



UNIVERSIDAD DE PANAMÁ  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE COCLÉ  
MAESTRÍA EN DOCENCIA SUPERIOR  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA PROFESIONAL

**PROYECTO DE INTERVENCIÓN**

**“CAPACITACIÓN ACADÉMICA SOBRE APLICACIONES DE LA MATEMÁTICA  
EN ECONOMÍA, PARA ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE LA  
LICENCIATURA EN ECONOMÍA AMBIENTAL, DEL CENTRO REGIONAL  
UNIVERSITARIO DE COCLÉ, I SEMESTRE DEL AÑO 2010”**

**POR: ONEL TUÑÓN AIZPRÚA**

**CÉDULA: 2 – 722 – 1807.**

**FACILITADOR DE LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA PROFESIONAL**

**DR. EDUARDO SERGIO BARSALLO**

**PENONOMÉ, NOVIEMBRE 2010.**

## AGRADECIMIENTO

Le agradezco a **Dios Todopoderoso** primeramente, por haberme permitido que, a través de mi madre **Catalina Aizprúa** y mi padre **Benito Tuñón**, visitara este mundo tan extraordinario. A mi esposa **Ilka Y. Flores**, quien me animó y apoyó para terminar esta nueva meta trazada, pues era su aprobación en cada una de mis decisiones la que me hacía continuar, a los profesores de la maestría, por los conocimientos adquiridos, en especial, al Doctor **Eduardo S. Barsallo V.**, quien brindó su atinada asesoría, en todo momento, para la elaboración de este proyecto de intervención pedagógica. A la profesora **Nivia Gordón de Him** por su colaboración; a mis amigos y compañeros por el apoyo recibido para la culminación de esta meta preciada.

**Onel Tuñón Aizprúa.**

## DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis hijos: **Onel, Antonio y Heidi**, quienes han representado en todo momento una fuente de inspiración para establecer nuevas metas en mi vida. Que sean mis trabajos de culminación de estudio, la fuerza que los aliente a ser cada día mejores personas, que se den cuenta que con esfuerzo y voluntad podemos llegar a tener un futuro mejor.

**Onel Tuñón Aizprúa.**

Agradecimiento.....	ii
Dedicatoria.....	iii
Indice.....	iv
Introducción.....	vii
<b>FASE I. DIAGNÓSTICO</b>	
1. Diagnóstico situacional.....	2
1.1 Area de estudio.....	3
1.2 Población encuestada.....	4
1.3 Muestra.....	4
1.4 Instrumentos de recolección de información.....	4
1.4.1 Encuesta.....	5
1.5 Análisis de los cuadros y gráficas para el proyecto de intervención pedagógica.....	7
1.6 Análisis general de los cuadros y gráficas presentado para el proyecto de intervención pedagógica.....	22
<b>Fase II.Elaboración del proyecto de intervención</b>	
2.1 Título del proyecto.....	24
2.2 Antecedentes.....	24
2.3 Justificación del proyecto.....	26
2.4 Descripción del problema.....	26
2.5 Descripción del proyecto.....	27
2.6 Misión.....	28

2.7	Objetivos.....	28
2.7.1	Objetivo General.....	28
2.7.2	Objetivos Específicos.....	28
2.8	Localización del proyecto.....	29
2.9	Beneficiarios.....	29
2.10	Posibles resultados y efectos.....	30
2.11	Metas.....	30
2.12	Recursos.....	31
2.12.1	Financieros.....	31
2.12.2	Humano.....	31
2.13	Cronograma de actividades.....	32

### **Fase III. EJECUCIÓN DEL PROYECTO**

#### **Módulo N° 1**

3.1	Planeamiento Didáctico.....	35
3.1.2	Contenidos tematicos.....	36
3.1.3	Logros obtenidos .....	59
3.1.4	Evidencias fotográficas.....	60
3.1.5	Diapositivas.....	62

#### **Módulo N° 2**

3.2	Planemiento didático.....	63
3.2.1	Contenidos tematicos.....	64
3.2.2	Logros obtenidos .....	80
3.2.3	Evidencias fotográficas.....	82

3.2.3 Diapositivas.....	84
-------------------------	----

### **Módulo N° 3**

3.3 Planeamiento didáctico.....	85
---------------------------------	----

3.3.1 Contenidos tematicos.....	86
---------------------------------	----

3.3.2 Logros obtenidos.....	106
-----------------------------	-----

3.3.3 Evidencias fotográficas.....	107
------------------------------------	-----

3.3.4 Diapositivas.....	109
-------------------------	-----

### **Módulo N° 4**

3.4 Planeamiento didáctico.....	110
---------------------------------	-----

3.4.1 Contenidos tematicos.....	111
---------------------------------	-----

3.4.2 Logros obtenidos .....	125
------------------------------	-----

3.4.3 Evidencias fotográficas.....	126
------------------------------------	-----

3.4.4 Diapositivas realizadas.....	128
------------------------------------	-----

4. Informe final de los resultados.....	129
---	-----

4.1 actividades asignadas a los participantes en las horas no presenciales....	131
--	-----

Conclusiones.....	133
-------------------	-----

Recomendaciones.....	134
----------------------	-----

Bibliografía.....	135
-------------------	-----

Anexos.....	136
-------------	-----

## INTRODUCCIÓN

Las aplicaciones de las matemáticas en los diferentes campos del saber humano representan, sin duda, la importancia que tiene esta ciencia en la vida de cada persona. Desde el simple hecho de hallar la suma de los precios de varios artículos en un supermercado, hasta llegar a calcular la velocidad con la que se multiplica una bacteria o el precio de equilibrio entre dos productos en determinado tiempo, se observa esta afirmación tan importante. Sin embargo, las aplicaciones de las matemáticas, han dejado de ser uno de los temas interesantes en esta asignatura, debido a que muchos docentes se han inclinado a enseñar algoritmos sin mostrar las aplicaciones prácticas en la vida cotidiana; lo que ha implicado que los estudiantes no le den la importancia apropiada a las matemáticas trayendo consigo, en parte, las deficiencias y fracasos.

En este sentido, se logró dictar una capacitación a estudiantes de primer año del Centro Regional Universitario de Coclé, en la Facultad de Economía, en la asignatura denominada “Matemáticas Aplicadas a la Economía Ambiental”, quienes presentaban muchas deficiencias en matemáticas básicas y sus aplicaciones.

El seminario dictado en esta capacitación se tituló “Aplicaciones de las Matemáticas en la Economía Ambiental”, cuyo fin era promover a los estudiantes hacia el siguiente nivel académico reforzando sus conocimientos en matemáticas elementales. Esta capacitación sustentaba el proyecto de intervención en el módulo de Práctica Pedagógica Profesional.

La elaboración de este proyecto se da en tres fases, cada una con sus pasos bien organizados.

En la primera fase denominada “**Diagnóstico**” se presenta: el diagnóstico situacional, la encuesta aplicada al grupo de estudiantes, el área de estudio, la población, el análisis de los cuadros y gráficas, instrumento de recolección de datos, es decir una serie de información que permitía conocer hacia donde tendría que estar dirigida la capacitación .

En la segunda fase denominada “ **Elaboración del Proyecto**” se presenta: antecedentes, justificación del proyecto, descripción del problema, descripción del proyecto, misión, objetivo general, objetivos específicos, localización del proyecto, beneficiarios, posibles resultados y efectos, recursos financieros y humanos y el cronograma de actividades .

La tercera fase denominada “**Ejecución del proyecto**” contiene: los planeamientos de los temas abordados en cada módulo, el desarrollo de los temas tratados en el seminario, las evidencias fotográficas, algunas diapositivas utilizadas y los logros obtenidos en cada módulo.

Por último se presentan las conclusiones, recomendaciones, evaluaciones obtenidas por los estudiantes participantes, bibliografía y anexos. En los anexos aparecen las diferentes notificaciones requeridas: autorización para realizar la práctica pedagógica, certificación satisfactoria de la práctica, lista de asistencia de los participantes y la nota del profesor de español.

**FASE I**  
**DIAGNÓSTICO**

## 1. Diagnóstico Situacional

La enseñanza y aprendizaje de la matemática ha representado por años uno de los principales retos que ha tenido que enfrentar el docente en su labor. Sin embargo ante las críticas recibidas, muchos son los docentes que no se desaniman y siguen esforzándose por brindar un conocimiento útil a sus estudiantes. Y es que cuando tenemos en cuenta el tipo de matemáticas que queremos enseñar y la forma de llevar a cabo esta enseñanza debemos reflexionar sobre dos fines importantes:

Que los estudiantes lleguen a apreciar el papel de las matemáticas en la sociedad, incluyendo los diferentes campos de aplicación y el modo en que las matemáticas han contribuido a su desarrollo, también, que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método matemático, es decir, la clase de preguntas que un uso inteligente de las matemáticas permite responder, las formas básicas de razonamiento y del trabajo matemático, así como su potencia y limitaciones.

Como es de saber las matemáticas se aplican en diversos campos de la vida diaria tales como: La Química, La Biología, La Física, La Estadística, Las Ciencias Naturales, Economía entre otros.

Actualmente el campo de la economía es uno de los que más requiere de la utilización de modelos matemáticos en la toma de decisiones de oferta y demanda en un mundo globalizado. El campo de la economía es tan amplio que ha dado pie para que surjan nuevas áreas de estudio, como es el caso de la economía ambiental. La economía ambiental se define como la disciplina encargada de

estudiar el efecto de la economía en el ambiente, la importancia del entorno ambiental para la economía y la forma más apropiada de regular la actividad económica, a través de un equilibrio entre los objetivos ambientales económicos y sociales.

La formación de profesionales, con una sólida preparación académica en matemáticas, capaces de dar respuesta a los grandes retos que enfrentamos en materia ambiental, como es el cambio climático, y como futuros diseñadores de modelos matemáticos para enfrentar con seguridad estos retos es lo que necesita nuestra sociedad.

### **1.1 Area de Estudio.**

El Centro Regional Universitario de Coclé inicio sus labores en 1965, con el respaldo del Dr. Bernardo Lombardo Ayala. En este año se inician los primeros cursos universitarios con una matrícula de 250 estudiantes. Sus primeros coordinadores fueron los profesores Heraclio Quirós y Moisés Tejeira, quienes contribuyeron a forjar la educación superior en la provincia. El Centro fue creado formalmente el 25 de junio de 1965.

Actualmente, el Centro cuenta con 8 facultades, distribuidas en 26 carreras, atendidas por una planta docente de 199 profesores y 4 especializaciones a nivel de postgrado y maestría.

El desarrollo administrativo se fortalece a través de 70 funcionarios administrativos que brindan sus servicios en las diversas secciones que componen esta unidad académica-administrativa

## **1.2 Población Encuestada**

La población de estudio son estudiantes que cursan el primer año de la Licenciatura en Economía Ambiental en el curso denominado “Matemática para Economía Ambiental”, ofrecido en el Centro Regional Universitario de Coclé. Para nuestro propósito se aplicó un instrumento de obtención de información (encuesta) a 22 estudiantes, de ambos sexos y que presentan muchas deficiencias en matemáticas y sus aplicaciones.

## **1.3 Muestra**

La encuesta se aplicó inicialmente a veintidos estudiantes del curso. Sin embargo, de los veintidos que contestaron la encuesta sólo asistieron a la capacitación, en un cien por ciento, catorce (14). Esto debido a diferentes situaciones que presentaban algunos de ellos.

## **1.4 Instrumento de Recolección de Información**

### **1.4.1 Encuesta**

Una encuesta, es un instrumento cuantitativo de investigación social mediante la consulta a un grupo de personas elegidas de forma estadística, realizada con ayuda de un cuestionario.

El instrumento que a continuación aparece fue el que nos permitió recopilar la información necesaria, para enmarcar la capacitación hacia determinadas áreas de las matemáticas. Tal instrumento contaba con una serie de preguntas cerradas, para el mejor logro de los objetivos trazados.

