UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE PANAMÁ OESTE
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESIS

ECUACIONES ALGEBRAICAS: SUS MÉTODOS DE SOLUCIÓN DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA

ELABORADO POR:

JEANETH VERGARA
CÉDULA 8-411-490

Trabajo de grado sometido a la consideración de la Facultad, para optar por el título de Magíster en Matemática Educativa.

PROVINCIA DE PANAMÁ OESTE, LA CHORRERA
ENERO DE 2020

PÁGINA DE APROBACIÓN:

Director de maestría

DEDICATORIAS

A mi familia por su inmenso amor y estar siempre presente, en especial a mi madre por su constante motivación y tomar cada uno de mis proyectos como suyo.

AGRADECIMIENTOS

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por todas sus bendiciones y por la oportunidad de culminar un proyecto más en mi vida. A mi familia por su apoyo incondicional y su constante motivación.

A los profesores de la maestría, en especial a la profesora Zoila Rodríguez por la asesoría brindada en la elaboración de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN EJECUTIVO

ECUACIONES ALGEBRAICAS: SUS MÉTODOS DE SOLUCIÓN DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA.

Se presenta el siguiente trabajo con la finalidad de comprender la evolución de los conceptos, sistemas de numeración y métodos de solución de algunas ecuaciones algebraicas que utilizaban las diferentes civilizaciones. Para ello, se utiliza una investigación documental, ya que se realiza una revisión bibliográfica de fuentes secundarias que muestran importantes registros de la historia de la matemática, donde se indican el desarrollo de las ecuaciones en las diferentes etapas del álgebra con la finalidad de recolectar información para la elaboración de la misma. Además, analizaremos los métodos encontrados y compararemos las técnicas utilizadas en la antigüedad con los procedimientos modernos y así motivar el interés en estudiantes y docentes por la historia de la matemática.

Palabras claves: álgebra, ecuaciones algebraicas, métodos de solución.

SUMMARY

ALGEBRAIC EQUATIONS: THEIR METHODS OF SOLUTION FROM A HISTORICAL PERSPECTIVE.

The following work is presented in order to understand the evolution of the concepts, numbering systems and methods of solution of some algebraic equations used by different civilizations. For this, a documentary investigation is used since a bibliographic review of secondary sources is carried out that shows important records of the history of mathematics, where the development of the equations in the different stages of algebra are indicated in order to collect information for the elaboration of it. We will also analyze the methods found and compare the techniques used in ancient times with modern procedures and thus motivate the interest of students and teachers in the history of mathematics.

Keywords: algebra, algebraic equations, solution methods.

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de la humanidad la matemática ha ido evolucionando, la solución de muchos problemas antiguos implica el uso de diferentes métodos algebraicos propuestos por cada civilización, estos métodos históricos de la solución de ecuaciones son un recurso didáctico importante para mejorar la comprensión y habilidad matemática.

El propósito fundamental de este trabajo es ofrecer un documento que facilite información sobre la evolución de las ideas que han llevado a determinar los métodos para resolver ecuaciones algebraicas en las diferentes civilizaciones, para esto se ha realizado un estudio documental, a través de la revisión y lectura de diversas fuentes.

Para alcanzar este propósito lo hemos estructurado en cuatro capítulos, de la siguiente manera:

En el capítulo 1, denominado aspectos generales, se plantean los antecedentes, los objetivos y el problema de la investigación, describiendo así la importancia que tiene la elaboración de este documento.

En el capítulo 2, hacemos referencia al marco teórico, específicamente la matemática en la antigüedad, puesto que consideramos necesario comprender todo lo relacionado con los diferentes tipos de numeración y de su evolución, además, la forma de desarrollar las operaciones aritméticas de las diferentes civilizaciones, ya que lo utilizaremos en el desarrollo del trabajo en general.

Posteriormente mencionamos las características de las distintas etapas del desarrollo del álgebra que tradicionalmente establecen los historiadores de la matemática: etapa retórica, etapa sincopada y la etapa simbólica.

Una vez planteado el problema de investigación y los objetivos a alcanzar se desarrolla en el capítulo 3, el marco metodológico, que permitió ejecutar la investigación.

En el capítulo 4, presentamos el recorrido histórico de los métodos de solución de las ecuaciones algebraicas realizados por las diferentes civilizaciones, basándonos en las distintas etapas del álgebra, utilizando una notación moderna para su mayor comprensión.

Finalmente, se presentan las conclusiones, recomendaciones y la bibliografía que fue conveniente consultar al realizar la presente investigación.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS GENERALES

1.1. Antecedentes

Desde la antigüedad las grandes civilizaciones como la egipcia, babilónica, griega, china, india y árabe encontraron en la matemática un medio para la solución de problemas. Los trabajos que realizaron estas culturas en la agricultura y cálculos del comercio para sobrevivir y comprender la realidad en que se formaban, fueron aspectos que impulsaron el desarrollo del pensamiento matemático.

El conocimiento de la historia favorece la comprensión profunda de los problemas matemáticos, a través de la creación de las ideas o conceptos, y el contexto en que aparecen. La historia es una fuente de información para presentar su evolución y estudiar las diversas aproximaciones a los conceptos actuales.

La historia de la matemática permite conocer las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las ideas, el origen de los términos, lenguajes y notaciones en que se expresaban. Con respecto a la historia de la matemática y a la utilidad o beneficio de estudiarla, De Guzmán (1992) justifica esta afirmación señalando, “La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. (...) La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y, en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas".

En los últimos años se ha incrementado el interés por introducir una perspectiva histórica en la enseñanza de la matemática, puesto que la misma debe ser presentada como un conjunto de conocimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo y que con seguridad, continuarán evolucionando en el futuro.

Es importante tener presente que existen varios trabajos de investigación que analizan desde distintos puntos de vista y en diferentes niveles educativos la importancia de la historia de la matemática en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Consideramos relevantes registros referenciales, consultados de libros y artículos de distintas fuentes; donde se confirma que son múltiples y de muy diversa tipología las razones que se puedan aducir para justificar o al menos aconsejar la historia de la matemática como un elemento importante a considerar en la didáctica de esta. Entre los que podemos mencionar:

Gómez, M. y Fernández, D. (2005): En trabajo presentado en CLAME 19, donde presentan de qué forma puede ser usada la historia de la matemática como herramienta didáctica, donde aclara que la utilización adecuada de aspectos históricos hace más atractivo los temas de que se habla, suministrando grandes dosis de motivación y sentido. De ahí que la matemática, la metodología de su enseñanza y su historia, como ciencia, se pueden valorar como conocimientos científicos enlazados en el proceso de la instrucción y la educación.

Chávez, E. y Salazar, J. (2003), presentan una investigación de la historia de la matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza aprendizaje. Donde concluyen que, en cuanto a la enseñanza de la historia de la matemática, esta promueve la contextualización histórica de un concepto o tema y fomenta un cambio de actitud hacia esta disciplina.

González, P. (1991) en su artículo: *Historia de la matemática: integración cultural de la matemática, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza*. Reclama la función didáctica de la historia de la matemática, justificando el hecho de que un entendimiento de los conceptos fundamentales de cualquier ciencia requiere el conocimiento de su historia, ya que esta favorece la comprensión profunda de los problemas matemáticos, apoyando a un aprendizaje activo y apelando a la discusión.

Dalcin, M. y Olave, M. (2007), presentan investigaciones a nivel medio y superior sobre ecuaciones de primer y segundo grado: su historia.

El tratamiento que daban algunas culturas antiguas a problemas relacionados con su diario vivir y que en el lenguaje del álgebra actual llamaríamos ecuaciones algebraicas, es lo que nos motiva a realizar este trabajo.

El estudio de algunas ecuaciones algebraicas desde una perspectiva histórica y presentar los métodos de solución que utilizaban algunas civilizaciones para resolver estas ecuaciones, será el eje fundamental de esta investigación. Además, motivar el interés en el aprendizaje de las matemáticas, específicamente en el de las ecuaciones algebraicas.

Como afirma Bell, Eric T. (1985): “Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como la matemática”.

1.2. Planteamiento del problema

Una ecuación algebraica es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas.

En matemática la resolución de una ecuación es el procedimiento de cálculo para encontrar cuáles son los valores que reemplazados en las incógnitas o variables satisfacen la igualdad de la ecuación, siendo esta una parte esencial de la matemática, ya que consiste en llevar a la práctica los procedimientos y los algoritmos.

El campo de aplicación de las ecuaciones es inmenso, en la actualidad las utilizamos con la finalidad de resolver problemas complejos como, por ejemplo, la predicción del tiempo y los fenómenos atmosféricos, en ingeniería y arquitectura, etc.

Las resoluciones de ecuaciones algebraicas juegan un papel importante en el nacimiento y desarrollo del álgebra. Encontrar la solución de estas ecuaciones ha sido objeto de estudio desde la antigüedad, los egipcios, babilonios, entre otras civilizaciones, desarrollaron técnicas y métodos por la necesidad de resolver problemas prácticos que hoy en día suelen resolverse mediante ecuaciones algebraicas.

A partir del análisis de los datos teóricos planteamos la siguiente interrogante: ¿Cómo el desarrollo histórico de las ecuaciones algebraicas influye en los diferentes métodos de solución utilizados en la actualidad?

De igual forma para facilitar el análisis del problema tenemos las siguientes preguntas secundarias:

¿Cómo evoluciona la simbología y los conceptos matemáticos en las diferentes etapas del álgebra?

¿Qué características tienen las tres etapas en que se divide el desarrollo del álgebra?

¿Qué métodos de solución para las ecuaciones algebraicas utilizaban algunas culturas antiguas?

1.3. Justificación

Uno de los objetivos de la historia de la matemática es evidenciar su presencia en la vida de nuestra especie a través del tiempo, de este modo se humaniza, mostrándola como una actividad que se ha realizado, creado y construido a través de siglos.

La matemática se presenta hoy en día como un conjunto de conocimientos y procedimientos cerrados, con fórmulas, teoremas, símbolos y signos, sin explicar su origen. Es por ello que consideramos atinado realizar un estudio de las ecuaciones, como un conjunto de conocimientos que han evolucionado con el tiempo. Así, el propósito fundamental de esta investigación será el de proporcionar un documento sobre el desarrollo de algunas ecuaciones algebraicas, analizar los métodos de solución que utilizaban algunas culturas y comparar estos resultados y procedimientos con los que se utilizan hoy en día; a fin de motivar y facilitar el estudio de las ecuaciones utilizando los detalles de su evolución histórica.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general:

- ✓ Realizar un estudio del desarrollo histórico de las ecuaciones y los diferentes métodos de solución empleados por algunas civilizaciones.

1.4.2. Objetivos específicos

- ✓ Identificar las características de las diferentes etapas del desarrollo del álgebra.
- ✓ Comprender los conceptos, la simbología y métodos de solución relativos a las ecuaciones algebraicas a lo largo de la historia.
- ✓ Motivar el interés a los estudiantes y docentes por la historia de la matemática.

1.5. Delimitación

Este trabajo se delimita al análisis de algunos métodos de resolución de ecuaciones algebraicas, basándonos en las diferentes etapas del desarrollo del álgebra.

1.6. Limitación

Para la elaboración del presente trabajo de investigación se presentó dificultad en la disponibilidad de los recursos bibliográficos en general.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. La matemática en la antigüedad

La matemática es tan antigua como el propio conocimiento humano. Se puede apreciar en los diseños prehistóricos de utensilios de cerámica.

La necesidad de medir, dividir y distribuir la riqueza material de las sociedades impulsó el nacimiento de los primeros sistemas numéricos, de esta manera, comparando cantidades, es como el hombre comenzó a construir el concepto de número y su forma de representación fue cambiando a expresiones más sencillas a medida que las cantidades se iban incrementando. El método de cálculos consistía en el uso de los dedos de la mano para contar. Más tarde empezaron algunas civilizaciones a tener un pensamiento más profundo sobre la matemática.

Para mejor comprensión del recorrido histórico que se va a hacer en el capítulo 4, consideramos necesario hacer un breve análisis sobre la matemática de las diferentes civilizaciones, pues necesitamos comprender cómo era su aritmética, sus sistemas de numeración, operaciones básicas, entre otros.

2.1.1. La matemática en Egipto

Esta gran civilización nació a orillas del río Nilo hacia el cuarto milenio a.C. Esta cultura utilizaba la matemática como una pura aritmética. Se preocupaban un poco de la forma de los objetos y los diferentes tipos de geometría, pero no utilizaban demostraciones, era matemática práctica para los problemas de su sociedad.

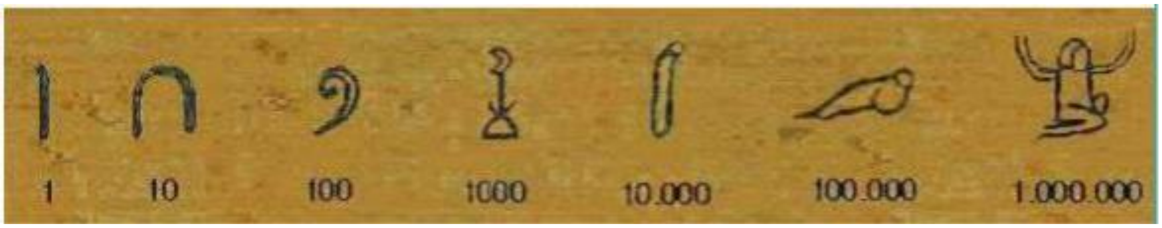
La cantidad de información matemática que podemos obtener de las piedras talladas encontradas en las tumbas, los templos y de los calendarios es muy escasa y el panorama de las aportaciones egipcias que tendríamos sería muy incompleto. Los conocimientos que tenemos sobre la matemática egipcia se fundamentan, afortunadamente de otras fuentes de información; hay un cierto número de papiros egipcios que, de una manera u otra, han conseguido llegar hasta nuestros días, como lo es el papiro de Rhind escrito por el escriba Ahmes, entre otros.

2.1.1.1. Sistema de numeración

Después de un largo proceso, los primitivos textos pictográficos evolucionaron para dar lugar a una ordenación lineal de símbolos más sencillos: sistema de notación jeroglífica.

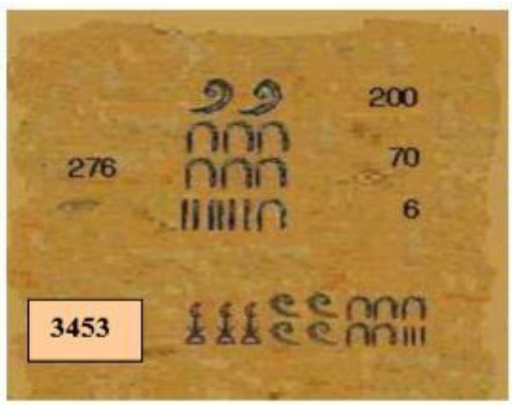
Los egipcios usaron una numeración decimal, no posicional, en el que el principio aditivo determina la disposición de los símbolos.

Utilizaron distintos símbolos para la unidad y para cada potencia de 10.

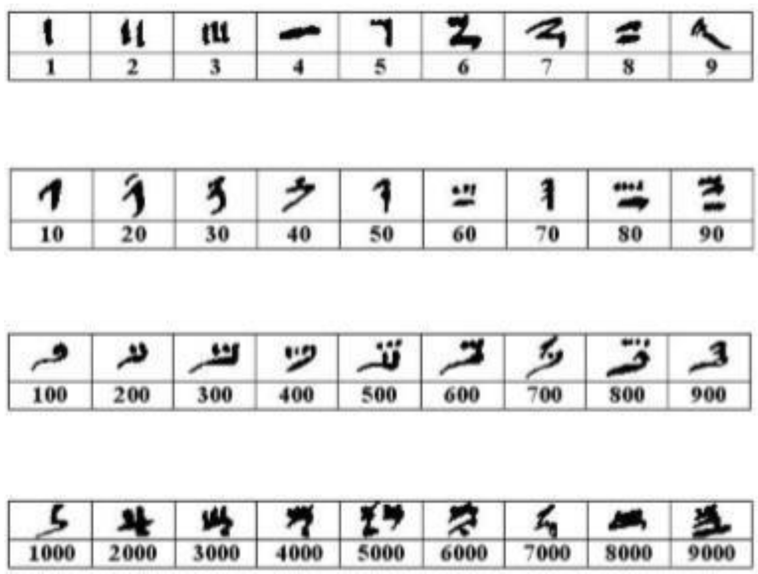


La utilización de este principio permite expresar cualquier número y cada símbolo se repite el número de veces necesario.

