje significativo donde además de comprender los contenidos puedan investigar y buscar nuevas relaciones

Así el estudiante se sentirá constructor de su aprendizaje mediante la interacción con el entorno que le proporciona el programa (mediador) y a través de la reorganización de sus esquemas de conocimiento, tomando en cuenta aprender significativamente, quiere decir, que se deben modificar los propios esquemas de conocimiento, así como reestructurar, revisar, ampliar y enriquecer las estructura cognitivas.

En este entorno, el uso de la calculadora gráfica desempeña un papel fundamental en el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática, ya que la tendencia actual es que los estudiantes al automatizar los procesos y habilidades involucrados en el pensamiento creativo, son capaces de transferirlos a la resolución de problemas relacionados con su vida cotidiana, tanto fuera como dentro de la escuela.

Cabe destacar, que para la enseñanza de las gráficas en el curso de Cálculo Diferencial e Integral, que se dictan en los cursos de Licenciatura en Ingeniería Eléctrica en la Universidad Tecnológica de Panamá, se promueve el modelo educativo basado en el paradigma cognitivo. Este modelo propone una estrategia de aprendizaje innovadora para la enseñanza de las gráficas mediante el uso de la calculadora gráfica, como un recurso tecnológico de aprendizaje, que estimule y mejore el rendimiento del estudiante, como también cambie su actitud hacia las matemáticas. Para tal efecto, este enfoque debe estar inmerso en un ambiente favorable que garantice resultados satisfactorios

El modelo pedagógico para un ambiente gráfico con calculadoras, tiene sus bases psicológicas en el constructivismo, mediante un enfoque que se preocupa por los procesos mentales internos que intervienen en el aprendizaje Segun éste, cuando nuestras estructuras mentales explican lo que ocurre en el entorno, existe equilibrio, cuando las mismas no son capaces de explicar lo sucedido, existe un desequilibrio y comienza una lucha por alcanzarlo El aprendizaje sólo se alcanza cuando se introduce ese desequilibrio

En tal sentido, el conocimiento es una construcción mental y además se plantea, que el verdadero aprendizaje es una construcción, donde el estudiante forma su propia estructura mental, enfoque que coincide con la enseñanza en donde se utiliza la calculadora gráfica. En tal sentido, el docente debe crear un ambiente que permita al estudiante desarrollar sus estructuras cognitivas, de lo que se deduce, que el aprendizaje humano se produce de una construcción interior Tales consideraciones de la enseñanza, se basan en el paradigma Constructivista.

No obstante, debe tenerse presente el ambiente educativo; es decir, el conjunto de elementos, circunstancias, condiciones externas y recursos constituyentes del contexto más reducido en que tiene lugar el proceso de enseñanza aprendizaje (Quintero y Mera 1998, p. 32).

Retomando la definición anterior, se puede decir, que el apoyo de la calculadora gráfica como herramienta permite crear un ambiente educativo motivador y agradable, que propicie la posibilidad de un mejor rendimiento académico, y que pueda promover actitudes de investigación y exploración en los estudiantes.

Por tal motivo, el ambiente educativo debe organizarse, de tal forma, que tanto la cultura, el aprendizaje y la tecnología educativa se relacionen entre sí, hasta llegar a un nivel universal que le permita aprovechar las ventajas educativas que proporciona el potencial de la calculadora gráfica. Estas son algunas de las consideraciones que plantea el enfoque Constructivista, lo cual puede resultar sorprendente para aquellos educadores que mantienen la tesis de la enseñanza tradicional entendida como transmisión de información, bajo el supuesto de que el conocimiento se aprende después que alguien lo haya descubierto.

Mediante este paradigma, el docente debe crear un ambiente que permita desarrollar sus estructuras cognitivas. La enseñanza constructivista no sólo facilita los procesos interiores, sino que también hace sus aportes personales a la clase con sus ideas, críticas y conclusiones.

La enseñanza asistida con calculadora gráfica, encaja con el enfoque constructivista, donde el aprendizaje es reflexivo y las estructuras son construidas por el estudiante, permitiendo de esta forma desarrollar el razonamiento lógico, mientras que el docente debe crear un ambiente motivador y agradable para desarrollar las estructuras cognitivas.

5.3. El proceso de aprendizaje y las calculadoras gráficas

La escritora Frida Díaz (1998) últimamente ha presentado información valiosa, relacionada con investigaciones que actualmente han tocado la forma de enseñar - aprender En este sentido, identifica dos líneas principales originadas de trabajos realizados en la época de los setenta. la aproximación impuesta la cual se refiere a las modificaciones en el contenido o estructura del material de aprendizaje. y una segunda línea relacionada con la aproximación inducida. que se refiere al entrenamiento de los que aprenden para que manejen directamente y por sí solos procedimientos que le van a permitir aprender con éxito de manera autónoma.

Específicamente la mencionada escritora indica lo siguiente

> En el segundo caso las ayudas que se le proporcionan al estudiante pretenden facilitar intencionalmente un procesamiento más profundo de la información nueva. Las ayudas son planteadas por el docente, el planificador, el diseñador de materiales o el programador de software educativo, constituyendo estas estrategias de enseñanza." (Díaz 1998, p 58)

Es importante resaltar también, que la aproximación inducida comprende igualmente una serie de ayudas internalizadas por el aprendiz, en el caso de las calculadoras gráficas él decide cuándo y porqué aplicarlas, se trata de estrategias de aprendizaje que el individuo posee y emplea para aprender, recordar y usar la información Tales planteamientos se abocan a lograr aprendizajes significativos, es decir, que los estudiantes logren aprender de manera autónoma autorregulando sus propias experiencias de aprendizaje.

Es en este contexto, en donde el aprender a aprender implica que los estudiantes puedan reflexionar en la forma en que aprenden, y de esta manera actúen para regular su propio proceso de aprendizaje. aprovechando las ventajas que ofrecen las calculadoras gráficas, cuyos beneficios puedan ser transferidos y adaptados a nuevas situaciones Esto es uno de los objetivos de la educación de hoy, que cada vez demanda del uso de más y mejor tecnología.

CAPÍTULO TERCERO

MARCO METODOLOGICO

1. Tipo de Investigación

La metodología es el camino que hay que recorrer para llegar a donde nos proponemos arribar en la investigación. Aclarado lo anterior, estableceremos el diseño de investigación para el presente estudio, el cual cae dentro del diseño explicativo cuasi-experimental.

Ello es así, debido que "se involucra la manipulación intencional de una acción para analizar sus efectos" (Hernández Sampiere.et.al, 1991, p.109). Específicamente, el estudio incluye la manipulación de una variable independiente, la que se refiere a la utilización de un recurso didáctico digital (calculadora gráfica), que es a la vez la supuesta causa, para luego analizar las consecuencias de una manipulación sobre la variable dependiente, o sea los efectos conseguidos en el rendimiento académicos de los estudiantes hacia la asignatura denominada Cálculo Diferencial e Integral.

1. Hipótesis

Nula

H_0 : No existe diferencia significativa entre las medias y del grupo

Control y el Experimental.

Alternas

H_1 : Los valores medios del grupo control y experimental no son

Iguales.

H_2 : El valor de la media del grupo control es menor o mayor que el

Alternas

H_1 : Los valores medios del grupo control y experimental no son iguales

H_2 : El valor de la media del grupo control es menor o mayor que el valor de la media del grupo experimental

3. Variables

3.1. Variable Independiente

La calculadora gráfica

3.2. Variable Dependiente

Rendimiento académico

4. Población y muestra.

La investigación se llevó a cabo en Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Panamá La Facultad tiene 4 grupos diurnos de Licenciatura de los cuales se tomaron dos grupos de manera aleatoria para constituir la muestra de la población bajo estudio Para el efecto del procedimiento, el grupo 1 será el grupo control (gc) y el E-2 el grupo experimental (ge), ambos grupos equiparables en cuando a la edad y género sexual de sus integrantes, se estructuró con un tamaño de 24 miembros cada uno, (n=24)

5. Técnicas e instrumentos de investigación

Para obtener datos adicionales que interesaban al estudio, se utilizaron técnicas de consulta teórica e investigación en el aula.

Se consultó libros, revistas tesis, Internet y otras fuentes como guía para describir la situación objeto de estudio. A esta información se le conoce como datos secundarios; es decir, aquellos que ya existen y que han sido publicados con propositos tal vez distintos a las necesidades específicas de esta investigación. La disponibilidad de información fue fundamental sobre todo, para documentarnos con relación a las calculadoras gráficas.

También se realizaron actividades prácticas en el aula de clases para reunir la información de tipo primaria. En este aspecto la comunicacion personal nos llevó a obtener información valiosa para nuestro estudio.

5.1. Instrumentos

Los instrumentos que utilizaron para recolectar la información fueron la encuesta, las pruebas diagnósticas y cognoscitivas a los estudiantes.

La encuesta se utilizó para capturar información proveniente de los estudiantes; fue estructurada de tal forma que contenía preguntas suplementarias relativas a los temas relacionados con la tecnológica educativa, calculadora gráfica y su rendimiento académico. Este instrumento fue utilizado para fundamentar la propuesta.

La prueba diagnóstica permitió conocer el nivel de conocimientos previos que poesía el estudiante sobre los temas del curso. La misma se elaboró con 25 ítems de selección múltiple en los que se evaluaba conceptos fundamentales del Cálculo como lo son: conjunto de números reales, factorización, dominio y rango de funciones, gráficas de funciones y otros aspectos importantes para la investigación.

Las Prueba cognoscitivas constituyeron el instrumento sumativo que se utilizó para evaluar los aprendizajes logrados durante el semestre, en el curso de Cálculo Diferencial e Integral. El grupo experimental usó en la post – prueba calculadoras gráficas, como también en las prácticas tanto en el salón de clases, como en sus hogares. (Ver Anexo)

6. Procedimiento

El procedimiento que se utilizó para el desarrollo de la investigación fue el siguiente:

- Se llevó a cabo una investigación preliminar para recopilar la información referente al uso de calculadoras gráficas en las clases de matemática y así contar con un panorama más amplio del tema tratado.
- Se procedió a la revisión y análisis de las fuentes bibliográficas disponibles, para preparar y seleccionar la información relacionada con las calculadoras gráficas.
- Se diseñó el cuestionario complementario para realizar las encuestas a los estudiantes.
- Se les explicó detalladamente a los estudiantes sobre la investigación a realizarse, los cuales estuvieron anuentes a participar en la misma.
- El experimento comienza con la aplicación de una pre-prueba, a ambos grupos y se explica el propósito de la misma, el cual consiste en detectar el

rendimiento académico hasta ese momento en un área específica de la matemática

- La pre-prueba y la post-prueba. Ambas pruebas fueron confeccionadas atendiendo acuciosamente al material que de imparte en ese nivel académico Para cumplir con el requisito de validez y confiabilidad de las mismas, se solicito la opinión de expertos en la materia, que gustosamente ofrecieron su aporte a afin de mejorar su contenido. Cumplida esta fase se procedió a su aplicación
- Posteriormente se le entregó a cada estudiante del grupo experimental (Ge) el plan de enseñanza y se les explicó las instrucciones a seguir de cómo y cuándo utilizar la calculadora gráfica. El grupo control (Gc) trabajó paralelamente, a través de clases tradicionales.
- Los estudiantes del grupo experimental que tenían calculadoras gráficas, hicieron sus prácticas y la post – prueba con la ayuda de la calculadora gráfica.
- Cabe señalar que algunas pruebas fueron efectuadas en grupos, ya que no todos los estudiantes del grupo experimental tenían calculadoras gráficas.
- Después de cuatro sesiones de clases con sus respectivas prácticas, se aplicó una pos-prueba a ambos grupos; luego se tabulan los resultados en un cuadro y se hizó el correspondiente análisis estadístico para determinar como fueron los resultados, con respecto al uso de la calculadorá gráfica.

- Por último se aplicó una encuesta suplementaria los estudiantes del grupo experimental, con el fin de conocer sus experiencias al trabajar con las calculadoras gráficas.
- El esquema o paradigma procedimental del experimento llevado a cabo fue el siguiente:

$$\begin{array}{lllllll} RG_1 & \longrightarrow & O_1 & \longrightarrow & & \longrightarrow & O_3 \\ RG_2 & \longrightarrow & O_2 & \longrightarrow & X_T & \longrightarrow & O_4 \end{array}$$

Explicación de los símbolos:

R: asignación aleatoria

G_1: grupo control

G_2 : grupo experimental

X_T: tratamiento a base del uso de la calculadora gráfica.

O_1 ; O_2 : prueba diagnostica o pre-prueba (similares)

O_3 ; O_4 : post-prueba (similares)

Los resultados del experimento, y de la encuesta se plasmaron en los cuadros estadísticos que se presentan en el Capitulo Cuarto, e incluyen los resultados obtenidos en la pre y pos-prueba, tanto del grupo control, como del grupo experimental. También aparecen los rangos de menor a mayor de los resultados de las pruebas de ambos grupos y la aplicación de un modelo estadístico para contraste de medias.

CAPÍTULO CUARTO

ANÁLISIS EN INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

1. Presentación y Análisis de Resultados

En esta parte de la investigación, presentamos los resultados como producto de la aplicación de las pruebas. Los mismos estan en forma de cuadros y graficas con totales y porcentajes.

En este punto se lleva a cabo la presentación de resultados de la post – prueba Las variables que se han considerado en este estudio las presentamos a continuación en diferentes cuadros, así como su análisis

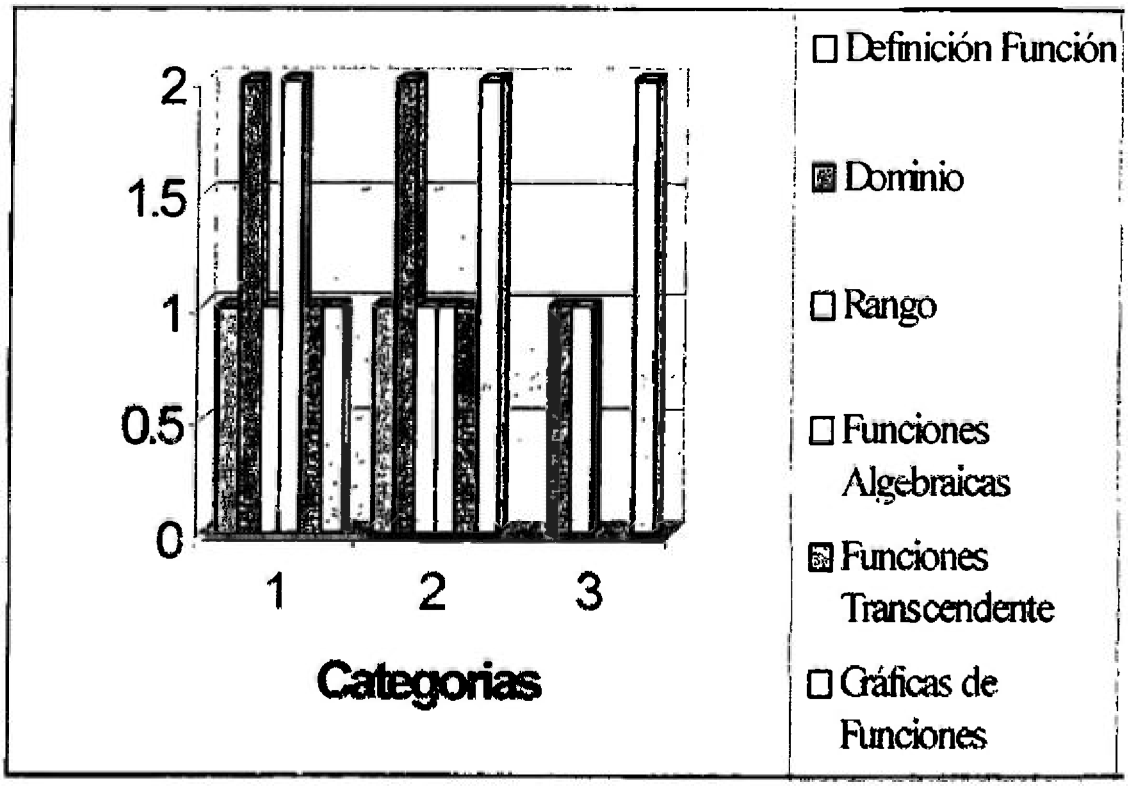
Tabla N° 1
TABLA DE ESPECIFICACIONES
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - FUNCIONES Y GRÁFICAS

Objetivos Contenidos	Categorías			Total de Puntos
	Conocimientos	Compresión	Aplicación	
1 Definición Función	1	1		2
2. Dominio	2	2	1	5
3. Rango	1	1	1	3
4.Funciones Algebraicas	2	1		3
5 Funciones Transcendente	1	1		3
6. Gráficas de Funciones	1	2	2	5
Totales	8	8	4	20

Como se puede ver en la Tabla N°1, tanto la categoria de conocimientos, como la comprensión la evaluación es de ocho (8) puntos y de cuatro puntos en la aplicación para un total general de 20 puntos. Los objetivos contenidos en las pruebas tienen que ver con definición de función, dominio, rango, funciones algebraicas, funciones transcendentes y gráficas de funciones

En la Fig N° 3 presentada a continuación, se puede observar la distribución de las diferentes categorías de las pruebas

Figura N°3.
Distribución de la Tabla de Especificaciones



Fuente: Tabla N° 1.

Tabla N° 2.
PUNTOS OBTENIDO EN LAS PRE – PRUEBAS
GRUPO CONTROL Y GRUPO EXPERIMENTAL

N° DEESTUDIANTES	GRUPO DE CONTROL	GRUPO EXPERIMENTAL
1	54	54
2	38	46
3	**0min.**	38
4	46	46
5	68	8
6	47	85
7	69	**0min.**
8	70	54
9	53	**85máx**
10	69	25
11	38	62
12	46	38
13	71	53
14	46	62
15	48	46
16	80	48
17	39	59
18	62	71
19	**82máx.**	49
20	46	65
21	39	83
22	40	77
23	35	78
24	53	48

FUENTE Encuesta aplicada

Los resultados de la pre – prueba o prueba diagnostica. indican que los dos grupos tienen calificación mínima de cero (0), y máxima de 82 (g c) y 85 (g e) lo que indica que ambos grupos al inicio tenian las mismas posibilidades de alcanzar los objetivos propuestos. Además se observa el número de estudiantes de los dos grupos según los puntos obtenidos Observar ver el Cuadro N°1 presentado en la página siguiente.

Cuadro N° 1. NÚMERO Y PORCENTAJE DE ESTUDIANTES DEL GRUPO CONTROL Y GRUPO EXPERIMENTAL SEGÚN PUNTAJES OBTENIDOS EN LA PRE – PRUEBA

Porcentaje	Grupo de Control Total		Grupo de Experimental Total	
	N°	%	N°	%
	24	100	24	100
0 – 60	17	70 83	16	66.67
61 – 70	5	20 83	5	20 83
71 – 80	1	4 17	1	4 17
81 - 90	1	4 17	2	8.33
91 – 100	0	0	0	0

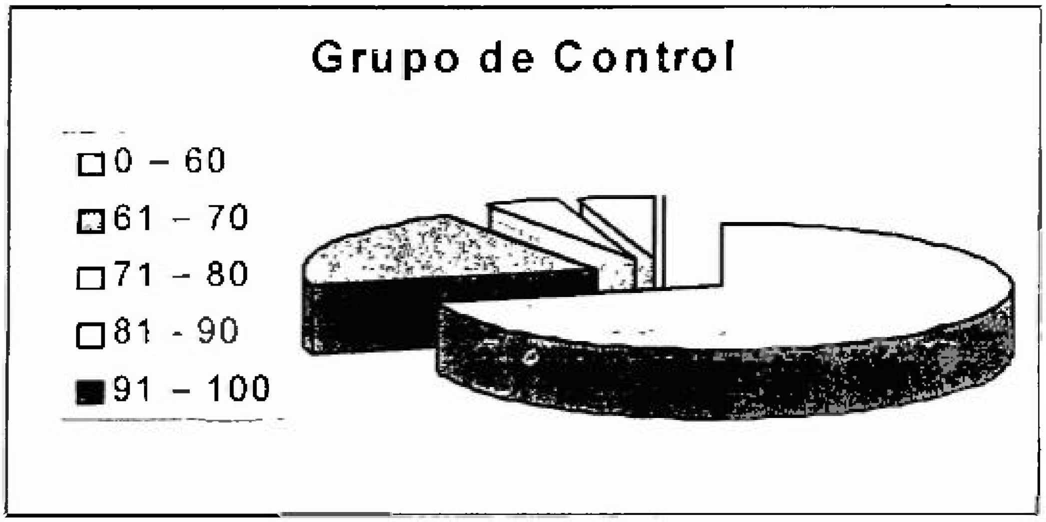
FUENTE: Examen de la preprueba

El cuadro presenta con claridad, que el 70.83% de los estudiantes del grupo control obtuvieron entre cero (0) y sesenta (60) puntos, es decir 17 estudiantes. Del grupo experimental, el 66.67% quedó dentro de este rango

Igualmente, cinco (5) estudiantes de ambos grupos, lo que representa el 20.83% de la muestra obtuvieron entre 61 y 70 puntos Asimismo, ningun grupo obtuvo puntuación por encima de los 90.