**Universidad de Panamá**  
**Vicerrectoría de Investigación y Postgrado**  
**Centro Regional Universitario de Coclé**  
**Facultad de Ciencias de la Educación**  
**Programa de Maestría en Docencia Superior**

Encuesta a estudiantes del Centro Regional Universitario de Coclé.

**Objetivo:** Conocer la situación actual del participante, en cuanto a su formación académica que le permitió ingresar a la carrera y su rendimiento actual. Este documento es para fines educativos. **Muchas Gracias por tu colaboración.**

**Instrucciones:** Responde con una equis(x) dentro del recuadro, cada pregunta. En otro caso escribe lo solicitado.

1. ¿En qué tipo de institución educativa estudiaste tu bachillerato?

Pública

Privada

2. ¿De qué bachiller eres egresado?

Ciencias

Comercio

Letras

Agropecuario

3. ¿En qué año te graduaste de duodécimo grado o sexto año?

Antes de 2000

2000-2003

2004-2006

2007-2009

4. ¿De qué manera sufragas el costo de tu carrera?

Beca

Préstamo

Recursos Familiares

Recursos propios.

5. De las siguientes asignaturas ¿cuál es tu favorita?

Estadística

Matemática

Economía

Español

6. ¿Consideras las matemáticas importantes en la carrera que estudias?

En un 100%

En un 75%

En un 50%

Menos del 50%

7. ¿Fuistes a algún curso de afianzamiento en Matemáticas antes de entrar a la carrera?

- Si  
 No

8. Consideras necesario que se ofrezca a los que ingresan a esta carrera un curso de afianzamiento en Matemáticas.

- Si  
 No  
 Quizás

9. Actualmente en la carrera que estudias presentas algunas dificultades en Matemáticas

- Si  
 No

10. Hasta este momento ¿Cómo ha sido tu rendimiento académico en Matemáticas?

- Excelente  
 Bueno  
 Regular  
 Deficiente

11. De brindarse una capacitación o tutoría en Matemáticas, estarías dispuesto(a) a participar.

- Si  
 No

12. En que áreas de la Matemática te gustaría recibir la capacitación. Indica el orden de prioridad en una escala de 1 a 4.

- Álgebra  
 Aritmética  
 Geometría  
 Trigonometría

13. Indica el día más conveniente, en el que te gustaría recibir una capacitación en Matemáticas.

- Fin de semana  sábados  Domingo

- Día de semana Especifique el día: \_\_\_\_\_

14. ¿A qué le atribuyes tu bajo rendimiento académico?

- Tiempo de estudio  
 Metodología docente  
 Bachiller de ingreso  
 Otros

15. ¿Tienes actualmente correo electrónico?

- Si  
 No

## 1.5 Análisis de los Resultados

### **ANÁLISIS DE LOS CUADROS Y GRÁFICAS PARA EL PROYECTO DE INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA.**

Con el fin de beneficiar a un grupo de estudiantes, a nivel universitario, sin costo alguno y donde la Universidad de Panamá se proyecte y promueva la elaboración de proyectos educativos; se aplicó un instrumento de investigación que ofreciera información para la formulación de un proyecto de intervención pedagógica en el Centro Regional Universitario de Coclé. Los proyectos de intervención tienen el propósito de ayudar a mejorar las necesidades educativas que presenten un grupo de personas. Como sabemos son diversas las necesidades que tienen los estudiantes en su diario vivir, sin embargo me permití realizar un diagnóstico, para el proyecto de intervención pedagógica, en mi especialidad el cual es Matemáticas.

Este diagnóstico realizado a través de una encuesta, se lo aplique a un grupo de estudiantes de I año, de la Licenciatura en Economía Ambiental, del Centro Regional Universitario de Coclé, los cuales de acuerdo a información suministrada presentan muchas deficiencias en aritmética. Las deficiencias básicas en aritmética, pueden afectar las competencias en otras áreas como el álgebra, la geometría, la trigonometría, y en las aplicaciones de éstas, muy importantes en su carrera de estudio.

Elaboré el diagnóstico, de tal forma que fueran ellos los que me permitieran recoger la información, desde su punto de vista, en cuanto a su desempeño en la asignatura denominada “Matemáticas para economía ambiental”. Los datos

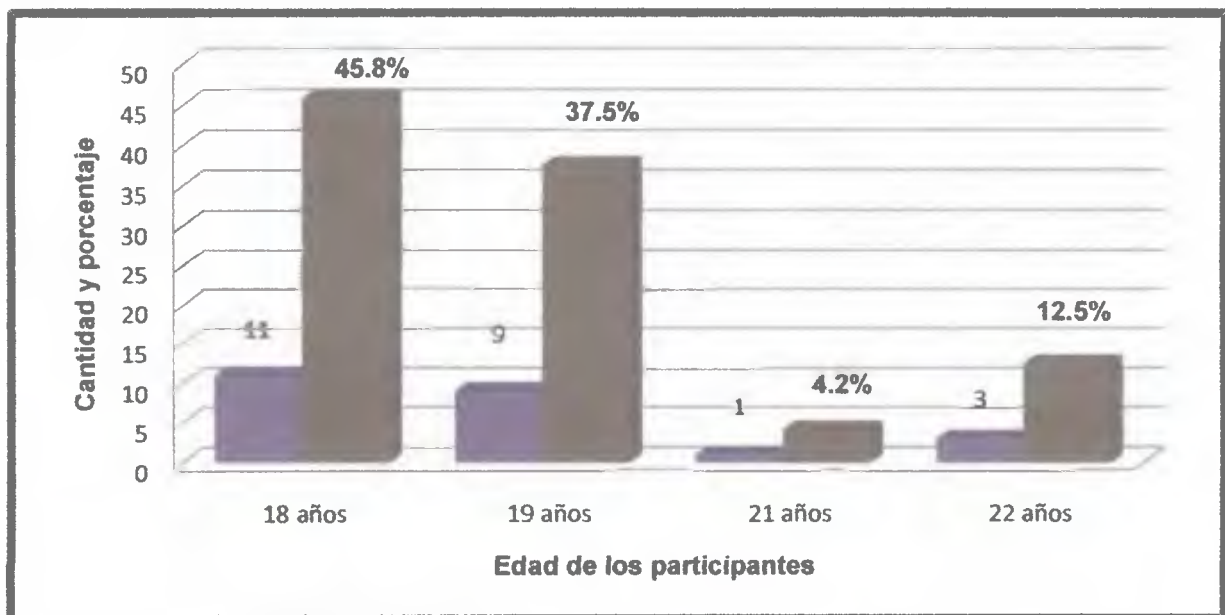
obtenidos me permiten elaborar los módulos, en los cuales se hará un mayor énfasis, para, crear en este grupo de estudiantes mayores competencias y por ende mejores resultados.

A continuación se presentan los cuadros, gráficas y el análisis de la información obtenida.

**Cuadro 1.** Distribución de la frecuencia y porcentajes que representan las edades de los participantes encuestados.

Edad	Frecuencia	Porcentajes (%)
18	11	45.8
19	9	37.5
21	1	4.2
22	3	12.5

**Gráfica 1.** Distribución de las edades de los participantes vs porcentaje.



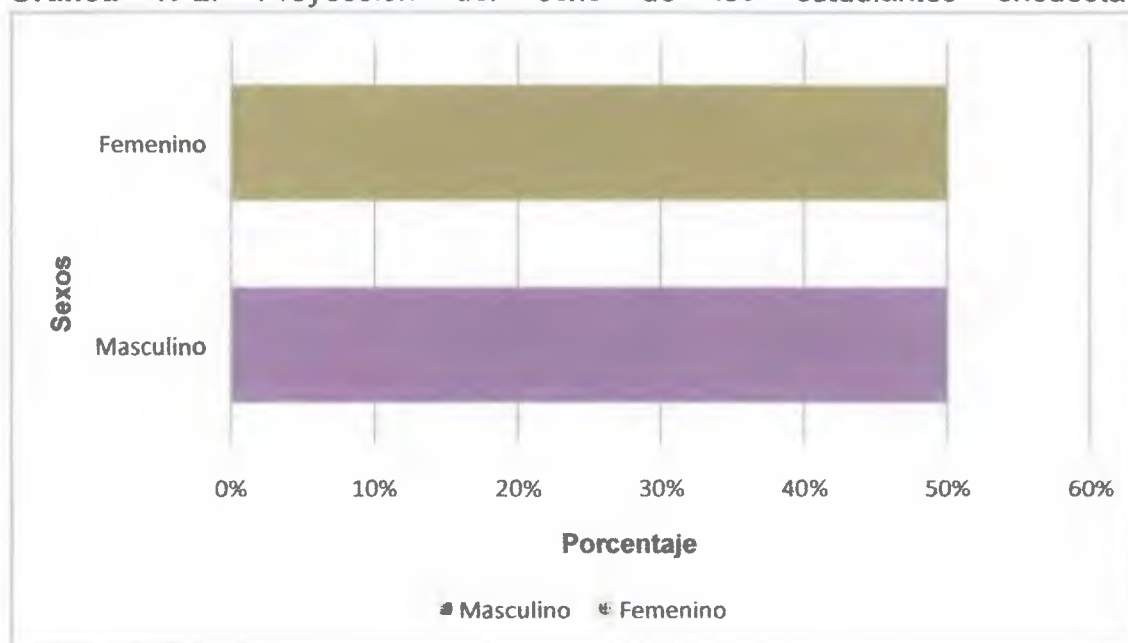
**Análisis.** Podemos verificar que los estudiantes a los que se les aplicó la encuesta son jóvenes y adultos, cuya edad oscila entre los 18 y 22 años. De estos, notamos

que el 45.8% y 37.5% son estudiantes recién graduados de educación media y 4 estudiantes que representan el 16.6%, tienen varios años de haberse graduado de duodécimo grado. En general la mayoría es una población joven.

**Tabla N°2.** Distribución de los participantes encuestados por género.

Género	Frecuencia	Porcentaje (%)
Masculino	12	50
Femenino	12	50
Total	24	100

**Gráfica N°2.** Proyección del sexo de los estudiantes encuestados.

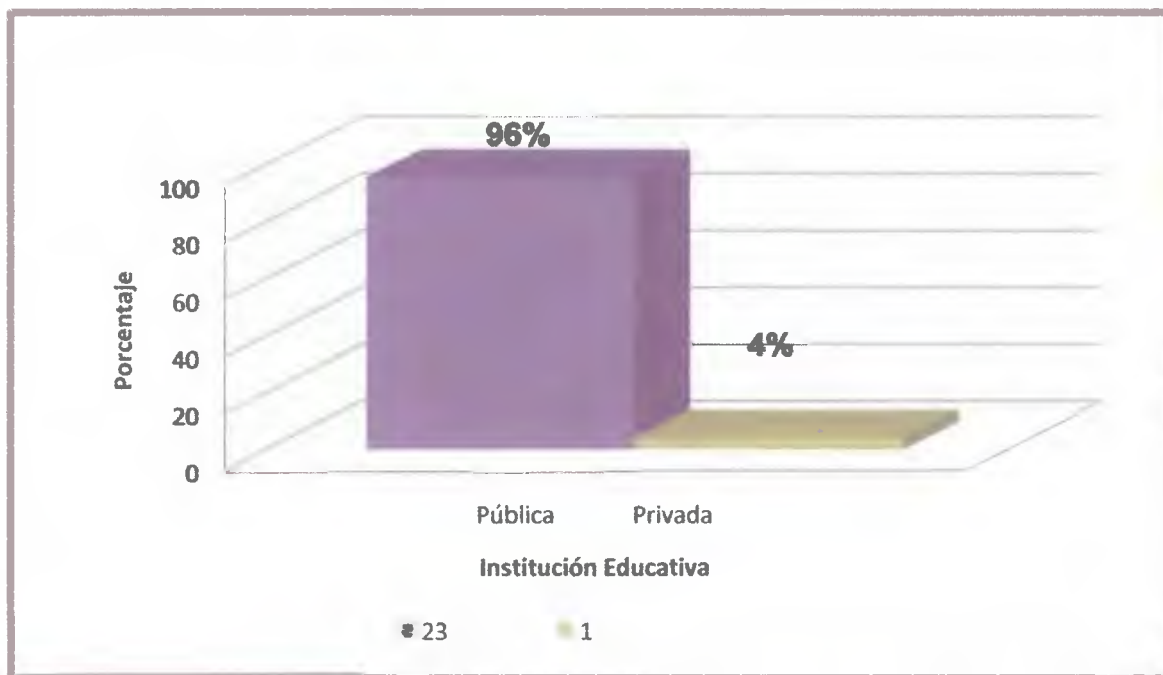


**Análisis.** En la imagen presentada se puede observar claramente que los participantes encuestados corresponden, el cincuenta por ciento masculinos y cincuenta por ciento femenino, lo que demuestra un porcentaje equilibrado en cuanto al sexo.