Así:

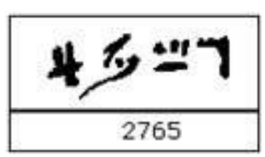


A veces se invierte el orden de los símbolos, la representación puede ser vertical en lugar de horizontal. Este procedimiento tiene un claro inconveniente, pues hace la escritura de números grandes muy tediosa al tener que repetirse varias veces los mismos signos.

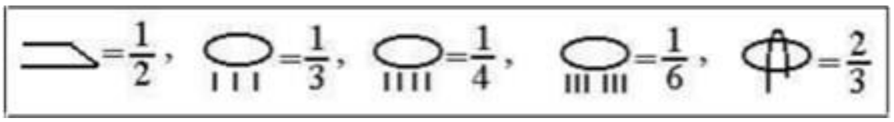
Realmente no se puede hablar de un único sistema de numeración, ya que el uso de estos signos quedó reservado a las inscripciones monumentales, en el uso diario y fue sustituido por la escritura hierática o sagrado, una forma más simple que permitía mayor rapidez y comodidad a los escribas, ya que el principio de repetición del sistema jeroglífico es reemplazado por la introducción de algunos signos especiales. Este sistema también es decimal y utiliza signos para representar los números del uno al diez, así como las potencias de diez.

.

Números hieráticos

Con esta nueva notación de los números, es clara la simplificación de la cantidad de símbolos usados a la hora de escribir en documentos o de realizar operaciones elementales con ellos.



Los egipcios también desarrollaron un sistema de representación fraccionaria. Este sistema se construye desde la necesidad de resolver situaciones problemáticas cotidianas sobre repartos igualitarios. Adoptaron un sistema de notación diferente al nuestro. No definen los conceptos de numerador y denominador, solo consideraban las fracciones unitarias, es decir, aquellas cuyo numerador es uno y las representaban con un signo oval encima del número; su notación era la siguiente:



Con el tiempo, este símbolo se transformó en un punto.

Así $\frac{1}{5}$ seria representado por

 $= \frac{1}{5}$ (jeroglífico)  $= \frac{1}{5}$ (hierática)

Se traduciría, literalmente, como "parte 5".

Los egipcios reducían todas las fracciones a sumas de fracciones unitarias diferentes, de la forma $\frac{1}{n}$ donde n es un entero y la fracción $\frac{2}{3}$ se escribía con un símbolo específico. El símbolo "+" no se empleaba y las fracciones aparecían en forma sucesiva.

Los escribas no conocían un método rápido para efectuar las transformaciones, por lo que se limitaban a emplear tablas ya escritas o a efectuar el proceso de división conocido.

2.1.1.2. Aritmética egipcia

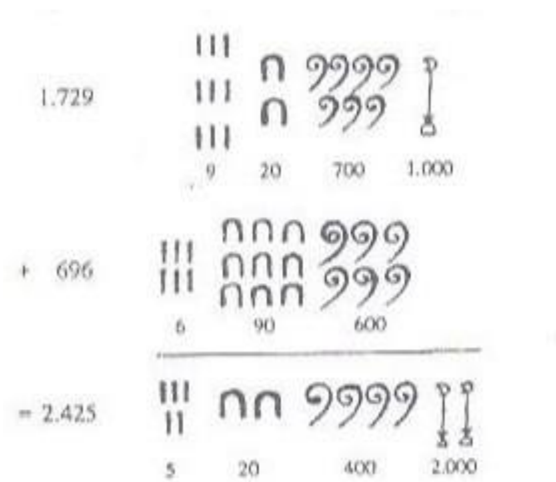
La primera característica a destacar es que gracias al conocimiento completo de las tablas de duplicación y el cálculo de los tercios de un número, los escribas manejaban con total facilidad las cuatro operaciones elementales: suma, resta, multiplicación y división.

2.1.1.2.1. Adición y sustracción

Las sumas se realizaban del modo más simple posible, se añadían los símbolos y en el caso de tener 10 iguales se sustituían por uno de la siguiente potencia de 10, tal y como muestra el ejemplo con escritura jeroglífica.

<u>Ejemplo 2.1</u>

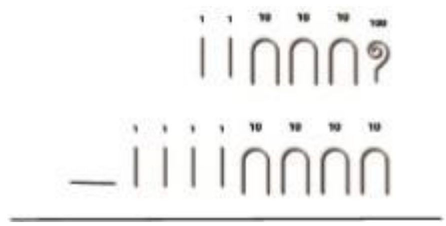
$1729 + 696 = 2\,425$



Las restas se realizaban de modo similar a las sumas, ya que se reduce al intercambio de un símbolo de valor mayor por 10 de valor inmediatamente anterior.

Ejemplo 2.2

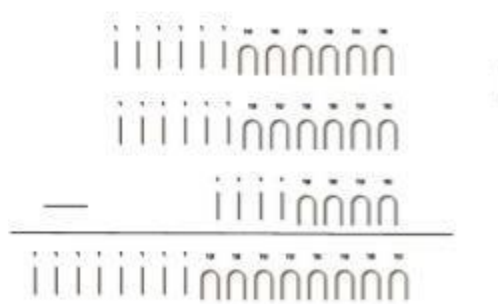
La resta $132 - 44$, en notación egipcia es:



Para poder ejecutar la operación, el 132 se transforma de la siguiente manera:

Se cambia el símbolo que representa al número cien  por diez símbolos que representan al número diez  . Y un símbolo que representa al número diez, se cambia por diez símbolos que representan al número uno

Luego se tiene:



Lo que corresponde a 88.

2.1.1.2.2. Multiplicación

La multiplicación egipcia se efectúa por medio de duplicaciones sucesivas de uno de los factores y el segundo factor se expresa como suma de potencias de 2.

Ejemplo 2.3

Multiplicar 41×59

Solución: El escriba Ahmes construye la tabla siguiente en la que el valor de cada fila, se obtiene tomando el doble del que tiene arriba:

1	59 /
2	118
4	236
8	472 /
16	944
32	1888 /

Puesto que el siguiente valor de la primera columna sería 64 que es mayor que 41 nos quedamos con el 32. Lo que Ahmes dice que se debe hacer es expresar 41 como la suma de los números de la primera columna (suma de potencias de dos), $41 = 32 + 8 + 1$. Ahmes aplica, entonces, la propiedad distributiva, por lo que:

$$41 \times 59 = 32 \times 59 + 8 \times 59 + 1 \times 59 = 1888 + 472 + 59 = 2419$$

Ejemplo 2.4

Efectuar por el método egipcio: 19×71.

Solución:

Para realizar el producto, se lleva a cabo sucesivas duplicaciones de 71 hasta la última potencia de 2 menor que 19. Luego se escogen las potencias de 2 cuya suma sea 19, esto es:

2^0	1	71 /
2^1	2	142 /
2^2	4	284
2^3	8	568
2^4	16	1136 /

Como $19 = 16 + 2 + 1$

Entonces $19 \times 71 = (16 + 2 + 1) \times (71)$

$$= (1136 + 142 + 71)$$

$$= 1349$$

Ejemplo 2.5:

Calcular 24×37

Solución:

2^0	1	37
2^1	2	74
2^2	4	148
2^3	8	296 /
2^4	16	592 /

Dado que $24 = 16 + 8$, basta con sumar los múltiplos de 37:

$24 \ x \ 37 = 592 + 296 = 888$

2.1.1.2.3. División

La división egipcia se realiza por un proceso similar al de la multiplicación, esto es por medio de duplicaciones sucesivas del divisor hasta obtener un valor menor o igual al dividendo.

Ejemplo 2.6

$21 \div 3$

1	3
2	6
4	12

Como el número siguiente es 8 y le corresponde 24 que es mayor que 21 no se sigue con los cálculos en la tabla.

Como 21 se obtiene como la suma de la segunda columna $(3 + 6 + 12)$,

luego: $1 + 2 + 4 = 7$

Así: $21 \div 3 = 7$

Pero los escribas egipcios se dieron cuenta que existen divisiones donde el resultado no es exacto. En esta situación se realizaron las fracciones unitarias.

Veamos el siguiente ejemplo donde la división no es exacta:

Ejemplo 2.7

Efectuar por el método egipcio $35 \div 8$

Solución:

Se hacen sucesivas divisiones entre potencias de 2. Se suman aquellos mútiplos y submúltiplos cuyo resultado es 35. La suma de las respectivas potencias de 2 corresponde al cociente.

1	8
2	16
4	32 /
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2 /
$\frac{1}{8}$	1 /

Los valores seleccionados son: $32 + 2 + 1$, ya que su suma es 35;

el resultado es : $4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Ejemplo 2.8

$847 \div 33$

Solución:

El escriba busca por qué tiene que multiplicar 33 para obtener 847:

1	33 /
2	66
4	132
8	264 /
16	528 /

Escribe $847 = 528 + 319$

$= 528 + 264 + 55$

$= 528 + 264 + 33 + 22$

Y como $16 + 8 + 1 = 25$, concluye que la división $847 \div 33$ da 25 como cociente y 22 de resto.

2.1.1.2.4. Fracciones egipcias

Las fracciones egipcias constituyen un sistema de representación simbólico con el que se expresan las cantidades positivas no enteras.

Con respecto al principio de desdoblamiento utilizado en la multiplicación y la división, Collette (1986) dice: “Si por una parte este principio de desdoblamiento facilita las operaciones usuales, por otra parte, los egipcios encontraron serias dificultades para la aplicación de estas operaciones a las fracciones. En efecto, reducían todas las fracciones (excepto quizás la fracción $\frac{2}{3}$) a sumas de fracciones unitarias a fin de simplificar las operaciones”.

Como el método era muy complejo se hizo necesaria la creación de tablas de fracciones unitarias. Esta metodología, que en principio parece tediosa, presenta algunas ventajas, pues utilizando estas tablas las operaciones se efectuaban más sencillas, es por ello que el papiro antes de proponer el problema da una tabla de descomposición para facilitar los cálculos.

Veamos algunos ejemplos de reducción de fracciones.

<u>Ejemplo 2.9</u>

Ahmes transforma $\frac{2}{7}$, y obtiene $\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$. ¿Cómo lo consigue?

Desdoblemos $\frac{2}{7}$, tenemos $\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$.

Desdoblemos $\frac{1}{7}$, tenemos $\frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14}$.

Desdoblemos $\frac{1}{14}$, tenemos $\frac{1}{14} = \frac{1}{28} + \frac{1}{28}$.

Así:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + [\frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7}]$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$$

Ejemplo 2.10

Ahmes afirma que $\frac{1}{15} + \frac{1}{3}\ equivale\ a\ \frac{2}{5}$

En vez de desdoblar Ahmes descompone en tercios:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

Pero $\frac{1}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15}$

Así:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{15} + [\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5}]$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$$

La forma de expresar las fracciones como la suma de una serie de fracciones de numerador unitario persistió a lo largo de milenios, desde el inicio del Egipto hasta la Grecia antigua, siendo utilizada por Fibonacci y los matemáticos árabes.

2.1.2. La matemática babilónica

El conocimiento actual de las matemáticas babilónicas es producto de las interpretaciones realizadas a las tablillas existentes que se encuentran muy dispersas en distintos lugares del mundo y proceden de excavaciones arqueológicas. La mayoría de estas tablillas recuperadas, datan del 1800 a.C. al 1600 a.C. y tenían que ser cocidas, por lo que estos documentos se conservan en buen estado.

El contenido matemático revelado por estos documentos es suficientemente variado, sin embargo, hubo que esperar para apreciar estos conocimientos matemáticos debido a las dificultades encontradas para interpretar esta escritura cuneiforme.

En algunas de estas tablillas se evidencia el conocimiento de algoritmos para realizar los cálculos matemáticos determinados a partir del sistema de numeración sexagesimal, es decir, un sistema de numeración cuya base es 60, en el cual los dígitos toman un valor relativo, según el lugar que ocupan.

Este manejo numérico lo simplificaron con la construcción de tablas de multiplicar con las cuales hallaban productos parciales. Estas vienen en dos variedades, tablas individuales y combinadas. Una sola tabla de multiplicar tiene productos para un solo número, llamado el número principal, mientras que una tabla combinada tiene varias tablas de multiplicar escritas en orden, en una tableta. No hay tablas de división, en su lugar, encontramos tablas recíprocas, ya que en lugar de dividir multiplicaban por su recíproco. También contaban con tablas para los cuadrados de los números enteros, para los cubos, para encontrar inversos y tablas de raíces cuadradas.

2.1.2.1. Sistema de numeración

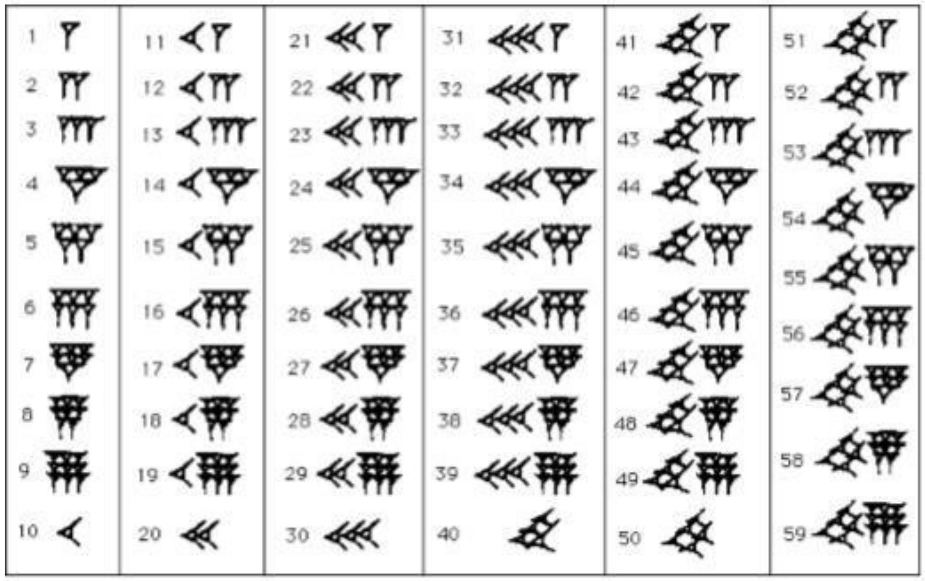
Los babilonios necesitaron solo dos símbolos para representar su sistema sexagesimal: clavo y cuña.

Un solo clavo representa la unidad y, más de un clavo, representaría la suma de estos, hasta un máximo de 9. Una cuña representa el número diez, dos cuñas, veinte, hasta un máximo de 5 cuñas, puesto que al llegar al sesenta se usa de nuevo un solo clavo. De esta manera, podrían representar cualquier número usando combinaciones de solo dos símbolos.

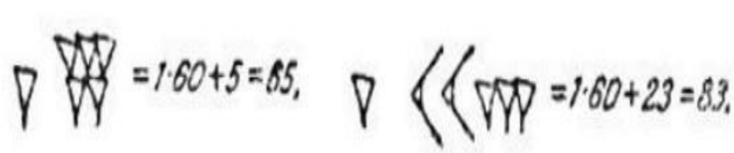
Otro de los aportes del sistema babilónico fue la introducción de la notación posicional, es decir, que el valor de una cifra depende de su posición en la escritura de un número. Con la ayuda de estos dos signos mencionados, se podían escribir todos los números enteros del 1 al 59, se obtenían por repetición.

Así:

La representación de los números del 1 al 59 se basaba en el principio aditivo y se representaban de la siguiente forma:



No tenían ningún símbolo para representar el número cero, por lo que el símbolo representaba el número 1 y al 60 al mismo tiempo, se supone que el contexto donde se escribía un número aclaraba de qué número se trataba. En la escritura del número 60 utilizaban el mismo signo que se empleaba para el 1, pero con un mayor intervalo entre él y los signos restantes.



2.1.2.2. Aritmética babilónica

Para simplificar los cálculos los babilonios hicieron uso de tablas, ya creadas con los resultados de las operaciones básicas.

2.1.2.2.1. Adición y sustracción

La adición y sustracción se realizaron tal como las actuales operaciones, con ángulos o medidas de tiempo.

Ejemplo 2.11

$$5.38; 30 + 3.25; 45 = (8.63; 75) = 9.4; 15$$

Como: $0; 75 = 1; 15$

$$25 + 38 + 1 = 64 = 1.4$$

y $5 + 3 + 1 = 9$

Entonces:

$$5.38; 30 + 3.25; 45 = 9.4; 15$$

Y

$$5.38; 30 - 3.45; 45 = (4.97; 90 - 3.45; 45) = 1.52; 45$$

2.1.2.2.2. Multiplicación

Se realizaba con planteamientos similares a las operaciones anteriores.