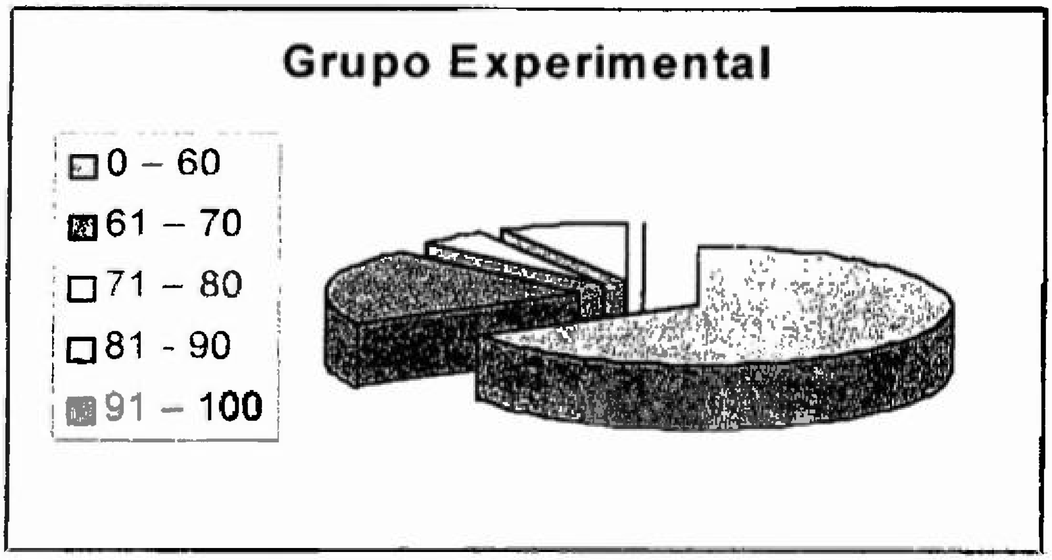
Para que se tenga una mejor visión de los resultados obtenidos con relación a la pre – prueba, observar la Figura N°4 presentada en la siguiente página.

Figura N° 4.
Puntos Obtenidos en la Pre – prueba (Grupo Control)



Fuente Cuadro N° 1

Figura N° 5.
Puntos obtenidos en la pre – prueba (grupo experimental)



Fuente: Cuadro N°1.

Efectuando la comparacion de las medias según los datos, resulto que en el caso de los estudiantes del grupo control, la desviación estándar es mayor(18.55), en comparación al grupo experimental que es de (16.42), lo cual indica que los puntajes del grupo experimental están mejor distribuidos que los del grupo control. Para mayor claridad observar el Cuadro N° 2 presentado a continuación:

Cuadro N° 2. NÚMERO Y PORCENTAJE DE ESTUDIANTES DEL GRUPO EXPERIMENTAL (G. E.) SEGÚN PORCENTAJE OBTENIDO EN LA POST – PRUEBA

PUNTAJE	TOTAL	
T	N°	%
Total	24	100
33 - 6 0	6	25
61 – 70	3	12 50
71 – 80	5	20.83
81 – 90	6	25 00
91 - 100	4	16.67

FUENTE Examen de post prueba

Los datos del Cuadro N° 2 indican que seis (6) de 24 estudiantes, es decir, el 25% obtuvieron entre treinta y tres (33) y 60 puntos; ocho (8) estudiantes marcaron entre sesenta y uno (61) y ochenta (80), o sea el 43.335 y diez (109 estudiantes obtuvieron entre ochenta y uno (81) y cien(100) puntos, 0 sea, el 41.67%.

A continuación se presenta la gráfica correspondiente al Cuadro N° 2.

Cuadro N° 3. NÚMERO Y PORCENTAJE DE ESTUDIANTES DEL GRUPO CONTROL (G. C.) SEGÚN PUNTAJE OBTENIDO EN LA POST – PRUEBA

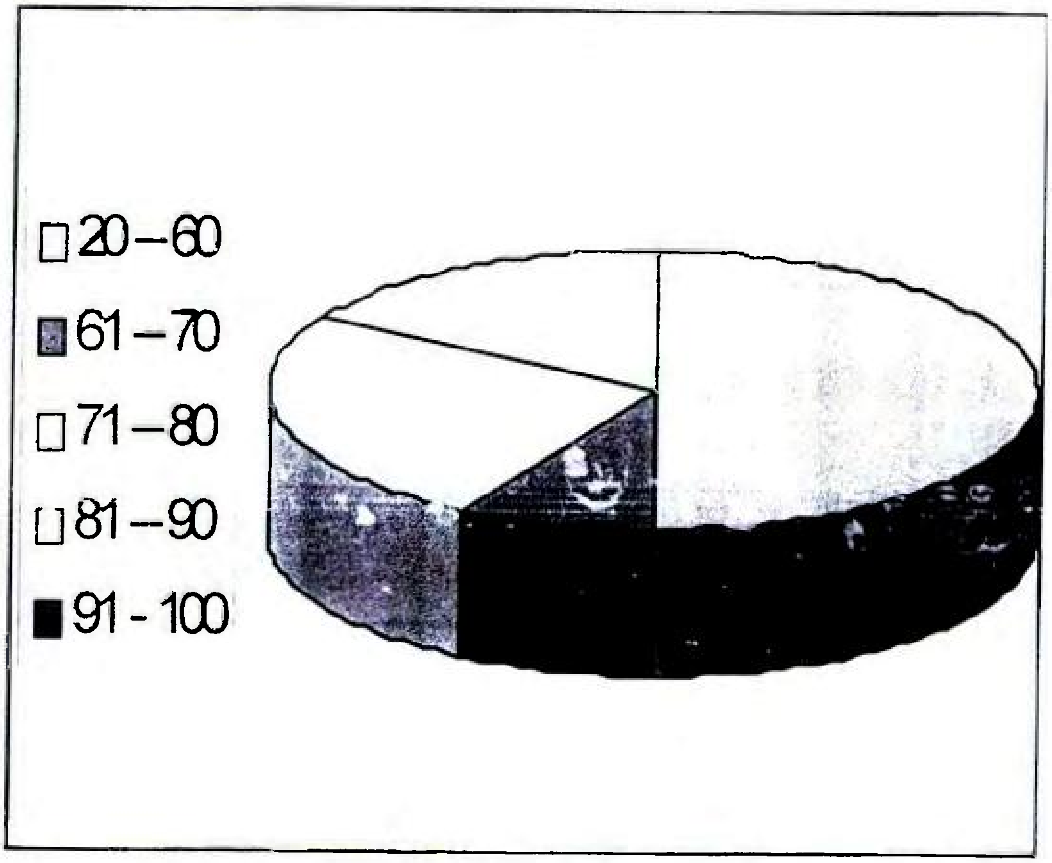
PUNTAJE	TOTAL	
	N°	%
20 - 60	12	50
61 - 70	2	8.30
71 - 80	6	25.0
81 - 90	4	16.70
91 - 100	0	0
Total	24	100

FUENTE: Examen de post prueba

Según el Cuadro N° 3 el cincuenta por ciento (50) de los estudiantes del grupo control obtuvieron puntuaciones entre 20 y 60; asimismo, doce (12) estudiantes (51%) se mantuvieron en el rango de entre 61 y 91 puntos. Ningún estudiante llegó a obtener entre 91 y 100 puntos.

Para mayor claridad e interpretación de los resultados resumidos en el Cuadro N° 3 a continuación presentamos la gráfica representativa de los datos correspondientes.

Figura N° 7.
Puntos obtenidos en la post – prueba
grupo control



Fuente: Cuadro N° 3

Cuadro N° 4 NÚMERO Y PORCENTAJE DE ESTUDIANTES DEL GRUPO CONTROL (G. C.) Y DEL GRUPO EXPERIMENTAL (G. E), SEGÚN APROBADOS O REPROBADOS.

Estudiantes Grupo Control, Grupo Exp.	Total		Aprobado		Reprobado	
	N°	%	N°	%	N°	%
G. Control (G.C)	24	50	10	20.83	14	29 17
G Exp. (G.E.)	24	50	15	31.25	9	18 75
Total	**48**	**100**	**25**	**52.08**	**23**	**47.92**

FUENTE: Encuesta aplicada

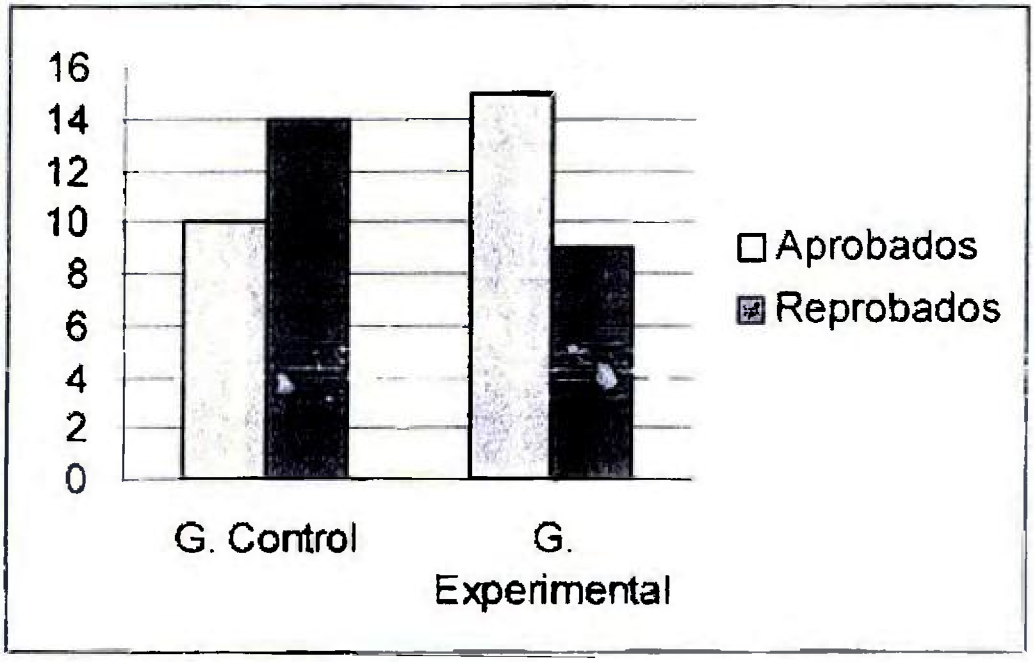
El Cuadro N° 4 se refiere al número y porcentaje de los estudiantes aprobados y reprobados del grupo control (gc) y el grupo experimental(ge), según si resultan aprobados o reprobados.

Con respecto al grupo control se observa que 10 estudiantes aprobaron la prueba lo que significa un 41.67 % del grupo control y un 20.83% del total de alumnos Un total de 14 reprobaron, lo que significa un 58.33% del grupo control y un 29.17% del total de estudiantes

Mientras que de los 24 estudiantes del grupo experimental aprobaron 15, que equivale a un 62.5% del grupo experimental y un 31.25% del total de estudiantes y reprobaron 9 que equivale a un 37.5 % del grupo experimental y un 18.75% del total de estudiantes.

En conclusión podemos decir, que del grupo control reprobaron más estudiantes que los del grupo experimental. Además, comparando las dos razones puede decirse, que los estudiantes del grupo experimental resultaron mas favorecidos que los del grupo control. Los datos del Cuadro N° 4 , son resumidos en la siguiente gráfica.

Figura N° 8
Porcentaje de estudiantes aprobados y reprobados grupo control y grupo experimental



Fuente: Cuadro N° 4

2. La "t" de Student. Generalidades

La " t" de student es una prueba estadística que se utiliza para determinar si dos grupos difieren entre sí significativamente, respecto a sus valores medios (medias) Plantea básicamente dos o tres hipotesis, en la que las hipótesis nula (H_0) supone que no hay diferencias significativas entre ambas medias Las hipótesis alternas. o de investigación propone que los grupos difieren significativamente entre sí, e incluso, una media es mayor, o menor que la otra

Este modelo estadístico se ajusta para casos en que existen dos variables, siendo una la independiente, y la otra la dependiente, dentro de un esquema experimental.

Para saber si el valor " t " es significativo, se aplica la fórmula siguiente:

$$\left[t = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\frac{S_1 2}{N_1} + \frac{S_2 2}{N_2}}} \right]$$

Luego se calculan los grados de libertad. Cabe indicar que este mayor número de grados de libertad, la distribución " t" de Student se acerca más a una distribución normal

Una vez calculado el valor " t" y los grados de libertad ($Ge = N_1 + N_2 - 2$), se elige el nivel de significancia y se compara el valor obtenido contra el valor que le correspondería en la tabla (Valor critico) de valores " t", si nuestro valor calculado es igual o mayor al que aparece en la tabla, se acepta la hipótesis de investigación, y se rechaza la hipótesis nula.

En la tabla se busca el valor con el cual vamos a comprar el que hemos calculado, basándonos en el nivel de confianza o nivel alfa (α i 0.05 ó 0.01) y los grados de libertad. Fundamentalmente tomamos la decisión al comparar valores calculados contra valor crítico.

3. Contraste de Medias

Modelo estadístico "T" de student para datos no correlacionados

Coeficiente de correlación r - 0.10

DATOS

CASOS	GRUPO CONTROL	GRUPO EXPERIMENTAL
1	45	65
2	40	76
3	25	81
4	20	83
5	61	81
6	55	82
7	59	62
8	88	71
9	35	79
10	82	70
11	50	69
12	75	50
13	60	33
14	70	56
15	57	54
16	75	96
17	81	64
18	51	86
19	73	53
20	55	89
21	87	78
22	80	95
23	71	95
24	56	58
SUMATORIA X	$\sum X_1 = 1451$	$\sum X_2 = 1726$
MEDIA $\overline{X}$	$\overline{X}_1 = 60.46$	$\overline{x}_2 = 71.92$
DESV STD S	$S_1 = 18.66$	$S_2 = 16.11$
VARIANZA S^2	$S_1^2 = 348.08$	$S_2^2 = 259.64$

$\Omega X_1 X_2 = -0.10$

4. Comprobación de las hipótesis

H₀ : $X_1 = X_2$ (no existen deferencias significativas entre ambas medias).

H_1 : $X_1 \neq X_2$ (los valores medios no son iguales)

H_2 : $X_1 < X_2$ (El valor de la media 1 es menor que ei valor de la media 2).

Unificación o ponderación de varianzas

Formula : $S^2p = \dfrac{(m_1 - 1)S_1^2 + (m_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

$$S^2p = \frac{(24-1)348.08 + (24-1)259.64}{24+24-2}$$

$$S^2p = \frac{8005.84 + 5971.72}{46} = 147.23$$

Aplicación de la "t" de Student

Formula : $t = \dfrac{(X_1 - X_2) - (M_1 - M_2)0}{\sqrt{\dfrac{Sp^2}{m_1} + \dfrac{Sp^2}{m^2}}}$

$$t = \frac{60.46 - 71.92}{\sqrt{\dfrac{147.23}{24} + \dfrac{147.23}{24}}}$$

$$t = \frac{-11.46}{\sqrt{6.1346 + 6.1346}} = \frac{-11.46}{\sqrt{12.27}}$$

$t = \dfrac{-11.46}{3.50} = -3.27$ valor calculado

Regla de Decisión:

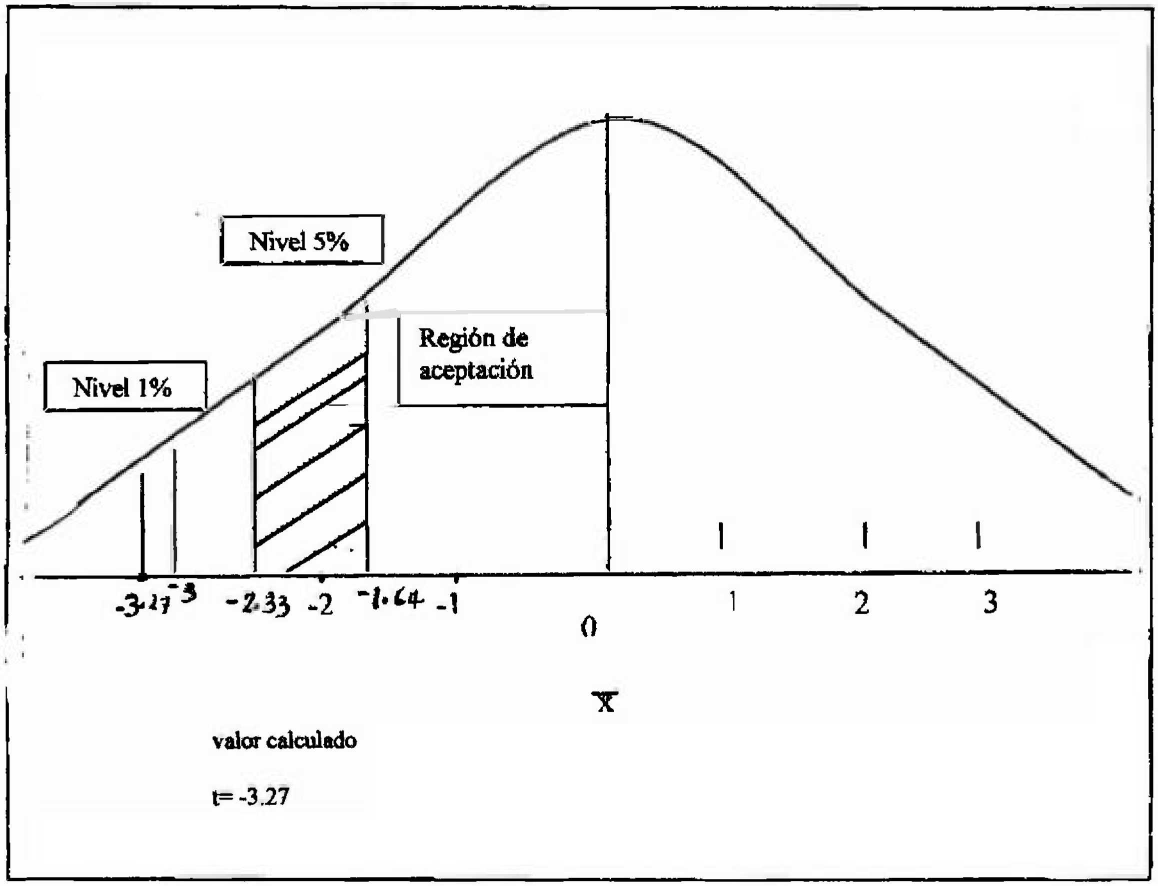
Sea α (nivel alfa) = 0.05, los valores críticos de t ±, con $m_1 + m_2 - 2$ grados de libertad (46 gl) es = 2 00

En vista de que el valor calculado es 3 27 y es mayor que 2 00 se rechaza la hipótesis nula H_0, y se acepta la hipótesis alterna H_1 que indica que los valores medios no son iguales en ambos grupos Igualmente se acepta la hipótesis H_2 que señala que el valor medio del primer grupo (control), es menor que el de segundo grupo experimental.

Se concluye que el tratamiento experimental tuvo un efecto que no se debe al azar

Figura N° 9

Distribución Normal



Contraste de hipótesis en la **H₂** : $\overline{X_1} < \overline{X_2}$. Se observa que el valor calculado de la t= -3.27 Sobrepasa los límites de rechazo ampliamente y rechaza H_0 para aceptar tanto en los niveles 5% y 1 % la hipótesis alterna $\mathbf{H_2}$.

5. Discusión de Resultados

5.1. Conclusiones

1. La investigación proporcionó resultados promisorios, en cuanto a la potencialidad de las calculadoras gráficas como un medio didáctico de apoyo en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral.

2. Otro aspecto interesante, es el que la calculadora gráfica como cualquier herramienta técnica no va a reemplazar al profesor, sino que le va a brindar un apoyo didáctico innovador como apoyo en el desarrollo de las clases de una manera diferente y dinámica.

3. Los resultados que se obtuvieron mediante la investigación realizada en la Facultad de Ingeniería Eléctrica también muestran, que los estudiantes pueden ser activados y que el rendimiento académico de los mismos puede mejorar en la clase de matemática, al introducir el apoyo didáctico de la calculadora gráfica en los temas que permita su aplicación. Esto es importante, ya que se debe erradicar el tabú de la dificultad y la complejidad del aprendizaje de la matemática; percepción que se obtiene cuando el estudiante menciona frases como **"matemáticas está dura"**. Es esencial para el profesor, hacer que la materia sea atractiva, ya que esto permite aminorar ese temor constante que el estudiante le tiene a la signatura.

4. Por otro lado observamos, que los programas actuales del sistema educativo panameño, no contemplan la utilización de herramientas como la calculadora gráfica, lo cual es fundamental para hacer más eficiente y efectivo el proceso enseñanza – aprendizaje.

5. Es importante señalar que esta investigación, proporcionó resultados donde se demuestra que el trabajo con las calculadoras gráficas propicia que los estudiantes desarrollen destrezas y habilidades que le permiten usar el código algebraico como

recurso para resolver problemas y efectuar gráficas representativas de manera secuencial. Además, los estudiantes que recibieron la clase de matemática asistida por la CALCULADORA GRÁFICA obtuvieron resultados más satisfactorios que los que únicamente recibieron la clase por el método tradicional.

6. Esta investigación también demostró que la enseñanza asistencial o con ayuda de recursos tecnológicos, como el caso de la calculadora gráfica es adecuada, siempre y cuando se haga de manera adecuada y planificada, lo cual es beneficioso tanto para el estudiante como para el docente.