**Cuadro N°3.** Distribución referente al tipo de institución en la que estudio el bachillerato, y le permitió el ingreso a la carrera.

Institución	Frecuencia	Porcentaje (%)
Pública	23	96
Privada	1	4
Total	25	100

**Gráfica N°3.** Proyección gráfica porcentual del tipo de institución educativa de la cual es egresado(a) los(as) participantes encuestados.

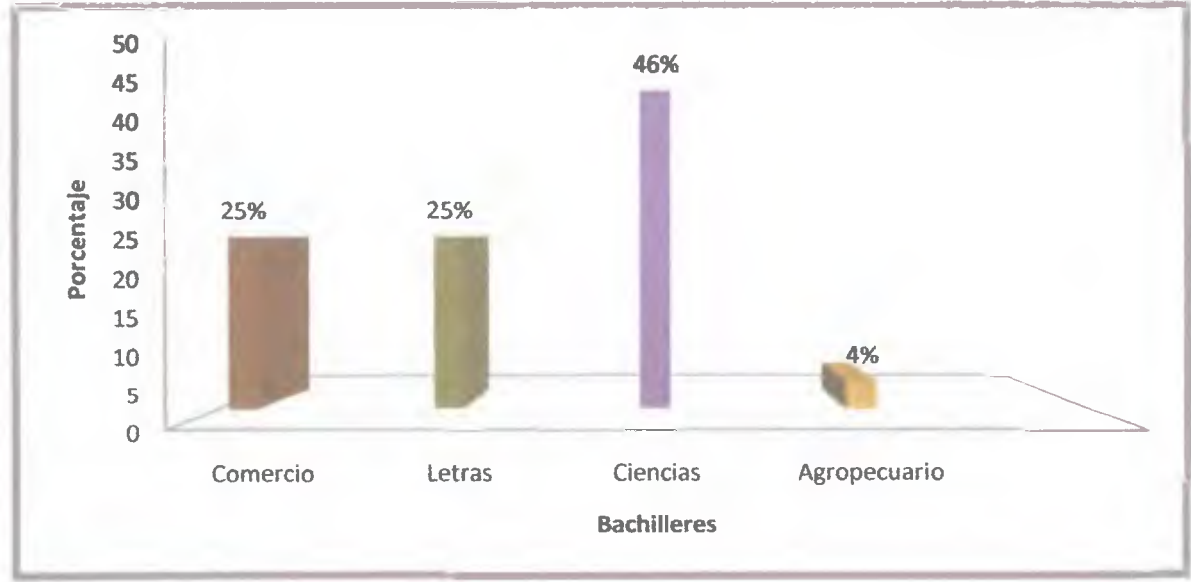


**Análisis.** Podemos deducir que el grupo de los estudiantes encuestados en su mayoría veintitrés (96%) provienen de instituciones educativas oficiales y sólo uno (4%) de alguna institución educativa privada. Esto nos indica además, que son jóvenes de bajos recursos económicos.

**Cuadro N°4.** Distribución referente al tipo de bachiller que le permitió ingresar a los participantes a la carrera en “Licenciatura en Economía Ambiental”.

Bachiller	Frecuencia	Porcentaje (%)
Comercio	6	25
Letras	6	25
Ciencias	11	46
Agropecuario	1	4
Área Técnica	0	0
Totales	24	100

**Gráfica N°4.** Proyección de los bachilleres que estudiaron en Educación Media para ingresar a la carrera de “Licenciatura en Economía Ambiental”



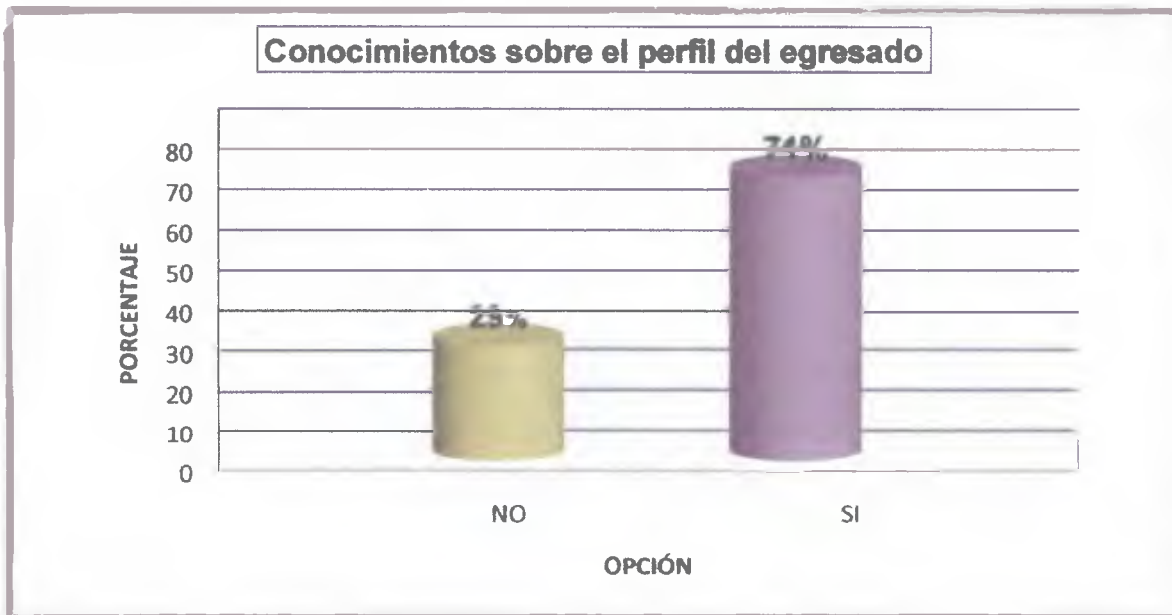
**Análisis.** Podemos observar que los estudiantes encuestados provienen de diferentes bachilleres, sin embargo el mayor porcentaje proviene del bachiller en Ciencias (46%), seguido por Comercio (25%), Letras (25%) y con un 4% bachiller Agropecuario. Cabe señalar que ninguno de los encuestados es del área técnica.

Por otro lado, los programas de estudio de matemática difieren de un bachiller a otro, lo que indica que las competencias entre los estudiantes pueden variar.

**Cuadro N°5.** Distribución del conocimiento sobre el perfil de egreso de los estudiantes encuestados.

Opciones	Frecuencia	Porcentaje (%)
Si	17	71
No	7	29
Total	24	100

**Gráfica N°5.** Aparece la percepción que tienen los participantes encuestados sobre el perfil de egreso de la carrera.

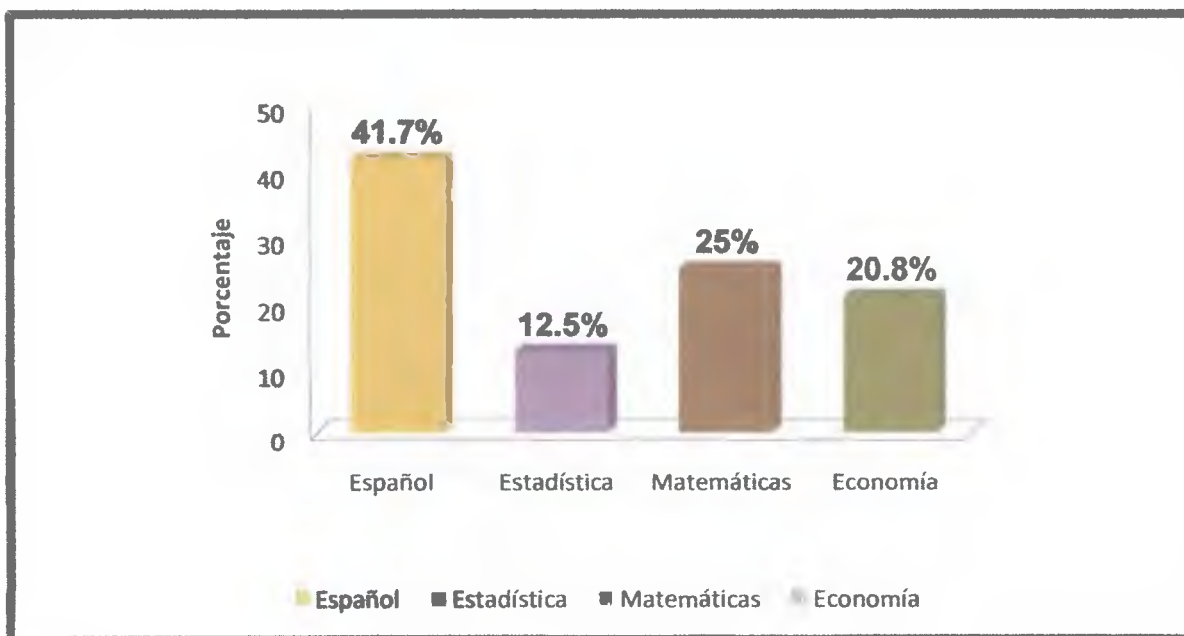


**Análisis.** El perfil del egresado es muy importante que el estudiante lo conozca para que muestre su interés y desempeño en cada asignatura. De acuerdo a los encuestados la mayoría un 71%, supone conocer el perfil de los egresados de la carrera que estudian y el 29% dicen desconocerlo.

**Cuadro N°6.** Distribución del nivel de favoritismo que mantienen los participantes por algunas asignaturas de la carrera que estudian.

Asignatura	Frecuencia	Porcentaje (%)
Español	10	41.7
Estadística	3	12,5
Matemáticas	6	25.00
Economía	5	20,8
Total	24	100

**Gráfica N°6.** Proyección del nivel de favoritismo de los encuestados por algunas de las asignaturas de la carrera.

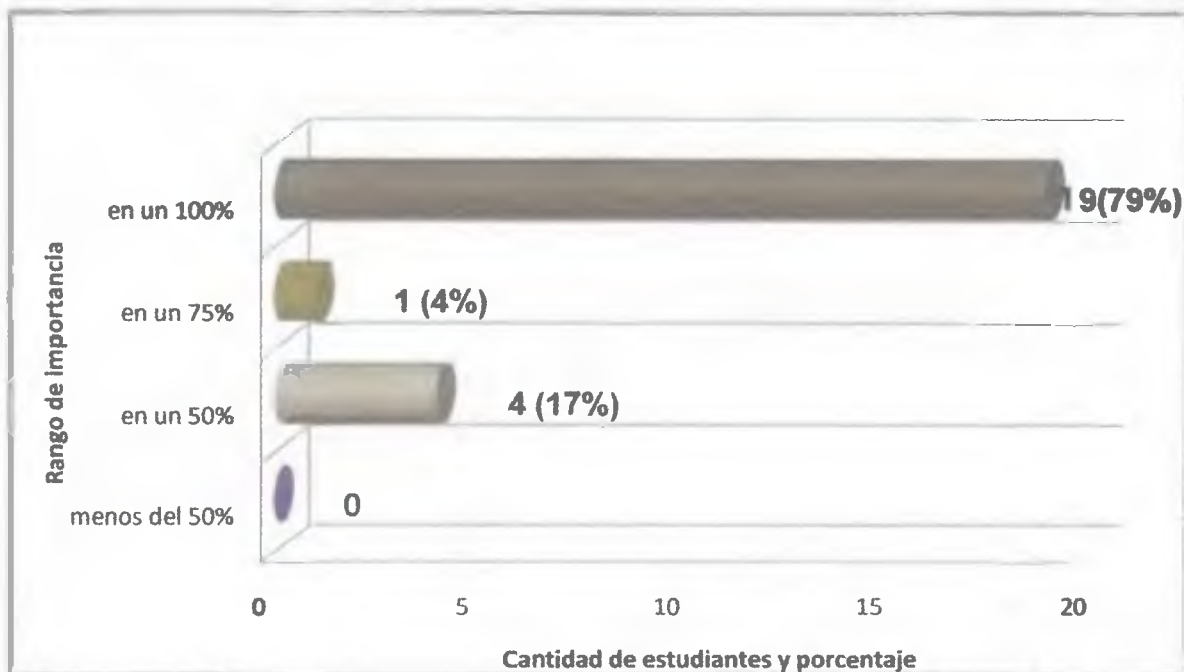


**Análisis.** Al observar la gráfica notamos que la asignatura preferida por los participantes encuestados es la de español con un 41.7%, sin embargo las otras tres, fundamentales en su carrera, lograron casi la mitad y menos de la mitad, del porcentaje que la de español.