Ejemplo 2.12

La multiplicación del número $7; 30\ por\ 5$ se hacía de la siguiente manera:

$$7 \times 5 + (\frac{30 \times 5}{60}) = 35 + \frac{150}{60}$$

$$= 35 + (2; 30)$$

$$= 37;\ 30$$

Y para multiplicaciones de números más complejos se calculaban de esta forma:

$$7; 30 \times 5; 30 = 7 \times 5 + (\frac{30 \times 5}{60}) + (\frac{7 \times 30}{60}) + (\frac{30 \times 30}{3600})$$

$$= 35 + (\frac{150}{60}) + (\frac{210}{60}) + (\frac{900}{3600})$$

$$= 35 + 2; 30 + 3; 30 + 0; 15$$

$$= 41; 15$$

Ya que: $0; 30 + 0; 30 + 0; 15 = 1; 15$

2.1.2.2.3. División

Los babilonios no tenían un algoritmo para la división, esta se reducía a una multiplicación por el inverso, $\frac{a}{b} = a\,(\frac{1}{b})$.

Solo era necesario tener una tabla de inversos para realizar la división.

Ejemplo 2.13

Dividir $345 \div 15$

En la base sexagesimal el dividendo 345 se descompone en $5 \times 60 + 45$. El inverso del divisor 15 es 4, porque $\frac{1}{15} = \frac{4}{60}$. Ahora multiplicaremos cada componente por 4. Obtenemos $20 \times 60 + 180 = 20 \times 60 + 3 \times 60$. El cociente es $20 + 3 = 23$.

2.1.3. La matemática en China

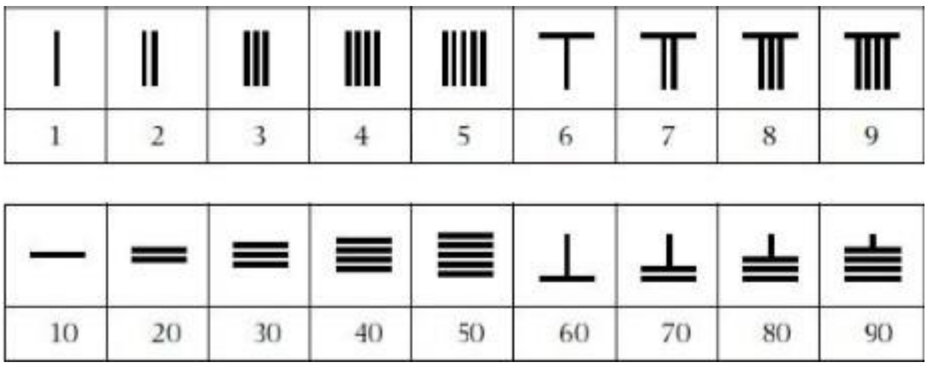
Los primeros testimonios de la matemática china datan del siglo XIII a.C., basadas en testimonios de antiguas inscripciones, manuscritos e incluso libros impresos.

2.1.3.1. Sistema de numeración

En China existieron 2 sistemas de numeración:

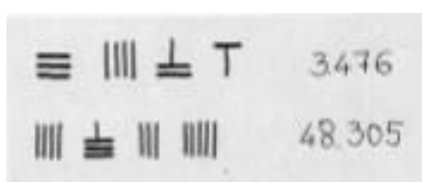
Antiguamente en China, representaban los números por pequeñas varillas de bambú. Dichas varas se utilizaban, para operar con ellas, ordenándolas en diferentes configuraciones sobre el tablero de cálculo.

La representación de los números con varillas de contar es un sistema de numeración decimal posicional. Para evitar confusiones se representan en el tablero de cálculo de dos formas diferentes: verticales y horizontales.



Para formar cualquier número, se colocan de derecha a izquierda, empezando por las unidades y se escribían de forma alterna. Las unidades se pondrían con la forma vertical, las decenas con la horizontal, las centenas con la vertical, etc.

Así: el 3 476 y 48 305 se representaban de la siguiente manera:



Este sistema perduró muy poco, ya que se creaban problemas de confusión entre las descripciones de números grandes.

El otro sistema se empezó a usar aproximadamente desde 1500 a.C. se trata de un sistema decimal de símbolos distintos para cada uno de ellos, usa la combinación de los números hasta el 10 con la decena, centena, millar y decena de millar y su escritura puede ser horizontal o vertical.

一	二	三	四	五	六	七
1	2	3	4	5	6	7

八	九	十	百	千	萬
8	9	10	100	1000	10000

2.1.3.2. Aritmética china

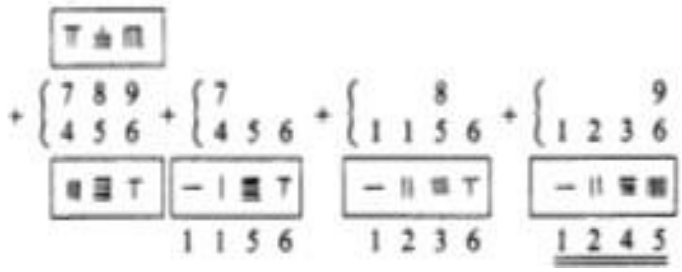
En China las cuatro operaciones básicas se realizaban en el tablero de cálculo. También lograron el acercamiento a las fracciones y los números negativos.

2.1.3.2.1. Adición y sustracción con varillas de contar

Para sumar se representaban los números con las varillas en filas y se va sumando de izquierda a derecha, se empieza por las centenas, luego las decenas y después las unidades, recolocando el resultado en cada paso.

<u>Ejemplo 2.14</u>

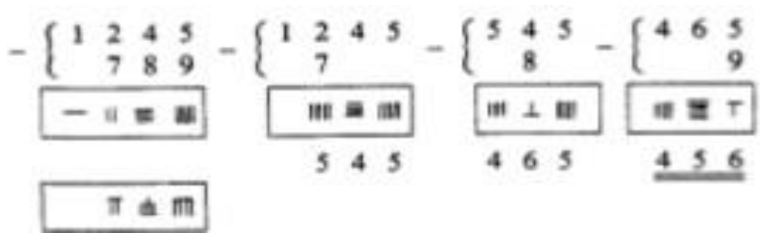
Al sumar 456 +789 se obtiene:



La resta es similar a la suma, se colocan los dos números y se empieza restando de izquierda a derecha.

<u>Ejemplo 2.15</u>

$1245 - 789$



La acumulación de algunos resultados científicos sobre astronomía y conceptos matemáticos se encuentran en el escrito: *El clásico de la aritmética de gnomon y las sendas circulares del cielo*, el cual se cree que fue escrito alrededor del final del siglo II a.C. Se destacan cálculos sobre agrimensura y cuerpos celestes utilizando el teorema Gougu (teorema de Pitágoras), este teorema se usaba para medir distancias, ello se hacía teniendo en cuenta la longitud de un palo vertical y la sombra que arrojaba, por lo que se considera a uno de los catetos del triángulo rectángulo, llamado Gu, como dicho palo y el otro cateto sería su sombra, que recibe el nombre de Gou. A la hipotenusa se le puso el nombre de Xián.

Este escrito también contiene algunos cálculos con fracciones, necesarias para el cómputo del calendario y la astronomía.

Otro tratado de gran importancia sobre el desarrollo matemático de la civilización china es *El libro de los nueve capítulos sobre el arte matemático*, que data más o menos del 250 a.C. el cual incluye problemas sobre ingeniería, agrimensura, cálculo, propiedades de triángulos y resolución de ecuaciones.

2.1.4 La matemática en Grecia

El inicio de la historia de las matemáticas en Grecia se sitúa alrededor del siglo VI a. C., y se señala a Tales de Mileto como el primero que llevó desde Egipto y Babilonia las Matemáticas a Grecia, dejando un legado de teoremas geométricos y aportes significativos.

2.1.4.1. Sistema de numeración

Los griegos al igual que otras civilizaciones como china, hacían sus operaciones aritméticas utilizando algún tipo de ábaco o tablero. Aprendieron de los conocimientos prácticos de Egipto y Babilonia y tomaron el diez como número básico, su sistema de numeración era literal, sus signos no son símbolos numéricos a excepción del signo vertical para el uno; provienen de las primeras letras de las palabras griegas.

Para el año 600 a.C. los griegos desarrollaron su primer sistema de numeración, la numeración ática, era de base decimal y aditivo. Este sistema se caracterizaba porque, a excepción del símbolo para 1 (un trazo vertical), sus cifras representan las iniciales de cada número en escritura arcaica, es por ello que a este sistema también se lo conoce como sistema de numeración acrofónico. El número 1 es representado por una barra vertical; el número 5 representa la letra PI, inicio de la palabra (Pénte); el número 10 representa la letra DELTA, inicio de la palabra (Déka); el número 100 representa la letra ETA, inicio de la palabra (Hékaton); el número $1\ 000$ representa la letra XI, inicio de la palabra (Jilioi) y el número $10\ 000$ representa la letra MY, inicio de la palabra (Múriori). Existían también combinaciones de (Pénte, 5), para $50,\ 500,\ 5\ 000\ y\ 50\ 000$ añadiéndole versiones diminutas de los símbolos correspondientes a las distintas potencias de diez.

Sistema de numeración griega ática

Así, la representación del número 3737 es:

Para el periodo clásico, 600-300 a.C., el sistema griego había cambiado, al sistema Jónico o Alejandrino y se utilizaban 27 letras minúsculas diferentes del alfabeto y algunos símbolos para denotar números de 1 a 900.

α	β	γ	δ	ε	ϝ	ζ	η	ϑ
(alfa)	(beta)	(gama)	(delta)	(épsilon)	(digama)	(dseta)	(eta)	(theta)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	ϰ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
(iota)	(kappa)	(lambda)	(mi)	(ni)	(xi)	(ómicron)	(pi)	(koppa)
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	ς	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
(rho)	(sigma)	(tau)	(ípsilon)	(fi)	(ji)	(psi)	(omega)	(sampi)
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Para distinguirlos de las letras las adornaron con un acento, es decir, α denota la letra y α' denota el número 1. Así se podían representar números hasta 999.

ια΄	φλβ΄	ωπη΄
11	532	888

Para números más grandes usaron un símbolo de acento en la línea base.

Por ejemplo, 2015 se representaba por ͵βιε΄.

Este sistema literal era muy poco flexible, por lo que resultaba bastante complicado hacer operaciones aritméticas, por lo tanto, se sirvieron de la geometría para hacerlo.

Los griegos también utilizaban fracciones. Comenzaron, al igual que los egipcios, con fracciones unitarias, escribiendo el número y a continuación un acento o señal diacrítica y había un símbolo especial para $\frac{1}{2}$. Poco después comenzaron a usar fracciones de cualquier tipo y establecieron la equivalencia de fracciones, a partir de las proporciones.

Escribían las fracciones de varias maneras, una de ellas consistía en escribir el numerador, seguido por una prima y luego el denominador, seguido por una doble prima.

Así $\frac{21}{47}$ se escribiría $\kappa\alpha'\ \mu\zeta''$

Donde $\kappa\alpha$ es 21 y $\mu\zeta$ es $47.$

Hacia 300 a.C., aparece la figura de Euclides, quien en su tratado matemático y geométrico “Elementos”, recopila y organiza la mayor parte del saber matemático de su época, presentado como un sistema formal axiomático deductivo.

Los griegos utilizaron la geometría como herramienta para la solución de ecuaciones, mediante el método de la aplicación de áreas.

Según el historiador de la matemática H.G. Zeuth (1886), citado por P. González U. en su libro *Los orígenes de la geometría analítica*, página 28,

“Viene a ser una geometrización de los métodos algebraicos practicados por los babilonios, una especie de geometría algebraica en la que los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas de la siguiente forma:

- La suma de dos números se obtiene prolongando sobre el primero un segmento igual al segundo.
- La diferencia de dos números se obtiene recortando del primero un segmento igual al segundo.
- El producto de dos números es el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos números.
- El cociente de dos números es la razón de los segmentos que los representan (según los principios del libro V de *Los elementos* de Euclides).

- La suma y la diferencia de productos se reemplaza por la adición y la sustracción de rectángulos.
- La extracción de una raíz cuadrada se establece mediante la construcción de un cuadrado de área equivalente a la de un rectángulo dado. (Euclides II, 14)".

Luego aparece Diofanto (siglo III a.C.), considerado el más importante de los algebristas griegos de la época alejandrina; quien, alejado de la tradición griega de construcciones geométricas para trabajar el álgebra, introdujo un simbolismo algebraico que se basaba en denominar a la incógnita con la primera sílaba de la palabra griega $aritmos$, que significa número, es decir, introduce por primera vez abreviaturas (letras griegas) para indicar la incógnita de una ecuación y sus potencias, donde utiliza el lenguaje oral y mezcla algunas abreviaturas y símbolos para hacer más favorable el razonamiento, lo que más tarde será llamada el Álgebra sincopada.

El sistema de numeración empleado por Diofanto fue el sistema de numeración jónico y representaba las potencias de la incógnita así:

$$\Delta^{y} = \text{cuadrado}$$
$$K^{y} = \text{cubo}$$
$$\Delta^{y}\Delta = 4^{a} \text{ potencia}$$
$$\Delta^{y}K = 5^{a} \text{ potencia}$$

2.1.5. La matemática en la India

Los registros más antiguos existentes en la India sobre conocimientos básicos matemáticos se conocen como el periodo de los Sulvasutras o “regla de la cuerda”, que terminó hacia el siglo II d.C. En este período realizaban mediciones extendiendo una cuerda y estos conocimientos geométricos eran de gran ayuda para la construcción de templos y altares.

A este periodo le sigue la época de los Siddhantas, tratados astronómicos de los siglos IV y V d.C. (periodo Gupta).

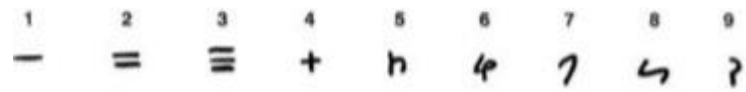
Son múltiples y variados los aportes de la cultura India a las matemáticas de los cuales podemos mencionar el sistema de numeración posicional, la introducción del cero y la utilización de cantidades negativas.

2.1.5.1. Sistema de numeración

Las primeras notaciones numéricas en la India se inician con los numerales herodiánicos en la época de Asoka (siglo III a.C) donde se usaba un sistema en el que se reunían en grupos palotes verticales.

Luego, del 400 a.C. al 100 d.C., los numerales Kharosthi, haciendo uso de la repetición, aportó al anterior sistema nuevos símbolos.

Este sistema se fue desarrollando para dar lugar a un nuevo sistema de numeración llamado caracteres de Brahmi:



Entre los siglos IV y VI el Imperio Gupta alcanzó el control de una gran parte de la India y los numerales Brahmi se transformaron en los numerales Gupta. Luego estos se transformaron en los numerales Nagari. La idea era la misma, pero los símbolos eran diferentes.

El símbolo utilizado para representar el cero era llamado sunya, que significaba vacío. El problema de la numeración fue resuelto finalmente por los hindúes con la introducción de este nuevo símbolo y presentarían un completo sistema de numeración.

Los hindúes no contaban con algún símbolo para indicar la adición y el producto, para la resta, en cambio, utilizaban un punto sobre el sustraendo, otras operaciones se designaban con palabras clave o abreviaturas.

2.2. Etapas del álgebra

Según los historiadores el desarrollo del álgebra se divide en tres etapas a saber: etapa retórica, etapa sincopada y etapa simbólica.

2.2.1. Etapa retórica del álgebra

La etapa retórica es considerada como la primera en el desarrollo histórico del álgebra. En esta etapa el problema se enuncia mediante lenguaje natural con palabras comunes, la solución de un problema se escribía sin abreviaciones o símbolos, como una narración de indicaciones para llegar a la solución; los métodos usados en la resolución de un problema dependían del tipo de este, siendo determinantes los elementos numéricos.

Es de resaltar que las primeras civilizaciones a pesar de usar exclusivamente el lenguaje retórico tuvieron un primer acercamiento al significado de la variable; acercamiento que se puede apreciar en la solución de los problemas encontrados en las tablillas y papiros. Entre estas civilizaciones podemos mencionar:

2.2.1.1. La civilización egipcia

Los conocimientos que tenemos con respecto a la matemática egipcia se basan en algunos documentos en forma de papiros entre ellos, los más antiguos y de contenido matemático más importantes que se conservan, están el de Moscú y el de Rhind.