5.2. Recomendaciones

1. Introducir la calculadora gráfica en la enseñanza de la matemática, ya que es un elemento motivador e innovador para nuestros estudiantes.
2. Usar la calculadora gráfica en la enseñanza de la matemática como un instrumento de enlace entre la matemática y las situaciones del mundo real.
3. Que en los programas de matemáticas de la Universidad Tecnológica de Panamá se plasme el uso de las ayudas didácticas y técnicas como lo son las calculadoras gráficas, las computadoras y otros instrumentos de la tecnología educativa en la enseñanza de la matemática.
4. Capacitar a los docentes de matemáticas en el uso de las calculadoras gráficas.
5. La creación de un laboratorio equipado con ayudas técnicas y didácticas, como por ejemplo con calculadoras gráficas, computadoras, etc
6. Realizar simposios y debates con los profesores de matemática sobre las ventajas de tener un instrumento de apoyo cono lo son las calculadoras gráficas; para así eliminar la idea de que las calculadoras son causas de sustitución del profesor.

7. Involucrar por medio de asignaciones al estudiante en el uso de la calculadora en la clase de matemática, para que estén preparados y anuentes con respecto a las últimas tecnologías; ya que deben enfrentar un mundo cada vez más automatizado.
8. Evitar que los docentes cometan el error de comparar la calculadora con la computadora; ya que son dos instrumentos totalmente diferentes, tanto en estructura como en uso y precio.
9. Que los profesores estén al tanto permanentemente de los programas y adelantos que presentan las calculadoras, para así tener un mejor aprovechamiento de las mismas.
10. Tomar de la tecnología educativa aquellas herramientas que sirven de apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje.
11. Recomendamos que se tenga cuidado a la hora de usar las calculadoras gráficas para enseñar matemática, debido a que siempre existen estudiantes que desvían la atención del tema y se enfocan en otras situaciones. Por ende el profesor primero debe enseñar de manera demostrativa el uso correcto de la calculadora, para la aplicación posterior , ya sea en grupo o individual, según el caso.

CAPÍTULO QUINTO

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

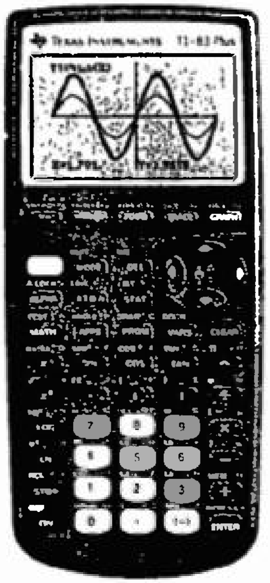
PROPUESTA

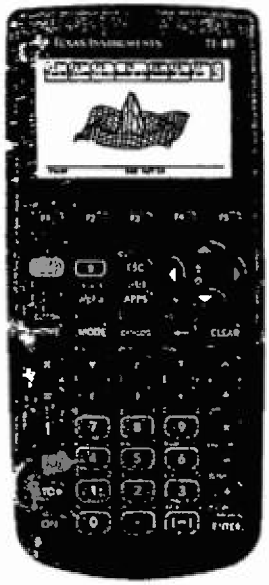
Guía del Usuario
" Calculadora Gráfica"

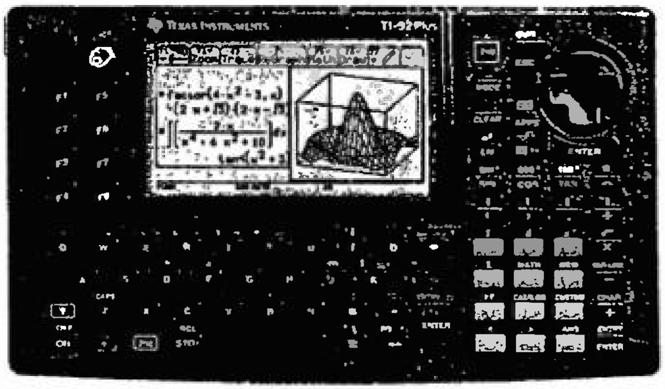
Profesora MARIA DEL C. YOUNG A.

2001, Panamá

SECUNDARIA / UNIVERSIDAD


TI-83 Plus


TI-89


TI-92 Plus

INTRODUCCIÓN

Nuestra propuesta consiste en la elaboración de un manual para el usuario como apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, utilizando las calculadoras gráficas. El uso del manual permitirá al estudiante manejar la calculadora gráfica más eficientemente al proporcionar elementos importantes que se deben tener presente al utilizar una calculadora gráfica.

El manual del usuario se subdividide en unidades para hacer más fácil su comprensión. Además se incluyen diagramas, formatos de diferentes calculadoras, requisitos que se deben cumplir antes de usar una calculadora gráfica, unidades y lecturas complementarias.

OBJETIVOS:

OBJETIVO GENERAL: Suministrar a los docentes y estudiantes de matemática un manual para el uso de la calculadora gráfica.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Reconocer el significado de íconos, modos y teclas de las calculadoras gráficas.
- Realizar operaciones simples.
- Ajustar los datos de un problema a un modelo matemático.
- Graficar funciones.

JUSTIFICACIÓN

Como es sabido la rapidez a que está avanzando la tecnología, se propone el siguiente manual del usuario básico para el uso de la calculadora gráfica.

La calculadora gráfica es una herramienta técnica, que utilizada adecuadamente se convierte en una ayuda didáctica para el Cálculo Diferencial E integral.

Este manual esta elaborado como respuesta a diversas sugerencias de las personas que utilizan esta herramienta; además de la solicitud de un seminario taller. Es por tal motivo que no se ahonda en las formas como hacer todo tipo de operaciones, aunque se pueden realizar, solo se les esta dando los lineamientos necesario para iniciarse en su uso.

BASES DIAGNOSTICAS

Este manual responde a las necesidades detectadas en la investigación, entre las cuales están:

- Que un porcentaje significativo de los estudiantes participantes no tienen conocimientos del uso de las calculadoras gráficas.
- Otros tienen conocimiento regular sobre el uso de las calculadoras gráficas.
- Muchos profesores no utilizan las calculadoras gráficas como recursos didácticos por desconocer su manejo.
- El 55.71% de los estudiantes manifestaron la necesidad de una guía al usuario.
- Además de todos los puntos tratados anteriormente podemos decir que su uso en Cálculo es indispensable, ya que el Cálculo Diferencial aborda problemas de la vida social, física, economía, crecimiento de población, biología, ingeniería y otras ramas, por consiguiente tener una visión moderna del cálculo y complementada por el uso de la tecnología en nuestro caso la calculadora gráfica es necesaria.

ATENCIÓN

Lo que necesitas saber antes de usar tu calculadora gráfica.

1. Si no tiene la pilas instaladas, pídale al vendedor que se las instale y que le enseñe como hacerlo. Además como se reposicionar la calculadora cundo éstas se agotan.
2. Temperatura a que debe mantener la calculadora de O°C a 40°C
3. Capacidad
4. Leer la instrucciones para un mejor uso de la calculadora
5. Revisarla para ver si tiene todo lo que le ofreció el vendedor
6. No preste su calculadora para jugar, ni a personas que no tienen conocimiento del manejo de la misma.
7. Guarde su calculadora en un lugar seguro.
8. La calculadora gráfica es un medio tecnológico, úsalo y no permitas que este te convierta en un robot.

- Ayudar de manera sencilla y clara a tener acceso a utilizar esta herramienta tecnológica
- Saber elegir el modo adecuado en x operación
- Identificar las funciones de las teclas.
- Conocer el potencial que brinda este apoyo didáctico

GENERALIDADES

Importancia de la calculadora gráfica en Matemáticas

Uso de la tecnologia en Cálculo Diferencial e Integral

Como es sabdio la rapidez a que está avanzando la tecnologia de las calculadoras, creemos que no es apropiado relacionar la tesis con determinada calculadora. Por el contrario, hemos empleado tecnología genérica para presentar aquellas cáracterísticas compartidas por casi todas las calculadoras graficadoras. Además, se emplean sólo aquellas características de la tecnología que ayudan claramente en la comprensión de los conceptos de Cálculo.

No consideramos que la calculadora graficadora sea una herramienta adherida artificialmente al curso de Cálculo, ni que un curso de Cálculo deba ser un curso sobre cómo emplear la calculadora gráfica, sino que la cual gráfica puede y debe presentarse como parte natural de un desarrollo coherente al Cáclulo. En nuestra clase la Calculadora Gráfica sólo se emplea cuando es apropiado. Ya que es necesario que el estudiante tenga primero el dominio de la parte conceptual del Cálculo, para no convertir a los estudiante en meros pulsadores de botones o teclas.

Por consiguiente hacemos de la tecnología (Calculadora Gráfica) un apoyo para la comprensión al igual que mostrar los errores que pueden derivarse de una confianza excesiva en la calculadora Gráfica. Se emplea la calculadora grafica de modo que los estudiantes puedan enfocarse en la dificualtad y algunas veces en las conexiones sutiles entre los diferentes conceptos del cálculo

Un estudiante que domina estas conexiones será un usuario de la calculadora gráfica mucho más efectivo del cálculo, que un estudiante que sólo se desempeñe bien en métodos algebráicos

Los estudiantes que son enseñados empleando diferentes enfoques, mejoraran su comprensión y capacidad de abordar por si mismo nuevos problemas.

En las prácticas para desarrollar en el salón de clases o en casa, no le indicamos cuales pueden o no utilizar la calculadora gráfica; ya que deseamos observar su capacidad de toma de decisiones al usar esta tecnología.

En los indicadores suministrados le sugerimos el uso apropiado de la calculadora Gráfica.

Calculadoras Graficadoras y Sistemas Algebráicos.

Las relaciones entre las funciones y sus gráficos es uno de los temas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral

Las calculadoras gráficas al igual que el software permiten explorar estas relaciones para diferentes funciones de una mejor manera de la que se lograría tan solo con lápiz y papel.

Recordemos que la gráfica de las funciones lineales son lineas rectas y para la función cuadrática es una parábola

Nuestro interes es motivarle a se utilice otros gráficos de funciones polinomiales

Por ejemplo

<u>Generación de una gráfica en calculadora.</u>

Para trazar $f(x) = 3x^2-1$

Solución:

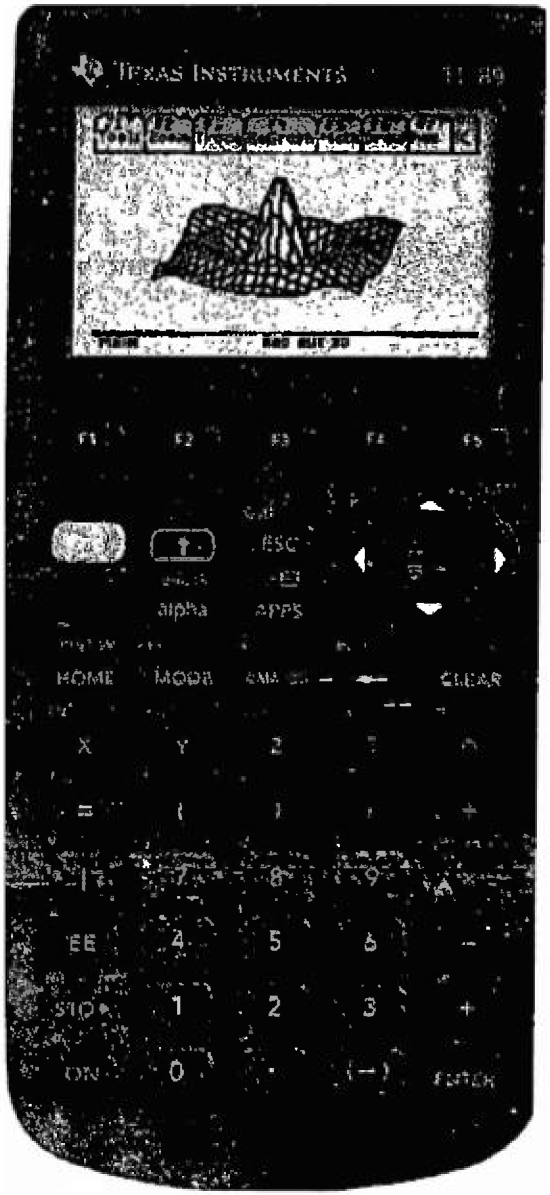
Primero se obtiene una gráfica

ATENCIÓN

LO QUE DEBES SABER ANTES DE USAR TU CALCULADORA

(SI NO TIENE INSTALADAS LAS PILAS)

1. Pidale al vendedor que le instale las pilas y reposiciones las calculadora
2. Que tipo de pila utiliza – lea el menual del usuario antes de cambiar las pilas
3. A que temperatura debe montarla (0°C a 4 0°C)
4. Capacidad de programa
5. Garantía por qué tiempo
6. Cuantos mandos posee
7. Exija un manual del usuario
8. Lea su manual
9. No preste ni juegue con su calculadora gráfica, es muy delicada a los golpes y al calor


TEXAS INSTRUMENTS
F1
F2
F3
F4
F5
ESC
alpha
APPS
HOME
MODE
CLEAR
EE
STO▸
ON

UNIDAD 1

CONOZCA LA PARTE FÍSICA O FACHADA DE SU CALCULADORA.

1. Usando el menú principal.

El menú principal aparace sobre la presentación siempre que se activa la alimentación de la unidad Contiene una variedad de iconos que le permiten seleccionar el modo (área de trabajo) para el tipo de operación que desea realizar También puede hacer que el menú principal aparezca en cualquier momento presionando MENU

A continuación se explica el significado de cada icono

ICONO	SIGNIFICADO
RUN	Utilice este modo para los calculos con funciones y cálculos aritméticos.
STAT	Utilice este modo para realizar cálculos estadisticos con una sola variable (desviación estándar) y con dos variables (regresión), y para delinear graficos estadísticos.
LIST	Utilice este modo para almacenar y editar datos numéricos
GRAPH	Utilice este modo para almacenar funciones gráficas y para dibujar gráficos usando las funciones.
TABLE	Utilice este modo para almacenar funciones, para generar una tabla numérica de soluciones diferentes como los valores asignados a variables dentro de un cambio de función, y para delinear gráficos.
PRGM	Utilice este modo para almacenar programas dentro del área de programa y para ajecutar programas
LINK	Utilice este modo para ajustar el contraste de la presentación
MEM	Utilice este modo para comprobar la cantidad de memoria que se usa y la que queda sin usar, para borrar los datos de la memoria y para inicializar (presionar) la calculadora.

- **Para ingresar un modo**

Ejemplo: Ingresar el modo **RUN** desde el menú principal.

1. Para visualizar el menú principal presiones **MENU**

2. Utilice las teclas para mover la parte destacada al icono **RUN**

4. Selección de modos

- **Usando la pantalla de ajustes básicos**

Lo primero que aparece cuando se ingresa un modo es la pantalla de ajustes básicos del modo, que muestra la condición actual de los ajustes para dicho modo. El procedimiento siguiente muestra cómo cambiar un ajuste básico.

- **Para cambiar un ajuste básico de modo**

1. Seleccione el icono que desea y presione **EXE** para ingresar un modo y visualizar su pantalla inicial.

Aquí ingresaremos el modo **RUN**

2. Presione **SHIFT SETUP** para visualizar la pantalla de ajuste básicos.

- Esta pantalla de ajustes básicos es solamente un ejemplo posible. Los contenidos de una pantalla de ajsutes básicos actuales difieren de acuerdo al modo en que se encuentra la calculadora y a los ajustes actuales del modo.

3. Utilice las teclas de cursor para mover la parte destacada brillante al ítem cuyo ajuste desea cambiar.

4. Presione la tecla de función F1 a F4 que está marcada con el ajuste que desea realizar.

5. Luego de que termina de realizar cualquier cambio que desee, presione QUIT para retornar a la patanlla inicial.

- **Menús de teclas de funciónes en la presentación de ajustes básicos.**

Esta sección detalla los ajustes que puede realizar usando las teclas en la presentación de ajustes básicos.

- **Tipo de funciones gráficas (F –Type)**

  F1 (y=) ....Gráficos con coordenadas rectangulares

  F2 (Parm) ...... Gráficos con coordenadas paramétricas.

  ▷

  F1 (Y>) .... Gráfico de desigualdad

  Y > f(x)

  F2 (Y<) .... Gráfico de desigualdad

  Y < f(x)

  F3 (Y ≥)...... Gráfico de desigualdad

  Y ≥ f(x)

  F4 (Y ≤) ...... Gráfico de desigualdad

  Y ≤ f(x)

  Presiones ▷ para retornar al menú previo.

- El ajuste que se realiza para F-T y para determina el nombre de la variable que se ingresa al presionarse X ʃ.

- **Tipo de delineado gráfico (D-Type)**

  F1 (Com) ...... Conexión de puntos trazados en un gráfico.

  F2 (plot) .... Marcación de puntos en un gráfico sin conexión.

5. Presentación

- **Acerca de la pantalla de presentación**

Esta calculadora utiliza dos tipos de presentación: una presentación de texto y una presentación de gráficos. La presentación de texto puede visualizar 13 columnas y seis lineas de caracteres, con la linea de la parte inferior usada para el menú de teclas de funciones, mientras la presentación de gráficos utiliza un área que mide 79 puntos (ancho) x 47 puntos (altura).

- **Acerca de los tipos de ítemes de menú**

Esta calculadora utiliza cierta convenciones para indicar el tipo de resultado que puede esperar cuando presione una tecla de función.

- **Menú siguiente**

  Ejemplo: **LIST**

  Selecionando **LIST** visualiza un menú de funciones de lista.

- **Ingreso de mando**

  Ejemplo: **List**

  Seleccionando **list** ingresa el mando "**List**"

6. AJUSTE DE CONTRASTE

Ajuste el contraste siempre que los objetos sobre la presentacion aparezcan oscuros o dificiles de ver.

- **Para visualizar la pantalla de ajuste de contraste**

  Destaque en brillante el icono **CONT** en el menú principal y luego presione **EXE**.

  Presione la tecla ▷ para hacer que las cifras sobre la patanlla sean más oscuras y la tecla ◁ para hacer que sean más claras.

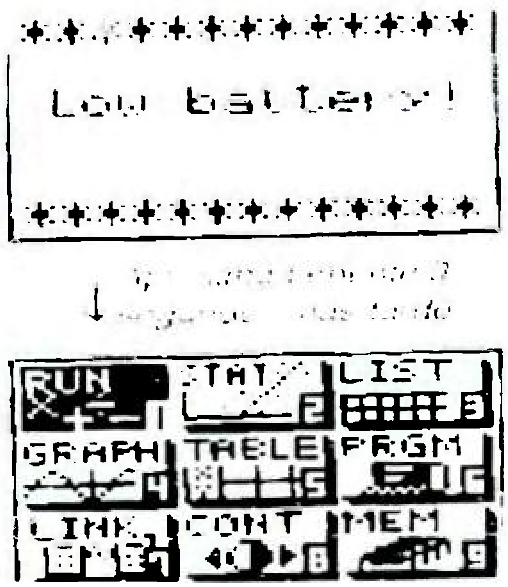
Luego de ajustar el contraste de la manera deseada, presione **MENU** para retornar al menú principal.

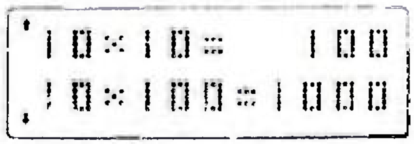
7. **Cuando se encuentra con problemas**

Si se encuentra con problemas cuando intenta llevar a cabo las operaciones, intente probando lo siguiente antes de suponer de que la calculadora tiene algún desperfecto.

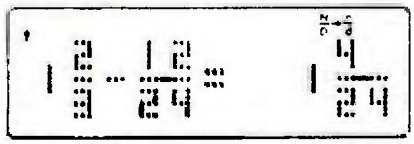
- **Retorne la calculadora a sus ajustes de modo originales.**

1. En el menú principal, seleccione el icono **RUN** y presiones Exe.
2. Presiones **SHIFT SETUP** para visualizar la pantalla de ajustes básicos.
3. Destaque en brillante "Angle" y presione **F2** (Rad).
4. Destaque en brillante " Display" y presione **F3** (Norm) para seleccionar la gama de presentación exponencial (Norm 1 o Norm 2) que desa usar.
5. Ahora ingrese el modo correcto y realice el cálculo de nuevo, monitoreando los resultados sobre la presentación.

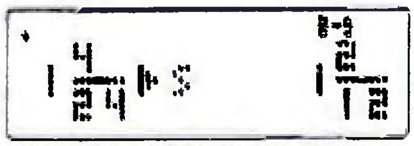


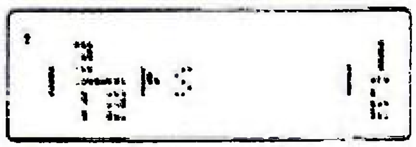


Las fracciones

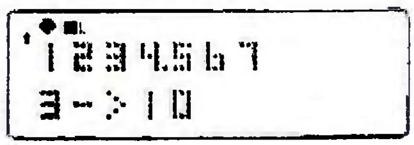


Simplifique fracciones





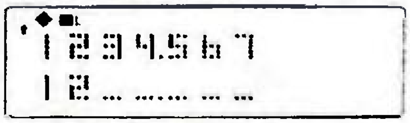
La función de valor

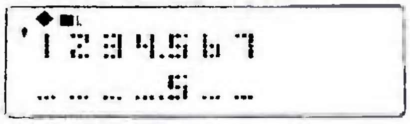


Permiten a la calculadora o al usuario ...