**Cuadro N°7.** Percepción que tienen los participantes sobre la importancia de la Matemática en la carrera que estudian.

Rango	Frecuencia	Porcentaje (%)
En un 100%	19	79
En un 75%	4	17
En un 50%	1	4
Menos del 50%	0	0
Totales	24	100

**Gráfica N°7.** Proyección de la importancia que le dan los encuestados a la asignatura de Matemática en la carrera de “Licenciatura en Economía Ambiental”

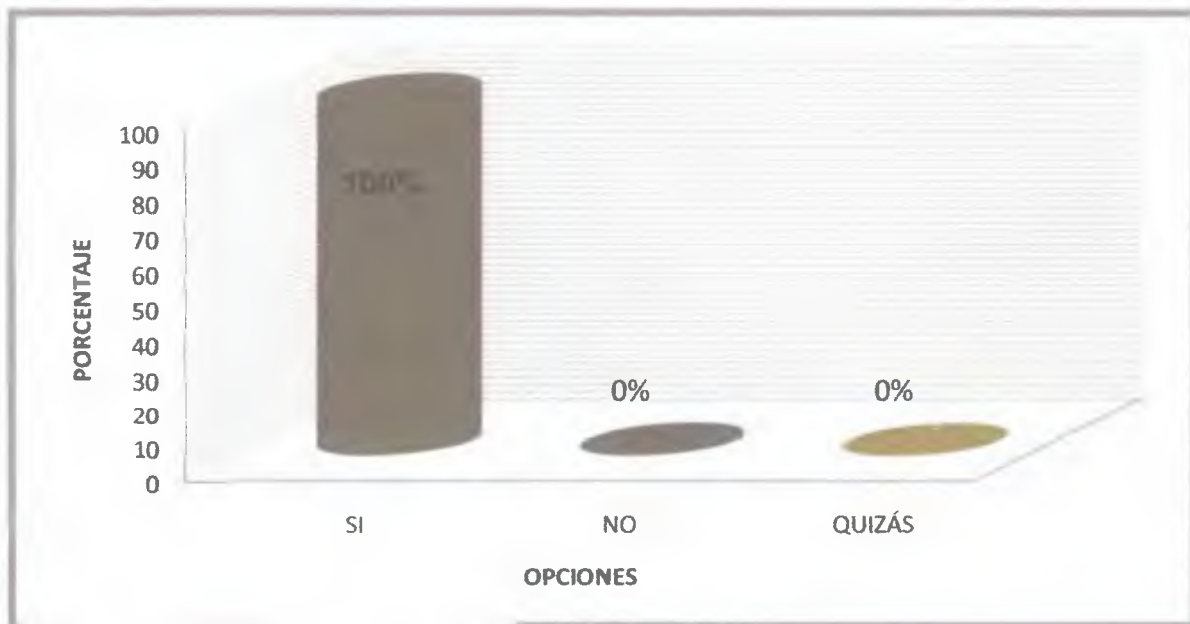


**Análisis.** Según los encuestados la asignatura de matemáticas, en su carrera de estudio, es de suma importancia, esto se refleja cuando 19 de ellos, el 79%, señalan que tal asignatura tiene que ver en sus estudios en un 100%, sólo uno, el 4%, considera que las matemáticas son importantes en un 75%, y cuatro, el 17%, piensan que son importantes en un 50% para su carrera. No obstante, ninguno le da un rango menor de 50%.

**Cuadro N°8.** Distribución de los encuestados en cuanto a, si se debería brindar un curso de afianzamiento en matemáticas antes de ingresar a la carrera.

Opción	Frecuencia	Porcentajes
Si	24	100
No	0	0
Quizás	0	0
Totales	24	0

**Gráfica N°8.** Proyección sobre la necesidad, según los encuestados, de ofrecer un curso de afianzamiento en matemáticas, antes de ingresar a la carrera.

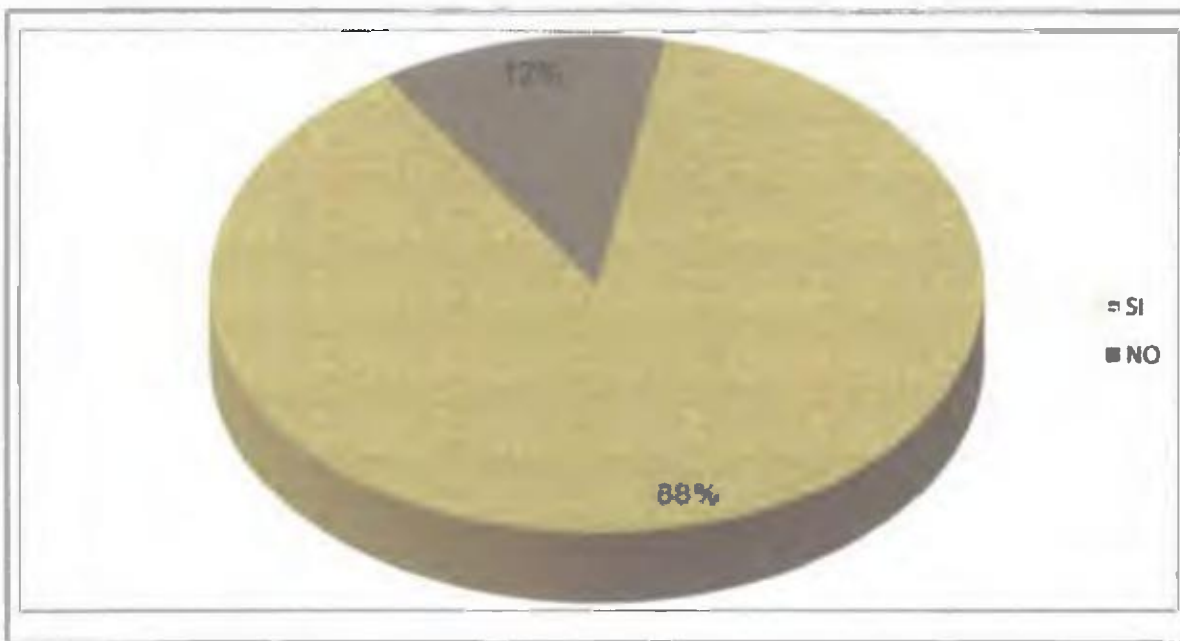


**Análisis.** De acuerdo a los resultados reflejados en el cuadro y gráfica los participantes encuestados, sienten la necesidad de que sí se les brinde a los que ingresan, a esta carrera, un curso de afianzamiento en matemáticas. Un 100% señala que esto debería darse.

**Cuadro N°9.** Sobre si presentan o no dificultades y deficiencias en la aplicación de conocimientos en la asignatura de matemáticas.

Opciones	Frecuencia	Porcentaje (%)
Si	21	88
NO	3	12
Totales	24	100

**Gráfica N°9.** Opinión de los encuestados, sobre si presentan o no dificultades o deficiencias en la asignatura de matemáticas aplicadas, actualmente.

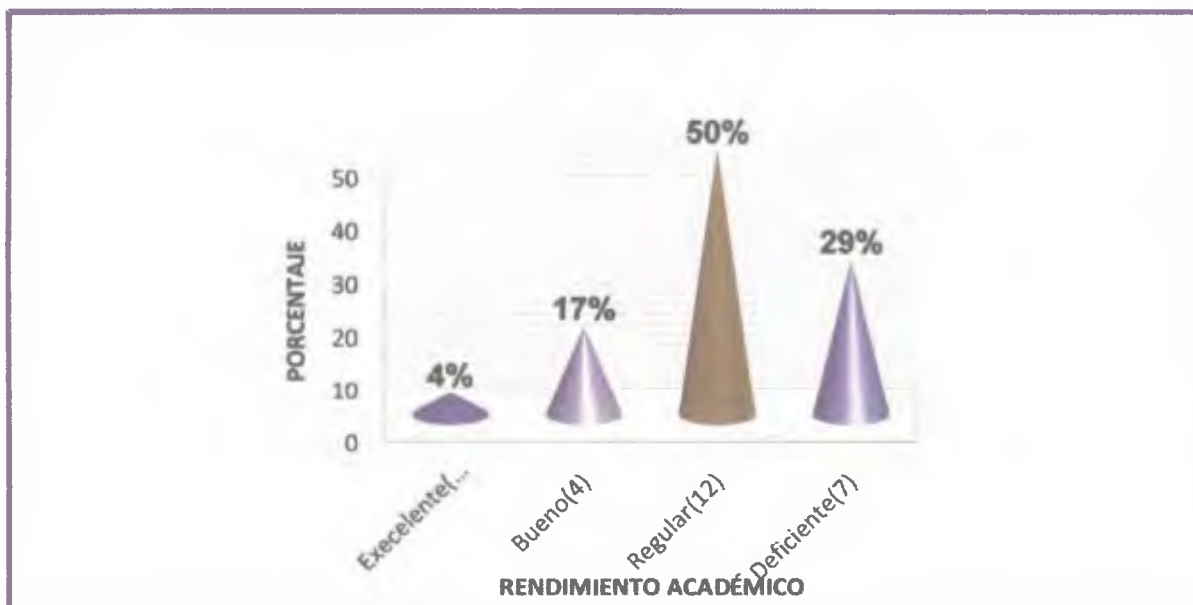


**Análisis.** Observamos que un 88% de la población encuestada, es decir, 21 estudiantes consideran que presentan dificultades o deficiencias en matemáticas, mientras que un 12%, es decir, 3 estudiantes consideran que no tienen problemas en dicha asignatura.

**Cuadro N°10.** Distribución sobre el rendimiento académico actual, de los estudiantes encuestados, en la asignatura de Matemática.

Rendimiento Académico	Frecuencia	Porcentajes (%)
Excelente	1	4
Bueno	4	17
Regular	12	50
Deficiente	7	29
Totales	24	100

**Gráfica N°10.** Perspectiva sobre el rendimiento académico actual de los estudiantes encuestados en la asignatura Matemáticas.