El papiro de Moscú fue comprado por Golenisheff en el año 1883, a través de Abd-el-Radard, una de las personas que descubrió el escondite de momias reales de Deir el-Bahari. Originalmente se le conocía como Papiro Golenisheff, pero posteriormente, cuando fue a parar al Museo de Bellas Artes de Moscú, en 1917, se conoce como Papiro de Moscú. Con 5 metros de largo y 8 cm de ancho, consta de 25 problemas relacionados con la vida práctica. El papiro fue escrito en hierática, escritura sacerdotal o sagrada, en torno al 1850 a.C. por un escriba desconocido.

El papiro de Rhind, debe su nombre al anticuario escocés Henry Rhind quien visitó Egipto y compró en Luxor el papiro en 1858, y que se encontró en las ruinas de un antiguo edificio de Tebas. Rhind murió cinco años después de la compra y el papiro fue a parar al Museo Británico.

Este papiro mide unos 6 metros de largo y 33 cm de ancho. Considerado como la mejor fuente de información sobre matemática egipcia, escrito en hierático, consta de 87 problemas y su resolución. Nos da información sobre el uso de fracciones, aritmética básica, progresiones, reglas de tres, resolución de ecuaciones simples, cálculo de áreas y volúmenes. Fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en el 1650 a.C. a partir de escritos de 200 años de antigüedad.

Se conoce muy poco sobre el objetivo del papiro. Se ha indicado que podría ser un documento con claras intenciones pedagógicas o un cuaderno de notas de un alumno.

El documento nos revela que los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos muy concretos, relacionados con la repartición de víveres, tierras o cosechas. En la resolución de los problemas muestran una especie de tablas o recetas para resolverlos y, muchas veces, tomados de las propias experiencias de los escribas. No tenían notación simbólica para designar a la incógnita o número desconocido, hacían referencia a la palabra *aha*, que significa montón.

2.2.1.2. La civilización babilónica

La mayor originalidad del sistema de numeración de los babilónicos consiste en la elección de la base 60 para representar cantidades, ello tiene repercusiones hasta la actualidad, utilizándose, para los grados de la circunferencia y para la medida del tiempo.

Desde el punto de vista matemático, las novedades más importantes que registran los textos babilónicos se refieren a la solución algebraica de ecuaciones lineales y cuadráticas y el conocimiento del llamado "teorema de Pitágoras".

2.2.1.3. La civilización china

Los chinos continuaron la tradición de los babilonios y presentaron los primeros métodos del pensamiento lineal. Su aportación algebraica más importante fue el perfeccionamiento alcanzado en la regla de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

También utilizaron el método de la falsa posición. El libro más célebre de la época *Zhui Zhang Suan Shu*, *Los nueve capítulos sobre el arte matemático*, en la séptima sección se utiliza este método para resolver ecuaciones lineales.

El tratado de *Los nueve capítulos* es un trabajo representativo del desarrollo de la antigua matemática china, desde la dinastía Zhou hasta la Han y tuvo una gran influencia sobre los libros matemáticos chinos posteriores, contiene un total de doscientos cuarenta y seis problemas donde no se daban demostraciones, pero si se daban los pasos en forma ordenada. En muchos casos la resolución de estos problemas conduce a sistemas de ecuaciones.

“El nombre de este tratado se debe a su presentación, realizada en pergaminos dispuestos en 9 libros:

El libro 1, se denomina: *Medición de campos*, en este se toma el sistema de numeración decimal jeroglífico, se trabaja con las operaciones básicas, se calculan áreas.

El libro 2, llamado: *Relación entre las diferentes formas de cereales*, refleja el cobro de impuestos sobre el grano, el cual era medido en unidades de volumen. Debido a esto, los problemas tienen que ver con regla de tres y división proporcional.

El tercer libro, conocido como: *División escalonada*, continúa los trabajos de división proporcional de valores inversos y con regla de tres simple y compuesta.

El cuarto libro, llamado: *Shao-Huan*, expone trabajos para obtener raíz cuadrada y cúbica, tiene problemas donde se pide encontrar el lado de un rectángulo dada su área y el otro lado.

El libro 5, *Estimación de los trabajos*, recopila problemas relacionados con cálculos para la construcción de paredes fortificadas, murallas, diques, entre otros.

En el libro 6, conocido como: *Distribución proporcional*, aparecen problemas similares a los del libro 3, donde se busca repartir equitativamente los impuestos; sin embargo, se añade el trabajo con progresiones aritméticas y problemas sobre el trabajo colectivo.

El séptimo libro, llamado: *Exceso-defecto*, presenta problemas donde intervienen ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones lineales, siendo detallada su solución para casos particulares.

El octavo libro, profundiza el trabajo del libro anterior, perfeccionando y generalizando la solución de sistemas de ecuaciones lineales más complejas a través de una regla llamada $Fang\ Cheng$. También aparecen números negativos y la regla del cheg-fu, algo así como la regla del más-menos.

El noveno y último libro, abarca problemas donde se requiere determinar distancias y alturas, destacándose el uso del teorema de Pitágoras y las propiedades de triángulos semejantes, la formulación de reglas de tipo algebraico y la solución a ecuaciones cuadráticas".

2.2.1.4. La civilización griega

El logro más importante de los griegos es el de haber dado los primeros pasos para convertir las Matemáticas en una estructura lógica de definiciones, axiomas y demostraciones. Lo más importante de la obra matemática que realizaron ha llegado hasta nuestros días gracias al tratado de geometría titulado *Los elementos*, escrito por Euclides alrededor del año 300 a. C, considerada como "compendio del conocimiento matemático de la antigüedad".

Euclides desarrolló gran parte de la Aritmética y de la teoría de números utilizando procedimientos geométricos. El álgebra geométrica de los griegos fue recopilada en el libro II de *Los elementos de Euclides*, en el que se demuestran 14 proposiciones a partir de figuras y construcciones geométricas que permiten resolver problemas algebraicos, evitando así el problema de la asignación de valores numéricos. Las magnitudes eran representadas por segmentos de recta; el producto de dos magnitudes a y b eran representados por el rectángulo de lados a y b y se convierte en el área del rectángulo; y el producto de tres números es un volumen.

Luego, en el siglo III, aparece Diofanto de Alejandría, quien se separa de la tradición griega de representaciones geométricas, manteniendo en los enunciados algebraicos la forma retórica, inicia una tradición más simbólica donde utiliza algunas abreviaturas, es decir, inicia el álgebra sincopada.

2.2.2. Etapa sincopada del álgebra

Es la segunda etapa del desarrollo histórico del álgebra, caracterizada por incluir en la solución de problemas algunas abreviaturas o sincopas usadas en lugar de las incógnitas o valores desconocidos, aunque los cálculos se describían en lenguaje natural. Esta fase se inicia con el trabajo de Diofanto de Alejandría (250 d. C.) y va hasta finales del siglo XIV d. C.

2.2.2.1. Los griegos

Diofanto se destacó entre los griegos por ser el único que utilizó los números independizándose de su representación geométrica y en obtener reglas para manejarse con ellas. Se desconocen con certeza el origen y los detalles sobre su vida, pero si se tiene información sobre su edad, esto gracias a un epitafio redactado en forma de problema procedente de la "Antología Griega", una serie de acertijos recopilada alrededor del año 500 d. C, y dice así:

"¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba. A partir de ahí, la séptima parte de existencia transcurrió en un

matrimonio estéril. Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito. Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo. Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte".

Pasemos al lenguaje simbólico, conscientes de que así no fue resuelto el problema en la antigüedad y asumiendo que x es la edad de Diofanto.

Así se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

.

$$\frac{75}{84}x+9=x$$

Obtenemos entonces que $x=84$

También podríamos comentar, por ejemplo, que su hijo murió a la edad de 42 años, cuando Diofanto tenía 80 años.

Diofanto se interesó en estudiar problemas como este, cuyas soluciones estaban dadas por números enteros o racionales positivos y que son llamadas Ecuaciones Diofánticas o Diofantinas. La más importante y conocida de sus obras es "Arithmetica", un tratado de trece libros de los cuales solo sobrevivieron los seis primeros y a los que, con frecuencia, se atribuye el nacimiento del álgebra. Esta obra contiene diversos problemas independientes unos de otros y no hay un desarrollo axiomático, tampoco se encuentran todas las soluciones posibles enteras, al resolver una ecuación rechaza las raíces negativas o imaginarias y dice que la ecuación no es resoluble.

Diofanto, a lo largo de *La aritmética* enuncia una serie de problemas para los cuales, independiente de la cantidad de variables posibles, utiliza solo una incógnita para representar una cantidad desconocida (el llamado aritmo).

El “aritmo” es, quizás, la primera incógnita que se nombró en la historia de las matemáticas y su símbolo es parecido a la letra griega sigma ς. Diofanto comienza por definir el “aritmo”, por la cantidad desconocida que queremos encontrar, la incógnita, y luego describe los procedimientos para la manipulación de las igualdades planteadas, utilizando “el poder de los números”, su conocimiento profundo sobre las propiedades; todo eso sin un simbolismo como el que hoy usamos para manipular ecuaciones.

2.2.2.2. Los hindúes

Los hindúes, de quienes se cree construyeron su matemática en torno a la Aritmética de Diofanto y al álgebra china, utilizaban un lenguaje poético y metafórico. Uno de sus grandes progresos en la rama del álgebra fue el uso de abreviaturas de palabras y algunos símbolos para describir las operaciones, adoptaron un simbolismo parcial, es decir, hicieron uso de un álgebra sincopada.

Crearon un simbolismo algebraico que les permitió desarrollar nuevos procedimientos en la resolución de ecuaciones utilizando así algunas abreviaturas para representar la incógnita y sus potencias, por ejemplo:

$x \rightarrow ya$ (primera sílaba de la palabra yavattavat “tanto-cuanto”)

$x^2 \rightarrow va$

$x^3 \rightarrow gha$

$x^4 \rightarrow vava$

$x^9 \rightarrow ghagha$

$x^{1/2} \rightarrow ka$ (primera sílaba de la palabra karana “raíz cuadrada”).

Entre los matemáticos hindúes más sobresalientes y conocidos tenemos a:

ARYABHATA: Cuya obra *Aryabhatiyam* (499 d.C.) incluye problemas sobre series, permutaciones y ecuaciones lineales y cuadráticas.

BRAHMAGUPTA: Su *Brahmasiddhānta* (628 d.C.) contiene una regla satisfactoria para resolver ecuaciones cuadráticas y problemas que incluyen temas tratados por Aryabhata.

MAHAVIRA: Su *Ganita-Sāra Sangraha* (850 d.C.) contiene un largo número de problemas que involucran series, radicales y ecuaciones.

BHASKARA: Su *Bija Ganita* (1150 d.C.) contiene nueve capítulos y extiende su trabajo a través de las ecuaciones cuadráticas.

Los hindúes hicieron uso del álgebra en una forma sincopada, la suma se indica por yuxtaposición de los términos; en la resta se coloca un punto sobre el sustraendo y en la división, el divisor se coloca debajo del dividendo, casi de la manera actual, pero sin la barra. Para las multiplicaciones y el cálculo de raíces así como para las incógnitas, se usaban abreviaciones o a veces la primera letra de alguna palabra apropiada; así para la la multiplicación se colocaba “bha” (la primera sílaba de la palabra bhavita “el producto”), y después los factores.

Es importante resaltar que esta es una etapa de transición, de hecho el lenguaje retórico siguió en las escrituras por mucho tiempo.

Brahmagupta diferenciaba los números positivos de los negativos, que eran interpretados en términos de fortunas y deudas. Las soluciones negativas no se tomaban en cuenta, ya que la mayoría de los problemas planteados se relacionan con problemas de orden práctico y, por tanto, el número que les da solución es positivo.

2.2.2.3. Los árabes

Los árabes combinaron los aportes de los hindúes y los griegos dando a conocer grandes avances matemáticos entre los que se destaca un potente sistema de numeración arábigo, gracias a la cultura hindú, lo que incluye al cero, que es llamado “céfer”, que en idioma árabe significa vacío. También presentan varios textos hindúes y griegos traducidos al árabe y años más tarde al latín, como también un método general y geométrico para la solución de ecuaciones de segundo grado; con lo que se inicia el desarrollo del álgebra en Europa.

Entre las aportaciones de la cultura árabe mencionaremos la del gran matemático y astrónomo Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, que vivió aproximadamente entre los años 780 y 850; autor de la obra Al-jabr w’almuqabala, que se toma como referencia al nacimiento del álgebra.

En su libro introduce lo que él llama “las tres especies de números” y los utiliza para representar las posibilidades que pueden presentarse al hacer los cálculos, considerando los problemas comerciales y de herencias referente a lo cotidiano.

2.2.3. Etapa simbólica del álgebra

En esta última etapa se da el paso hacia la abstracción donde la letra tiene un significado independiente a lo que representan y se utilizan símbolos para designar los operadores y operandos, con lo que simplifica aún más la comprensión del problema y se da lugar a la inclusión gradual del lenguaje simbólico.

Se le atribuye a Francois Viete la creación de la simbología algebraica, pero cabe mencionar que en este periodo existieron matemáticos de gran prestigio como Tartaglia, Cardano, Galileo, Descartes, Wallis, Peacock, Boole, Newton, Leibniz,entre otros.

2.2.3.1. Vieta Francisco

Podemos decir que la etapa simbólica comienza a través de los trabajos de Francisco Vieta (François Viète), abogado francés, 1540-1603, quien genera un cambio fundamental en el lenguaje simbólico, pues hasta el momento solo se habían utilizado abreviaturas del lenguaje natural, intentó restaurar el análisis antiguo, que para los matemáticos griegos era un método geométrico, usando el álgebra, aplicada tanto a magnitudes aritméticas como geométricas.

Vieta introdujo un simbolismo algebraico que permitió el tratamiento de ecuaciones algebraicas generales. La idea clave de Vieta es la de usar ciertas letras para representar incógnitas o variables y otras letras para representar los parámetros o magnitudes conocidas de un problema. Usó consonantes para las cantidades conocidas y vocales para las desconocidas y creó un procedimiento simbólico de cálculo aplicado a ellas. Así empieza a diferenciar la aritmética del álgebra al distinguir entre lo que llama *logística numerosa* (cálculo con números) *y logística speciosa* (cálculo con letras).

Dávila (2003): “Por otra parte, no podemos pasar por alto el gran talento matemático de Vieta, pues sus contribuciones a las matemáticas no se limitan solo a la introducción de un nuevo simbolismo algebraico. De hecho, sus intereses matemáticos eran variados e hizo contribuciones originales en trigonometría, en la solución de ecuaciones por métodos numéricos y en la aplicación del álgebra a la geometría. Sin embargo, una de sus “faltas” fue la de no considerar números negativos[...] También es preciso señalar que el simbolismo introducido por Vieta no estaba completamente desarrollado, pues era una mezcla de álgebra abreviada con un estilo simbólico; no obstante, fue lo suficiente flexible como para sentar las bases de la teoría moderna de ecuaciones”.

2.2.3.2. René Descartes

Muchos buscaron mejorar el trabajo de Vieta, pero fue René Descartes (1596-1650) quien usó las primeras letras del alfabeto para cantidades conocidas y las últimas para las desconocidas, exactamente como la simbología actual.

Descartes transforma el álgebra de magnitudes de Vieta en un cálculo de segmentos. En su famoso libro *La Geometrie* (1637) presenta el tratamiento de las ecuaciones y plantea que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado de la ecuación.

Descartes, propone entre otras cosas, una técnica para determinar el mayor número de raíces que podría tener una ecuación. Enuncia, sin demostración, su célebre regla de los signos. La regla limita, entonces, el número de raíces positivas de una ecuación polinomial al declarar que no exceden el número de cambios de signo en los coeficientes del polinomio; cambios de signo naturalmente considerados cuando el polinomio ha sido escrito de forma tal que sus potencias desciendan o equivalentemente asciendan.

La regla de los signos de Descartes establece que podemos determinar el número de raíces verdaderas o falsas que cualquier ecuación pueda tener, como sigue: una + a – o de – a +; y tantas raíces falsas como el número de veces que se encuentran en sucesión dos signos + o dos -.

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

El presente capítulo trata sobre la metodología empleada para el desarrollo del estudio del problema planteado, en donde se puede apreciar los mecanismos que se utilizaron en el proceso de investigación.

3.1. Tipo de investigación

Según Gómez (2011), “La construcción del conocimiento desde las fuentes es una forma de velar por la tradición del pensamiento original y desde esa perspectiva, traerlo al presente con una lectura hermenéutica que favorezca la discusión al hacer nuevos aportes al desarrollo científico con propuestas que pueden ser cuestionadas permanentemente, pero que siempre se orientaran a alcanzar nuevos desarrollos”.