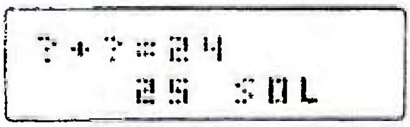
Permiten seleccionar el nivel de dificultad

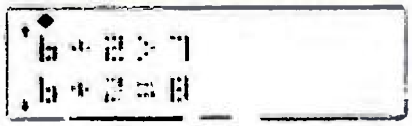
La función de valor



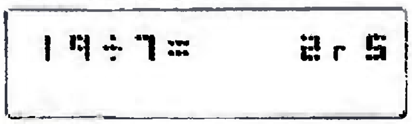


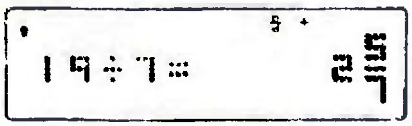
Función de solución de problemas

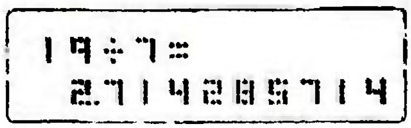




Seleccione el formato







UNIDAD 2

CALCULOS SIMPLES

Los cálculos aritméticos (suma, resta, multiplicación y división) como así tambien los cálculos que relacionan funciones científicas, pueden llevarse a cabo en el modo **RUN.**

1. Suma y resta
2. Multiplicación
3. Division
4. División con resto y cociente
5. Cálculos mixtos
6. Otras funciones de cálculos prácticos
7. Usando las variables
8. Cálculos fraccionarios
9. Seleccionando los modos de presentación de valores
10. Cálculos con funciones científicas

1. Suma y Resta

Ejemplo: 6,72 + 9,08

6 . 7 2 + 9 . 0 8 exe

La operación puede ingresar de la misma manera en que se escribe. Esta capacidad se denomina "lógica algebraica verdadera".

Antes de comenzar un cálculo, asegúrese de presionar AC para borrar la presentación

2. **Multiplicación**

Ejemplo: 3,71 x 4,27

AC 3 7 1 x

4 2 7 Exe

la gama de operación de esta calculadora es –9,99999999x10[99] a 9.99999999x10

3. **División**

Ejemplo: 64 ÷ 4

AC 6 4 ÷ 4 Exe

El uso de los parámetros también es práctico cuando se realiza una división Para los detalles completos en el uso de paréntesis, vea la seccion " Secuencia prioritaria de cálculos con paréntesis"

4. **División con resta y cociente**

Esta calculadora puede producir el cociente y resta de operaciones de división que relacionan dos números enteros Utilice **OPTIN** para visualizar el menú de opciones para el menú de teclas de funciones que se necesita para llevar a cabo la división con resta y cociente

Operación

Para la divisón con resta y cociente utilice el modo **RUN.**

División con cociente < entero > OPTN F2 (CALC) F2 (Int ÷) < entero >

Exe

División con resta < entero > OPTN F2 (CALC) F3 (Rmdr) < entero >

Exe

- **Para realizar una división con cociente**

  Ejemplo: Visualizar el cociente producido por 61 ÷ 7

  Ac 6 1 Optn F2 (Calc)

- Recuerde que en las operaciones de división con cociente solamente se pueden usar números enteros No se pueden usar expresiones tales como √2 o sen60, debido a que los resultados tienen una parte decimal

- **Para realizar una división con resta**

  Ejemplo: Visualizar el resto producido por 857 ÷ 48

  8 5 7 F3 (Rmdr) 4 8 Exe

  Luego de finalizar los cálculos de división con cociente y resta, presiones QUIT para salir del menú de opciones

- Recuerde que en las operaciones de división con cociente solamente se pueden usar números enteros No se pueden usar expresiones tales como √2 o sen60, debido a que los resultados tienen una parte decimal.

- La división con resta y cociente también puede usarse con las listas para dividir multiples números enteros por otros en una sola operación.

5. Cálculos Mixtos

(1) Secuencia prioritara de cálculos aritméticos mixtos.

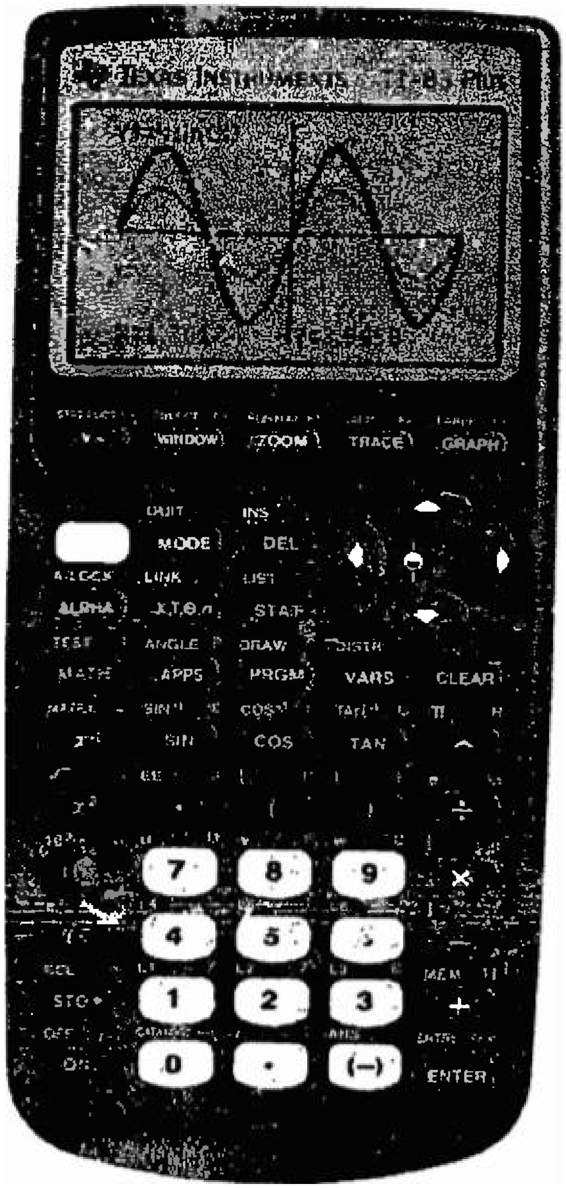
Para los cálculos aritmeticos mixtos, la calculadora realiza automáticamente la multiplicación y division antes de la suma y resta.

Ejemplo 1 **3 + 5 x 6**

AC 3 + 5 x 6 Exe

Ejemplo 2 **7 x 8 – 4 x 5**

AC 7 x 8 – 4 x 5 Exe


TEXAS INSTRUMENTS
WINDOW
ZOOM
TRACE
GRAPH
MODE
DEL
ALPHA
STAT
MATH
APPS
PRGM
VARS
CLEAR
SIN
COS
TAN
7
8
9
4
5
1
2
3
0
(–)
ENTER

UNIDAD 3

CALCULOS CON FUNCIONES CIENTIFICAS

Utilice el modo **RUN** para realizar cálculos que relacionen funciones trigonométricas y otros tipos de funciones científicas

(1) Funciones Trigonométricas

Antes de llevar a cabo cálculos que relacionen funciones trigonométricas, primero debe especificar la unidad fijada por omisión como grados (°), radianes (r), o grados contesimales (g)

- **Ajustando la unidad angular que se fija por omisión.**

  La unidad angular fijada por comisión para los valores ingresados, pueden ajustarse usando la pantalla de ajustes básicos Si ajusta grados (°) por ejemplo, ingresando un valor de 90 es automáticamente supuesto a ser 90° A continuación se muestra 90° = π/radianes = 100 grados centesimales

  - **Para ajustar la unidad angular que se fija por omisión.**

    Ejemplo: cambiar la undiad angular de radianes a grados.

    Shift Set up

  - Una vez que cambia el ajuste de la unidad angular, permanece en efecto hasta que se cambia de nuevo usando la pantalla de ajustes básicos También debe verificar la pantalla de ajustes básicos para averiguar qué unidad angular se encuentra ajustada actualemente

- **Convirtiendo entre undiades angulares**

Para ingresar un valor usando una unidad angular que fijada por omision, puede usar el procedimiento siguiente Entonces al presionar Exe, el valor sera convertido a la unidad angular fijada por omisión

- **Para convertir entre undiades angulares**

  Ejemplo Converitr 4,25 radianes a grados mientras los grados se encuentran ajustados como la unidad angular fijada por omisión.

  AC 4 . 2 5 OPTN ▷

  F2 (ANGL) F2 (r) Exe

- **Cálculos con funciones trigonométricas**

Asegúrese siempre de que la unidad angular fijada por omisión se ajusta a la unidad requerida antes de realizar los cálculos con funciones trigonométricas

- **Para realizar con funciones trigonométricas**

  Ejemplo: Sen (63° 52' 41")

  Unidad angular por omisión. Grados

  SHIFT SET UP ∇Δ f1 (Deg) QUIT

  Sin 6 3 OPTN ▷ F2 (ANGL) ▷ F1 (° ' ") 5 2 F1 (° ' ")4 1 F1 (° ' ")

  EXE Resultado: 0,897859012

(2) Cálculos con funciones logarítmicas y exponenciales

- Un logaritmo de base 10 (logaritmo común) normalmente se escribe como $\log^{10}$ o log

- Un logaritmo de base $e(n \xrightarrow{lim} \infty\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 2.71828$) normalmente se escribe como $\log_e$ o ln

Tenga en cuenta que cierta publicaciones utilizan " log " para referirse a los logaritmos de base l, de modo que debe tener cuidado para observar qué tipo de notación se está usando en las publicaciones con las que esta trabajando. La calculadora y el manual utilizan " log " para base 10 e "ln" para base l

(3) Memoria

- **Signo de multiplicación**

El singo de multiplicación puede omitirse en los casos siguientes

- En frente de las siguientes funciones científicas

  Sen, cos, tan, sen^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1}, log ln 10^x, e^x, , , Pol (x,y), Rec(r, θ), dldx, Seq, Min, Max, Mean, Median, List dim, Sum

  Ejemplos: 2 sen30, 10log1,2,2 $\sqrt{3}$, etc.

- En frente de constantes, nombres de variables, contenidos de la memoria Ans

  Ejemplos 2π, 2AB, 3Ans, 6X, etc

- En frente de apertura de paréntesis

  Ejemplos 3(5 + 6), (A + 1)(B - 1)

- **Como calcular la memoria a usarse**

  Algunas operaciones de tecla toman un byte de memoria cada una, mientras otras toman dos bytes

  Operaciones de 1 byte 1, 2, 3, Sen Cos Tan log, ln, , π, etc

  Operaciones de 2 bytes: dldx (, Xmin , If, for, Return, DrawGraph, SorAt). Sum, etc

- **Borrando los contenidos de la memoria**

- **Para borrar todos los datos dentro de un tipo de datos específico.**

  1. En la pantalla de condición de memoria, utilice las teclas ∇Δ para mover la parte destacada brillante al tipo de datos que desea borrar
  2. Presione F1 (DEL)

     F1 (DEL)
  3. Presione F1 (YES) para borrar los datos o F4 (NO) para cancelar la operación sin borrar nada

- **Menú de datos de variables (VARS)**

  El menú de datos de variables pueden usarse para recuperar los datos listados a continuación.

  - Valores de la ventanilla de visualización
  - Factor de ampliación / reducción.
  - Datos de estadísticas con una sola variable / dos variables.

- Funciones gráficas
- Contenido de tablas y gama de tablas y gráfico

Para recuperar los datos de variables, presiones VARS para visualizar el menu de datos de variables

F1 (V – WIN) Valores de la ventanilla de visualizacion.

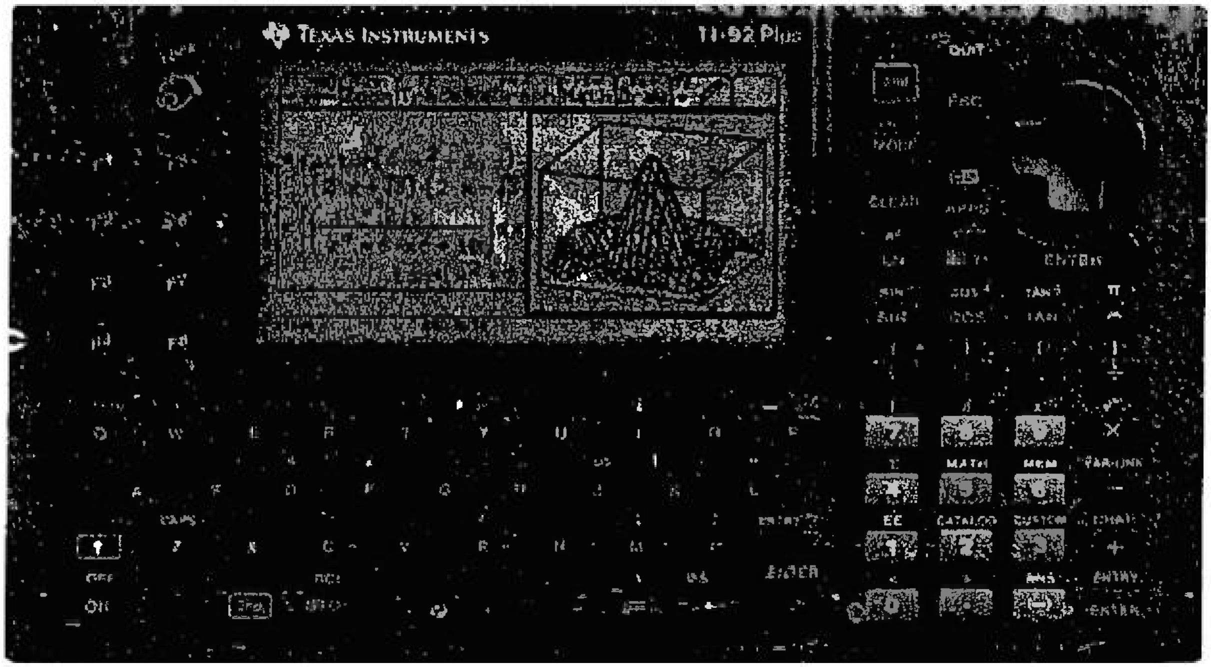
F2 (FACT) Factor de ampliación / reducción de los ejes x e y

F1 (STAT) . . Datos estádisticos con una sola variable / dos variables

F2 (GRPH) Funciones gráficas almacenadas en el modo GRAPH

F3 (TABL) . . . Contenidos de tablas y gama de tablas y gráfico

Presione ⊳ para retornar al menu previo


TEXAS INSTRUMENTS
TI-92 Plus

UNIDAD 4

GRAFICOS

Una selección de herramientas de gráfico versátiles mas una gran presentación de 79 x 47 puntos permite dibujar una variable de gráficos de funciones de manera rápida y fácil Esta calculadora es capaz de dibujar los siguientes tipos de gráficos

- Gráficos de coordenadas rectangualres (Y=)
- Gráficos paramétricos
- Gráficos de desigualdades

- Una selección de mandos de gráficos también permite incorporar los gráficos en los programas

1. Antes de intentar dibujar un gráfico.
2. Ajustes de la ventanilla de visualización (V-Window)
3. Operaciones con funciones gráficas
4. Delineado manual de gráficos
5. Otras funciones

1. Antes de intentar dibujar un gráfico

- **Ingresando el modo de gráfico**

En el menú principal, seleccione el icono **GRAPH** e ingrese el modo **GRAPH**, al hacerlo, sobre la presentación aparecerá el menú de funciones gráficas (G-Func)

Puede usar este menú para almacenar, editar y recuperar funciones y dibujar sus gráficos

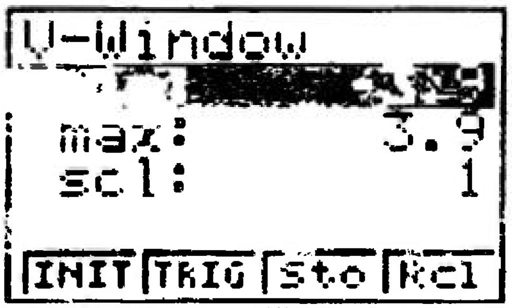
F1 (SEL) Condición de delineado sin delinedo

F2 (DEL) Borrado de gráfico

F4 (DRAW) Dibuja un gráfico

2. **Ajuste de la ventanilla de visualización (V- Window).**

Para especificar la gama de los ejes X e y Y para fijar el espacio entre los incrementos en cada eje, utilice la ventanilla de visualización Siempre debrá ajustar los parámetros de la ventanilla de visualización que desea antes de dibujar un grafico Presiones SHIFT F3 para visualizar la ventanilla de visualización



1. Presione SHIFT F3 para visualizar la ventanilla de visualización.

F1 (INIT). Ajustes iniciales de la ventanilla de visualización

F2 (TRIG) . .. Ajuste iniciales de la ventanilla de visualización usando la undiad angular especificada.

F3 (Sto) .... Almacena los ajustes de la ventanilla de visualización en la memoria de ventanilla de visualziación.

F4 (Rcl) Recupera los ajustes de la ventanilla de visualización desde la memoria de ventanilla de Visualizacion

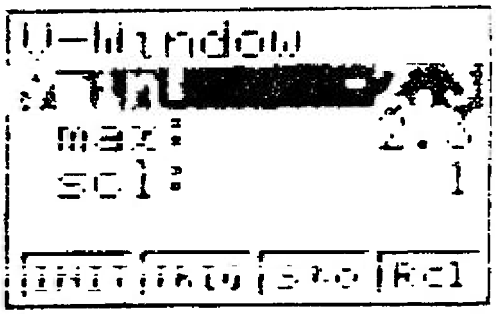
Xmin Valor de eje x minimo

Xmax Valor de eje x maximo

Xscl Espaciado de incrementos del eje x

2 Ingrese un valor para un parametro y presione EXE La calculadora automáticamente selecciona el siguiente parámetro para el ingreso

- También se puede seleccionar un parámetro usando las teclas V y A

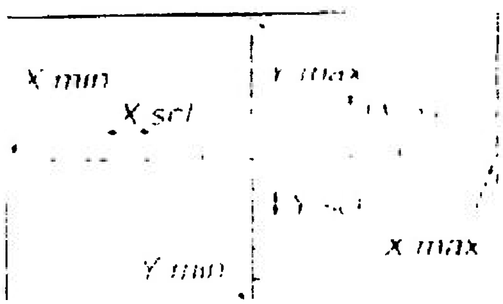


Ymin Valor de eje y mínimo

Ymx Valor de eje y máximo

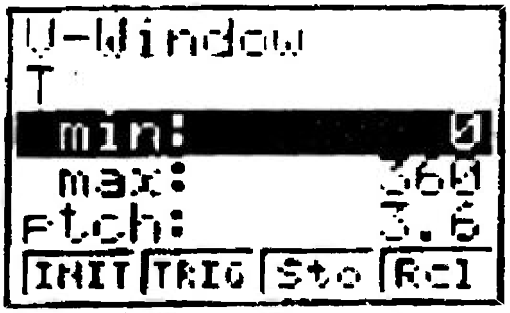
Ysci Espaciado de incrementos del eje y

La ilustración siguiente muestra el significado de cada uno de estos parámetos



3. Ingrese un valor para un parámetro y presione ∇. La calculadora automáticamente selecciona el siguiente parámetro para el ingreso

- Existen realmente nueve parámetros para la ventanilla de visualización. Los tres parametros restantes aparecen sobre la presentación cuando mueve la parte destacada brillante hacia abajo pasando el parámetro de la escala Y, ingresando los valores y presionando ∇.

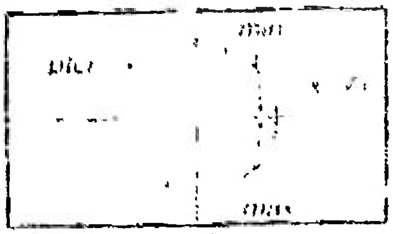


Tmin . . . . Valores mínimos de T

Tmax . .. . Valores máximos de T.

Tptch . .. . Intervalo T

La ilustración siguiente muestra el significado de cada uno de estos parámetros



4. Para salir de la ventanilla de visualización, presiones QUIT

- Presione EXE sin ingresar ningun valor también sale de la ventanilla de presentación.

- La siguiente es la gama de ingreso para los parámetros de la ventanilla de presentación

-9,99E + 97 a 9,999E + 97

- Los parámetros pueden ingresar hasta con 7 digitos Los valores mayores de 10^{6} o menores a 10^{-1}, son convertidos automaticamente a una mantisa de 4 digitos (incluyendo el signo negativo) mas un exponente de 2 digitos

- Las teclas que solamente pueden usarse mientras la ventanilla de visualizacion se encuentra sobre la presentación son 0 a 9, EXP (-), △ , ▽ , ◁ , ▷ , +, - x , ÷ , (,) , SIFT , π , QUIT Tambien se pueden usar (-) o - para ingresar los valores negativos

- El valor existente permanece sin cambiar si se ingresa un valor fuera de la gama permisible o en el caso de un ingreso ilegal (signo negativo sin un valor)

- Ingresando una gama de ventanilla de visualziación de modo que el valor mínimo sea mayor que el valor máximo, ocasiona la inversion del eje

- Se puede ingresar expresiones (tales como 2 π) como parámetro de ventanillas de visualización

- Cuando el ajuste de la ventanilla de visualizacion no permite una ventanilla de visualización de los ejes, la escala para el eje y se indica sobre el borde izquierdo o derecho de la presentación, mientras que para el eje x se indica sobre el borde inferior o superior

- Cuando se cambian los valores de la ventanilla de visualización, la presentación gráfica es borrada y se visualiza solamente los ejes ajustados nuevos

- El ajuste de la ventanilla de visualización puede ocasionar un espaciado de escala irregular

- Ajustando los valores máximos y mínimos que crea una gama muy amplia de la ventanilla de visualización, puede resultar en un gráfico compuesto de líneas discontinuas (debido a que porciones del gráfico salen fuera de la pantalla), o en gráficos que no son precisos
- El punto de desviación algunas veces excede las capacidades de la presentación con los gráficos que cambian drásticamente a medida que se acercan al punto de desviación.
- El ajuste de los valores máximo y mínimo que crea una gama de la ventanilla de visualización muy estrecha pueden resultar en un error (Ma ERROR)

- **Memoria de ventanilla de visualización**

En la memoria de ventanilla de visualización , se puede almacenar un juego de ajustes de ventanillas de visualización, que puede ser recuperda en el momento en que lo necesita.