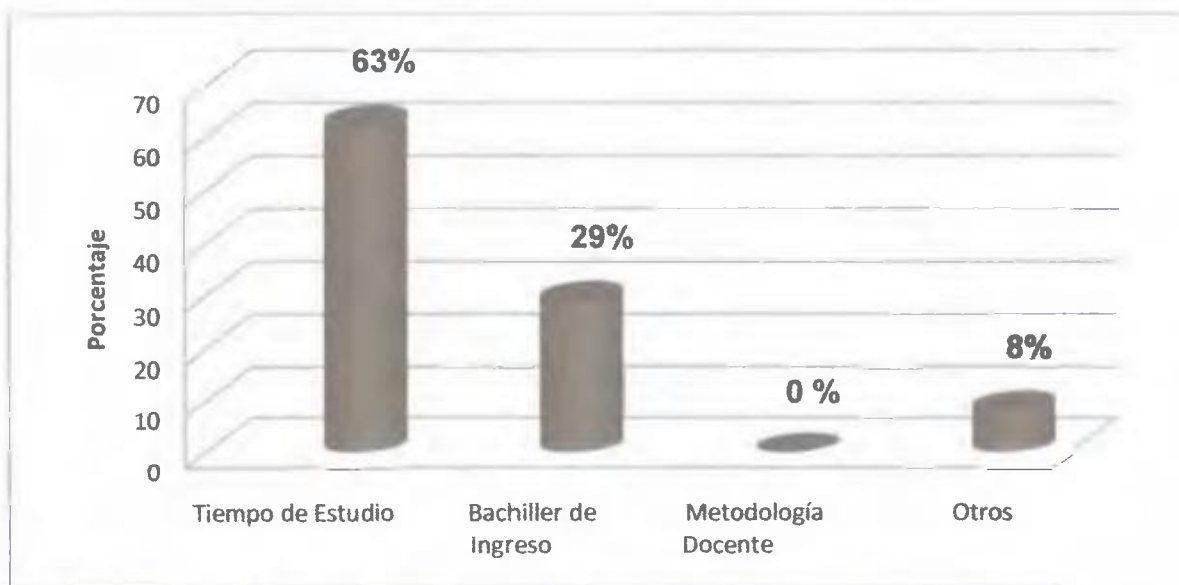


**Análisis.** Se observa en las imágenes que sólo un estudiante, el cual representa el 4%, tiene un rendimiento excelente, mientras que 4 estudiantes, que representan el 17% consideran tener un nivel bueno, sin embargo la gran mayoría, un 79%, están entre los regulares y deficientes en su rendimiento académico.

**Cuadro N°11.** Distribución del punto de vista que tienen en cuanto al bajo rendimiento y su causa.

Causas del Bajo Rendimiento	Frecuencia	Porcentaje
Tiempo de estudio	15	62.5
Metodología docente	0	0
Bachiller de ingreso	7	29.2
Otros	2	8.3
Totales	24	100

**Gráfica N°11.** Perspectiva de las causas que los encuestados le atribuyen su bajo rendimiento académico.



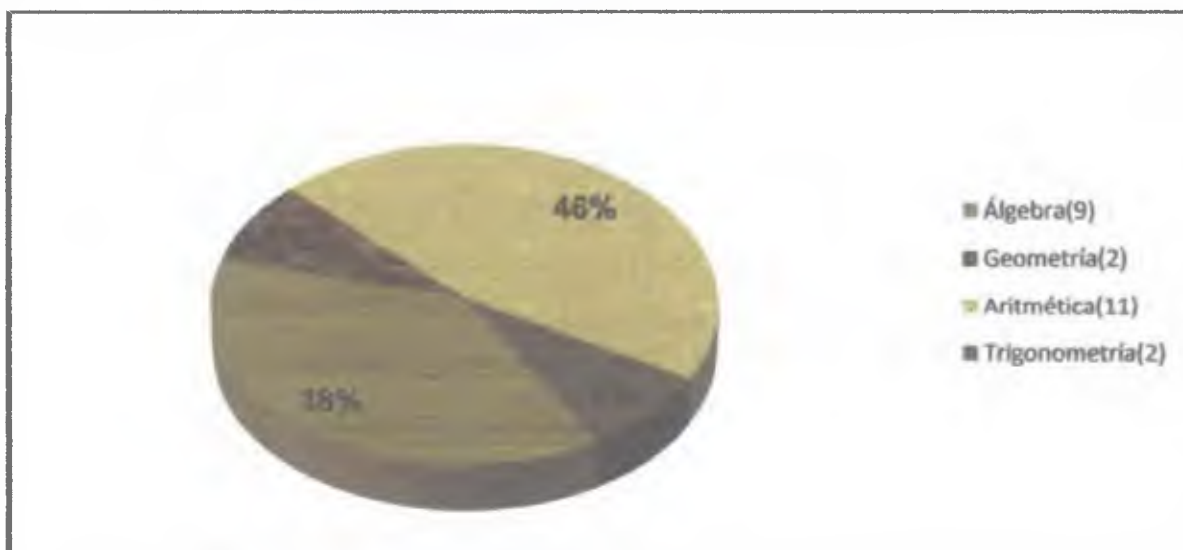
**Análisis.** Podemos determinar que de acuerdo a los estudiantes encuestados, ellos consideran que de tener un bajo rendimiento académico la causa principal sería el tiempo que le dedican al estudio con un 63%, seguido con un 29% el bachiller de ingreso a la carrera y con un 8% otras causas. Cabe señalar, que

ninguno de los participantes le consideró a la metodología docente la causa de su bajo rendimiento académico.

**Cuadro N°12.** Áreas de Las Matemáticas que considera el participante encuestado, necesario, recibir una capacitación o seminario.

Área de la Matemática	Frecuencia	Porcentaje (%)
Álgebra	9	38
Geometría	2	8
Aritmética	11	46
Trigonometría	2	8
Totales	24	100

**Gráfica N°12.** Estadística de las áreas de la matemática que consideran los estudiantes, necesaria, recibir una capacitación o reforzamiento.

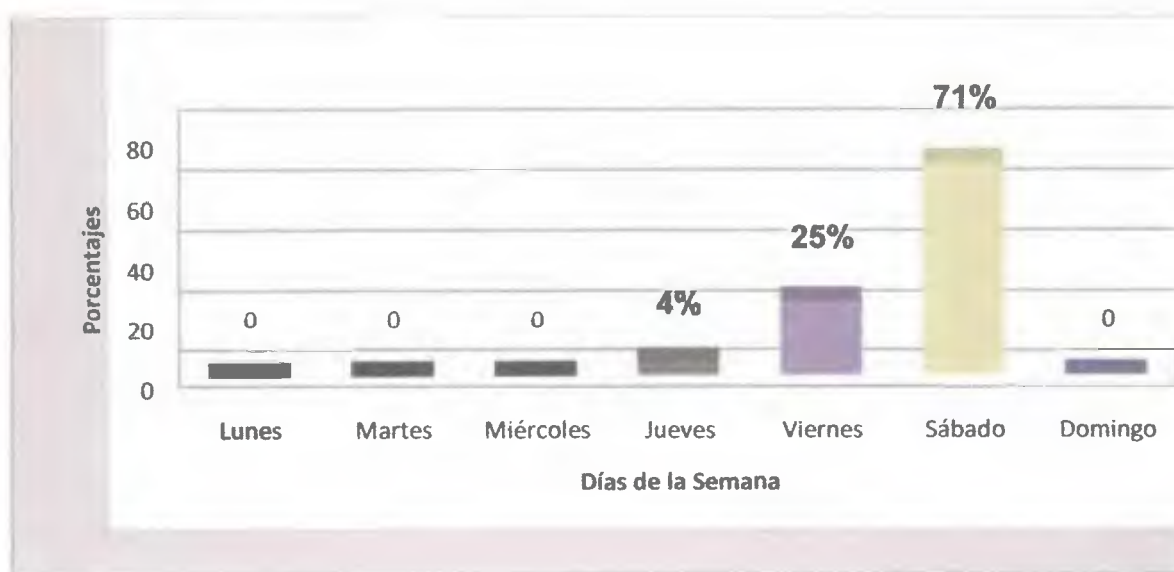


**Análisis.** Los estudiantes encuestados señalan que de recibir una capacitación, les gustaría que fuera, principalmente en aritmética, ya que un 46% consideran que allí están las dificultades, seguidos por el área de álgebra con un 38%, geometría con 8% y trigonometría con un 8%.

**Cuadro N°13.** Día más conveniente, de los participantes, para recibir un seminario o capacitación en la asignatura de matemática.

Día	Frecuencia	Porcentaje (%)
Lunes	0	0
Martes	0	0
Miércoles	0	0
Jueves	1	4
Viernes	6	25
Sábado	17	71
Domingo	0	0

**Gráfica N°13.** Distribución del día más conveniente, elegido por los participantes, para recibir la capacitación en matemáticas.

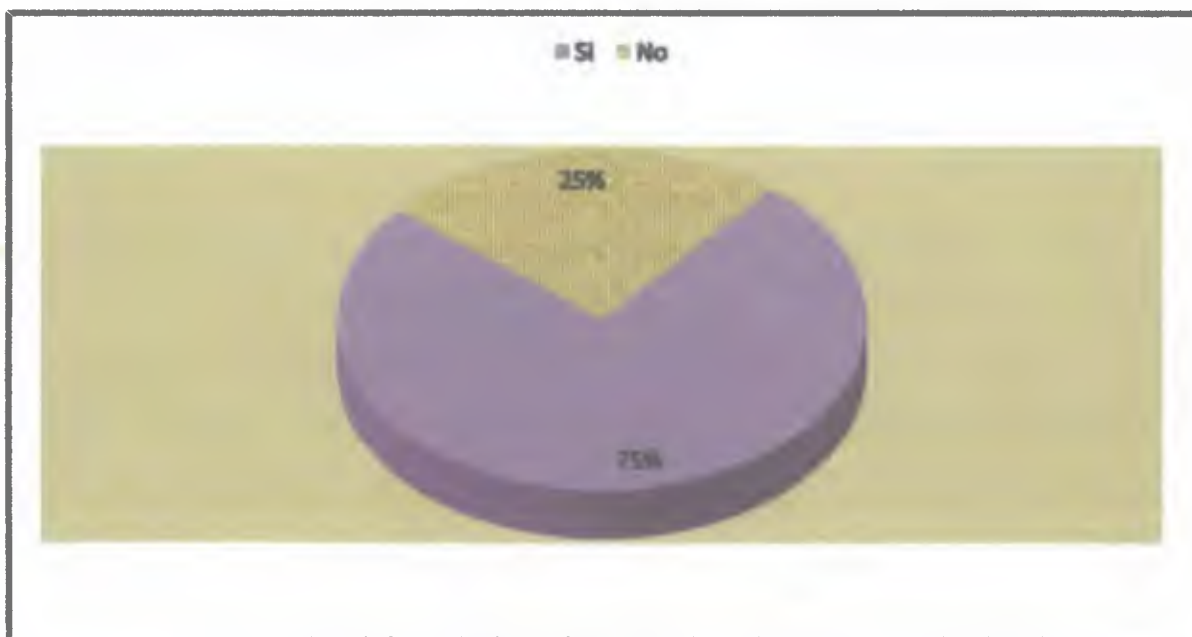


**Análisis.** Para los estudiantes encuestados, el mejor día para recibir esta capacitación es el sábado con un 71%, seguido del viernes con 25% y el día jueves con sólo un 4%.

**Cuadro 14.** Distribución del uso y posesión de correo electrónico por los participantes para las horas virtuales.

Opciones	Frecuencia	Porcentaje(%)
Si	18	75
No	6	25

**Gráfica N°14.** Proyección de la posesión de correo electrónico por los participantes.



**Análisis.** Podemos notar que no todos los participantes tienen correo electrónico, por lo tanto, debe promoverse su uso, para las horas virtuales. El 75% señala que si tiene y el 25%, unos seis estudiantes, dicen que no.

## **1.6 Análisis general de los cuadros y gráficas presentado para el proyecto de intervención pedagógica.**

La encuesta se aplicó a un grupo de 24 estudiantes de primer ingreso, de la Licenciatura en Economía Ambiental, de la Facultad de Economía del Centro Regional Universitario de Coclé en la asignatura denominada "Matemáticas para economía ambiental".

Los cuadros y gráficas elaborados con la información recabada, permiten dirigir el seminario o capacitación hacia ciertas áreas de la matemática de uso más frecuente en la carrera que estudian los participantes encuestados, como lo son:

- Aritmética, operaciones y aplicaciones

- Álgebra, operaciones y aplicaciones

- Geometría Analítica, aplicaciones

- Aplicaciones de acuerdo al plan de estudio de la asignatura de *matemáticas aplicadas a la economía.*

Además, la información obtenida señala que el horario más adecuado para tal capacitación o seminario es el día sábado.