Dado el propósito fundamental de este trabajo sobre los métodos utilizados en la solución de ecuaciones algebraicas se ha optado por usar el tipo de investigación documental, la cual es definida según Baena (1985) como una técnica que consiste en la selección y compilacion de informacion a través de la lectura crítica de documentos, materiales bibliográficos y centros de documentacion e información.

3.2. Diseño de la investigación

Se recabó información secundaria de fuentes bibliográficas y documentales para comparar las distintas fuentes de información y ampliar el conocimiento del problema en estudio de la siguiente manera:

- ✓ Acopio básico de la bibliografía sobre el tema en estudio.
- ✓ Lectura del material seleccionado como fuente para la información
- ✓ Elaboración de los antecedentes del tema a investigar.
- ✓ Elaboración de las ideas más resaltantes.
- ✓ Desarrollo del marco teórico.
- ✓ Análisis de los datos.

3.3. Fuentes de información

En primer lugar, se consultaron documentos de la historia de la matemática para indagar sobre la evolución histórica de la simbología y los diferentes sistemas numéricos para luego buscar fuentes de información relacionadas a cómo surgen y cómo son trabajadas las ecuaciones algebraicas por distintas civilizaciones en las etapas del desarrollo del álgebra.

3.4. Términos e instrumentos de recolección de datos

Con la finalidad de recolectar la información para la elaboración de este trabajo fueron consultados diversos documentos, información de textos, artículos publicados en revistas especializadas de Matemática, internet, entre otros.

3.5. Procedimiento

La investigación inicia con la consulta y selección de fuentes secundarias sobre el desarrollo histórico de algunas ecuaciones algebraicas.

Considerando los documentos seleccionados se procede a su lectura y análisis a fin de identificar problemas que implicaron el uso de ecuaciones algebraicas buscando interpretar las soluciones dadas a los mismos y clasificarlos en las diferentes etapas del álgebra.

En el desarrollo del marco teórico se considera la importancia de hacer un breve análisis sobre la matemática de las diferentes culturas, específicamente en su sistema de numeración y aritmética, ya que se utilizará en el recorrido histórico de los métodos de solución de las ecuaciones algebraicas.

Posteriormente se procede a analizar los métodos de solución de algunas ecuaciones algebraicas utilizadas en la antigüedad y comparar estos resultados y procedimientos con los que se utilizan actualmente.

CAPITULO 4

ANÁLISIS DE LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE ALGUNAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

En este capítulo procederemos a hacer un análisis de los métodos utilizados por las diferentes civilizaciones en la solución de las ecuaciones algebraicas, para lo cual tomaremos en consideración las etapas del desarrollo del álgebra

4.1. Etapa retórica del álgebra

4.1.1. La civilización egipcia

Los egipcios utilizaron diferentes métodos para resolver problemas que podrían ser reescritos en nuestros días como ecuaciones de primer grado. Uno de ellos, consistía en transformar las ecuaciones hasta eliminar las fracciones y trabajar con números enteros positivos, también utilizaron el método llamado "método de la falsa posición" o "regula falsi". En este método se supone un valor concreto para el "montón", lo más probable es que sea incorrecto y se efectúan con dicho número las operaciones indicadas en el miembro izquierdo de la igualdad, luego comparan el resultado de estas operaciones con el resultado que debería haberse obtenido y mediante el uso de proporciones se halla la respuesta correcta. En el papiro de Rhind, los problemas del 24 al 27 son resueltos aplicando este método.

Para analizar la forma que tenían los egipcios de resolver los problemas algebraicos presentaremos algunos ejemplos de los papiros existentes que se resuelven con ecuaciones algebraicas.

Ejemplo 4.1

Papiro de Rhind, problema 21:

"*Averigua la cantidad que falta a* $\frac{2}{3}+\frac{1}{15}$ *para obtener la unidad"*

El método utilizado por los egipcios, consiste en modificar la ecuación para no trabajar con fracciones. Ahmes toma el 15 y aplica:

$\frac{2}{3}$ de 15 = 10

$\frac{1}{15}$ de 15 = 1

Entonces, ahora tenemos que $\frac{2}{3}\ de\ 15+\frac{1}{15}de\ 15\ es\ 11$.

Como 15 supera a 11 en 4 unidades, hemos de calcular el número de partes de 15 que da un total de 4, es decir, $\frac{4}{15}$ que es el valor buscado.

En el capítulo 2 se detalló el proceso de división que utilizaban los egipcios para escribir el número fraccionario con numerador 1, veamos:

1 15

$\frac{1}{5}$ 3 /

$\frac{1}{15}$ 1 /

como 4 (el dividendo) $= 3 + 1$

Entonces, $\frac{4}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$

Ejemplo 4.2

Papiro de Rhind, problema 22:

"Averigua la cantidad que falta a $\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$ *para obtener 1".*

En este caso toma 30 con el fin de simplificar las operaciones. Se aplica el razonamiento:

Una parte de 30 es 30

$\frac{2}{3}$ partes de 30 es 20

$\frac{1}{30}$ partes de 30 es 1

Como $\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$ de 30 es 21 y 30 supera a 21 en 9 unidades debemos determinar el número de partes de 30 que dan un total de 9, es decir, debemos dividir $\frac{9}{30}$.

Siguiendo el procedimiento de división:

1	30
$\frac{1}{10}$	3 /
$\frac{1}{5}$	6 /

Luego, como $9 = 6 + 3$,

Entonces $\frac{9}{30} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}$ que es la solución.

<u>Ejemplo 4.3</u>

En el caso de $x + \frac{x}{7} = 24$, y utilizando una simbología actual, se asigna un primer valor a x y se comprueba.

Sea $x = 7$, entonces $7 + \frac{7}{7} = 8$, solución falsa: sin embargo, $3 \times 8 = 24$, de donde la solución será $3 \times 7 = 21$

<u>Ejemplo 4.4</u>

<u>Papiro del Rhind, problema 24:</u>

“Aha, el total y su $\bar{7}$ *son 19”.*

“Una cantidad más la séptima parte de la misma da un total de 19”

El problema se limita a resolver la ecuación $x + \frac{1}{7}x = 19$

Utilizando el “regula falsi”, Ahmes parte en este caso de un valor estimado de 7 y calcula $7+\frac{7}{7}=8$. Entonces ahora para averiguar el valor real hay que encontrar un número N tal que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor estimado nos de 19, es decir, hay que dividir 19 entre 8. Trabajamos con el resultado 8 que fue el resultado de la estimación.

Recordemos que el proceso de división egipcio consiste en efectuar sucesivas duplicaciones del divisor de tal manera que no exceda al dividendo:

Una parte de 8 es 8: $1\cdot 8=8$

Dos veces una parte de 8 es 16: $2\cdot 8=16$

Las 2 partes de 8 es 4: $\frac{1}{2}.8=4$

Las 4 partes de 8 es 2: $\frac{1}{4}.8=2$

Y las 8 partes de 8 es 1, es decir: $\frac{1}{8}.8=1$

De donde se tiene que

1	8
2	16 /
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2 /

$\frac{1}{8}$ 1 /

Como $19 = 16 + 2 + 1,$ entonces por el método egipcio de la división obtenemos que $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, y este es el valor que debemos multiplicar por 7 para encontrar el valor buscado.

El razonamiento en el método "regula falsi" plantea que tantas veces como 8 debe ser multiplicado para dar 19, esas veces debe ser multiplicado 7 para dar con la cantidad buscada.

Así, como $7 = 1 + 2 + 4,$ y $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$,

Entonces,

Una vez $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Dos veces $\frac{19}{8} = 2\,(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Cuatro veces $\frac{19}{8} = 4\,(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 8 + 1 + \frac{1}{2} = 9 + \frac{1}{2}$

Luego, el valor buscado será $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 9 + \frac{1}{2} = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

Esta es la respuesta que daría un egipcio, dado que solo utilizaban fracciones con la unidad como numerador. Si realizamos la suma, el resultado será: $\frac{133}{8}$

Utilizando un lenguaje moderno, pero siguiendo los pasos de Ahmes, tendríamos:

Sea x el número.

El problema se limita a resolver la ecuación:

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Tomando el valor estimado de $x = 7$ y sustituyendo en la primera parte de la ecuación, obtenemos:

$$7 + \frac{7}{7} = 8$$

Después, el número que debemos multiplicar por 8 para obtener 19 es $\frac{19}{8}$, ya que $8 \cdot \frac{19}{8} = 19$

Para encontrar el valor de x, debemos multiplicar el valor estimado por $\frac{19}{8}$, es decir, $7 \cdot \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$

y el resultado en fracciones egipcias sería:

$$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

<u>Ejemplo 4.5</u>

<u>Papiro de Rhind, problema 25</u>:

“Una cantidad y su mitad sumadas juntas resulta 16”.

Se toma como valor estimado el 2, así tenemos que:

$$2+\frac{2}{2}=3$$

Al igual que en el problema anterior debemos buscar un número tal que al multiplicarlo por 3 nos de 16, el valor buscado es $\frac{16}{3}$

Trabajemos con 3 que fue el resultado de la estimación.

Así:

1	3 /
2	6
4	12 /
$\frac{1}{3}$	1 /

Como $16=3+12+1$, el valor que debemos multiplicar por 3 es:

$1+4+\frac{1}{3}=5+\frac{1}{3}$, cuya suma es $\frac{16}{3}$

Luego, al multiplicar por 2 que es el valor estimado tenemos: $10+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{32}{3}$

Haciendo el mismo procedimiento, pero utilizando un lenguaje matemático más moderno, el problema se resuelve de la siguiente manera:

Sea x el número, luego, resulta la ecuación:

$$x + \frac{1}{2}\,x = 16$$

Tomando el valor estimado de $x = 2$ y sustituyendo en el lado izquierdo de la ecuación, obtenemos: $2 + \frac{2}{2} = 3$

El número que multiplicamos por 3 para obtener 16, es $\frac{16}{3}$, luego para encontrar x es necesario multiplicarlo por 2 que es nuestro valor estimado, esto es:

$$x = 2 \cdot \frac{16}{3}$$

$$x = \frac{32}{3}$$

Entonces, la respuesta en fracciones egipcias sería:

$$x = 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

<u>Ejemplo 4.6</u>

<u>Papiro de Rhind, problema 26:</u>

"Una cantidad y su cuarto sumadas se convierten en 15"

Al igual que los problemas analizados anteriormente se toma un valor estimado, para este problema será 4, así tenemos: $4 + \frac{4}{4} = 5$

Ahora tenemos que encontrar un número N tal que al multiplicarlo por el resultado, de aplicar el valor estimado (5) nos de 15, es decir, $5 \cdot N = 15$, de donde se obtiene $N = 3$.

Luego, el valor buscado es el resultado de multiplicar 3 por el valor estimado, esto es $3 \cdot 4 = 12$ que es la cantidad buscada.

La ventaja de este problema es que al dividir 15 entre 5, da un valor exacto que es 3.

Los pasos que relata Ahmes en el papiro son los siguientes:

1. "Toma el 4 y entonces se hace $\frac{1}{4}$ de él en 1, en total 5"
2. "Divide entre 5 a 15 y obtienes 3"
3. "Multiplica 3 por 4 obteniendo 12"

Ahmes sigue después: "cuyo (referido a 12) $\frac{1}{4}$ es 3, en total 15".

Aunque el resultado es un número entero, consideremos el método en términos modernos:

Sea x el número. Luego, resulta la ecuación: $x + \frac{1}{4}x = 15$

Tomando 4 como valor estimado y sustituyendo en el lado izquierdo de la ecuación, obtenemos: $4 + \frac{4}{4} = 5$

Ahora buscamos un número que multiplicado con 5 nos de 15, es 3.

Luego, el 3 lo multiplicamos por el valor estimado 4 y el resultado es 12.

El siguiente problema, presenta una variación del método "regula falsi".

Ejemplo 4.7

"Un montón, sus dos tercios, su mitad, todo junto es 13".

El problema en el lenguaje del álgebra actual, se reduce a resolver la ecuación:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13$$

Los egipcios atribuían un valor falso al montón, por ejemplo, 12:

$$12 + \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 12 + 8 + 6 = 26$$

Por medio de una regla de tres simple obtenían el valor verdadero del montón: si al sustituir por 12 se obtiene 26, ¿por cuál número se debe sustituir para obtener 13?

De esta manera: $\frac{12}{26} = \frac{x}{13}$

Por lo que el montón es 6. Así mediante el uso de proporciones llegaban a la respuesta correcta.

Los egipcios tenían otro método para resolver ecuaciones que era “desandar lo andado”, este método consistía en calcular la solución después de manipular aritméticamente la incógnita, invirtiendo el proceso; de manera que mediante la aplicación de la solución de las operaciones aritméticas inversas y en sentido contrario, se pueda llegar a la cantidad inicial.

<u>Ejemplo 4.8</u>

El problema 19 pide calcular un montón tomándolo $1\ y\ \frac{1}{2}$ veces y añadiendo 4 para dar 10. ¿Cuál es la cantidad que hace esto?

El procedimiento detallado por el escriba sigue los siguientes pasos:

Si al final se ha añadido 4 para obtener el resultado 10, lo primero que se hace para llegar a la cantidad inicial es sustraer 4 del resultado:

$$10 - 4 = 6$$

Si la cantidad se repite $1\ y\ \frac{1}{2}$ significa que se ha multiplicado por $1\frac{1}{2}$. Luego se invierte de nuevo el proceso multiplicando 6 por el inverso de $1\frac{1}{2}$, es decir, $\frac{2}{3}$

.
$$\frac{2}{3}\ 6 = 4$$

El problema, entonces, se puede reformular:

$$(1 + \frac{1}{2})\,x + 4 = 10$$

$$(1 + \frac{1}{2})\,x + 4 - 4 = 10 - 4$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)x = 6$$

$$\frac{3}{2}x = 6$$

$$x = 6 \cdot \frac{2}{3}$$

Obteniéndose como solución: $x = 4$

4.1.2. La civilización babilónica

El álgebra babilónico es considerado un álgebra por reglas, desprovista de simbolismo algebraico. Los procedimientos consisten en soluciones detalladas de un problema numérico tras otro, por medio de instrucciones verbales.

La tabla YBC 4652, propiedad de la ciudad de Yale, contiene 22 problemas que en la actualidad se llamarían ecuaciones lineales, lo que indica que la incógnita x entra solo en su primera potencia. El objetivo de algunos de estos problemas es descubrir el peso original de una piedra dando origen a una ecuación de primer grado.

<u>Ejemplo 4.9</u>

“Encontré una piedra, pero no la pesé; después pesé seis veces su peso y sumé $2\ gin$ (una de las unidades que utilizaban), después sumé la tercera parte de la séptima parte de esta cantidad multiplicada por 24. Todo pesa un mana (1 mana = 60 gin). ¿Cuál es el peso original de la piedra?”.

La solución en la tablilla, pero sin explicación es $\frac{1}{3} \cdot 13\ gin$

Las tablillas indican métodos de solución en términos de ejemplos típicos: tomar la mitad de este número, sumar el producto de, tomar la raíz cuadrada y así sucesivamente, da la respuesta, pero no da una indicación clara de cómo se obtiene.

La ecuación que resulta al darle un tratamiento algebraico moderno del planteamiento del problema es la siguiente:

Tomando x como el peso en unidades gin

$$6x + 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}(6x + 2) \cdot 24 = 60$$

En efecto, al resolver la ecuación tenemos que $x = 4\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 13\ gin$

Los babilonios no tenían grandes dificultades en la resolución de las ecuaciones cuadráticas, ya que tenían habilidad para las operaciones algebraicas gracias al uso de las tablas de multiplicación, de división, de cuadrados, cubos, raíces cuadradas, entre otras. En las tablillas de arcillas encontramos problemas que en el lenguaje actual, se refieren a ecuaciones cuadráticas en donde designaban a las incógnitas a través de las palabras “longitud”, “anchura”, “área” y “volumen”. Ellos trabajaron en la resolución de estas ecuaciones mediante el método “Akadio” o método de completar el cuadrado y la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, pero no consideraban las raíces negativas.