- **Para registrar los ajustes de la ventanilla de visualización.**

Mientras la pantalla de ajuste de la ventanilla de visualización se encuentra sobre la presentación, presione F3 (Sto) para registrar los ajustes actuales

  - Siempre que se almacenan ajustes de la ventana de visualización, se reemplazan los ajustes previos almacenados en la memoria.

- **Para recuperar los ajustes de la ventanilla de visualización**

Mientras la pantalla de ajuste de la ventanilla de visualización se encuentra sobre la presentación, presione F4 (Rcl) para recuperar los ajustes actuales

- Siempre que se recuperan ajustes de la ventanilla de visualización, los ajustes de la ventanilla de visualización son reemplazados por los ajustes recuperados.
- Los ajustes de la ventanilla de visualización pueden cambiarse en un programa usando la sintaxis siguiente.

  View Window (Valor mín. de X) , (Valor máx. de X), (Valor de escala de X)

  (Valor mín. de Y), (Valor máx. de Y), (Valor de escala de Y)

  (Valor mín. de T), (Valor máx de T), (Valor de intervalo de T)

3. Operaciones con funciones gráficas

En la memoria se pueden almacenar hasta 10 funciones. Las funciones en la memoria pueden editarse, recuperarse y graficarse. Los tipos de funciones que pueden almacenarse en la memoria son: funciones de coordenadas rectangulares, funciones paramétricas y desigualdades.

❑ **Especificación del tipo de gráfico**

Antes de almacenar una función de gráficos en la memoria primero debe especificar el tipo de gráfico

1. Mientras el menú de funciones gráficas se encuentran sobre la presentación, presiones ▹ para

   visualizar un menú de tipo de grafico

   ▹

F1 (Y =) .... Gráfico de coordenadas rectangulares

F2 (Parm) .... Gráfico paramétrico

▷

F1 (Y >) Desigualdad de Y > f(x)

F2 (Y <) Desigualdad de y < f(x)

F3 (Y ≥) Desigualdad de Y ≥ f(x)

F4 (Y ≤) Desigualdad de Y ≤ f(x)

2. Almacenando funciones gráficas

- **Para almacenar una coordenada rectangular (Y =)**

  Ejemplo: Para almacenar la expresión siguiente en el área de memoria Y1:

  $y = 2x^2 - 5$

  ▷ F1 (Y =)

  (Especifica la expresión de coordenada rectangular).

  2 X.T x^2 – 5

  (Ingresa la expresión)

  EXE

  (Almacena al expresion)

  - No podrá ser posible almacenar la expresión en un área que ya contenga una función paramétrica.

    Seleccione otra área para almacenar la expresión o borrar la primera función paramétrica existente. Esto también se aplica cuando se almacenan desigualdades.

- **Editando funciones en la memoria**

- **Para editar una función en la memoria.**

Ejemplo: Cambiar la expresión que hay dentro del area de memoria Y1 desde y

$2x^2$ 5 a $y = 2x^2-3$

▷

(Visualiza el cursor)

▷ ▷ ▷ ▷ **3**

(Cambia los contenidos)

EXE

(Almacena la nueva función gráfica)

- **Para borrar una función**

1. Mientras el menú de funciones gráficas se encuentra sobre la presentación, presione Δ o ∇ para

visualizar el cursor y mover la parte destacada al área que contiene la función que desea borrar

2. Presiones F2 (DEL)

3. Presione F1 (YES) para borrar la función para F4 (NO) para cancelar el procedimiento sin borrar nada

- **Delineado de un gráfico**

Antes de dibujar realmente un gráfico, primero deberá especificar las condiciones de delineado/sin delineado de gráfico.

- **Para especificar la condición de delineado / sin delineado de un gráfico.**

Puede especificar qué funciones fuera de aquellas almacenadas en la memoria deben usarse para una

operación de delineado.

- Los gráficos para los cuales no hay una especificación de condición de delineado sin delineado no son dibujados.

Ejemplo: Seleccionar las funciones siguientes para el delineado:

Y1 : $y = 2x^2 - 5$

Xt2 : x = 3 sen T

Yt2 : y = 3 cos T

Utilice los parámetros de ventanilla de visualización siguientes.

Zmin = -5	Ymin = -5
Xmax = 5	Ymax = 5
Xscl = 1	Yscl = 1

∇ ∇ Δ

(Seleccione un área de memoria que contenga una función para la cual desea especificar sin delineado)

F1 (SEL)

(Especifica sin delineado)

F4 (DRAW) o EXE

(Dibuja gráficos.)

- Presione G-T o AC retorna al menu de funciones gráficas

  - Un gráfico paramétrico aparecerá sin buena definición si el ajuste que se realiza en la ventanilla de visualización ocasiona que el valor de intervalo sea demasiado grande en relación a la diferencia entre los ajustes mínimo y maximo. Si los ajustes que realiza ocasiona que el valor de intervalo sea demasiado pequeño en relación a la diferenica entre los ajustes de mínimo y máximo, por otra parte, el gráfico tomará un tiempo muy largo en dibujarse

4. DELINEADO MANUAL DE GRÁFICOS

Luego de seleccionar el icono **RUN** en el menú principal e ingresar el modo RUN, puede delinear gráficos manualmente. Primero presiones SHIFT F4 (SKTCH) F2 (GRPH) para recuperar el menú de mandos de gráficos, y luego ingrese la función gráfica

SHIFT F4 (SKTCH) F2 (GRPH)

F1 (Y =) . Gráfico de coordenadas rectangulares

F2 (Parm) Gráfico paramétrico

▷

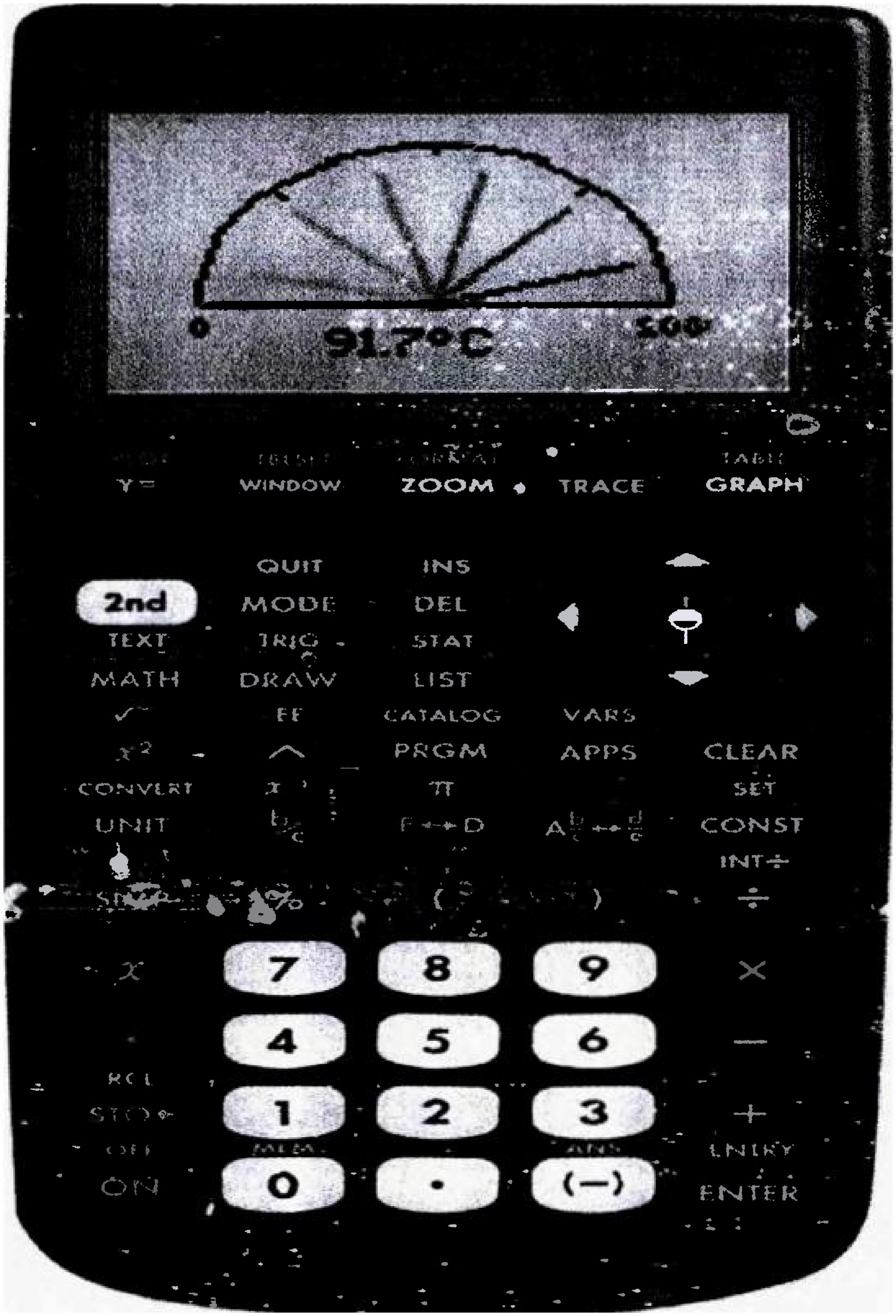
F1 (Y >). Desigualdad de Y > f(x)

F2 (Y <) Desigualdad de Y < f (x)

F3 (Y ≥) Desigualdad de Y ≥ f(x)

F4 (Y ≤) Desigualdad de Y ≤ f(x)

Presione ▷ para retornar al menú previo


0
91.7°C
TABLE
Y=
WINDOW
ZOOM
TRACE
GRAPH
QUIT
INS
2nd
MODE
DEL
TEXT
TRIG
STAT
MATH
DRAW
LIST
CATALOG
VARS
PRGM
APPS
CLEAR
CONVERT
SET
UNIT
F↔D
CONST
INT÷
7
8
9
4
5
6
RCL
1
2
3
0
(−)
ON
ENTER

- **Para graficar usando las coordenadas rectangulares (Y =)**

Se pueden graficar fucniones que pueden expresarse en el formato de $y = f(x)$.

Ejemplo: Graficar $y = 2x^2 + 3x - 4$

Utilice los parámetros siguientes de la ventanilla de visualizacion.

Xmin = -5	Ymin = -10
Xmax = 5	Ymax = 10
Xscl = 2	Yscl = 5

1. En la pantalla de ajuste básicos, especifique el tipo de grafico apropiado para el tipo de función.

   SHIFT SETUP F1 (Y =) QUIT

2. Ingrese la expresión (Y =) de la coordenada rectangular

   AC SHIFT F4 (SKTCH) F1 (Cls) EXE

   F2 (GRPH) F1 (Y =)

   2 X.T X^2 + 3 X.T - 4

3. Presione EXE para delinear el gráfico

   EXE

- Se pueden delinar los gráficos de las siguientes funciones científicas incorporadas.

•	Sen x	cos x	tan x	sen^{-1} x	cos^{-1} x
•	$Tan^{-1}x$	$\sqrt{x}$	x^2	log x	ln$x$
•	10^x	e^x	x^{-1}	$\sqrt[3]{x}$	

Para los graficos incorporados, los ajustes de la ventanilla de visualización se realizan automáticamente

- **Para usar el enfoque de detalles de factor**

Con el enfoque de detalles de factor, puede ampliar o reducir la presentación, con la ubicación del cursor actual en el centro de la nueva presentación

- Utilice las teclas del cursor (◁, ▷, Δ, ∇) para mover el cursor alrededor de la presentación.

Ejemplo: Graficar las dos funciones siguientes, y ampliarlos cinco veces para determinar si son o no

tangenciales .

$$\mathbf{Y1 : y = (x + 1) (x - 3)}$$

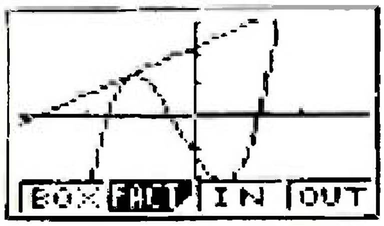
$$\mathbf{Y2 : y = 3x + 22}$$

Utilice los parámetros siguientes de la ventanilla de visualización.

Xmin	= −8	Ymin	= −30
Xmax	= 8	Ymax	= 30
Xscl	= 5	Yscl	= 10

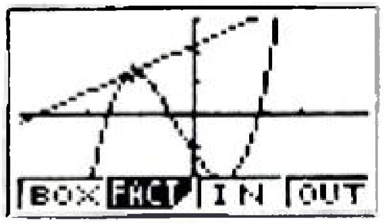
1. Luego de graficar las funciones, presione [SHIFT] [F2] (ZOOM), y el cursor aparecerá sobre la pantalla.

[SHIFT] [F2] (ZOOM)



2. Utilice las teclas de cursor (◄, ►, ▲, ▼) para mover el cursor a la ubicación que desea como el centro de la presentación nueva.

(◄) ~ (◄) (▲) ~ (▲)



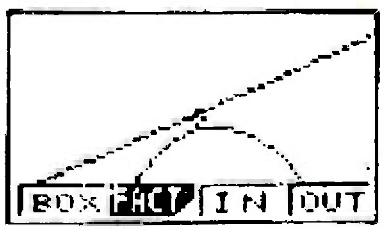
[F2]

3. Presione [F2] (FACT) para visualizar la pantalla de especificación de factor, e ingrese el factor para los ejes x e y.

[F2] (FACT)
[5] [EXE] [5] [EXE]

4. Presione [QUIT] para retornar a los gráficos, y luego presione [F3] (IN) para ampliarlos.

[QUIT] [F3] (IN)



En el modo RUN O PRGM

La siguiente es la sintaxis para trazar líneas verticales y horizontales en estos modos

- **Para trazar una línea vertical**

  Vertical < coordenada x >

- **Para trazar una línea horizontal**

  Horizontal < coordenada y >

- **Para borrar las líneas y puntos**

  La operación siguiente borra desde la pantalla, todas las líneas y puntos trazados

  En el modo STAT, GRAPH o TABLE

  Las líneas y puntos trazados usando las funciones del menú de bosquejo son temporarios Visualice el menú de bosquejo y presione F1 (Cls) para borrar las líneas y puntos, dejando solamente el gráfico original.

  En el modo RUN o PRGM

  La siguiente es la sintaxis para borrar las líneas y puntos trazados, así como también el gráfico propiamente dicho.

BIBLIOGRAFÍA DE LA PROPUESTA

CALLEJO, M (1994) Un club de matemática para la diversidad Editorial Narcea España

DUBINSKY, E (1996) Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria Revista educación matemática Vol 8 N°3 México

KENSKI, U. (1999) El cálculo y la calculadora Revista educacion matemática Vol 1 N° 3 México.

MARTÍNEZ, A (1998) La calculadora, una herramienta efectiva Revista educación matemática. Vol 5 N° 2. México

MEY, J (2000) Cuándo puedo usar la calculadora? Recopilación de documentos Conferencia del congreso panamericano de la enseñanza de la ingeniería

RESNICK, L. (1996). La enseñanza de las matemáticas y su fundamentos psicológicos Piados España.

SABEL, M. (1996). Precálculo. 5ª Edición. Editorial Prentice Hall México

STEWART, J. (1995) Cálculo. Editoral Iberoamericana. México

YOULIN, R. (1999). Tendencias en la enseñanza de las matemáticas a nivel internacional. Revista educación matemática Vol. 2 N° 3 Mexico

YOUNG, M. (2000). Ambientes graficos con calculadora gráfica XIV congreso panamericano de la enseñanza de la ingeniería

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

LIBROS

ARAUJO, B Y CLIFTON B Chadwick **Tecnología Educacional.** Teorías de Instrucción Paidos, Barcelona 1998

ARAÚZ ROVIRA, José N. **Metodología de la Investigación Social.** Segunda edición, Panamá 1991, 352 pág

BATISTA, Angel **Tecnología Educativa Aplicada a la Educación** · Módulo 1 y 4 1998

BERNAL, Juan B **Planeamiento Didáctico una Estrategia para asegurar una eficacia en la práctica** Colombia 1998

BUDNICK, Frank S. **Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales** Tercera edición. McGraw – Hill 947 págs

CASTAÑEDA, Y , Margarita **Los Medios de Comunicación y la Tecnología Educativa.** Trillas, México 1998.

CASSINI, Juan E. **Didáctica General de la Enseñanza Media** 1978.

CHAZÍN, Sergio Mario. **Juegos, Cuentos, Cómo Educar Jugando** 1995

DE ARANDA P. José. **Didáctica y Práctica de la Enseñanza** McGraw Hill. 1982.

ESCAMILLA, José G **Selección y Uso de Tecnología Educativa.** Editorial Trillas, S A., México. 1999, 153 págs

FAINHLOC, Beatriz. **La Tecnología Educativa Propia y Apropiada.** Editorial Humanistas, Buenos Aires, Argentina: 1990

GARCÍA CARRASCO, Joaquín **Teoría de la Educación** Ediciones Anayas, S A., Madrid, España: 1984, 137 págs

GARZA, Rosa M. y LEEVENTHAL, Susana. **Aprender cómo Aprender.** Trillas; México 1998.

GINZBURG, Herbert y OPPER, Silvia **La Teoría del Desarrollo Intelectual.** Editorial Calyso, S A., México: 1985 228 págs

GARZA, Rosa M. y LEEVENTHAL, Susana. **Aprender cómo Aprender**. Trillas; México:1998

GINZBURG, Herbert y OPPER, Silvia. **La Teoría del Desarrollo Intelectual.** Editorial Calyso, S A., México 1985, 228 págs

HERNÁNDEZ SAMPIERI, Roberto. **Metodología de la Investigación**. McGraw – Hill Interamericana de México, S.A. México. 1995, 505 págs

HUNTER, Beverly. **Integración de la Informática en el Curriculum Escolar**. Ediciones Martinez Roca, S.A., España: 1995, 446 págs

KEMP, Jerrl E **Planificación y Producción de Materiales Audiovisuales**. 1989

LAFAURCADE, Pedro S. **Planeamiento, Conducción Y Evaluación de la Enseñanza Superior** Editorial Kapeluz, S.A., Argentina 1984, 285 págs

LARROYO, Francisco **Pedagogía de la Enseñanza Superior** Editorial Porrúa, S A., Mexico 1984, 406 págs.

LERNER, Norbert y Sobel Max A **Precálculo.** Prentice Hall México. 1995, 777 págs.

LOWELL, Kem **Didáctica de las Matemáticas** 1969, 159 págs

NERECI, Imidio G **Hacia una Didáctica General y Dinámica** 1973

ROMÁN SÁNCHEZ, José Maria **Métodos Activos para Enseñanza Media y Universitaria**. Editorial Cincel, S.A , España. 1980, 282 págs

SAÉNZ, B. Oscar. **Didáctica General**.1987

SANTALÓ, Luis. **Introducción al Calculo Diferencial e Integral**. Editorial El vives, S.A., México; 1986, 159 págs.

SANTAMARÍA, Eric. **Ensayos de Tecnología Educativa y su Importancia dentro de la Enseñanza y el Aprendizaje Superior**. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Panamá. 1994.

SEGOVIA y Beltrán. **La Educación y la empresa Educativa.** Ed Mtel. 1997.

STROMMEN, Ellen A. **Psicología de Desarrollo. Edad Escolar**. Litografia y Tipografia Yolva, S.A., México: 1996, 362 págs.