Se pretende de acuerdo a toda la información obtenida, en este diagnóstico y al programa de estudio de Matemáticas de dicha carrera, elaborar de manera más adecuada y eficaz los módulos que conformarán el proyecto de intervención pedagógica.

## **FASE II**

# **MARCO METODOLÓGICO DEL PROYECTO DE INTERVENCIÓN**

## **2. ASPECTOS GENERALES DEL PROYECTO**

### **2.1 TÍTULO DEL PROYECTO**

El seminario, para el proyecto de intervención pedagógica, está denominado “Aplicaciones de las Matemáticas en Economía Ambiental”. Para estudiantes de primer año de la Licenciatura en Economía Ambiental del Centro Regional Universitario de Coclé, año 2010.

### **2.2 ANTECEDENTES**

La matemática es una ciencia que tiene innumerables aplicaciones en otras disciplinas del conocimiento humano. No es nada nuevo de que uno de los aprendizajes más importantes y sin el cual ningún individuo podría vivir activamente en la sociedad es la matemática: pues es considerada como un excepcional ejercicio para el desarrollo de la mente. “Una gimnasia del cerebro”, como acostumbraba a definirla Bertrand Russell, y todo esto por su alto nivel de abstracción, además, por su aplicación, la matemática aumenta su importancia al ser una ciencia auxiliar fundamental de otras disciplinas. Es por ello que toda persona debe poseer aunque sea un mínimo de conocimientos de la matemática y su contenido, aspecto este muy difícil de encontrar actualmente pues muchos docentes contrariamente de enseñar a valorar este conocimiento, mediante una motivación al estudio de la matemática, se ha dedicado a crear en el estudiante un temor innecesario de la materia dado que se la presenta como algo irreal, sin antecedentes y además sin utilización y aplicación en la vida excepto de las

operaciones matemáticas básicas: por lo que el individuo considera innecesario profundizar en el conocimiento matemático.

Por este poco interés en la matemática, el individuo no está consciente de que en cualquier aspecto de la vida social en que considere desenvolverse, necesitará un buen dominio de esta ciencia para alcanzar sus metas y propósitos.

Si la enseñanza de la matemática que recibe el estudiante es vaga, abstracta y descontextualizada, jamás se apropiará del conocimiento y tendrá problemas para concretar y resolver situaciones se le presenten.

Para lograr contextualizar los contenidos matemáticos en el aula, se hace necesario enseñarle al estudiante el uso y la necesidad de la matemática en muchas disciplinas en las cuales él se identifica.

El individuo desde edades tempranas se relaciona con muchos aspectos de la sociedad, pero uno de los más comunes e importantes es con el aspecto de la sociedad, pues no existe la persona que no tome en cuenta el factor monetario en su vida cotidiana, desde la simple compra de bienes hasta manejo económico más complejo. En este sentido se han realizado diversos trabajos de investigación, donde las aplicaciones de las matemáticas en economía son fundamentales.

Keila Loana Moncada Araque, estudiante de la Universidad de los Andes del Táchira (Venezuela), en mayo de 2002, realizó un trabajo a nivel superior titulado "Aplicación de la Matemática a la Economía", en el cual desarrolla contenidos matemáticos de manera detallada, mediante explicaciones teóricas y con ejemplos

prácticos. El objetivo era dar a conocer la utilización y aplicación de los conceptos y operaciones matemáticas en problemas de la realidad, relativos a la economía.

### **2.3 JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO**

De hecho sabemos, que en la actualidad, la formación académica en asignaturas como matemática, es muy cuestionada. Esto se debe a diversos factores, que unidos, dan como resultado deficientes evaluaciones. Sin embargo, muchos de nosotros sólo nos dedicamos a cuestionar y pensamos que los culpables son otros y no aportamos en nada a mejorar tal situación, es decir, formamos parte del problema y no de la solución.

Es bien cuestionado entonces que muchos de los estudiantes que ingresan a nuestras universidades no cuentan con las competencias necesarias para manejarse eficientemente, por lo tanto son diversas la diferencias que presentan los mismos, y sobre todo en áreas como las matemáticas.

Este proyecto tiene el propósito de contribuir con la formación académica, en la asignatura de matemática, en un grupo de estudiantes de primer año que estudian la Licenciatura en Economía Ambiental, y que presentan dificultades en el manejo de conceptos y operaciones matemáticas básicas para sus posteriores aplicaciones en la carrera que estudian.

### **2.4 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA**

El hecho de interesarme por realizar este proyecto de intervención, fue la necesidad que presenta un grupo de estudiantes universitarios en la asignatura de

matemáticas y que de acuerdo a información ofrecida, los mismos, tienen dificultades en operaciones aritméticas básicas, lo que podría afectar su rendimiento académico en asignaturas como: matemáticas, economía, estadística, contabilidad; importantes en su carrera de estudio.

## **2.5 DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO**

Es una realidad, que un gran porcentaje de los estudiantes egresados de los planteles educativos de nivel medio, en nuestro país, no cumplen con los estándares exigidos para su incursión a la Universidad. Una de las asignaturas en las que presentan mayores deficiencias es en matemáticas.

Actualmente en el Centro Regional Universitario de Coclé se ofrece la carrera, Licenciatura en Economía y Gestión Ambiental, una Carrera Nueva, que abre las puertas al campo laboral a muchos jóvenes coclesanos. Sin embargo, para la admisión en dicha carrera se le ha permitido la incursión a egresados de diversos bachilleres (ciencia, letras, comercio, etc.). Lo que ha ocasionado que muchos de estos jóvenes presenten dificultades en cuanto a los conocimientos en matemática exigidos. Cabe señalar, además que estos jóvenes han sido beneficiados con una beca dada por el Estado, ya que se requiere este tipo de profesional en el país.

Con el fin de brindar y apoyar con mis conocimientos a este grupo de estudiantes, pretendo ofrecer una capacitación para reforzar aquellas competencias matemáticas esenciales en su carrera, y encaminarlos hacia mejores resultados académicos y profesionales en esta y otras asignaturas.

## **2.6 Misión**

Lograr que todos o un gran porcentaje de los estudiantes que participen de la capacitación puedan aprobar su asignatura y alcancen el siguiente nivel, también que logren comprender la necesidad de mantenerse en una constante búsqueda por el mejoramiento y superación personal y profesional.

## **2.7 OBJETIVOS**

### **2.7.1 Objetivo General:**

1. Proporcionar una capacitación, a un grupo de estudiantes de primer ingreso del Centro Regional Universitario de Coclé, para facilitar la comprensión de procesos y procedimientos matemáticos, en el ámbito económico.

### **2.7.2 Objetivos Específicos:**

- Contribuir con la formación académica en matemáticas en estudiantes de primer ingreso de la Licenciatura en Economía y Gestión Ambiental.
- Fortalecer la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos utilizados en Economía Ambiental.
- Mejorar el rendimiento académico de los estudiantes y su avance al siguiente nivel.

## 2.8 LOCALIZACIÓN DEL PROYECTO

El proyecto se realizará, en el Centro Regional Universitario de Coclé, en la Facultad de Economía. El periodo de duración para esta capacitación es del 26 de junio del 2010 al 30 de julio del 2010, en diferentes jornadas atendiendo al horario disponible por los participantes.



*Foto. Vista frontal del Centro Regional Universitario de Coclé.*

## 2.9 BENEFICIARIOS

Los beneficiarios son estudiantes de primer año de la Facultad de Economía que estudian la carrera de Licenciatura en Economía y Gestión Ambiental en el curso denominado "Matemáticas Aplicada a la Economía" en el Centro Regional Universitario de Coclé. Estos participantes son jóvenes panameños que

proviene de diferentes bachilleratos tales como: Letras, Comercio, Ciencias y Agropecuario. También se dictará sin ningún costo económico por parte de los estudiantes.

## **2.10 POSIBLES RESULTADOS Y EFECTOS.**

Los resultados que se pretenden obtener son: la aprobación del curso por parte de los estudiantes que participen del seminario y una formación competente en aprendizajes posteriores, no sólo en matemáticas, sino además en áreas de la carrera que estudian como: economía, estadística, contabilidad entre otras. También se persigue promover los cursos de afianzamiento para los estudiantes que ingresan a la carrera en mención.

Entre los efectos pudieran estar: ejercer un mayor interés por parte de los estudiantes en la asignatura de matemática y una mejor disposición para enfrentar aprendizajes posteriores, a la vez destacar la importancia de la matemática en su formación profesional.

## **2.11 Metas**

- Reforzar los conocimientos en matemáticas y que son indispensables para la comprensión de los temas en el ámbito económico.
- Lograr que los estudiantes que participen en la capacitación puedan aprobar su asignatura sin mayores complicaciones y de esta manera avanzar al siguiente nivel.
- Fortalecer una actitud positiva hacia las matemáticas y sus aplicaciones en el ambiente económico.

- Mejorar el rendimiento académico de los participantes y una mejor disposición hacia las matemáticas y sus aplicaciones.

## 2.12 Recursos:

- **Financieros:**

Para llevar a cabo la ejecución del seminario, entre los recursos financiero que se necesitan están el económico o monetario distribuido de la siguiente manera:

Gasto de combustible o pasajes..... B/. 25.00

Pago de fotocopias:..... B/. 10.00

Accesorios para la cámara fotográfica .....B/.1.50

Merienda: .....B/. 10.00

Búsqueda de información en la Internet:..... B/. 10.00

Impresiones a computadora:..... B/ 10.00

- **Humano:**

El recurso humano necesario para tener éxito en el seminario a ofrecer están:

Los estudiantes o participantes a capacitar

Los docentes encargados de dar el visto bueno para la capacitación.

Los especialistas en informática para la conexión y uso del multimedia.

El facilitador o docente encargado de dictar el seminario.

### 2.13 Cronograma de Actividades

Objetivos Trazados	mayo	junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre
Elaboración del perfil del proyecto							
Elaboración de la encuesta.							
Aplicación de la encuesta							
Análisis y gráficas de los datos de la encuesta.							
Presentación del diagnóstico al facilitador.							
Elaboración de los aspectos generales del proyecto. II fase.							
Ejecución del proyecto							
Elaboración del informe							
Sustentación del proyecto							

**FASE III**  
**EJECUCIÓN DEL PROYECTO**

### 3. EJECUCIÓN DEL PROYECTO Y PLANEAMIENTO DIDÁCTICO DE LA CAPACITACIÓN.

Para el logro de los objetivos trazados, en este proyecto de intervención, se han incluido en la capacitación cuatro módulos. Para el desarrollo de cada uno de ellos, se ha contemplado su planificación didáctica en la cual se presentan: los objetivos generales, objetivos específicos, los contenidos, las estrategias metodológicas, los recursos didácticos y la evaluación. Además se incluye en esta parte, los logros obtenidos por los estudiantes después de cada sesión, algunas diapositivas (PowerPoint) utilizadas y evidencias fotográficas que sustentan la actuación de los implicados (docente-estudiantes) en toda la capacitación.

Los módulos que se desarrollaron son:

**MÓDULO 1.** Aplicaciones de la aritmética, el álgebra y la geometría para facilitar el desarrollo de problemas con funciones y sus aplicaciones en la economía.

**MÓDULO 2.** Aplicaciones de la aritmética y el álgebra para facilitar operaciones con límites de funciones y aplicaciones en economía.

**MÓDULO 3.** Aplicaciones de la aritmética, el álgebra y la geometría para la comprensión de operaciones con derivadas de una función y sus aplicaciones en economía.

**MÓDULO 4.** Aplicaciones de la aritmética, el álgebra y la geometría; para la comprensión de problemas de aplicación en economía, con funciones logarítmicas y exponenciales.

A continuación se presenta el desarrollo de cada módulo.

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ**  
**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN DOCENCIA SUPERIOR**  
**CAPACITACIÓN: APLICACIONES DE LA MATEMÁTICA EN LA ECONOMÍA AMBIENTAL**  
**PLANEAMIENTO DIDÁCTICO**

**FACILITADOR: ONEL TUÑÓN AIZPRÚA.**

**3.1**

**MÓDULO N°1**

**Tema:** Ecuaciones de primer grado, segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, y sus aplicaciones en economía.