<u>Ejemplo 4.10</u>

Hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a $14{,}30$ *(valor sexagesimal).*

La instrucción del escriba es la siguiente:

1. Toma la mitad de 1, que es $0;\ 30$ (valor sexagesimal)
2. Multiplica $0;\ 30$ por $0;\ 30$ que corresponde a $0;\ 15$ (valor sexagesimal)
3. Suma esta cantidad a $14{,}30$ que es igual a $14{,}30; 15$
4. $14{,}30; 15$ es el cuadrado de $29;\ 30$:

   $$29;\ 30\ \cdot\ 29;\ 30\ =\ 29\ \cdot\ 29\ +\ 29\ \cdot\ \frac{30}{60} + \ 29\ \cdot\ \frac{30}{60} + \frac{30}{60}\ \cdot \frac{30}{60}$$

   $$= 14{,}01\ +\ 14;\ 30\ +\ 14;\ 30\ +\ 0;\ 15\ =\ 14{,}30;\ 15$$
5. Suma $0;\ 30\, a\ 29;\ 30$ y se obtiene 30 que es el valor del lado del cuadrado.

Analicemos ahora la solución que plantea el escriba, llevando a nuestro sistema decimal los cálculos realizado por el mismo:

Tómese la mitad de uno que es $0;\ 30 = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Luego, lo eleva al cuadrado obteniendo $0;\ 15 = \frac{1}{4}$. Súmese esta cantidad a $14{,}30 = 870$, para obtener $14{,}30\ ;15\ =\ \frac{3481}{4}$, ahora tómese la raíz cuadrada para obtener $29;30\ =\ \frac{59}{2}$.

Al número obtenido se suma la mitad de 1: $29;30 + 0;30 = \frac{59}{2} + \frac{1}{2} = 30$ obteniendo la solución de la ecuación.

Actualmente el planteamiento del problema sería el siguiente:

Lado del cuadrado: x

Superficie del cuadrado: x^2

Valor decimal de $14{,}30 =\ 870$

La solución de este problema es equivalente a la resolución de la ecuación cuadrática.

$$x^2 - x = 870$$

Siguiendo el método algebraico y tomando solo la solución positiva tenemos:

$$x = -\left(\frac{-1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 870}\ \ =\ \frac{1}{2} + \frac{59}{2} = 30$$

Y siguiendo paso a paso la completación de cuadrados, obtenemos

$$x^2 - x = 870$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 870 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3481}{4}$$

$$x-\frac{1}{2}=\frac{59}{2}$$

$$x=\frac{59}{2}+\frac{1}{2}=\frac{60}{2}$$

$$x=30$$

Ejemplo 4.11

"*He sumado siete veces el lado de mi cuadrado y once veces el área, obteniendo* $6;\ 15$".

$6;\ 15$ es la forma simplificada de la notación sexagesimal babilónica, que significa $6+\frac{15}{60}\ o\ 6\frac{1}{4}$ en notación moderna.

La solución enunciada dice:

1. Escribe $7\ y\ 11$.
2. Multiplica $6;15\ por\ 11,\quad (6\cdot 11+\frac{15}{60}\cdot 11=\ 1{,}6+2;45.)$.
3. Luego, aplicando la suma: $1{,}6+2;45$, se obtiene $1{,}8;\ 45$
4. Divide siete por la mitad obteniendo $3;\ 30$ y multiplica por $3;\ 30$ obteniendo $12;\ 15$.

   En efecto, al multiplicar $(3;\ 30)\ (3;\ 30)=9+(1;30)+(1;30)+0;15$ obtenemos $12;15$
5. Suma esto a $1{,}8;\ 45$ obteniendo $1{,}21$ que es el cuadrado de 9
6. Resta $3;\ 30$ de $9\ =\ 8;60-\ 3;\ 30$ resultando $5;\ 30$
7. El recíproco de 11 no es divisor exacto. ¿Qué número tendré que multiplicar por 11 para que el producto sea $5;\ 30$? La respuesta es $0;\ 30$

8. El lado del cuadrado es $0;\ 30$

En simbología moderna, este problema es un caso de la solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = c$,

donde $a = 11,$ $b = 7,$ $c = 6;15 = 6\frac{1}{4}$

Con aquellos valores concretos a, b, c, vamos a deducir x.

La solución babilónica nos dice:

1. Multiplicar c por a lo que da ac
2. Dividir b por 2, que es $\frac{b}{2}$
3. Elevar $\frac{b}{2}$ al cuadrado para obtener $\frac{b^2}{4}$
4. Sumar esto a ac, que es $ac + \frac{b^2}{4}$
5. Tomar su raíz cuadrada $\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}$
6. Restar $\frac{b}{2}$ lo que hace $\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$
7. Dividir esto por a, y la respuesta es $x = \dfrac{\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}}{a}$

   Esto es equivalente a la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Lo que hace el babilonio en la tablilla, es multiplicar por 11, para transformar la ecuación cuadrática en términos de $11x$, así:

$$(11x)^2 + 7(11x) = 6;15(11) = 1{,}8;45$$

De esta forma $$x=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+1{,}8;45}-\frac{7}{2}$$

$$x=\sqrt{12;15+1{,}8;45}-3;30$$

$$x=9-3;30=5;30$$

De donde: $11\cdot x=5;30$

Así: $x=0;30$

La escritura en el sistema decimal de este problema sería así:

$$11x^2+7x=6;15$$

$$660x^2+420x=375$$

Completando el cuadrado tenemos:

La ecuación transformada sería: $660x^2+420x=375$

Multiplicando por 660: $(660x)^2+420(660x)=\ (375)(660)$

Dividiendo 420 entre 2 y elevándolo al cuadrado y sumándolo a ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$(660x)^2+420(660x)+\ (210)^2=\ (375)(660)+(210)^2$$

Resolviendo y extrayendo la raíz

$$(660x+210)^2=\ 291600$$

$$660x=540-210$$

Así: $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$ que es el valor buscado.

Ejemplo 4.12

"La longitud de un rectángulo excede a su anchura en 7 unidades, y su área es 1.00 (valor sexagesimal). Hallar su longitud y su anchura".

Los babilonios lo plantearon de la siguiente manera:

1. La diferencia 7 divídase por 2. Resultado $3;\ 30$ (valor sexagesimal)
2. Multiplica $3;\ 30$ por sí mismo:

   $3;\ 30 \cdot 3;\ 30 = 9\ +\ 1;\ 30\ +\ 1;\ 30\ +\ 0;\ 15\ =\ 12;\ 15$.

3. Añade $1.00\ a\ 12;\ 15$, resultado $1{,}12;\ 15$.
4. Halla la raíz cuadrada de $1{,}12;\ 15$, resultado $8;\ 30$:

   $$8; 30 \cdot 8; 30 = 8 \cdot 8 + 8 \cdot \frac{30}{60} + \frac{30}{60} \cdot 8 + \frac{30}{60} \cdot \frac{30}{60}$$

   $$= 64\ +\ 4\ +\ 4\ +\ 0;\ 15\ =\ 1{,}12;\ 15.$$

5. Suma $3;\ 30$ a $8;\ 30$, obteniendo 12.

   Resta $3;\ 30$ a $8;\ 30$, obteniendo 5.

Son los valores de la longitud $= 12$,

y de la anchura $= 5$.

Tomando la anchura $= x$; longitud $= x + 7$ y área $x \cdot (x+7)$

la ecuación propuesta en la actualidad sería:

$$x\ (anchura) \cdot\ (x+7)\ (longitud) = 60$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$x = \frac{(-7 \pm \sqrt{49 + 240})}{2}$$

$$x = \frac{(-7 \pm \sqrt{289})}{2}$$

$$x = \frac{(-7 \pm 17)}{2}$$

$$x = 5$$

Así: anchura $x = 5$; longitud = $x + 7 = 12$

Completando el cuadrado tenemos:

$$x^2 + 7x = 60$$

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 60 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{289}{4}$$

$$x + \frac{7}{2} = \frac{17}{2}$$

$$x = \frac{17}{2} - \frac{7}{2}$$

$$x = 5$$

Anchura $x = 5$;   longitud = $x + 7 = 12$

4.1.3. La civilización china

En el libro siete de exceso y defecto se presentan problemas como los siguientes:

Ejemplo 4.13

“Un grupo de personas compran un conjunto de gallinas. Si cada persona dio 9 wen, quedarán 11 wen de sobra después de la compra. Si, en cambio, cada persona contribuye con 6 wen, quedarán 16 wen a deber. ¿Cuántas personas hay en el grupo y cuál es el coste de las gallinas?”

Solución:

En términos algebraicos llamando a las dos contribuciones a y a' y al exceso y al defecto (lo que sobra y lo que deben) b y b', respectivamente, la solución propuesta en el libro es la siguiente:

$$\begin{matrix} a & a' \\ b & b' \end{matrix} = \begin{matrix} 9 & 6 \\ 11 & 16 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} ab' & a'b \\ b & b' \end{matrix} = \begin{matrix} 144 & 66 \\ 11 & 16 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} ab' + a'b \\ b + b' \end{matrix} = \begin{matrix} 210 \\ 27 \end{matrix}$$

El coste total de las gallinas es:

$$\frac{ab' + a'b}{a - a'} = \frac{210}{3} = 70$$

El número total de personas es:

$$\frac{b\ + b'}{a - a'} = \frac{27}{3} = 9$$

Este problema se puede reformular como un sistema de ecuaciones de dos incógnitas, siendo x el número de personas e y el coste.

$$ax - cy = b \qquad\qquad 9x - y = 11$$

$$a'x - c'y = -b' \qquad\qquad 6x - y = -16$$

Ejemplo 4.14

"Sea ahora un número (de personas) comprando mercancías. Si cada persona paga 8 existe un exceso de 3, si cada persona paga 7 existe un déficit de 4. Encontrar el número de personas y el costo de las mercancías".

El autor expone la siguiente solución:

"Poned los valores propuestos encima y debajo los correspondientes exceso y déficit. Multiplicar en cruz (estos últimos, 4 y 3) y los valores propuestos (8 y 7) y añadir los productos para formar el dividendo. Añadir el exceso y el déficit para formar el divisor. Dividir el dividendo entre el divisor."

Es decir:

$$\begin{matrix} 8 & 7 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

Siguiendo la multiplicación que propone, se obtiene:

$$b = \frac{8 \cdot 4 + 7 \cdot 3}{8 - 7} = \frac{53}{1} = 53\,monedas$$

La solución actual es un sistema de ecuaciones 2×2.

Sea a el número de compradores, x el costo de cada unidad de mercancía y b el costo total de la mercancía.

De donde resulta la ecuación lineal: $ax = b$

Según los datos:

si $x = 8$, entonces sobran 3 monedas: $8a = b + 3$

y si $x = 7$ hay un déficit de 4 monedas: $7a = b - 4$

Restamos ambas ecuaciones para simplificar la cantidad de incógnitas y obtenemos:

$$(8 - 7)a = 3 - (-4)$$

Así: $a = \frac{3+4}{8-7} = 7$ personas

Luego, se sustituye este valor en cualquiera de las ecuaciones para obtener el total del valor de las mercancías.

$$7a = b - 4$$

$$b = 49 + 4$$

Así: $b = 53$ monedas

En la resolución de sistemas de ecuaciones lineales los chinos utilizaron la regla de la falsa posición, este método era poco efectivo al solucionar sistemas de ecuaciones con más variables, ya que implicaba la ejecución de muchos pasos. También utilizaron un método conocido como la regla del $Fang\ \ Cheng$ que fue descrito por primera vez en el capítulo octavo del texto *Nueve capítulos sobre el arte matemático*. Los procesos que se desarrollan en este método son muy similares a los métodos matriciales modernos, puesto que organiza los coeficientes del sistema de ecuaciones en forma de tablas y luego realiza operaciones sobre las columnas.

El número de columnas lo determina el problema. El arreglo se ordena de derecha a izquierda y de arriba abajo. Las columnas presentan dos secciones, la superior expresadas con los números a_i , representan cosas, mientras que la inferior, llamada el shi, expresadas con los números b_i, representan costos.

El proceso consiste en la eliminación sucesiva de números por medio de las sustracciones entre los elementos de las columnas. Utilizaron el término Fu para indicar un resultado negativo en una sustracción y el término $Zheng$ para una diferencia positiva. Los conceptos $Zheng$ y Fu evolucionaron de ideas como pérdida y ganancia. El resultado nulo se indicaba con el término Wu.

Los siguientes ejemplos muestran la manera de solucionar un sistema de ecuaciones utilizando la regla $Fang\ \ Cheng$ y se usa el lenguaje actual para describir el método.

Ejemplo 4.15

"Hay tres tipos de trigo, de los que tres sacos del primero, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas; dos del primero, tres del segundo y uno del tercero son 34 medidas; uno del primero, dos del segundo y tres del tercero son 26 medidas ¿Cuántas medidas de cada tipo de trigo contiene un saco?"

El procedimiento, utilizando la simbología actual es el siguiente:

Definamos las variables que utilizaremos.

Sea: x: primer tipo de trigo

y: segundo tipo de trigo

z: tercer tipo de trigo

La información dada en el problema conduce al planteamiento algebraico de un sistema de ecuaciones 3×3:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

El autor distribuye los coeficientes en una tabla e instruye como resolverlos con operaciones por columnas. Los coeficientes de la primera ecuación generan la columna de la derecha y se escriben de arriba hacia abajo.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Tomar el trigo de mayor valor de la columna de la derecha para multiplicarlo por todos los elementos de la columna central y entonces usar las sustracciones directas, el propósito de realizar sustracciones entre los números de las columnas es tener ceros en las posiciones superiores a una diagonal del arreglo numérico.

1	6	3
2	9	2
3	3	1
26	102	39

1	3	3
2	7	2
3	2	1
26	63	39

1	0	3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

A continuación multiplicar en la siguiente columna (es decir, la columna izquierda) por el número de trigo de mayor valor en la de la derecha, o sea, el 3, y entonces usar las sustracciones directas.

3	0	3
6	5	2
9	1	1
78	24	39

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Así, el siguiente paso es multiplicar por 5 la última columna y la columna central es restada de ella las veces posibles, obteniendo así:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Luego, de aquí se puede obtener la solución por sustitución. Utilizando los valores de la primera columna se deduce:

$$36z = 99$$

$$z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4}$$

De la columna central se obtiene:

$$5y + z = 24$$

$$5y = 24 - \frac{11}{4}$$

$$y = \frac{17}{4}$$

De la tercera columna se obtiene:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$3x = 39 - z - 2y$$

$$3x = 39 - \frac{11}{4} - \frac{34}{4}$$

$$x = \frac{37}{4}$$

<u>Ejemplo 4.16</u>

"Cinco recipientes grandes y uno pequeño tienen una capacidad total de 3 shi. Un recipiente grande y cinco pequeños tienen una capacidad de 2 shi. Hallar la capacidad de un recipiente grande y de uno pequeño".

Utilizando la simbología actual, se usa x para representar la capacidad del recipiente grande y y para representar la capacidad del recipiente pequeño, lo cual conduce al sistema:

$$5x + y = 3$$

$$x + 5y \ = 2$$

Los coeficientes de la primera ecuación generan la columna de la derecha, y se escriben de arriba hacia abajo, los coeficientes de la segunda ecuación generan la columna de la izquierda.

$$\begin{matrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

Multiplicando y realizando las sustracciones correspondientes obtenemos:

$$\begin{matrix} 5 & 5 \\ 25 & 1 \\ 10 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 5 \\ 24 & 1 \\ 7 & 3 \end{matrix}$$

Así de la primera columna se obtiene:

$$24y = 7$$

$$y = \frac{7}{24} \ shi$$

Y de la segunda columna $5x + y = 3$

Se deduce:

$$x = \frac{13}{24} \ shi$$

<u>Ejemplo 4.17</u>

“Al vender dos vacas y cinco cabras para comprar trece cerdos hay un excedente de mil unidades de dinero. El monto obtenido de la venta de tres vacas y tres cerdos alcanza exactamente para comprar nueve cabras. Al vender seis cabras y ocho cerdos para comprar cinco vacas hay un déficit de 600. ¿Cuál es el precio de los animales?”

Utilizando la simbología actual, el sistema de ecuaciones correspondiente al enunciado es el siguiente:

$$2x + 5y = 13z + 1000$$

$$3x + 3z = 9y$$

$$6y + 8z = 5x - 600$$

Donde x representa las vacas, y las cabras y z los cerdos.

Forma tabular china correspondiente al enunciado del problema:

-5	3	2
6	-9	5

8	3	-13
-600	0	1000

Aplicando el método de Fang Cheng, el proceso finaliza cuando se obtiene.