MICROSOFT CORPORACIÓN **Enciclopedia Microsoft Encarta** 1997

REVISTAS, FOLLETOS Y OTRAS PUBLICACIONES

Ministerio de Educación. **Modernización de la Educación Panameña El desafío del Siglo XII**. Imprenta del Ministerio de Educación Panamá 1997 11 págs

- **La calidad de la Escuela**. Escuela Siglo XXI. Panamá 1998

Universidad de Panamá. **Estrategias Didácticas para la Enseñanza y el Aprendizaje Activo en el Aula de Clases.** Programa de Educación Continua. Primera edición 1998

OTRAS CONSULTAS

- http //www amadeus.como
- http //w.w w.I.A.T.A. com.
- http://www.escuela-virtual.org.mx
- mailto redes@ ilce.edu.mx
- http:// www.halsc?.com/html-val-svc
- http //w .w.khoros unm.ed/
- http://www pananet com
- http //www.uji.es/cgi-bin/test

ANEXO

Presentación y análisis de la encuesta

Los resultados y análisis de la encuesta aplicada a los estudiantes se presentan a continuación:

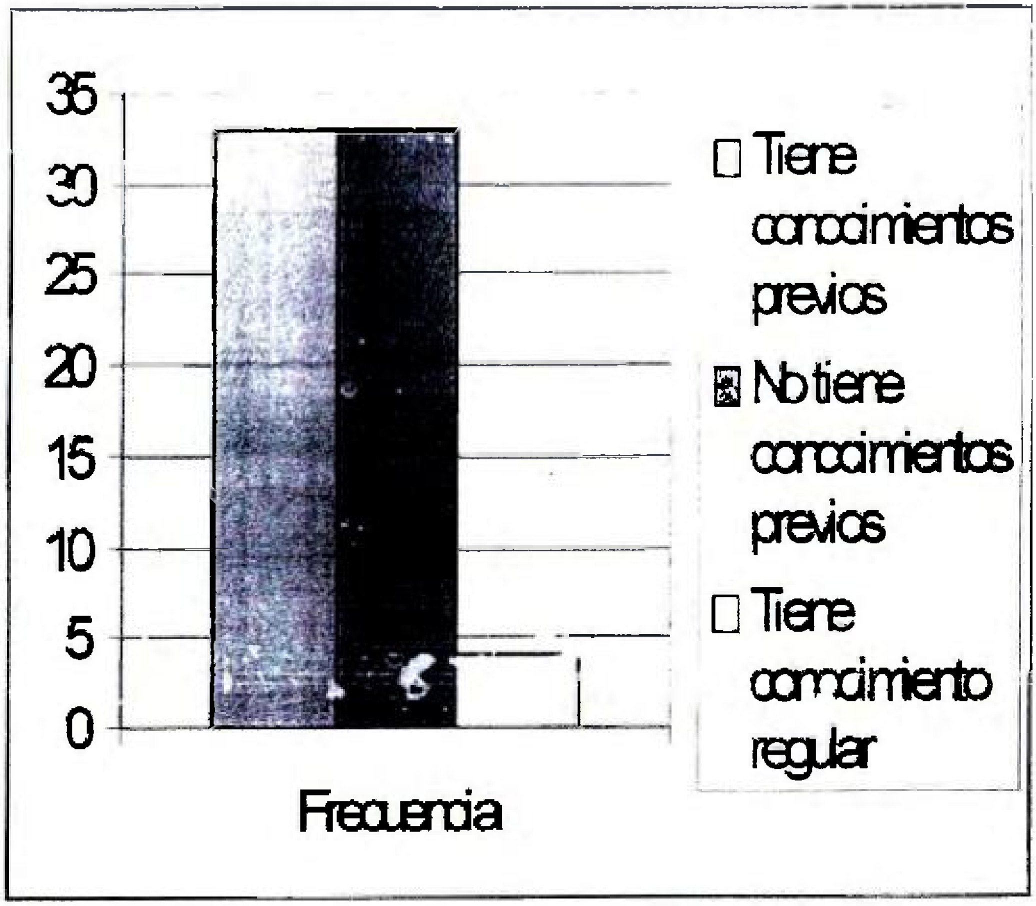
CONOCIMIENTOS PREVIOS POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LAS OPERACIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

ALTERNATIVAS	***FRECUENCA***	***%***
Tiene conocimientos previos	*33*	*47.14*
No tiene conocimientos previos	*33*	*47.14*
Tiene conocimiento regular	*4*	*5.72*
Total	***70***	***100***

FUENTE: Encuesta aplicada

Los datos del cuadro presentado demuestran claramente, que el 47% de los estudiantes consultados tienen conocimiento previo del uso de la calculadora. No obstante, una parte representativa de la muestra (47%), no tiene ningún conocimiento; asimismo, el 5.72% tiene conocimiento regular.

Estudiantes que tienen conocimientos previos sobre las Operaciones de Cálculo Diferencial e Integral



Fuente: Encuesta aplicada

EL PROFESOR UTILIZA APOYO DIDÁCTICO EN EL SALÓN DE CLASES

ESTUDIANTES	*ALTERNATIVAS*						*TOTAL*
	SÍ	*%*	*NO*	*%*	*A VECES*	*%*	
G. Control	*22*	*31.43*	*39*	*55.71*	*9*	*12.86*	*70*
G. Exp.	*39*	*55.71*	*15*	*21.42*	*16*	*22.86*	*70*

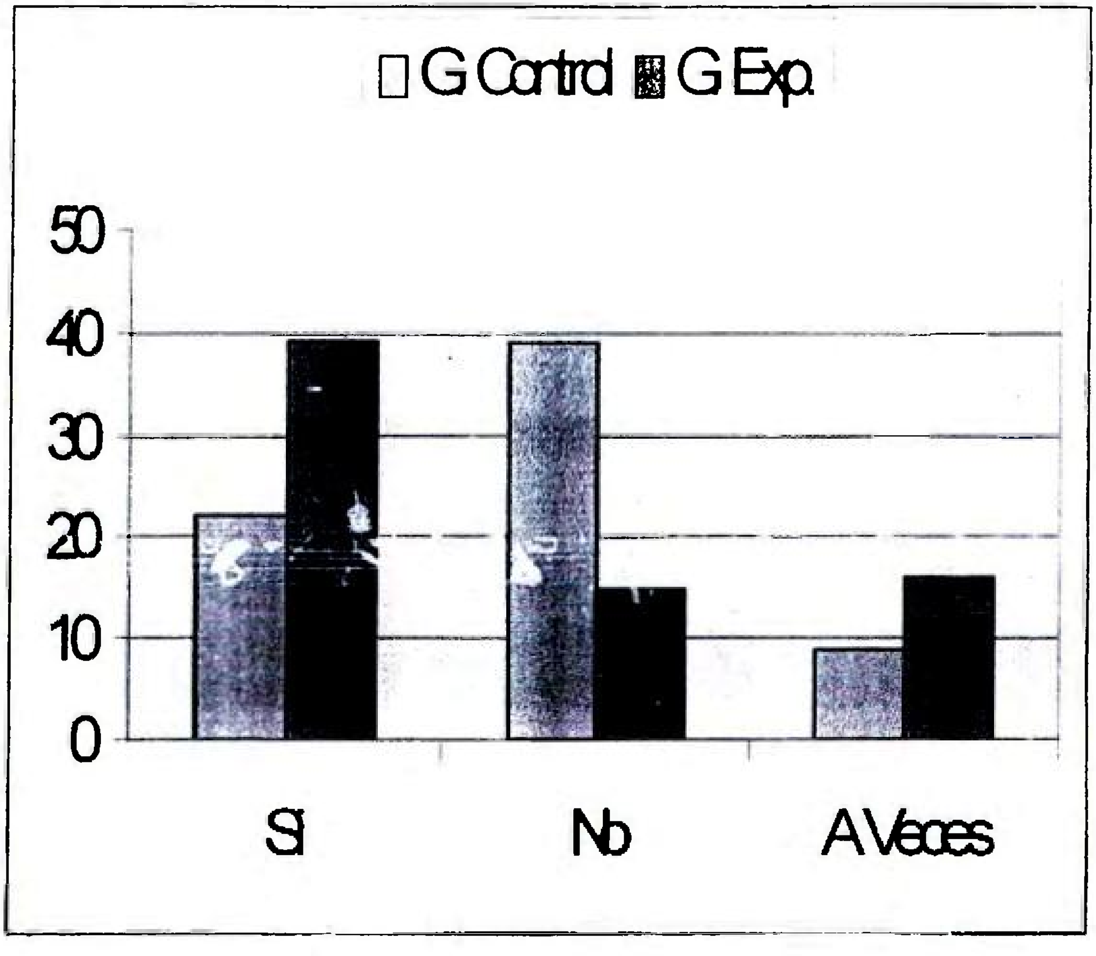
FUENTE: Encuesta aplicada

Se observa claramente, que el 55. 71% de los estudiantes del grupo experimental indicaron que los profesores usan apoyo didáctico, entre los cuales están las calculadoras gráficas, mientras que del grupo control, sólo el 31.43% de los encuestados indicaron que los profesores utilizan estos recursos propios de la tecnología educativa.

Asimismo se destaca, que un 55.71% de los profesores del grupo control no utilizan recursos didácticos según indican los estudiantes. Mientras del grupo experimental sólo un 21.43 no se valen de estos recursos para complementar la clase, situación que de una u otra forma puede estar afectando el proceso enseñanza aprendizaje.

En la siguiente página presentamos la gráfica que ilustra mejor estos datos.

Opinión sobre los Profesores que utilizan o no Recursos Didácticos en la Clase



Fuente: Encuesta aplicada

OTROS DATOS DE LA ENCUESTA REFERENTE AL AMBIENTE DE LOS ESTUDIANTES Y A LAS CALCULADORAS GRÁFICAS

ALTERNATIVAS	*FRECUENCIA*	*%*
1. Usa calculadoras en la clase de matemáticas		
▪ *Sí*	*24*	*34.29*
▪ *No*	*46*	*65.71*
2. Tiene calculadora		
▪ ***Sí***	***30***	***42.86***
▪ ***No***	***40***	***57.14***
3. La calculadora gráfica le permite conocer mejor los conceptos		
▪ ***Sí***	***34***	***48.57***
▪ ***No***	***36***	***51.42***
4. Experiencia con la calculadora gráfica		
▪ ***Excelente***	***40***	***57.14***
▪ ***Regular***	***22***	***31.43***
▪ ***Ninguna***	***8***	***11.43***
5. El uso de la calculadora gráfica permite		
▪ ***Ser creativo***	***8***	***11.43***
▪ ***Dinámico***	***44***	***62.86***
▪ ***Mecanista***	***3***	***4.28***
▪ ***Constructor de su propio aprendizaje***	***15***	***21.43***
6. ¿Es necesaria una guía adicional a la que trae la calculadora?		
▪ ***Sí***	***39***	***55.71***
▪ ***No***	***31***	***44.29***
7. ¿Recomendaría el uso de la calculadora gráfica a sus compañeros de clases?		
▪ ***Sí***	***47***	***67.14***
▪ ***No***	***23***	***32.86***

FUENTE: Encuesta aplicada

Los datos del cuadro anterior resumen con claridad, la opinión de los estudiantes en cuanto al uso de las calculadoras gráficas, en el curso de Licenciatura en Ingeniería Electrica. Lo más relevante consiste en que un 34% indicó que utilizan calculadoras g en la clase de matemática, el 42% tienen calculadoras y el 48% considera que las calculadoras gráficas le permiten conocer mejor los conceptos.

Asimismo, un 57% de la muestra señaló tener experiencia con calculadoras, el 635 considero que su uso es dinámico y el 57% que la experiencia con esta herramienta ha sido buena. De igual forma, el 57.71% considera que se requiere de un instructivo adicional y el 67.14% recomendaría dispuesto a recomendar su uso a recomendar su uso a otros compañeros de clases.

UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
PRE-PRUEBA DE CÁLCULO DEFERENCIAL E INTEGRAL

NOMBRE______________________Cédula__________________
Grupo___________________ fecha______Ptos _____/100
Profesora Maria DeL carmen Young A

Este es tan sólo el comienzo de un semestre de éxito. Tú eres un vencedor.
En esta página escribe la letra de la respuesta que has seleccionado como correcta al problema enunciado Usa tinta. Trabaja en orden. Gracias.

1______	2______
3______	4______
5______	6______
7______	8______
9______	10______
11______	12______
13______	14______
15______	16______
17______	18______
19	20

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
PRUEBA DE CÁLCULO I

Seleccione la respuesta correcta.
En la hoja de respuestas marque con una cruz la letra escogida.

1. Si $f(x) = mx + b$ entonces, $Df(x)$ es igual a:
   A) $m + b$
   B) m
   C) 0
   D) mx^2
   E) N.A

2. Si $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 4$ entonces, $Df(x)$ es:
   A) $9x^2 - 12x + x - 4$
   B) $9x^2 - 12x + 1$
   C) $9x^2 + 12x + 1$
   D) $9x^2 - 12x - 3$
   E) N.A.

3. Si $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, entonces $Df(x)$es:
   A) $\sqrt{x} + \frac{1}{4}x^{-3/2}$
   B) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4}x^{-1/2}$
   C) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}x^{-3/2}$
   D) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$
   F) N.A

4. Si $f(x)=(x^2-3)(3-4x)$,entonces $f'(x)$ es igual a:
   A) $12x^2 - 6x - 12$
   B) $4x^2 + 6x + 12$
   C) $-12x^2 + 6x + 12$
   D) $-4x^2 - 12 + 6x$
   E) N.A.

5. Si $f(x)= \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$, entonces $f'(x)$ es igual a:
   A) $\dfrac{-6x^5}{(x^3-1)^2}$
   B) $\dfrac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$
   C) $\dfrac{-6x^5-6x^2}{(x^3-1)^2}$
   D) $\dfrac{1}{(x^3-1)^2}$
   E) N.A.

6. Si $g(x)=\left[\dfrac{1-x}{1+x}\right]^3$,entonces $Dg(x)$ es igual a:
   A) $\dfrac{-6(1-x)^2}{(1+x)^2}$
   B) $\dfrac{6(1-x)^2}{(1+x)^4}$
   C) $\dfrac{-6(1-x)^2}{(1+x)^4}$
   D) $\dfrac{-6}{(1+x)^2}$
   E) N.A.

7. Si $h(x)=(\tan^2x - x^2)^3$, entonces $Dh(x)$ es igual a:
   A) $3(\tan^2x - x^2)^2(2\tan x-2x)$
   B) $3(\tan^2x - x^2)^2$
   C) $6(\tan^2x - x^2)^2(\tan x \sec^2x - x)$
   D) $6(\tan^2x - x^2)^2(\sec^2x - x^2)$
   E) N.A.

8. Sea y una función de x que satisface $x^3 + y^3 = 8xy$, entonces y' es igual a:
   A) $(8y-3x^2)/(3y^2 - 8x)$
   B) $(-8y-3x^2)/(3y^2 - 8x)$
   C) $(8y-3x^2)/(-3y^2 + 8x)$
   D) $(8 - 3x^2)/(3y^2)$
   E) N.A

9) *Si* $f(x) = 4x^2 \tan x$, *entonces* f' *es* :

A) $4x\left(x\sec^2 x + 2\tan x\right)$

B) $4x\left(x\sec x + 2\tan x\right)$

C) $4x^2\sec^2 x + 2x\tan x$

D) $4x^2\sec^2 x + 4x\tan x$

E) N.A.

10) *Calcule* y'', *si* $y = \dfrac{2}{x-1}$

A) $\dfrac{4}{(x-1)^4}$

B) $-4(x-1)^{-3}$

C) $\dfrac{4}{(x-1)^3}$

D) $\dfrac{-4(x-1)}{(x-1)^4}$

E) N.A.

11) *Calcule* $f'(x)$ *si* $f(x) = \sqrt{\dfrac{sen\, x}{1 - sen\, x}}$

A) $\dfrac{-\cos x}{2\sqrt{sen\, x}\,(1-sen)^{3/2}}$

B) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{senx}\,(1-senx)^{3/2}}$

C) $\dfrac{\cos x\sqrt{senx}}{2(1-senx)^{5/2}}$

D) $\dfrac{-\cos x\sqrt{sen\, x}}{2(1-senx)^{5/2}}$

E) N.A.

12) *Encuentre* y''' *si* $y = \sqrt{3-2x}$

A) $\dfrac{3}{2}(3-2x)^{-\frac{5}{2}}$

B) $-3(3-2x)^{-3/2}$

C) $-3(3-2x)^{-5/2}$

D) $-\dfrac{3}{2}(3-2x)^{-5/2}$

E) N.A.

13) Realice la antiderivación de

$$\int y^3\left(2y^2 - 3\right)dy$$

A) $\dfrac{1}{3}y^6 - \dfrac{3}{4}y^4 + C$

B) $3y^6 + \dfrac{4}{3}y^4 + C$

C) $\dfrac{3}{4}y^6 - \dfrac{1}{3}y^4 + C$

D) $\dfrac{3}{4}y^6 + \dfrac{1}{3}y^4 + C$

E) N.A.

14) Resuelva $\int \sec x \tan x \; dx$

A) $\dfrac{1}{2}\sec^2 x + C$

B) $\dfrac{1}{2}\tan^2 x + C$

C) $\dfrac{1}{2}\cos^2 x + C$

D) $\sec x + C$

E) N.A.

15) Resuelva : $\int sen^3 2x \cos 2x\, dx$

A) $\frac{1}{8} sen^4 2x + C$

B) $-\frac{1}{8} sen^4 2x + C$

C) $sen^4 2x + C$

D) $-sen^4 2x + C$

E) N.A.

16) Calcule el valor de la integral $\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5} dy$

A) $\frac{1}{32}(1-2y^4) + C$

B) $\frac{1}{32(1-2y^4)^4} + C$

C) $\frac{1}{32(2y^4-1)^4} + C$

D) $\frac{1}{32}(2y^4-1)^4 + C$

E) N.A.

17) Calcule la integral $\int \frac{2t^3 + 7t^2 + 5t}{t+1} dt$

A) $\frac{1}{2}t^4 + \frac{7}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + C$

B) $\frac{3}{2}t^3 + \frac{2}{5}t^2 + C$

C) $\frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + C$

D) $\frac{1}{2}t^3 + \frac{7}{3}t^2 + C$

E) N.A.

18) Si la función $x \cos y = y\, sen\, 2x$, entonces la derivada es :

A) $\frac{\cos y - 2y \cos 2x}{sen\, 2x + x\, sen\, y}$

B) $\frac{\cos y - 2y \cos 2x}{sen\, 2x - x\, sen y}$

C) $\frac{\cos y + 2y \cos 2x}{sen\, 2x + x\, sen\, y}$

D) $\frac{\cos y - x sen y - 2y \cos 2x}{sen\, 2x}$

E) N.A.

19) Calcule y'; si $y = \cos(x-y)$

A) $\frac{-sen(x-y)}{sen(x-y)-1}$

B) $\frac{sen(x-y)}{sen(x-y)-1}$

C) -1

D) $\frac{y + sen(x-y)}{sen(x-y)}$

E) N.A.

20) Si $f(x) = \cot^2 x + \csc^2 x$, entonces $f'(x)$ es igual a :

A) $-4 \cot x \csc^2 x$

B) $-\csc^2 - 2\csc x \cot x$

C) $2\cot x + 2 \csc x \tan x$

D) $4 \csc x \cot x$

E) N.A.

UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE PANAMA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA PRUEBA PARCIAL

N°___ GRUPO:_________ NOMBRE:______________________
FECHA:______________ CEDULA:_______________________
PROFESORA: Valor de la Prueba 100 pts.

INSTRUCCIONES: Resuelva en forma ordenada y clara cada uno de los problemas que se le presentan.

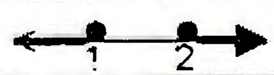
PARTE A ITEMS DE VERDADERO O FALSO.
En el espacio coloque una V_ en el enunciado verdadero y una F_en el enunciado falso. (16 puntos)

1. Si $|x|<a$ entonces $-a<x<a$ ____
2. Si $a<b$ entonces $a^2<b^2$ ____
3. Si $a<b$ y $c<0$ ectonces $ac<ba$ ____
4. La amplitud de la función $y = -3$ Sen $2x$ es el número -3 ____
5. La solución de la desigualdad $|3x-5|<1$ es el intervalo $(-2,-4/3)$ ____
6. El dominio de la función $f(x)= \dfrac{5x}{\sqrt{x-5}}$ es el intervalo $(5,\infty)$ ____
7. El dominio de la función $f(x)=1-5\text{Sen}x$ es el intervalo $[-4,6]$ ____
8. En la función $y = 3/2$ Cos $2\pi x$ su periodo es el número 1. ____

PARTE B. ITEMS INTERPRETATIVO. De respuestas cortas. (10 puntos)

De acuerdo al siguiente cuadro esquemático complete los espacios o celdas en blanco.

9.

NOTACION DE INTERVALOS	NOTACIÓN DE CONJUNTOS	GRAFICAS
		
	$\{X : x<3 \text{ y } x\geq 8\}$	
		
$(-\infty,\infty)$		
$(-\infty,-5]$		

PARTE C ITEMS DE RESPUESTAS CORTAS
Escriba sobre la raya colocada la respuesta correcta (14 puntos)

10. La solución de la desigualdad $\frac{x-3}{2} < 1$ es el intervalo ____________

11. Si a<b y c<0 entonces ac ____ bc

12. El dominio de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ es el intervalo ____________

13. Las intersecciones de la función f(x)= x-5 con el eje x es el número ___

14. La intersección de la función $f(x)= x^2 +2x-3$ con el eje y es el número _____

15. La amplitud de la función h(x)= -4 Sen (2x/3) es el número ________

16. El codominio de la función y = 5 Cos x es el intervalo ____________

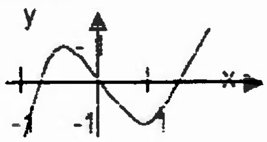
17. Si $f(x)= \sqrt{x-3}$ y $g(x)= \frac{1}{x}$ entonces el valor de (fog)(9/2) es ________

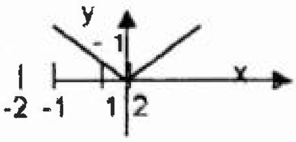
PARTE D. ITEMS DE PAREAMIENTO
Coloque al lado de cada ecuación de la columna A la letra de la columna B de la gráfica que se relaciona (10 puntos)

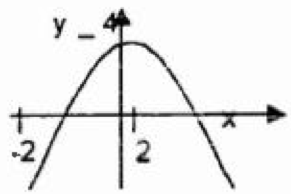
Columna A

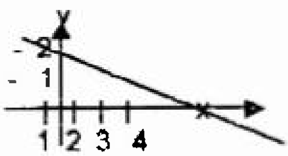
18. _____ $Y = -1/2x + 2$
19. _____ $Y = 4 - x^2$
20. _____ $Y = \sqrt{9 - x^2}$
21. _____ $Y = x^3 - x$
22. _____ $Y = |x|$

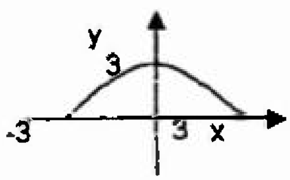
Columna B

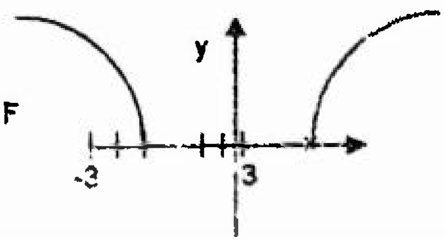
A


B.