**Duración:** 8 horas

**Objetivo General:** Aplicar la aritmética, el álgebra y la geometría a temas que llevan a facilitar la comprensión del concepto de función y sus gráficas, con aplicaciones a problemas de economía.

Objetivos Específicos	Contenido	Metodología	Recursos Didácticos	Evaluación
1. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.	1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. -clases de ecuaciones -numéricas -literales -enteras -fraccionarias	-Exposición dialogada.  -Resolución de problemas en la sesión presencial.	-Tablero acrílico y marcador.  -Borrador	<b>1. Diagnóstica</b> -Preguntas exploratorias. - Lluvia de ideas.
2. Resolver ecuaciones de segundo grado	Aplicaciones de las ecuaciones lineales de primer grado. 2. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. -Tipos de ecuaciones cuadráticas -Completas e Incompletas Métodos de solución de ecuaciones cuadráticas -Factorización - Fórmula cuadrática -Aplicación a problema de economía	-Asignación de taller para resolver en grupos y enviar por sesión virtual.  -Expositiva por parte del docente.	-Reproductor multimedia  -Textos seleccionados	<b>-Formativa</b> -Participación activa y autónoma de cada participante.
3. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	3. Ecuaciones simultáneas de primer grado con una incógnita. Métodos para resolver un sistema de ecuaciones. -Igualación -Sustitución -Reducción -Gráfico	-Asignación para la sesión a distancia.  Exposición dialogada	-Hojas blancas o de rayas.  -Presentación en diapositivas	<b>Sumativa</b> Post test <b>2. Diagnóstica</b> -Preguntas exploratorias  Formativa. -Prácticas individuales y grupales.
4. Graficar ecuaciones en dos variables.	-Aplicaciones en problemas de economía 4. Representación gráfica de ecuaciones en dos variables.	Resolución de problemas aplicados a la economía  -Asignación a distancia	Hojas blancas  -Proyector -Presentación de diapositivas	3. Diagnóstica -Preguntas exploratorias  Formativa -Participación activa en el aula.

### 3.1.2 CONTENIDOS

- **IMPORTANCIA DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO, SEGUNDO GRADO Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS Y SUS GRAFICAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ECONOMÍA.**

El desarrollo de este módulo se consideró necesario debido a que, en matemáticas, una de las mayores deficiencias, es la solución de ecuaciones, tanto de primer y segundo grado; lineales y cuadráticas respectivamente, como también, la solución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y sus gráficas. Estos conocimientos son básicos, para la aplicación de las funciones lineales y cuadráticas en la solución de problemas en cualquier rama de la ciencia y por ende en economía.

A continuación se presentan los contenidos y algunas aplicaciones, necesarios para que los estudiantes fortalezcan esta área de las matemáticas y puedan abordar los temas con funciones económicas de la mejor manera.

- **Ecuaciones de primer grado.**

Para comprender el concepto de ecuación, se hace necesario, primeramente recordar que una **igualdad** es un concepto matemático que establece que dos expresiones tienen el mismo valor. Se denota con el símbolo “=”.

Ejemplos:

$$b = a + c, \quad 3x^2 = 4x + 8, \quad F = ma.$$

Una **ecuación** es entonces, una igualdad entre dos expresiones algebraicas, en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas o variables y que sólo se comprueba para determinados valores de ellas.

Ejemplos:

$$x - 1 = 3, \text{ se verifica solo para } x = 4$$

$$a^2 - 5b = 6, \text{ se comprueba sólo por } a = 2 \text{ y } b = 3$$

La **identidad** es una ecuación que se verifica para todos los valores de las incógnitas que se encuentran en ella.

Ejemplo:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \text{ se llaman identidades,}$$

*puesto que  $a, b$  y  $x, y$  pueden tomar cualquier valor.*

- **Raíces de una ecuación:** se le llama así a los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación. Es decir, Comprueban la igualdad.

Resolver una ecuación es hallar sus raíces o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación.

- **Ecuaciones de primer grado con una incógnita o lineales con una incógnita.**

Una ecuación de primer grado con una incógnita es de la forma  $ax + b = 0$ ,

*siendo  $a \neq 0$  y  $b$  una constante. Su solución está dada por  $x = -b/a$*

Ejemplos:  $x + 1 = 5$ ,  $2x + 1 = 6$

#### ✓ **Clases de ecuaciones**

a) **Ecuaciones numéricas:** son ecuaciones que no tiene más letras que las incógnitas, tal es el caso de  $4x - 5 = x + 4$ , donde la única letra es la incógnita  $x$ .

b) **Ecuaciones literales:** son ecuaciones que además de las incógnitas tienen otras letras que representan cantidades conocidas, como  $3x + 2a = 5b - bx$

c) **Ecuaciones enteras de primer grado:** son aquellas donde ninguno de sus términos tiene denominador.

Ejemplos:  $5x - 2 = x + 4$ ,  $2x - 1 = 5$

Para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita seguiremos los siguientes pasos:

1. Se efectúan las operaciones que presenta cada miembro de la ecuación hasta obtener sumas algebraicas sencillas.
2. Transponemos los términos, de tal manera, que queden en un solo miembro los términos que contienen la incógnita.
3. Se reducen los términos semejantes en cada miembro.
4. Despejamos la incógnita.
5. Se comprueba el resultado, reemplazando el valor obtenido, de la incógnita, en la ecuación original.

Veamos algunos ejemplos:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\triangleright 6x + 12 = -6 + 3x$$

*Solución:*

$$6x - 3x = -6 - 12$$

$$3x = -18$$

$$x = -18/3$$

$$x = -6$$

*Comprobación:*

$$6x + 12 = -6 + 3x$$

$$6(-6) + 12 = -6 + 3(-6)$$

$$-36 + 12 = -6 - 18$$

$$-24 = -24$$

Como la igualdad se cumple la solución es correcta.

➤ Resolver:  $3(2x - 4) + 3(x + 1) = 9$

Solución:

$$3(2x - 4) + 3(x + 1) = 9$$

$$6x - 12 + 3x + 3 = 9$$

$$6x + 3x = 9 - 3 + 12$$

$$9x = 18$$

$$x = 18/9$$

$$x = 2$$

Comprobación:

$$3(2x - 4) + 3(x + 1) = 9$$

$$3(4 - 4) + 3(2 + 1) = 9$$

$$3(0) + 3(3) = 9$$

$$9 = 9$$

#### d. Ecuaciones Fraccionarias de primer grado con una incógnita.

Una ecuación es fraccionaria cuando alguno o todos sus términos tienen denominador.

Ejemplos:  $\frac{x}{2} = 3x - \frac{3}{4}$ ;  $\frac{y}{78} - \frac{1}{95} = \frac{y}{2}$

Para resolver estas ecuaciones hay que suprimir los denominadores, para convertirla en ecuación entera y resolverla como en los casos anteriores. Para eliminar los denominadores se multiplicará todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores (m.c.m). Ejemplo:

#### 1. Resolver:

$$\frac{y}{6} - \frac{1}{4} = \frac{y}{2} \quad \text{Buscamos el mínimo común múltiplo de (6, 4, 2), es 12.}$$

*luego:*

$$12 \left( \frac{y}{6} \right) - 12 \left( \frac{1}{4} \right) = 12 \left( \frac{y}{2} \right)$$

$$2y - 3 = 6y$$

$$2y - 6y = 3$$

$$-4y = 3$$

$$y = -3/4$$

➤ **Aplicaciones Prácticas de las ecuaciones lineales de primer grado en un problema de economía.**

Observemos, como se aplican las ecuaciones de primer grado a un problema de las ciencias económicas. Sobre el costo total, ingreso total y ganancia de una empresa.

El costo se designa por  $C$ , que representa el costo total de producción y distribución de  $x$  unidades de un producto. El ingreso se designa por  $R$ , que es el ingreso total de las ventas de  $x$  unidades. La utilidad o ganancia se designa por  $P$ , que es la utilidad que se obtiene por la producción, distribución y venta de  $x$  unidades de un artículo.

La ganancia  $P$  está dada por:

$$P = R - C, \text{ donde}$$

$R = px$ ,  $p$  es el precio por unidad producida.

$C = CF + CM$ ,  $CM$  es el costo marginal que se incurre por cada  $x$  producida.

Ejemplo: Una empresa tiene costo fijo de (CF) de B/. 480.00 por arrendamiento y salarios de los ejecutivos y un costo marginal (CM) de B/. 8.00. Si se venden 125 unidades a B/: 20.00 cada unidad, ¿cuál es la ganancia de la empresa?

*Solución:*

$$CF = B/.480, \quad CM = B/8.00, \quad \text{producción } x = 125$$

$$CT = CF + CM$$

$$CT = 480 + 8x$$

$$p = B/20.00, \quad \text{producción } x = 125$$

$$R = px \quad \text{entonces}$$

$$R = 20x = 20(125) = B/2500$$

$$P = R - C \quad x = 125$$

$$P = 20x - (480 + 8x)$$

$$P = 20x - 480 - 8x$$

$$P = 12x - 480 \quad x = 125$$

$$P = 12(125) - 480$$

$$P = 1\,020 \text{ balboas, es la ganancia}$$

➤ **Ecuaciones de Segundo Grado con una Incógnita:**

Una ecuación de segundo grado en x es de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ ,

Siendo a, b y c números reales y  $a \neq 0$ .

Ejemplos:

$x^2 + 3x + 9 = 0$ ,  $5x^2 - 4x + 5 = 0$ , Son ecuaciones de segundo grado completas en x.

En toda ecuación de segundo grado debe aparecer necesariamente el término de segundo grado con respecto a  $x$ , sin embargo puede faltar el término de primer grado o el independiente, si estos son los casos se les llama ecuaciones incompletas de segundo grado y tienen la forma:

$$ax^2 + bx = 0, \quad ax^2 + c = 0,$$

Por ejemplo:  $3x^2 + 9x = 0$ ,  $x^2 - 14 = 0$ ,

Toda ecuación de segundo grado tiene dos raíces que representan los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación.

Resolver una ecuación cuadrática es encontrar los valores de  $x$  que la satisfagan.

Ejemplos:  $x^2 + 5x + 6 = 0$ , se satisface para los valores de  $x = 2$  y  $x = 3$ . Por tanto, estos valores son las raíces de la ecuación dada.

✓ **Algunos métodos de resolución de las ecuaciones de segundo grado, más utilizados**

a) Para ecuaciones cuadráticas completas.

- **Por descomposición en factores:** para resolver estas ecuaciones mediante factorización, se hace uso de la propiedad del producto nulo que dice "para todos los números reales  $a$  y  $b$ , si  $ab = 0$ , entonces  $a = 0$  ó  $b = 0$  ó  $a$  y  $b = 0$ ."

Ejemplos: Resuelva por factorización:

a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ y } x - 2 = 0$$

$$x = 3 \text{ y } x = 2$$

Luego  $x = 3$  y  $x = 2$  son raíces de la ecuación dada.

b) Resolver por factorización:

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$(3x + 5)(x - 1) = 0$$

$$3x + 5 = 0 \quad y \quad x - 1 = 0$$

$$3x = -5 \quad y \quad x = 1$$

$$x = -\frac{5}{3} \quad y \quad x = 1$$

► **Por la fórmula Cuadrática:**

Las soluciones de la ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  vienen dadas por la fórmula  $x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , en la que  $b^2 - 4ac$ , recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática.

Para resolver una ecuación de segundo grado con la fórmula cuadrática, expresamos la ecuación cuadrática en la forma

$ax^2 + bx + c = 0$ , y determinamos los valores numéricos para  $a$ ,  $b$  y  $c$ . sustituimos los valores para  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la fórmula para obtener la solución.

*Ejemplo:* Resolver la ecuación  $3x^2 = 7x - 2$  por la fórmula cuadrática.

$$3x^2 = 7x - 2$$

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x = \frac{-(-7) \mp \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}, \quad x = \frac{7 \mp \sqrt{49 - 24}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \mp \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \mp 5}{6},$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1/3$$

Naturaleza de las raíces de una ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ , está determinada por su discriminante  $b^2 - 4ac$ , y da el número y el tipo de soluciones de una ecuación cuadrática.