0	0	2
0	-33	5
48	45	-13
14400	-3000	1000

Donde se deduce:

$$48z = 14400$$

$$-33y + 45z = -3000$$

$$2x + 5y - 13z = 1000$$

Que conducen a las soluciones positivas:

$$x = 1200$$

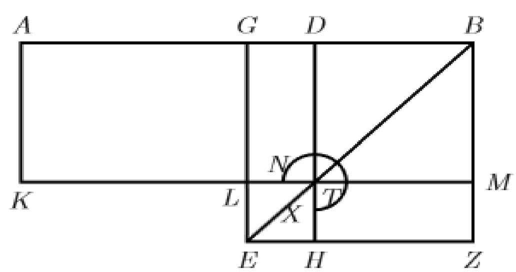
$$y = 500$$

$$z = 300$$

4.1.4. La civilización griega

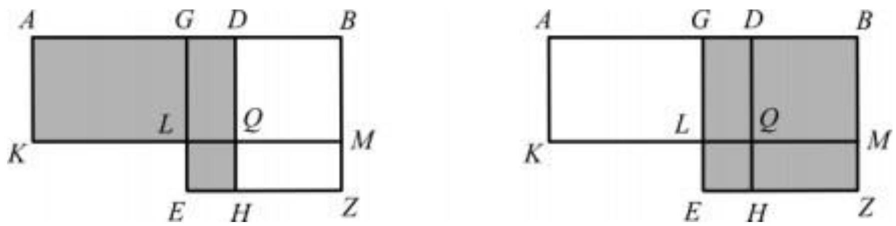
A continuación se describe uno de los procedimientos usados por los griegos para resolver ecuaciones, basado en la proposición 5 de *Los Elementos de Euclides*, procedimiento conocido como aplicación de áreas.

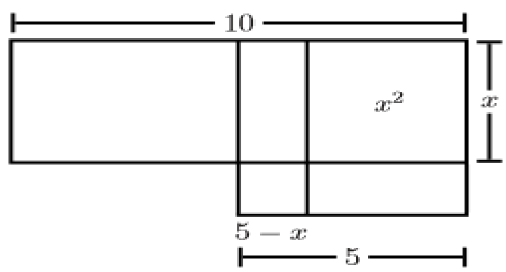
Proposición 5: Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, más el cuadrado de la diferencia entre una de las dos partes iguales y una parte desigual, es equivalente al cuadro de la mitad de la recta dada.



Ejemplo 4.18

Para solucionar la ecuación $10x - x^2 = 21$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 5:





$$(10x - x^2) + (5 - x)^2 = 5^2$$

$$21 + (5 - x)^2 = 25$$

$$(5 - x)^2 = 4$$

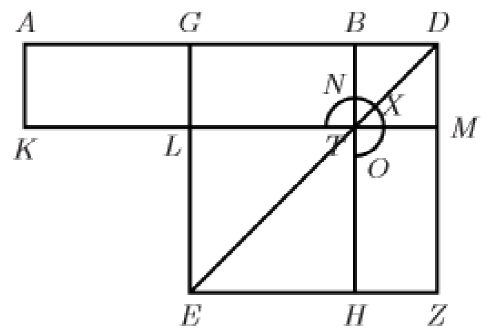
$$5 - x = 2$$

$$x = 3$$

Para la solución de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax + x^2 = b^2$, podemos usar la proposición 6 de *Los Elementos de Euclides*, que dice:

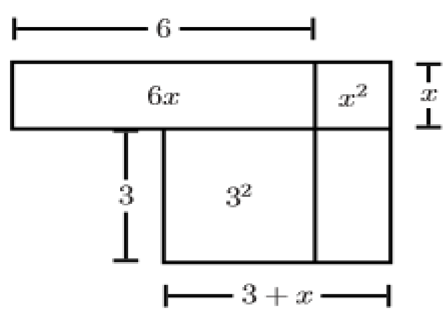
Proposición 6.

Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta; el rectángulo comprendido por la recta entera con la recta añadida y la recta añadida junto con el cuadrado de la mitad es igual al cuadrado de la recta compuesta por la mitad y la recta añadida.



Ejemplo 4.19

Para solucionar la ecuación $6x + x^2 = 72$, se realiza el siguiente procedimiento



$(6x + x^2) + 3^2 = (3 + x)^2$

$72 + 9 = (3 + x)^2$

$81 = (3 + x)^2$

$9 = 3 + x$

$x = 6$

4.2. Etapa sincopada del álgebra

4.2.1. Los griegos

Estudiemos un poco los aportes de Diofanto en los primeros pasos del nacimiento del álgebra.

Ejemplo 4.20

"Calcular dos números, tales que su suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208".

Los números desconocidos no se representan por x e y, sino por lo que en nuestra notación moderna sería: $10 + x \quad y \quad 10 - x$,

Así, $$(10 + x) + (10 - x) = 20$$

Entonces, se tendrá que verificar únicamente que:

$$(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$$

Al resolver estos cuadrados, obtiene:

$$100 + 20x + x^2 + 100 - 20x + x^2 = 208$$

Así: $x = 2$

Y los números buscados son:

$$10 + x = 10 + 2 = 12$$

$$10 - x = 10 - 2 = 8$$

Luego, sustituyendo este valor en los cuadrados supuestos, obtenemos:

$$(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$$

$$(12)^2 + (8)^2 = 208$$

$$144 + 64 = 208$$

En su libro, Diofanto no establece ninguna distinción entre los problemas determinados e indeterminados, en estos últimos solo da una de las infinitas soluciones.

Ejemplo 4.21

"Se pide calcular dos números tales que al sumar cualquiera de ellos con el cuadrado del otro da siempre como resultado un cuadrado perfecto."

Para resolver el problema, Diofanto llama a los números buscados

x y $2x + 1$ de manera que, al añadir el segundo, al cuadrado del primero dará un cuadrado perfecto cualquiera que sea el valor atribuido a x. Además, se exige que $(2x + 1)^2 + x$ también sea un cuadrado perfecto.

Diofanto no se preocupa en buscar las infinitas soluciones posibles, sino simplemente elige un cuadrado perfecto. En este ejemplo concreto es el número $(2x-2)^2$ tal que al igualarlo a $(2x+1)^2+x$, resulta una ecuación lineal en x.

Así:

$$(2x-2)^2 \; = \; (2x+1)^2+x$$

$$4x^2-8x+4 = \; 4x^2+4x+1+x$$

De la que se obtiene que:

$$x = \; \frac{3}{13}.$$

Después, el segundo número buscado será:

$$2x+1 = 2\,(\frac{3}{13})+1$$

$$x = \; \frac{19}{13}$$

Así los números buscados son $\frac{3}{13}$ y $\frac{19}{13}$

Por lo tanto:

$$x + \; (2x+1)^2 = \; \frac{3}{13} + \; (\frac{19}{13})^2 \; = \; \frac{400}{169} \; = (\frac{20}{13})^2$$

De igual forma:

$$x^2 + (2x + 1) = (\frac{3}{13})^2 + \frac{19}{13} = \frac{256}{169} = (\frac{16}{13})^2$$

Ejemplo 4.22

LIBRO I, PROBLEMA 1:

“Descomponer un número en dos partes cuya diferencia sea dada”.

“Sea 100 el número dado y 40 la diferencia. Suponiendo que la parte menor es 1 aritmo, la mayor será 1 aritmo más 40 unidades, y, por tanto, la suma de ambas valdrá 2 aritmo más 40 unidades, la cual suma es 100. Restando los términos semejantes de los semejantes, es decir: 40 unidades de 100 y 40 unidades de 2 aritmos y 40 unidades, los 2 aritmos que quedan valdrán 60 unidades y cada aritmo 30, que será la parte menor, y la mayor 30 más 40, o sea: 70 unidades”.

Si seguimos el razonamiento utilizado por Diofanto, encontramos lo siguiente:

La parte menor es $1\ aritmo$, es decir: x

La parte mayor será $1\ aritmo$ más 40 unidades, es decir: $x + 40$ y la suma será:

$$x + (x + 40) = 2x + 40,$$

lo cual debe igualarse a 100, esto es:

$$2x + 40 = 100,$$

de donde es claro que $x = \frac{60}{2}$, o sea: $x = 30$, que es la parte menor

y la parte mayor será $x + 40$, es decir, $30 + 40 = 70$ y la solución del problema es $30 \; y \; 70$

Ejemplo 4.23

LIBRO I, PROBLEMA 2:

"Descomponer un número en dos partes que estén en una razón dada".

"Si queremos descomponer el número 60 en dos partes que estén en la razón de 1 a 3 y suponemos que la menor es 1 aritmo, la mayor será igual a 3 aritmos, puesto que tiene que ser triple de la menor y la suma de ambas 4 aritmos; luego 4 aritmos, tendrán 60 unidades y, por tanto, 1 aritmo, o sea: la parte menor 15 y la mayor 45".

Esto es; sea x la parte menor y $3x$ la mayor.

Su suma debe ser 60, es decir: $x + 3x = 60$

$$4x = 60$$

$$x = 15$$

Si un aritmo es 15, los 3 aritmos serán $3 \cdot 15 = 45$

Ejemplo 4.24

LIBRO II, PROBLEMA 8:

“Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados”.

La solución dada por Diofanto es la siguiente:

- ✓ Si queremos descomponer 16 en dos cuadrados y suponemos que el primero es 1 aritmo, el otro tendrá 16 unidades menos 1 cuadrado de aritmo y, por tanto, 16 unidades menos 1 cuadrado de aritmo son un cuadrado.
- ✓ Formemos el cuadrado de un conjunto cualquiera de aritmos disminuido en tantas unidades como tiene la raíz de 16 unidades y sea el cuadrado de 2 aritmos menos 4 unidades.
- ✓ Este cuadrado tendrá, 4 cuadrados de aritmos y 16 unidades menos 16 aritmos, que igualaremos a 16 unidades menos 1 cuadrado de aritmo y sumando a uno y otro lado los términos negativos y restando los semejantes, resulta que 5 cuadrados de aritmo equivalen a 16 aritmos y, por tanto, 1 aritmo vale $\frac{16}{5}$.
- ✓ Luego, uno de los números es $\frac{256}{25}$ y el otro $\frac{144}{25}$, números cuya suma es $\frac{400}{25}$, es decir: 16 unidades, y cada uno de ellos es un cuadrado.

Según el lenguaje actual, se trata de resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 + y^2 = 16$$

Donde: $x = a \text{ (aritmo)}$

$$y^2 = 16 - a^2 \quad = \quad 16 - x^2$$

Diofanto identifica $16 - x^2$ con una expresión de la forma $(mx - 4)^2$, con m entero positivo arbitrario y donde 4 es la raíz de 16.

Haciendo $m = 2$, entonces $(2x - 4)^2 =$

$$(2x - 4)^2 = 4x^2 + 16 - 16x$$

$$4x^2 + 16 - 16x = 16 - x^2$$

$$5x^2 = 16x$$

De donde se obtiene que: $x = \frac{16}{5}$

Y sustituyendo el valor encontrado de x, en $y^2 = 16 - x^2$

Así: $y^2 = 16 - (\frac{16}{5})^2$

$$y = \frac{12}{5}$$

Luego:

$x^2 = \frac{256}{25}$, $y^2 = \frac{144}{25}$, cuya suma es exactamente 16

Este es el problema que dio lugar al llamado el último teorema de Fermat: $x^n + y^n = z^n$

Ejemplo 4.25

LIBRO II, PROBLEMA 11:

"Sumar un mismo número (buscado) a dos números dados de manera que cada uno forme un cuadrado".

Sean los números dados 2 y 3, y x el número buscado. De lo anterior se deduce que: $x + 2$ y $x + 3$ deben ser cuadrados.

Si son 2 y 3 los números dados y 1 aritmo el que hay que sumar, 1 aritmo más 2 unidades y 1 aritmo más 3 unidades deben ser cuadrados. Llamaremos doble igualdad a esta expresión y la resolveremos de la manera siguiente:

- ✓ Diofanto tomaba la diferencia entre las expresiones presentadas y lo descomponía en dos factores bastantes convenientes. Como la diferencia es 1, para este caso toma 4 y $\frac{1}{4}$. Seguidamente tomaba el cuadrado de la semidiferencia entre estos factores y lo igualaba a la expresión menor; o escogía el cuadrado de la semisuma y lo igualaba a la expresión mayor.
- ✓ El producto de la semidiferencia por ella misma es $\frac{225}{64}$, que igualaremos a 1 aritmo y 2 unidades, lo que da el valor $\frac{97}{64}$ para 1 aritmo, y el producto de la semisuma por ella misma es $\frac{289}{64}$, que igualaremos a 1 aritmo y 3 unidades, lo que da también el valor $\frac{97}{64}$ para 1 aritmo, y, por tanto, $\frac{97}{64}$ es el número que hay que sumar.

Según el razonamiento que propone Diofanto, sea x el aritmo, entonces, como la diferencia es 1, elige los factores 4 y $\frac{1}{4}$ así:

$$(x+3)-(x+2)=1=4\cdot\frac{1}{4}$$

Luego, propone igualar la semidiferencia a la expresión menor, esto es:

$$\left[\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)\right]^2=x+2$$

$$\left(\frac{15}{8}\right)^2=x+2$$

$$\frac{225}{64}-2=x$$

Así:

$$x=\frac{97}{64}$$

Ahora si igualamos la semisuma a la expresión mayor:

$$\left[\frac{1}{2}\left(4+\frac{1}{4}\right)\right]^2=x+2$$

$$\left(\frac{17}{8}\right)^2=x+3$$

$$\frac{289}{64}-3=x$$

Obtenemos: $x=\frac{97}{64}$

Por lo tanto, el número buscado es: $x=\frac{97}{64}$

Así: $$x + 2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2$$

$$x + 3 = \left(\frac{17}{8}\right)^2$$

Y los cuadrados son: $\frac{225}{64}$ y $\frac{289}{64}$

4.2.2. Los hindúes

Entre los métodos de resolución empleados por los hindúes están, la regla de tres y el método de inversión para resolver ecuaciones que consiste en “desandar lo andado”, o sea, realizar todas las operaciones en orden inverso.

El siguiente problema es un buen ejemplo del método de resolución de ecuaciones por inversión:

Ejemplo 4.26

“Si entendiste bien el método de inversión, dime hermosa niña de ojos radiantes, ¿cuál es el número que multiplicado por tres, aumentado en las tres cuartas partes del producto, dividido después entre siete y disminuido en $\frac{1}{3}$ del cociente, multiplicado por sí mismo, restándole 52, extrayéndole la raíz cuadrada, sumándole 8 y dividiéndole por 10, da el número 2?”.

Se puede obtener partiendo del número 2 y comenzamos a realizar las operaciones inversas a las dadas en el enunciado, es decir, de atrás hacia adelante:

La última operación es dividir por 10, entonces multipliquemos 2 por 10 y obtenemos 20. La penúltima operación era sumar 8, restemos 8, y tenemos $20 - 8 = 12$. Se extrajo la raíz cuadrada, luego debemos elevar 12 al cuadrado, así obtenemos 144. Antes de la raíz cuadrada se restó 52, por lo que sumamos 52 y obtenemos 144+52= 196. Antes de restar 52 se multiplicó por sí mismo, es decir, se elevó al cuadrado, por lo que debemos extraer la raíz cuadrada a 196 para obtener 14. Previo a esto, se restó de una cantidad su tercera parte, debemos multiplicar por dos tercios, que equivale a 21 y esta cantidad resultaba de dividir por 7, así $21 \times 7 = 147$, que había sido el triple del número buscado al cual se le había sumado sus tres cuartas partes y dividido por 3,

Así: $(147 \times \frac{4}{7}) \div 3 = 28$

Tenemos:

$$(2 \times 10 - 8)^2 + 52 = 196$$

$$\sqrt{196} = 14$$

$$(14 \times \frac{3}{2} \times 7 \times \frac{4}{7}) \div 3 = 28$$

<u>Ejemplo 4.27</u>

Veamos la solución que planteaba Brahmagupta a la ecuación $x^2 - 10x = -9$

“Multiplica el número absoluto -9 por el coeficiente del cuadrado 1; el resultado es -9. Añádelo al cuadrado de la mitad del coeficiente del término medio 25 y resulta 16; cuya raíz cuadrada es 4, menos la mitad del coeficiente de la incógnita (-5) resultando 9; y dividido por el coeficiente del cuadrado (1) da como resultado el valor de la incógnita, para este caso es 9.

En el siglo XII, Bháscara consideró las ecuaciones de segundo grado en su obra Vijaganita y notó que en algunos problemas solo es posible aceptar una solución, aún cuando ambas sean positivas. Como es el caso del siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.28

“La quinta parte de una manada de changos menos tres, al cuadrado, están escondidos en una cueva y hay un chango visible trepado en la rama de un árbol. Dígame cuántos monos existen”.

En notación moderna se tiene que:

$$\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x$$

Donde x es el número de changos.