C.


D.


E.


F


PARTE E ITEMS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

Seleccione la respuesta correcta (realice la operación) Encierre en un círculo la letra que corresponde a la respuesta correcta (33puntos)

23 El conjunto de todos los números x tales que

$$1 \leq \frac{2x+14}{3} < 2 \text{ es}$$

a (-11/2,-6) b (-11/2,-4)
c [-11/2, -4) d (-13/2,-4)

24. El conjunto de todos los números x tales que $\frac{6}{x-1} \geq 5$ es

a (1 11/5) b (1 11/5]
c [1, 11/5) d [1,11/5]

25 El conjunto de todos los números x tales que |x-5|<9 es

a. (-4,14) b (-∞,-4)U(14,∞)
c. (-4, ∞) d (-∞,-4)

26 El conjunto de todos los número x tales que |2x-3|>1 es
a. (-∞,1]U[2, ∞) b [1,2]
c (1,2) d. (-∞,1)U(2, ∞)

27. El conjunto de todos los números x tales que $3x^2+10x+3<0$ es.

a. (-∞,1/3)U(3, ∞) b (-∞,-3)U(-1/3 ∞)
c. (-3,-1/3) d (1/3,3)

28. El conjunto de todos números x para los que $\sqrt{x^2+2x-3}$ es real es
a. [-3,1] b (-∞,-3]U[1, ∞)
b. (-∞,3]U[-1, ∞) d [3,-1]

29 El codominio de la función $y = -1/2\, x^2 - x + 4$ es.
a [9/2, ∞) b [-1, ∞)
c (-∞,9/2] d (-∞,-1]

30. El dominio de la función $f(x) = 1/\sqrt{49-x^2}$ es
a (-∞,-7]U[7, ∞) b. (-∞,-7)U(7, ∞)
c (-7,7) d [-7,7]

31. Si $F(x) = \sqrt{x-3}$ y g(x)= 1/x entonces el valor de la función compuesta (fog)(2/9) es
a $\sqrt{3/2}$ b $\sqrt{2/3}$
c 3/2 d 2/3

32. Si f(x)= $\sqrt{x^2-4}$ y g(x)= ($\sqrt{x-1}$)/ 3 entonces el dominio de la función cociente (f/g)(x) es:

a. [-2,2]
b. (-∞, -2] ∪ [2,∞)
c. [-2,2] - {1}
d. [2,∞)

33. Si f(x) = x^2 y g(x) = 1/(x+1) entonces la función compuesta (fog)(x) es igual a:

a. $\frac{1}{x^2+1}$
b. $\frac{1}{(x+1)^2}$
c. $\frac{1}{x^2+1} + 1$
d. $(x+1)^2$

PARTE F. ITEMS DE ENSAYO. (respuesta restringida o limitada)

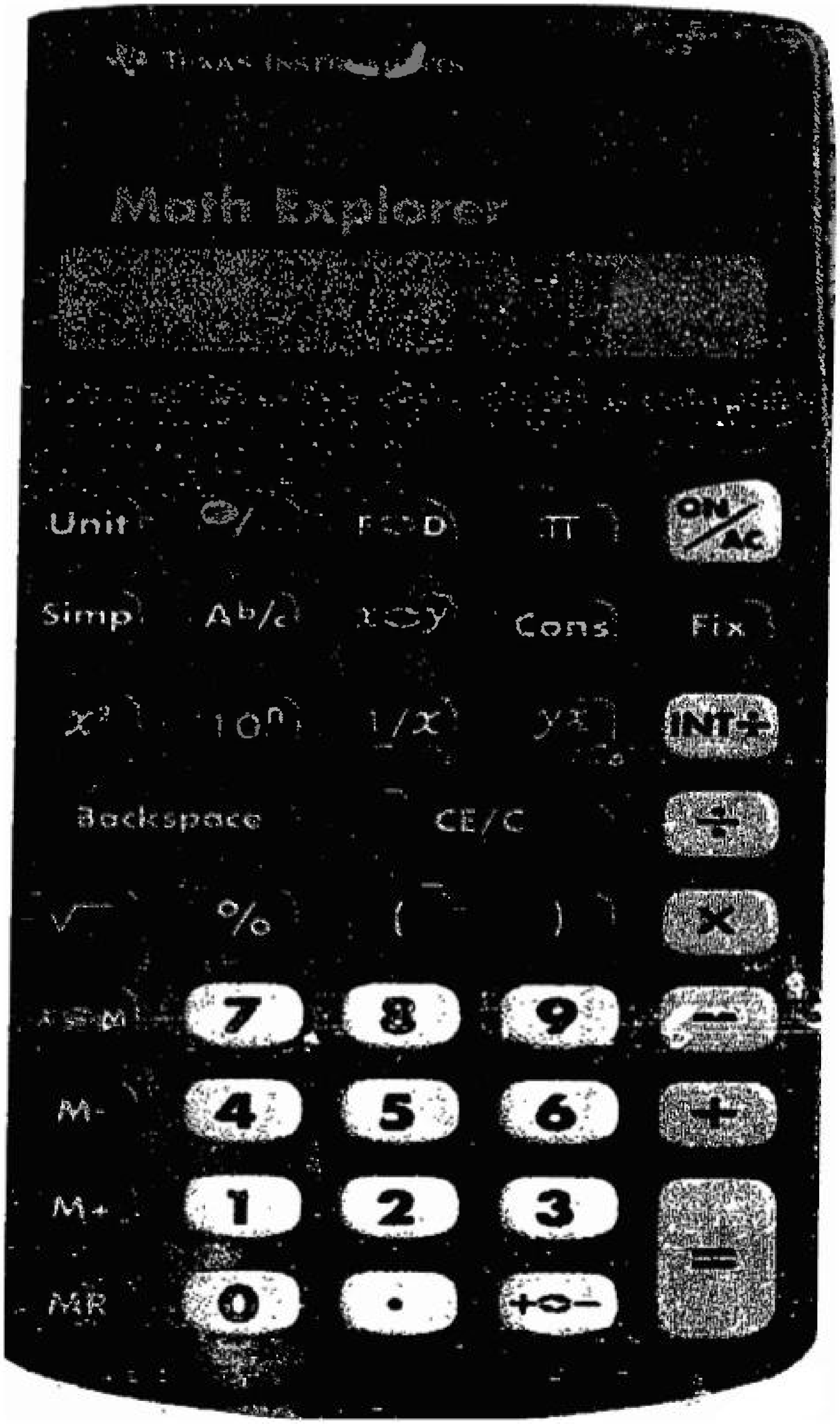
Se han dado diferentes tipos o clases de funciones algebraicas y trascendentes, en las funciones que se dan a continuación determine el dominio y el codominio de cada una de ellas y construya su respectiva gráfica.(17 puntos)

34. f(x)= 3 + $\sqrt{49-x^2}$

35. G(x) = $\frac{x^2+x-6}{X-3}$

36. h(x) = 5 Cos (x/3)

LECTURAS SUPLEMENTARIAS


Math Explorer
Unit
π
ON/AC
Simp
Cons
Fix
INT÷
Backspace
CE/C
%
7
8
9
M-
4
5
6
M+
1
2
3
MR
0
.

Cambio de Variables : Coordenadas polares

Algunas integrales dobles son mucho más fáciles de calcular en forma polar que en forma rectangular. Esto es especialmente cierto para regiones como círculos, cardioides y curvas de pétalos y para integrandos en que aparece la suma $x^2 + y^2$.

Definición de integral doble en el sistema polar de coordenadas
Considérese una región polar R limitada por las gráficas de $r = g1(\theta)$ y $r = g2(\theta)$ y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Comenzamos superponiendo en la región una cuadrícula polar de rayos y arcos circulares, como aparece en la figura. Los sectores polares Ri situados dentro de R forman una partición polar interior, cuya norma $\|\Delta\|$ se define como la longitud de la diagonal más larga de los n sectores polares. Si elegimos un punto (r_i, θ_i) en Ri tal que ri es el radio medio de Ri, entonces el área de Ri es:

$\Delta A_i = r_i \, \Delta r_i \, \Delta\theta_i$ Area de Ri

donde medimos θ en radianes. Ahora si f es una función continua de r y θ en la región R, entonces tomando el límite cuando $\|\Delta\| \longrightarrow 0$, de la suma

$\Sigma f(r_i, \theta_i) \, r_i \, \Delta r_i \, \Delta\theta_i$

puede verse que se obtiene la forma polar de siguiente de una integral doble

INTEGRAL DOBLE EN COORDENADAS POLARES

Si f es una función continua de r y θ en una región plana cerrada y acotada R, entonces La integral doble de f sobre R, en Coordenadas polares, viene dada por

$$\int\int_R f(r,\theta)\,dA = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \Sigma f(r_i,\theta_i)\, r_i \, \Delta r_i \, \Delta\theta_i = \int\int_R f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Cambio de Variables a la forma polar

Ya llegamos al motivo que nos indujo a introducir integrales dobles en forma polar. Con restricciones suficientes en una función f y una región R, hacemos el cambio de variables siguientes

$x = r \cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta$

$r2 = x2 + y2 \qquad dA = r\, dr\, d\theta$

CAMBIO DE VARIABLES A LA FORMA POLAR

Sea R una región plana contituida por los puntos $(x, y) = (r \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ que satisfacen la condición

$0 < g1(\theta) < r < g2(\theta), \quad \theta 1 < \theta < \theta 2$

donde, $0 < (\theta 2 - \theta 1) < 2\pi$. Si g1 y g2 son continuas en $[\theta 1, \theta 2]$ y si f es contínua en R, entonces

$$\int_R \int f(x, y)\,dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Calculamos una integral doble en forma polar por medio de una integral iterada, como se enuncia en la forma polar del teorema de Fubini.

FORMA POLAR DEL TEOREMA DE FUBINI
Sea f continua en una región plana R

1. **Si se define R mediante $\theta_1 < \theta < \theta_2$ y $g_1(\theta) < r < g_2(\theta)$ donde gi y g2 son continuas en $[\theta_1, \theta_2]$, entonces**

$$\int_R \int f(r, \theta)\, dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta)\, dr\, d\theta$$

2. **Si se define R mediante $r_1 < r < r_2$ y $h_1(r) < \theta < h_2(r)$, donde h1 y h2 son continuas en $[r_1, r_2]$, entonces**

$$\int_R \int f(r, \theta)\, dA = \int_{r_1}^{r_2} \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \theta) r\, d\theta\, dr$$

(el integrando contiene un factor r, que surgió del área del i-ésimo sector polar $\Lambda A_i = r_i \Lambda r_i \Lambda \theta_i$.).

Problema 6

Calcular:

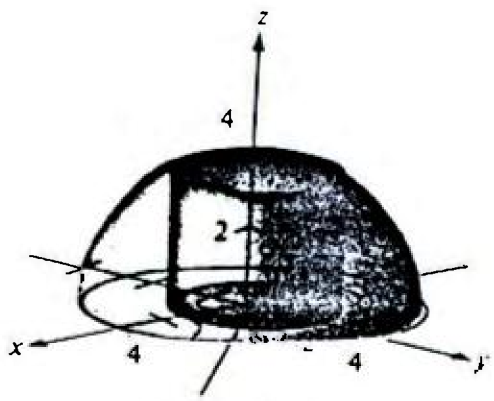
$$\int_R \int \operatorname{sen}\theta\, dA$$

Donde R es la región del primer cuadrante situada en el interior de la circunferencia dada por $r = 4 \cos\theta$ y en el exterior de la circunferencia dada por $r = 2$.

Problema 7

Usar coordenadas polares para hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el hemisferio $z = \sqrt{16 - x2 - y2}$ e inferiormente por la región circular R dada por $x2 + y2 = 4$, como aparece en la figura

Superficie: $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$



$R: x^2 + y^2 \leq 4$

Respuesta

En la figura podemos ver que R tiene las cotas

$-\sqrt{4 - y2} \leq x \leq \sqrt{4 - y2}, \qquad -2 \leq y \leq 2$

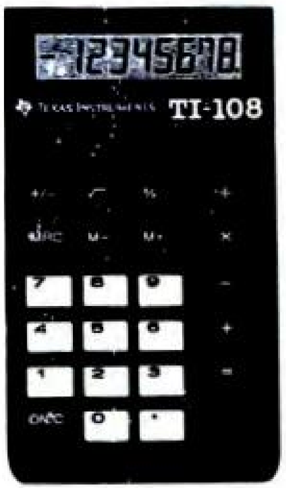
y que $0 \leq z \leq \sqrt{16 - x2 - y2}$.
En coordenadas polares las cotas son
$0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$

con altura $z = \sqrt{16 - x2 - y2} = \sqrt{16 - r2}$.

Entonces el volumen viene dado por

$$V = \int_R \int f(x, y)dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{16 - r2}\, r\, dr\, d\theta$$
$$= -1/3 \int_0^{2\pi} (16 - r2)^{3/2} \Big| \, d\theta$$
$$= -1/3 \int_0^{2\pi} (24\sqrt{3} - 64)\, d\theta$$
$$= -8/3\, (3\sqrt{3} - 8)\, \theta \Big|_0^{2\pi}$$
$$= 16\pi/3\, (8 - 3\sqrt{3}) \approx 46.93$$

PRIMARIA | **GRADOS INTERMEDIOS**



TI-108

Math Explorer™

TI-15

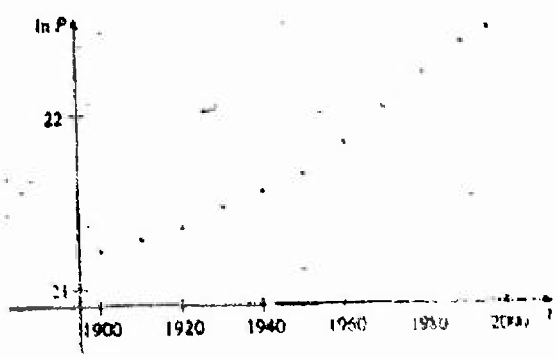
TI-73

OBTENCIÓN DE PATRONES ALGEBRAICOS Y GRAFICACIÓN DE CURVAS, UTILIZANDO LA CALCULADORA CASSIOPEIA A-22

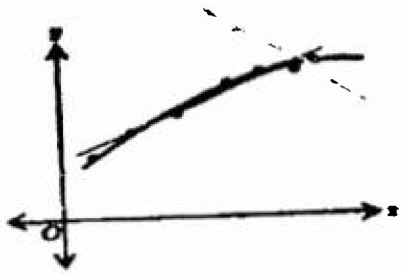
Dos de las preguntas esenciales de la investigación científica son las siguientes: "*¿existe o no relación entre dos o más características de interés que hemos detectado en el comportamiento de un proceso dado?*" Y, en caso de existir, "*¿qué tipo de relación es?*". Por ejemplo, los científicos de la comunicación descubren que el número de horas que pasan los niños viendo la televisión cada día puede influir en o pueden asociarse con la disminución de la cantidad de sus tipos de actividad personal; o también pueden preguntarse "¿qué relación existe, si es que se da, entre el número de mensajes comerciales en las horas de mayor audiencia y el posible aumento de ventas de ciertos productos en el mercado nacional?"
Por su parte los sociolingüistias pueden inquirir acerca de la relación entre la edad de las personas adultas y la cantidad de arcaísmos (términos y frases ya en desuso) utilizados en una comunidad rural.

Con frecuencia sucede en distintas ramas de la ciencia que, por medio de la observación o de experimentos diversos, se obtiene una lista de valores correspondientes a dos variables. Entonces puede ser importante el determinar una ecuación que se "ajuste" a estos valores lo más fielmente posible. Por ejemplo, podríamos medir la presión atmosférica en distintas altitudes de una región dada y en una fecha determinada, y a continuación encontrar una ecuación que se ajuste lo más posible a estos datos. Una ecuación de este tipo nos daría, al menos aproximadamente, la presión atmosférica en función de la altura.

Por supuesto, siempre será posible hacer la gráfica de puntos si conocemos pares de valores correspondientes. En estas condiciones el problema consistirá en determinar la ecuación de una curva que pase por estos puntos, o al menos cerca de ellos, de manera que podamos imaginar su comportamiento general. Una ecuación así determinada recibe el nombre de *ecuación empírica*, y el proceso de su determinación se llama *ajuste de curvas*.



No existe una solución única al problema de la determinación de una ecuación empírica conocidos un conjunto de puntos. Tanto la recta como la curva en la siguiente figura se ajustan al conjunto de puntos, al menos aproximadamente, y además es claro que existen muchas curvas que pueden lograr esto.



El primer problema por resolver cuando se desea encontrar una curva que se ajuste a un conjunto de datos conocidos es el escoger una curva. En algunos casos, esto se hace a partir de consideraciones de orden teórico. A igualdad de condiciones en cuanto a la calidad del ajuste, se recomienda seleccionar el tipo más sencillo de ecuación.

$y = ax + b$	lineal
$y = ax^2 + bx + c$	parabólico
$y = ab^x$	exponencial
$y = ax^n$	potencial

Una vez que se ha escogido un tipo de ecuación, el problema siguiente consistirá en la determinación de las constantes de dicha ecuación en forma tal que la curva de la misma se ajuste lo mejor posible. Por ejemplo, si los puntos se hallan más o menos sobre una recta, se escogerá la ecuación lineal, y a continuación se determinarán las constantes a y b, de manera que la recta se ajuste lo mejor posible.

Se suelen emplear dos métodos para la determinación de estas constantes. El primero es el *método de los puntos promedio*, y el segundo es el *método de los mínimos cuadrados*. La aplicación del primero es más simple que el segundo; pero en cambio el segundo es más exacto que el primero.

DEFINICIÓN DE PUNTO PROMEDIO

El *punto promedio* de un conjunto dado de puntos es aquél cuya abscisa es el promedio de todas las abscisas de los puntos del conjunto dado y cuya ordenada es promedio de todas las ordenadas del conjunto. Por lo tanto, si las coordenadas de los puntos dados son:

$$(x_1, y_1),(x_{21}, y_{21}),(x_{31}, y_{31}),\ldots,(x_n, y_n)$$

entonces

$$x_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{y} \quad y_n = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n}{n}$$

(x_n, y_n) son las coordenadas del punto promedio del conjunto.

TIPO LINEAL: MÉTODO DEL PUNTO PROMEDIO

Cuando los puntos dados están aproximadamente sobre una recta, se puede obtener una ecuación lineal que se ajuste razonablemente bien a ellos empleando el método de los puntos promedio. El primer paso consiste en dividir el conjunto de puntos en dos conjuntos aproximadamente iguales. A continuación, se determinan las coordenadas del punto promedio de cada uno de los conjuntos, y con las coordenadas de los dos puntos así obtenidos podemos deducir la ecuación de una recta, que será precisamente la recta buscada.
No existen reglas que nos digan cómo dividir el conjunto de puntos en dos subconjuntos. Aquí se dividirá el conjunto de tal modo que el primero contenga los puntos de la izquierda de la gráfica y el segundo los de la derecha. Si bien este el método acostumbrado, hay que aclarar que lo es sólo por conveniencia.

Ejemplo

Determínese la ecuación de una recta que se ajuste a los puntos de la siguiente tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.48	1.76	2.78	3.32	3.86	4.15	4.75	5.66	6.18	6.86

Solución Tome los primeros cinco puntos para formar el primer conjunto; sustituyendo sus coordenadas en las ecuaciones obtenemos las coordenadas de su punto promedio

$$x_n = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3 \qquad y_n = \frac{1.48+1.76+2.78+3.32+3.86}{5} = 2.64$$

A continuación, forme un segundo conjunto con los puntos restantes y obtenga las coordenadas de su punto promedio:

$$x_n = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$
$$y_\alpha = \frac{1.48+1.76+2.78+3.32+3.86}{5} = 2.64$$

A continuación, forme un segundo conjunto don los puntos restantes y obtenga las coordenadas de su punto promedio;

$$x_\alpha^1 = \frac{6+7+8+9+10}{5} = 8$$
$$y_\alpha^1 = \frac{4.15+4.75+5.66+6.18+6.86}{5} = 5.52$$

La pendiente de la recta que pasa por estos puntos promedio es:

$$\frac{5.52-2.64}{8-3} = 0.576$$

y por lo tanto su ecuación será

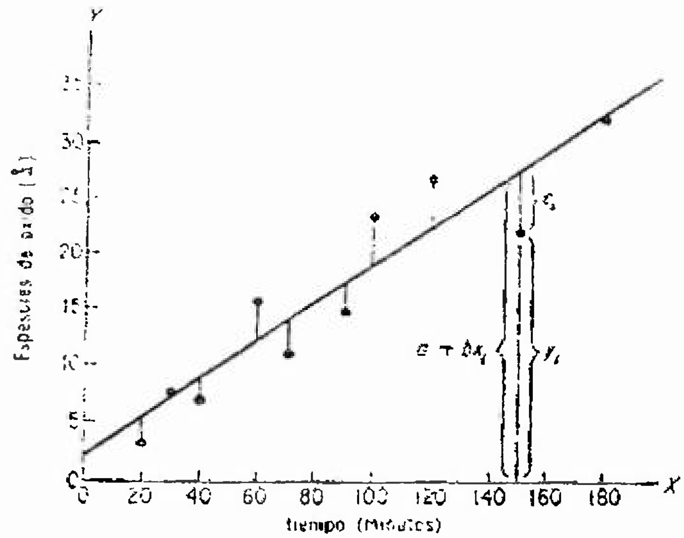
$$y-2.64 = 0.576(x-3)$$
$$y = 0.576x+0.912$$

El resultado obtenido siguiendo este método dependerá de la forma en la que se hayan escogido los conjuntos de puntos. A veces conviene tener cuidado en la elección de estos conjuntos, pues de ello depende en gran parte la calidad del ajuste. Se puede demostrar que independientemente de la forma en que se escojan los conjuntos de puntos, se obtendrá siempre una recta que pase por el punto promedio del conjunto total de puntos.