Resolviendo la ecuación se llega a $x_1 = 50$ y $x_2 = 5$, de donde se observa que al verificar la ecuación con $x_2 = 5$, se tiene que:

$$\frac{x_2}{5}<3$$

Así: $\left(\frac{5}{5} - 3\right)^2 + 1 = 5$

lo que no corresponde a la realidad del problema.

Bhaskara afirma al respecto: se han encontrado dos valores: 50 y 5. Pero, en este caso, el segundo no puede tomarse, porque es incongruente. La gente no aprueba un número negativo.

4.2.3. Los árabes

Para Al-Khawarizmi existen algunos números que se multiplican por sí mismos y, por lo tanto, son "raíces", "jidr" (x) de otros números que se llaman "$m\hat{a}l$" o "tesoros" ($cuadrados$: x^2), que son el resultado de un número por sí mismo. Otros números no son ni "raíces" ni "tesoros", estos los llama "simples números" o "$dirhams$" (antigua moneda de plata empleada en varios puntos del mundo islámico), también utiliza la palabra "cosa", "shay'", para nombrar la incógnita.

Establece las combinaciones de estos números dando lugar a ecuaciones lineales o cuadráticas:

Cuadrados igual a raíces: $ax^2 = bx$,

Cuadrados igual a números: $x^2 = c$,

Raíces igual a números: $bx = c$,

Cuadrados y raíces igual a números: $ax^2 + bx = c,$

Cuadrados y números iguales a raíces: $ax^2 + c = bx,$

Raíces y números iguales a cuadrados: $bx + c = x^2$

Describe en forma retórica el enunciado y las reglas para resolver cada tipo de ecuacion, daba solo las soluciones positivas de las ecuaciones cuadráticas y luego una prueba para cada ejemplo que consiste en el método geométrico de completar un cuadrado.

Las reglas de resolución se hacían con base en dos operaciones:

- Al-jabr (restaurar) que en matemática significa trasposición de términos: sumar a ambos miembros para obtener cuadrados.
- Al-muqabala que se refiere a la reducción de términos semejantes: restar a ambos miembros para quitar lo que es igual.

A continuación presentamos ejemplos de algunas de estas situaciones. El primer problema que plantearemos, es quizás el problema más conocido de

Al-Khwarizmi.

<u>Ejemplo 4.29</u>

“Un cuadrado y diez raíces son iguales a treinta y nueve unidades. ¿Cuál es el cuadrado que combinado con diez de sus raíces dará una suma total de treinta y nueve?”.

La solución dada por Al-Khawarizmi es que divides las raíces en dos mitades, aquí se obtiene 5, que multiplicado por sí mismo da 25 y agregado a 39 se obtiene 64. Tomas la raíz cuadrada de este que es 8, le restamos la mitad del número de las raíces que es 5, quedando 3. El número 3, por tanto, representa una raíz de este cuadrado, el cuadrado es 9.

Si escribimos este problema en el lenguaje matemático actual tenemos:

$$x^2 + 10x = 39$$

Así:

$$x^2 + 10x + \left(\frac{1}{2} \cdot 10\right)^2 = 39 + \left(\frac{1}{2} \cdot 10\right)^2$$

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

$$\sqrt{(x + 5)^2} = \sqrt{8^2}$$

$$x + 5 = 8$$

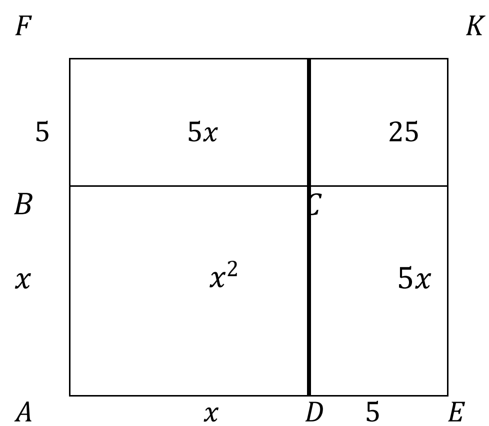
$$x = 8 - 5$$

$$x = 3$$

Por lo tanto:

$$x^2 = 9$$

Al-Khwarizmi sólo considera la raíz positiva. Luego, demuestra la solución anterior utilizando el método geométrico que consistía en completar el cuadrado.



Se construye un cuadrado $ABCD$, con $AB = AD = x$. Se extienden los lados AB y AD de forma que $DE = BF = 5$ (5 es la mitad de 10, el coeficiente de x). Se completa el cuadrado $AFKE$. El área de $AFKE$ se puede expresar como $x^2 + 10x + 25$, pero la ecuación que hay que resolver es $x^2 + 10x = 39$, por consiguiente, hay que agregar 25 a los dos miembros de la ecuación, es decir, que estas regiones tienen un área de 39 más la región de 25; obteniendo:

$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$ o sea $x^2 + 10x + 25 = 64.$

Los miembros de la ecuación son ahora cuadrados perfectos:

$$(x + 5)^2 = 8^2$$

Entonces $x + 5 = 8$ y, por lo tanto, $x = 3$

Ejemplo 4.30

Este problema se refiere al tipo tesoro y números igual a raíces.

“He dividido diez en dos partes; luego he multiplicado cada parte por sí misma y sumadas resulta cincuenta y ocho dírhams”.

Según el procedimiento de Al-khwarizmi:

Haces una de las partes cosa (c) y la otra diez menos cosa:

$$c, \qquad 10 - c$$

Multiplica diez menos cosa por sí mismo, resulta cien y un tesoro (t) menos veinte cosas:

$$(10 - c)(10 - c) \; es \; 100 + t - 20c$$

Multiplica, después, cosa por cosa, resulta tesoro:

$$c \cdot c = t$$

Luego, suma ambos, resulta la suma de cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dírhams:

$$100 + 2t - 20c = 58$$

Restaura, luego, esos cien y dos tesoros de las veinte cosas substraídas y súmalas a los cincuenta y ocho, resulta cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dírhams y veinte cosas:

$$100 + 2t = 58 + 20c$$

Reduce, entonces, a un solo tesoro tomando la mitad del conjunto:

$$\frac{1}{2}(100 + 2t = 58 + 20c)$$

Resulta 50 dírhams y un tesoro igual a veintinueve dírhams y diez cosas:

$$50 + t = 29 + 10c$$

Coloca, después, con ese el otro, quitando veintinueve de cincuenta, queda veintiún y tesoro igual a diez cosas:

$$21 + t = 10c$$

Aplicación de la regla:

Entonces halla la mitad de las raíces, resulta cinco, multiplicado por sí mismo, resulta veinticinco.

Quita, luego, de esto el veintiuno conectado con el tesoro, queda cuatro.

Posteriormente extrae luego su raíz que es dos.

Quítala, luego, de la mitad de las raíces, que es cinco queda tres:

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$$

$$25 - 21 = 4$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$5 - 2 = 3$$

Tres es una de las dos partes y la otra es siete.

<u>Ejemplo 4.31</u>

“He dividido diez en dos partes, y cuando he multiplicado la una por la otra, resultó veintiuno”.

Una de las partes de diez es cosa y la otra diez menos cosa:

$$c, \qquad 10 - c$$

Multiplica cosa por diez menos cosa; entonces tendrás diez cosas menos un tesoro igual a veintiuno:

$$c(10 - c)$$

$$10c - t = 21$$

Restaura, luego, las diez cosas del tesoro y añádelo a veintiuno. Resulta entonces diez cosas, que igualan veintiún dirhams y un tesoro:

$$10c = 21 + t$$

Aplicación de la regla:

Quita, luego, la mitad de las raíces y multiplica el cinco que queda por sí mismo; resulta veinticinco; seguidamente quítale el veintiuno asociado con el tesoro; queda cuatro, extrae luego su raíz (2). Suprime, después, de la mitad de las raíces,cinco; queda tres.

Tres es una de las dos partes y siete es la otra parte.

4.3. Etapa simbólica del álgebra

4.3.1. Vieta Francisco

Método de Vieta para la resolución de ecuaciones de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad con\ a \neq 0$$

Vieta introduce dos variables auxiliares, mediante el cambio de variable:

$$x = t + y$$

$$a(t + y)^2 + b(t + y) + c = 0$$

$$a(t^2 + 2ty + y^2) + b(t + y) + c = 0$$

Ordenando en potencias de y se obtiene:

$$ay^2 + (2at + b)y + (at^2 + bt + c) = 0$$

Anula el término en y

$$ay^2 + (at^2 + bt + c) = 0$$

Sustituyendo $t = -\frac{b}{2a}$

$$ay^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

Operando y despejando se obtiene:

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Si $b^2 - 4ac \geq 0,$ entonces $y = \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Deshaciendo el cambio de variable se obtiene:

$$x = t + y = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Siendo esta última expresión, conocida en la actualidad, como la fórmula general para la solución de ecuaciones de segundo grado.

CONCLUSIONES

La historia de la matemática nos brinda las herramientas para reconocer que ha ido evolucionando. El reparto de las tierras, el comercio, entre otras necesidades prácticas propias del ser humano, fueron aspectos que impulsaron el pensamiento matemático. Dicha evolución ha sido posible gracias a los aportes de las diferentes culturas que nos han dejado fuentes de información a través de numerosos registros escritos.

En la actualidad, la matemática nos brinda sus conocimientos como un producto final, perfeccionado, con fórmulas y reglas ya establecidas. A través de su historia se puede mostrar el papel tan importante que esta ha tenido en el desarrollo de la humanidad y nos permite conocer el origen y evolución de las ideas y de los diferentes conceptos matemáticos que se utilizan hoy en día, detallándonos el sentido para el que fueron desarrollados. El interés de introducir una perspectiva histórica en el proceso enseñanza aprendizaje queda en evidencia por los múltiples trabajos de investigación realizados en la actualidad.

El tratamiento que daban algunas civilizaciones a los problemas relacionados con su diario vivir, es lo que en la actualidad llamaríamos planteamiento de ecuaciones algebraicas. Estas culturas realizaron significativos aportes al desarrollo de las ecuaciones pasando por las diferentes etapas del álgebra, dejando un gran legado de conocimientos que, hasta el día de hoy, son utilizados. Entre estas civilizaciones podemos mencionar: la egipcia, babilónica, griega, china, hindú y árabe.

RECOMENDACIONES

Al finalizar este trabajo se pueden hacer las siguientes recomendaciones:

- Incorporar la historia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, con reseñas sobre el contenido histórico que ilustren la evolución del lenguaje simbólico con el fin de motivar y facilitar el aprendizaje.

- Emplear los problemas antiguos como, por ejemplo, los de las tablillas, para observar la evolución de los diferentes sistemas numéricos.

- Utilizar los diferentes métodos antiguos de solución de ecuaciones algebraicas como alternativa didáctica.

- Comparar los métodos utilizados por las diferentes civilizaciones con los métodos actuales y, de esta manera, comprender las dificultades por las que pasaron los grandes matemáticos de la antigüedad en la construcción del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Algarra, M., Borges, C., García, I., Hernández, V., y Hernández, B. (2004). Las matemáticas chinas. Recuperado desde: http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática revista EMA 2003, volumen 8. Recuperado desde:https://core.ac.uk/download/pdf/12341944.pdf.

Bell, E. (1985). Los grandes matemáticos, su vida y sus obras: Losada s.a., Buenos Aires. Recuperado desde: http://www.librosmaravillosos.com/grandesmatematicos/index.html

Boyé, A., y Nantes, I. (2007). ¿Francois Viete, inventor del álgebra? Los orígenes de la ciencia moderna. Actas año XI y XII, páginas 259-276.

Cabrera, M. (2009). Los distintos sistemas de numeración. Revista digital.

Recuperado desde: https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_24/MARIA%20DEL%20CARMEN_%20CABRERA%20MARTIN_1.pdf.

Cantoral, R., y Ferrari, M. (2003). La predicción y la regla de los signos de Descartes. Acta latinoamericana de matemática educativa.

Carrillo, F. (2003). Álgebra India. Apuntes de historia de las matemáticas, N° 1, volumen 2.

Chávez, E. y Salazar, J. (2003). Historia de la matemática como recurso metodológico para la enseñanza-aprendizaje. Revista Uniciencia. Recuperado desde: http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/5743/5614

Collette, J. (1986). Historia de las matemáticas, tomo 1. Editores, S.A. de C.V. México, D.F. Recuperado desde: https://es.scribd.com/document/255783179/Jean-Paul-Collete-Historia-de-las-matematicas-vol-II-pdf.

Dalcin, M., y Olave, M. (2007). Ecuaciones de primer grado: su historia. Acta latinoamericana de matemática educativa, vol. 20; páginas 156-161.

Dalcin, M., y Olave, M. (2007). Ecuaciones de segundo grado: su historia. Acta latinoamericana de matemática educativa, vol. 20.

Dávila, G. (2003). El desarrollo del álgebra moderna. Apuntes de historia de las matemáticas, volumen 2; páginas 38-78.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Suma 5.

Gallardo, A., y Basurto, E. (2010). La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. Revista latinoamericana de investigación, RELIME; volumen 13, páginas 255-268

Gallardo, A., y Rojano, T. (1990). Los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones algebraicas. Un análisis histórico-epistemológico. Congreso Iberoamericano de educación matemática. Recuperado desde: http://teresarojano.net/system/files/articulos/los%20numeros%20negativos.

Gómez, C. (2003). Elementos de aritmética en los egipcios. Memorias XIV Encuentro de Geometría y II Aritmética

Gómez, M. y Fernández, D. (2005). ¿De qué forma puede ser usada la historia de la matemática como herramienta didáctica? Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, volumen 19. Recuperado desde: https://clame.org.mx/uploads/actas/alme19.pdf

González, P. (2004). Orígenes de la geometría analítica. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, España. Recuperado desde: https://books.google.es/books?hl=es&lr=lang_es&id=ZtSqkQ-TWKcC&oi=fnd&pg=PP2&dq=origenes+de+la+geometria+analitica&ots=007Qeoc02b&sig=s43K3Fgxgv7Z3IwNdJtJWh.

González, P. (2004). La Historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Recuperado desde: https://revistasuma.es/IMG/pdf/45/SUMA_45.pdf

Illana, J. (2008). Matemática y astronomía en Mesopotamia. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Suma 58; páginas 49-61.

Lorente, A. La historia del álgebra y de sus textos, obtenida de: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/38983595/Historia_del_algebra_y_de_sus_textos.pdf.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Revista IRICE N° 13.

Martínez, A., y Arrieche, M. (2012). Configuraciones epistémicas de la ecuación de segundo grado, en la antigua civilización china. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa; páginas 85-94.

Maza, C. y Maza G., C. (2000). Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico. Universidad de Sevilla, España.

Nambo, M., y Eenens, P. (2017). Historia de la división. Revista de divulgación científica, jóvenes en la ciencia, volumen 3, N°2. Recuperado desde: http://148.214.90.90/index.php/jovenesenlaciencia/article/view/2177/1672

Ochoviet, C. (2007). De la resolución de ecuaciones polinómicas al álgebra abstracta: un paseo a través de la historia. Revista digital matemática, educación e internet, volumen 8, N°1.

Ortíz, A. (2005). Historia de las matemáticas. La matemática en la antigüedad. Volumen 1. Lima-Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Pérez, M. (2006). Una historia de las matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes. Visión libros, Madrid, España.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. Matemática para el siglo XXI. Departamento de didáctica de la matemática.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra, el texto de Al-khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa. Grupo Editorial Iberoamérica, México D.F.

Pulpon, A. Historia del papiro de Rhind y similares. Universidad de Castilla. Disponible en http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf

Rosales, A. (2009). Evolución histórica del concepto de matriz. Revista digital matemática, educación e internet, volumen 9, N°2.

Ruíz, A. (2003). Historia y filosofía de las matemáticas. EUNED

Sánchez, D., y Montes, C. (2005). Solución de ecuaciones cuadráticas a partir de Los elementos de Euclides. Memorias XV Encuentro de Geometría y III Encuentro de Aritmética, Bogotá, Colombia; pág. 299-312.

Stewart, I. (2012). Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años. Preparado por Barrios Patricio. Crítica. Disponible en: http://www.librosmaravillosos.com/historiadelasmatematicasenlosultimos10000anos/pdf/Historia%20de%20las%20matematicas%20-%20Ian%20Stewart.pdf.

Swetz, F. (2013). Expediciones matemáticas: la aventura de los problemas matemáticos a través de la historia. Esfera de los libros.

Vera, F. (1970). Científicos griegos. Tomo II. Aguilar, Madrid.

Yuste, P. (2008). Diofanto de Alejandría, la aritmética y el libro sobre los números poligonales. Revista de teoría, historia y fundamentos de la ciencia, volumen 23.