RESIDUOS: EXACTITUD DE AJUSTE

Supóngase que en la figura se ha ajustado la curva $y = f(x)$ a los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, etc. Se dice que el residuo de un punto cualquiera con respecto a la curva ajustada es la distancia vertical dirigida del punto a la curva ajustada. Por lo tanto, los residuos de los puntos P_1, P_2, P_3 son, respectivamente,

$$Q_1P_1 = y_1 - f(x_1)$$
$$Q_2P_2 = y_2 - f(x_2)$$
$$Q_3P_3 = y_3 - f(x_3)$$



El residuo de un punto es positivo si el punto se halla arriba de la curva, y negativo si se halla abajo.

Hasta el momento, la expresión "buen ajuste" no se ha empleado más que intuitivamente. Rigurosamente, se dice que una curva bien ajustada es aquella en la que los valores absolutos de sus residuos son pequeños.

Se puede demostrar que cuando se ajusta una recta a un conjunto dado de puntos siguiendo el procedimiento de los puntos promedio, independientemente de la manera como se hayan escogido los subconjuntos, la suma algebraica de los residuos es siempre nula. Sin embargo, esto no quiere decir que el ajuste sea bueno, ya que algunos residuos positivos muy grandes, pueden estar balanceados por grandes residuos negativos. Tendríamos, así, que la recta que mejor se ajusta a dos puntos es la que pasa exactamente entre ellos. Es, pues, evidente que la suma algebraica de los residuos no nos provee un buen criterio para evaluar la calidad de un ajuste.

Sin embargo, los cuadrados de los residuos son siempre positivos. Como la suma de los cuadrados de los residuos no puede ser nula (a menos que la curva pase por todos los puntos), se dice que a menor suma de los cuadrados de los residuos mayor es la calidad del ajuste. Por esto, cuando se ajusta una curva específica a un conjunto de puntos dados, se determinarán las constantes de su ecuación en forma tal que los cuadrados de sus residuos sean los menores posible.

Definición

La curva mejor ajustada es aquella en la que sus constantes están determinadas de tal manera que la suma de los cuadrados de sus residuos sea un valor mínimo.

En general, la curva de mejor ajuste no se puede determinar por el método de los puntos promedio, sino que se necesita usar el método de los *mínimos cuadrados*. Pero como los cálculos que requiere este método de ajuste son a veces demasiado laboriosos, se suele preferir el método del punto promedio, sobre todo cuando no es indispensable que éste sea el mejor si bien es necesario un buen ajuste.

TIPO PARABÓLICO

El método de los puntos promedio se puede aplicar para el ajuste de una parábola,

$$y = ax^2 + bx + c$$

a un conjunto de puntos. La diferencia es que ahora son tres las constantes por determinar. Esto se resuelve dividiendo el conjunto de puntos en tres subconjuntos; a continuación, se determina la ecuación la parábola que pasa por los tres puntos promedio de los tres subcojuntos.

Ejemplo

Ajuste la parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$ con respecto a los siguientes puntos:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-3.5	0.4	2.5	4.2	5.8	6.6	7.8	8.0	8.6	7.6

Solución Forme el primer subconjunto con los tres primeros puntos, los cuatro siguientes formarán el segundo, y os últimos cuatro el tercero. En estas condiciones, las coordenadas de sus tres puntos promedio son:

subconjunto 1: (-1, -0.2)
subconjunto 2: (2.5, 6.1)
subconjunto 3: (6.5, 7.6)

Para lograr que la parábola pase por estos tres puntos, sustituimos sus coordenadas en x y y en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, y obtenemos las siguientes ecuaciones, donde las variables son a, b y c.

$$a - b - c = 0.2$$
$$6.25a + 2.5b + c = 6.1$$
$$42.25a + 6.5b + c = 7.6$$

Entonces $a = -0.190$, $b = 2.085$ y $c = 2.075$. Por lo tanto, la ecuación buscada es:

$$y = -0190x^2 + 2.085x + 2.075$$

EL TIPO POTENCIA

Veamos ahora el problema para ajustar una ecuación del tipo

$$y = ax^n$$

a una tabla de pares de valores (x, y). Tomemos logaritmos en ambos miembros de la ecuación para obtener

$$\log y = \log a + n \log x$$

que desde luego es una función lineal entre $\log x$ y $\log y$. Sea

$$\log x = u$$

y $$\log y = v$$

por lo tanto $$v = nu + \log a$$

donde $\log a$ es una constante. De todo esto se deduce que si la relación entre x y y es de la forma $y = ax^n$, la relación entre $\log x$ y $\log y$ es lineal. Por lo tanto, podemos proceder de la siguiente manera. En primer lugar, se hará una nueva tabla en la que se sustituirán los valores dados por sus logaritmos, si hacemos estas nuevas cantidades iguales a u y v; esto es, $u = \log x$ y $v = \log y$. Se dibujan los puntos (u, v) en papel de coordenadas rectangulares. Si hay tendencia a estar sobre una recta, se puede aplicar la ecuación $y = ax^n$. Finalmente, ajuste la recta $v = nu + L$, donde $L = \log a$, a estos datos, empleando el método de los puntos promedio (o el de los mínimos cuadrados). El valor de n en la ecuación buscada $y = ax^n$ es el coeficiente de u en la ecuación lineal, y el valor de a se puede determinar a partir del hecho conocido que $L = \log a$

Ejemplo

Muestre que es conveniente una ecuación del tipo $y = ax^n$ para ajustar los valores dados a continuación, y determine los valores de a y n:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0.36	0.90	1.92	3.44	4.78	6.74	9.40	11.8

Solución La tabla siguiente nos muestra los logaritmos decimales de los números dados:

$u = \log x$	0.0000	0.3010	0.4771	0.6021	0.6990	0.7782	0.8451	0.9031
$v = \log y$	-0.4437	-0.0458	0.2833	0.5238	0.6794	0.8287	0.9731	1.0719

Cuando se hace la gráfica de estos puntos sobre papel coordenado rectangular, se observa tendencia a que aparezcan sobre una recta, como lo muestra la figura. Esto nos indica que se puede aplicar la ecuación del tipo $y = ax^n$.
Para ajustar una recta a estos puntos, escoja los primeros cuatro puntos para formar el primer conjunto que llamaremos A y los últimos cuatro puntos para formar el conjunto B. Las coordenadas de los puntos promedio de estos conjuntos son (0.3450, 0.0794) y (0.8064, 0.8883); por lo que la recta tiene por ecuación:

$$v = 1.753u - 0.5254$$

que es de la forma $v = nu + L$, donde n = 1.753 y

$$L = \log a = -0.5254 = 9.4746 - 10$$

Con la ayuda de unas tablas sabemos que a = 0.2983. Por lo que la ecuación empírica buscada es:

$$y = 0.2938x^{1.753}$$

La gráfica de esta ecuación se muestra en la figura.

Se puede probar más fácilmente si se puede utilizar la ecuación $y = ax^n$ empleando un papel llamado logarítmico, donde se harán las gráficas de los puntos directamente, sin necesidad de calcular sus logaritmos.

Este papel se muestra en la figura; no está graduado a cada 1, 2 ó 3 unidades del origen, sino a distancias de log 1, log 2, log 3, ... La muestra nos indica dos ciclos, uno que va de 1 a 10 y el otro que va de 10 a 100. De haber uno más hacia la derecha, iría de 100 a 1,000; en cambio, de haber uno hacia la izquierda, iría de 0.1 a 1.

Desde luego, dibujar los datos directamente sobre papel logarítmico equivale a hacer la gráfica de los logaritmos de los puntos sobre papel coordenado rectangular. Si los puntos tienen tendencia a estar sobre una recta, se puede aplicar la forma $y = ax^n$

TIPO EXPONENCIAL

El problema de ajustar una curva de la forma

$$y = a(10)^{kx}$$

a una tabla de valores x y y dados, es muy semejante al problema que acabamos de ver. Como antes, tomaremos logaritmos comunes de ambos miembros de la ecuación, obteniendo así:

$$\log y = \log a + kx$$

Que es una relación lineal entre x y $\log y$. Hagamos $v = \log y$; así,

$$v = kx + \log a$$

donde una vez más $\log a$ es una constante. De allí que si la relación entre x y x es de la forma $y = a(10)^{kx}$, la relación entre x y $\log y$ será lineal.

Por lo tanto, se construye una nueva tabla con los valores x y $\log y$ haciendo $v = \log y$, y se dibujan los puntos (x, v) en papel coordenado rectangular. Si los puntos están más o menos sobre una recta, podemos aplicar la ecuación $y = a(10)^{kx}$. Finalmente, se ajusta la recta $v = kx + L$ (donde $L = \log a$) a este conjunto de datos, y se escribe la ecuación buscada $y = a(10)^{kx}$

En el ejemplo siguiente se muestra un método para la determinación de a y k.

Ejemplo

Demuestre que los valores de la siguiente tabla se pueden ajustar por medio de la ecuación $y = a(10)^{kx}$, y a continuación determine los valores de a y k:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0.72	1.08	1.68	3.24	5.28	8.64	13.8	22.6

Solución La siguiente tabla muestra los logaritmos de los valores de y:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$v = \log y$	-0.1427	0.0334	0.2253	0.5106	0.7226	0.9365	1.1399	1.3541

Después de comprobar que estos puntos se hallen más o menos sobre una recta, procedemos a su determinación aproximada, y obtenemos:

$$v = 0.2204x - 0.3944$$

que es una ecuación de la forma $v = kx + L$, donde $K = 0.2204$ y

$$L = \log a = -0.3944 = 9.6056 - 10$$

Con la ayuda de unas tablas deducimos que $a = 0.4033$, por lo que la ecuación empírica buscada es

$$y = 0.4033(10)^{0.2204x}$$

La gráfica de esta ecuación se describe en la figura.

Suele ser conveniente emplear la ecuación exponencial en la forma $y = ae^{kx}$, donde e representa la base de los logaritmos naturales. Si se reemplaza 10 por su valor aproximado $e^{2.303}$ en la ecuación anterior se obtiene

$$y = 0.4033(e^{2.303})^{0.2204x}$$

Entonces, puesto que $(e^{m})^{n} = e^{mn}$,

$$y = 0.4033e^{0.5076x}$$

Desde luego, se puede expresar este resultado en la forma exponencial acostumbrada $y = ab^{x}$, logrando así

$$10^{0.2204x} = (10^{0.2204})^{x} = 1.661^{x}$$

En la práctica, se prefiere utilizar como base 10 en vez de e.

La prueba para aplicar la fórmula $y = a(10)^{kx}$ se hace más fácilmente si se dibujan los datos dados directamente sobre el llamado papel semilogarítmico, como se indica en la figura. Como se ve en la figura, la escala horizontal de este papel es uniforme. Dibujar los puntos dados sobre papel de este tipo equivale a hacer la gráfica de los puntos (x, $\log y$) sobre papel ordinario. Si los puntos tienen tendencia a aparecer sobre una recta, sabremos que podemos emplear una ecuación del tipo $y = a(10)^{kx}$, o lo que es igual, $y = ae^{kx}$.

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS: ECUACIONES LINEALES

En lo anterior se ha explicado que cuando se emplea el método de los puntos promedio para ajustar una recta a una serie de puntos dados, se obtiene una recta en que la suma algebraica de los residuos es nula. Dependiendo de la forma en que se construyan los subconjuntos de puntos, se obtienen distintas rectas; algunas de éstas estarán bien ajustadas, en tanto que otras no lo estarán. Como se ha explicado se podría calcular la suma de los cuadrados de los residuos para tener una idea acerca de la calidad de nuestro ajuste.

Siguiendo el método de los mínimos cuadrados se obtiene la ecuación de una recta para la cual la suma de los cuadrados de los residuos es mínima. A cada conjunto de dado de puntos corresponde únicamente una recta, y por lo tanto el resultado no dependerá de la forma en que se escojan los subconjuntos de puntos. Aquí se estudiará la forma en que se deduce una ecuación de este tipo.

Consideremos los mismos datos del primer ejemplo

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.48	1.76	2.78	3.32	3.86	4.15	4.75	5.66	6.18	6 86

Suponiendo que la recta $y = mx + b$ se ajusta a los datos, comenzamos por incluir dos conjuntos de ecuaciones. El primer conjunto, que se muestra abajo, en la columna izquierda, se ha obtenido sustituyendo los valores conocidos de x y y en la ecuación $y = mx + b$; las ecuaciones del segundo conjunto, que se muestran en la columna de la derecha, se han obtenido multiplicando los dos miembros de cada una de las ecuaciones del primer conjunto por el coeficiente de m, que se halla en cada una de las ecuaciones del primer conjunto:

$$\begin{array}{rcl}
1.48 = m + b & \qquad & 1.48 = m + b \\
1.76 = 2m + b & & 3.52 = 4m + 2b \\
2.78 = 3m + b & & 8.34 = 9m + 3b \\
3.32 = 4m + b & & 13.28 = 16m + 4b \\
3.86 = 5m + b & & 19.30 = 25m + 5b \\
4.15 = 6m + b & & 24.90 = 36m + 6b \\
4.75 = 7m + b & & 33.25 = 49m + 7b \\
5.66 = 8m + b & & 45.28 = 64m + 8b \\
6.18 = 9m + b & & 55.62 = 81m + 9b \\
\underline{6.86 = 10m + b} & & \underline{68.60 = 100m + 10b} \\
40.80 = 55m + 10b & & 273.57 = 385m + 55b
\end{array}$$

Súmese cada columna de ecuaciones, como se indica,

$$40.80 = 55m + 10b$$
$$273.57 = 385m + 55b$$

de donde resulta $m = 0.596$ y $b = 0.802$.

La recta mejor ajustada (siguiendo el criterio de los mínimos cuadrados) tiene por ecuación

$$y = 0.596x + 0.802$$

Si se dividen entre 10 los dos miembros de la ecuación $40.80 = 55m + 10b$ (que se ha obtenido sumando las ecuaciones de la columna izquierda, se tiene

$$4.08 = 5.5m + b$$

El punto promedio del conjunto de datos considerados en su totalidad es (5.5, 4.08), y la ecuación $4.08 = 5.5m + b$ cumple los requisitos necesarios para que la recta $y = mx + b$ pase por el punto (5.5, 4.08). De ahí que la recta $y = 0.596x + 0.802$ a la que hemos llamado la recta mejor ajustada, sea una de las muchas rectas para las cuales la suma algebraica de los residuos es nula. Además, es la recta para la cual la suma de los residuos es la mínima posible.

EL SIMBOLO Σ

La notación que sigue nos permitirá simplificar considerablemente las ecuaciones de la próxima sección. Si se conoce un conjunto de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, se define $\sum x$ como la suma de las abscisas y $\sum y$ como la suma de las coordenadas; esto es,

$$\sum x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$\sum y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

por lo tanto, las coordenadas del punto promedio del conjunto son

$$\left(\frac{\sum x}{n}, \frac{\sum y}{n} \right)$$

Análogamente, la suma de los cuadrados de las abscisas en $\sum x^2$ y la suma de los productos de las abscisas por sus correspondientes ordenadas es $\sum xy$

DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Si ajustamos la recta $y = mx + b$ a los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, sus residuos son

$$\begin{aligned} r_1 &= y_1 - (mx_1 + b) \\ r_2 &= y_2 - (mx_2 + b) \\ &\vdots \\ r_n &= y_n - (mx_n + b) \end{aligned}$$

y los cuadrados de los residuos serán

$$\begin{aligned} r_1^2 &= y_1^2 - 2my_1x_1 - 2y_1b + m^2x_1^2 + 2mx_1b + b^2 \\ r_2^2 &= y_2^2 - 2my_2x_2 - 2y_2b + m^2x_2^2 + 2mx_2b + b^2 \\ &\vdots \\ r_n^2 &= y_n^2 - 2my_nx_n - 2y_nb + m^2x_n^2 + 2mx_nb + b^2 \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones y disponiendo el segundo miembro de la ecuación en la forma de un binomio cuadrado en b, resulta:

$$\sum r^2 = nb^2 + 2(m\sum x - \sum y)b + (m^2\sum x^2 - 2m\sum xy + \sum y^2)$$

Si se hace la gráfica de $\sum r^2$ con respecto a b, representa una parábola que se halla arriba del eje b (puesto que $\sum r^2$ es positivo); la parábola se abriría hacia arriba, pues el coeficiente de b^2 es positivo, y su punto mínimo (vértice) tendría por abscisa

$$b = -\frac{m\sum x - \sum y}{n}$$

Esto implica que b y m deben satisfacer la relación

$$\sum y = m\sum x + nb$$

para que la suma de los cuadrados de los residuos sea mínima. Observe que la ecuación anterior es precisamente la misma ecuación que se ha obtenido anteriormente sumando los miembros de las ecuaciones de la columna izquierda. Observe, además, que si se dividen ambos miembros de la ecuación arriba mencionada entre n se obtiene

$$\frac{\sum y}{n} = m\frac{\sum x}{n} + b$$

que es la condición necesaria para que el punto promedio $\left(\frac{\sum x}{n}, \frac{\sum y}{n}\right)$ del conjunto esté sobre la recta.

Si la expresión de la suma de los cuadrados de los residuos se arregla en la forma de una cuadrática en m, se tiene

$$\sum r^2 = (\sum x^2)m^2 + 2(b\sum x - \sum xy)m + (\sum y^2 - 2b\sum y + nb^2)$$

Para que $\sum r^2$ sea mínimo m, deberá ser igual a $-\frac{b\sum x - \sum xy}{\sum x^2}$ lo que implica que m y b deben satisfacer también la ecuación

$$\sum xy = m\sum x^2 + b\sum x$$

que es la ecuación que se obtiene al sumar los segundos miembros de la columna derecha del inicio del tema. Resolviendo el sistema de las ecuaciones $\sum y = m\sum x + nb$ y $\sum xy = m\sum x^2 + b\sum x$ se obtienen los valores de m y b de la ecuación $y = mx + b$, en forma tal que $\sum r^2$ sea mínimo, conformándose así con la teoría de los mínimos cuadrados.

La ecuación de una curva que pasa por unos puntos, o cerca de ellos, de manera que nos indique su comportamiento general, recibe el nombre de ecuación empírica. Al proceso necesario para determinar una ecuación empírica que se pueda aplicar a un conjunto dado de puntos se llama ajuste de curvas.

Para la aplicación de las ecuaciones empíricas son básicas dos decisiones: el tipo de curva a emplear y la manera de evaluar las constantes de esta ecuación. A continuación se da una tabla donde se han sintetizado los distintos métodos de ajuste de la curvas estudiadas hasta aquí.

Tipo de curva	**Método de evaluación de las constantes**	**Procedimiento**
$y = ax + b$	Puntos promedio	1. División del conjunto de datos en dos subconjuntos. 2. Determine las coordenadas del punto promedio de cada uno de los subconjutos. 3. Determine la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos promedio.
$y = ax^2 + bx + c$	Puntos promedio	1. Divida el conjunto dado en tres subconjuntos. 2. Determine las coordenadas de cada uno de los tres puntos promedio 3. Determine la ecuacion de la parábola que pasa por tres puntos promedio.
$y = ax^n$	Puntos promedio	1. Tome los logaritmos de ambos miembros de las ecuaciones para obtener $\log y = \log a + n \log x$. 2. Haga una nueva tabla con la que calculará los logaritmos de las coordenadas dadas. 3. Ajuste una recta a estos nuevos datos.
$y = a(10)^{kx}$	Puntos promedio	1. Calcule el logaritmo de ambos miembros de la ecuación con el fin de obtener $\log y = \log a + kx$

		2. Haga una nueva tabla con la que calculará x y $\log y$. 3. Ajuste una recta a estos datos.
$y = mx + b$	Mínimos cuadrados	1. Determine un conjunto de ecuaciones de la forma $y = mx + b$, obtenidas por sustitución de las coordenadas x y y. 2. Determine un segundo conjunto de ecuaciones derivado del primero al multiplicar ambos miembros de cada ecuación por el coeficiente m. 3. De cada uno de los conjuntos de ecuaciones, obtenga una ecuación en m y b, sumando miembro a miembro. 4. Resuelva las dos ecuaciones resultantes para m y b.

Se dice que una curva bien ajustada es aquella en que los valores absolutos de los residuos son pequeños. El residuo de un punto es la diferencia entre su ordenada y la del punto que le corresponde sobre la curva. Al estudiar un tipo dado de curvas, la mejor ajustada será aquella en que sus constantes se determinen en forma tal que la suma de los cuadrados de sus residuos sea mínima. En general, esta curva no se obtiene por el método de los puntos promedio, sino por el de los mínimos cuadrados.

El problema para decidir el tipo de curva por emplear a veces se simplifica considerablemente con el uso de papeles especiales de coordenadas. Si los puntos tienen tendencia a estar sobre una recta cuando se han trazado sobre papel logarítmico, se recomienda emplear una curva del tipo $(y = ax^n)$; ese papel está graduado tanto vertical como horizontalmente en forma logarítmica. En cambio, si los puntos tienen tendencia a hallarse sobre una recta al dibujarse sobre papel semilogarítmico (aquel que tiene una escala uniforme y la otra logarítmica) se recomienda utilizar la ecuación $\left[y = a(10)^{kx}\right]$.