Supongamos que  $a, b$  y  $c$  son números reales, se tiene:

- Si  $b^2 - 4ac > 0$ , las raíces son reales y distintas.
- Si  $b^2 - 4ac = 0$ , las raíces son reales e iguales.
- Si  $b^2 - 4ac < 0$ , las raíces son imaginarias conjugadas.

✓ **Ecuaciones Cuadráticas Incompletas**

Resolución de ecuaciones incompletas de segundo grado con una incógnita.

**1. Ecuaciones incompletas de la forma  $ax^2 + c = 0$ ,**

Procedimiento:

$$ax^2 + c = 0,$$

$$ax^2 = -c,$$

$$x^2 = -c/a,$$

$$x = \mp \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

*Si  $a$  y  $c$  tienen el mismo signo, las raíces son imaginaria.*

*Si  $a$  y  $c$  tienen signo distinto, las raíces son reales.*

Ejemplo: Resuelva la ecuación:

a)  $2(x^2 - 8) = 11 - x^2$

$$2x^2 - 16 = 11 - x^2$$

$$2x^2 + x^2 = 11 + 16$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = 27/3$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -3$$

Las raíces son reales.

## 2. Ecuaciones Incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$

Este tipo de ecuaciones se resuelven por factorización, aplicando la propiedad del producto nulo.

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -b/a$$

En estas ecuaciones una de las raíces siempre es cero.

Ejemplo: Resuelve

$$a) 5x^2 = -3x$$

$$5x^2 + 3x = 0$$

$$x(5x + 3) = 0 ; \text{ Luego } x_1 = 0, \quad x_2 = -3/5$$

### ✓ Problemas de aplicación en economía que involucra ecuaciones cuadráticas.

1. La función de demanda para un producto es  $p=100-2q$ , donde  $p$  es el precio (en dólares) por unidad cuando  $q$  unidades son demandadas (por semana) por los consumidores. Encontrar el nivel de producción que maximizará el ingreso total del productor, y determinar ese ingreso.

**Solución:**

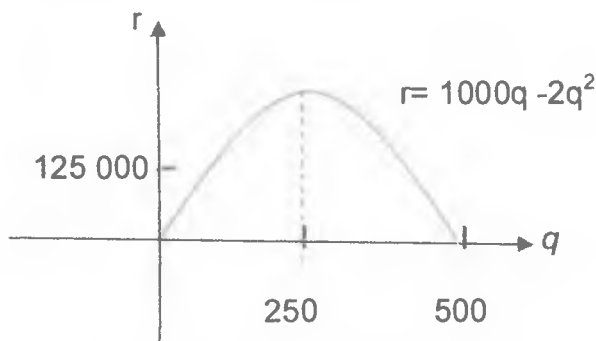
**Estrategia:** Para maximizar el ingreso debemos determinar la función de ingreso,  $r=f(q)$ . Utilizando la relación: ingreso total = (precio) (cantidad), tenemos:  
 $r=p \cdot q$ ; Con la ecuación de demanda podemos expresar  $p$  en términos de  $q$ , de modo que  $r$  sea estrictamente una función de  $q$ .

Tenemos:  $r = p \cdot q$   
 $= (1000 - 2q) \cdot q$   
 $= 1000q - 2q^2$

Observe que  $r$  es una función cuadrática de  $q$ , con  $a=-2$ ,  $b=1000$  y  $c=0$ . Ya que  $a < 0$  (parábola que abre hacia abajo),  $r$  es máximo en el vértice  $(q, r)$ , donde

$$q = -b/2a = -\frac{1000}{2(-2)} = 250$$

El valor máximo de  $r$  está dado por  $r = 1000(250) - 2(250)^2 = 250\,000 - 125\,000 = 125\,000$ . Así, el ingreso máximo que el fabricante puede recibir es de \$125 000, y ocurre en un nivel de producción de 250 unidades.



**Gráfica N°1. Función de ingreso.**

**2. Cantidad de Equilibrio:** Determinar la cantidad de equilibrio de fabricaciones XYZ dada la información siguiente: costo fijo total, \$1 200; costo variable por unidad, \$2; ingreso total por la venta de  $q$  unidades  $y_{TR} = 100\sqrt{q}$

**Solución:** Por  $q$  unidades de producción,  $y_{TR} = 100\sqrt{q}$

$$y_{TC} = 2q + 1\,200.$$

Igualando el ingreso total al costo total se tiene

$$100\sqrt{q} = 2q + 1\,200,$$

$$50\sqrt{q} = q + 600$$

Dividiendo ambos miembros entre dos y elevando al cuadrado tenemos:

$$2\,500q = q^2 + 1\,200q + (600)^2$$

$$0 = q^2 - 1\,300q + 360\,000.$$

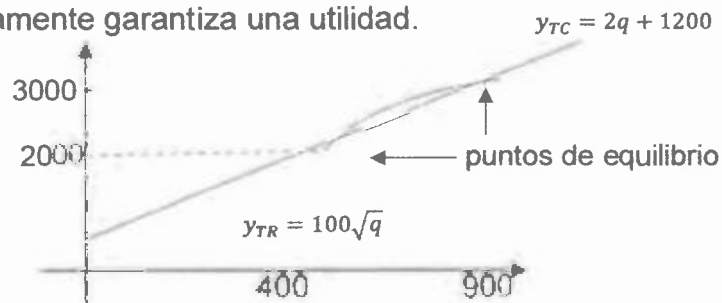
Por la fórmula cuadrática,

$$q = \frac{1\,300 \pm \sqrt{250\,000}}{2}$$

$$q = \frac{1\,300 \pm 500}{2}$$

$$q = 400 \text{ o } q = 900.$$

Aunque tanto  $q = 400$  como  $q = 900$  son cantidades de equilibrio, se observa que cuando  $q > 900$ , el costo total es mayor que el ingreso total, de modo que siempre se tendrá una pérdida. Esto ocurre porque aquí el ingreso total no está relacionado linealmente con la producción. Por tanto, producir más que la cantidad de equilibrio no necesariamente garantiza una utilidad.



Gráfica N°2. Puntos de equilibrio

## Asignación N°1

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $4x - 6x + 2 = -4x + 12 - 2x$

b)  $6 - 2(x - 3) + 5 = 15$

c)  $\frac{3x}{4} - 2 = 6 + \frac{x}{3}$

d)  $x - \frac{x+2}{12} = \frac{5x}{2}$

e)  $2(3x + 1) = 9x + 3 - 3x$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por descomposición en factores:

a)  $x^2 + 5x - 6 = 0$

b)  $5x - 2x^2 = 2$

c)  $y^2 + 7y = 18$

d)  $3m^2 + 4m - 15 = 0$

3. Resuelve las ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general

a)  $5m^2 - 7m - 90 = 0$

b)  $12x - 7x^2 + 64 = 0$

c)  $3n - 5n + 2 = 0$

4. Resuelve las ecuaciones cuadráticas incompletas:

a)  $(2x - 3)(2x + 3) = 135$

b)  $3 - x^2 = 2x^2 + 1$

c)  $(4x - 1)(2x + 3) = (x + 3)(x - 1)$

➤ **Ecuaciones Simultáneas de Primer Grado con dos Incógnita.**

Una ecuación lineal con dos incógnitas  $x$  e  $y$  es de la forma  $ax + by = c$ , donde

$a, b$  y  $c$ , son números reales y  $a, b$  no son simultáneamente cero. 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Son ejemplos:  $4x + 3y = 7$ ,  $-3y + 4x = 9$ .

La representación gráfica de esta ecuación es una línea recta, por ello su denominación.

Dos ecuaciones de este tipo constituyen un sistema de ecuaciones lineales, en este caso de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplos: 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x - 5y = 8 \end{cases}$$

Métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**1. Método de Igualación:**

Resuelva el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

Se siguen los siguientes pasos:

1. Se despeja una de las incógnitas por ejemplo  $x$  en las dos ecuaciones:

En (1) despejamos  $x$ :

$$2x - y = 3$$

$$2x = 3 + y$$

$$x = \frac{3+y}{2}$$

En (2) despejo  $x$ :

$$x + 3y = 5$$

$$x = 5 - 3y$$

2. Se igualan los valores de la incógnita x despejada:

$$\frac{3+y}{2} = 5 - 3y$$

$$3 + y = 10 - 6y$$

$$6y + y = 10 - 3$$

$$7y = 7$$

$$y = 1$$

Reemplazamos el valor obtenido de y en cualquiera de las expresiones donde se despejó x, por ejemplo:

$$x = 5 - 3y$$

$$x = 5 - 3(1)$$

$$x = 5 - 3$$

$$x = 2$$

Verificación:

$$x + 3y = 5$$

$$2x - y = 3$$

$$2 + 3(1) = 5$$

$$2(2) - 1 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$4 - 1 = 3$$

$$5 = 5$$

$$3 = 3$$

**2. Método por Sustitución:**

$$\text{Resuelva el sistema } \begin{cases} 5x + 2y = 3 & (1) \\ 2x + 3y = -1 & (2) \end{cases}$$

Se siguen los siguientes casos:

Se despeja una de las dos incógnitas por ejemplo y, en cualquiera de las dos ecuaciones. Lo haremos en la ecuación (1)

En (1) despejo y.

$$5x + 2y = 3$$

$$2y = 3 - 5x$$

$$y = \frac{3-5x}{2}$$

Sustituimos la expresión obtenida en (2):

$$2x + 3y = -1$$

$$2x + 3\left(\frac{3-5x}{2}\right) = -1$$

Multiplicamos toda la ecuación por 2.

$$4x + 9 - 15x = -2$$

$$-11x = -2 - 9$$

$$x = \frac{-11}{-11}$$

$$x = 1$$

Se sustituye el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) se tiene:

$$5x + 2y = 3$$

$$5(1) + 2y = 3$$

$$y = \frac{3-5}{2}$$

$$y = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = -1 \qquad 5x + 2y = 3$$

$$\text{Verificación:} \qquad 5(1) + 2(-1) = 3 \longrightarrow 5 - 2 = 3 \longrightarrow 3 = 3$$

### 3. Método de Reducción (suma o resta)

Resuelva el siguiente sistema  $\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$

Se procede de la siguiente manera:

-Podemos eliminar a x o y. En este caso eliminaremos a x en el sistema.

-Se igualan numéricamente los coeficientes de x con signos contrarios. En este caso se multiplica por 11 la ecuación (1) y por  $-3$  la ecuación (2)

$$33x - 44y = 451$$

$$-33x - 18y = -141$$

Sumamos ambas ecuaciones, luego se cancela la x:

$$33x - 44y = 451$$

$$\underline{-33x - 18y = -141}$$

$$-62y = 310$$

$$y = \frac{310}{-62} = -5; \quad y = -5$$

Reemplazamos el valor de y en cualquiera de las dos ecuaciones y despejamos x.

$$3x - 4(-5) = 41$$

$$3x + 20 = 41$$

$$3x = 41 - 20$$

$$x = \frac{21}{3} = 7;$$

La solución de un sistema de ecuaciones, es todo par de valores de "x", "y" que satisfacen ambas ecuaciones.

En todos los casos anteriores los valores de "x" e "y" obtenidos representaban la solución del sistema de ecuaciones dado.

Un sistema de ecuaciones es posible o compatible cuando tiene solución y es imposible o incompatible cuando no tiene solución.

Un sistema compatible es determinado cuando tiene una solución e indeterminado cuando tiene infinitas soluciones.

#### 4. Método Gráfico:

Consiste en trazar, en un sistema de coordenadas dadas, las dos rectas que representan las ecuaciones. La solución del sistema viene dada por las coordenadas  $(x, y)$  del punto de intersección de ambas. La representación de una ecuación lineal es una línea recta. Como una recta queda determinada por dos puntos, basta con representar dos puntos de cada ecuación.

Ejemplo: Representar gráficamente el siguiente sistema  $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$

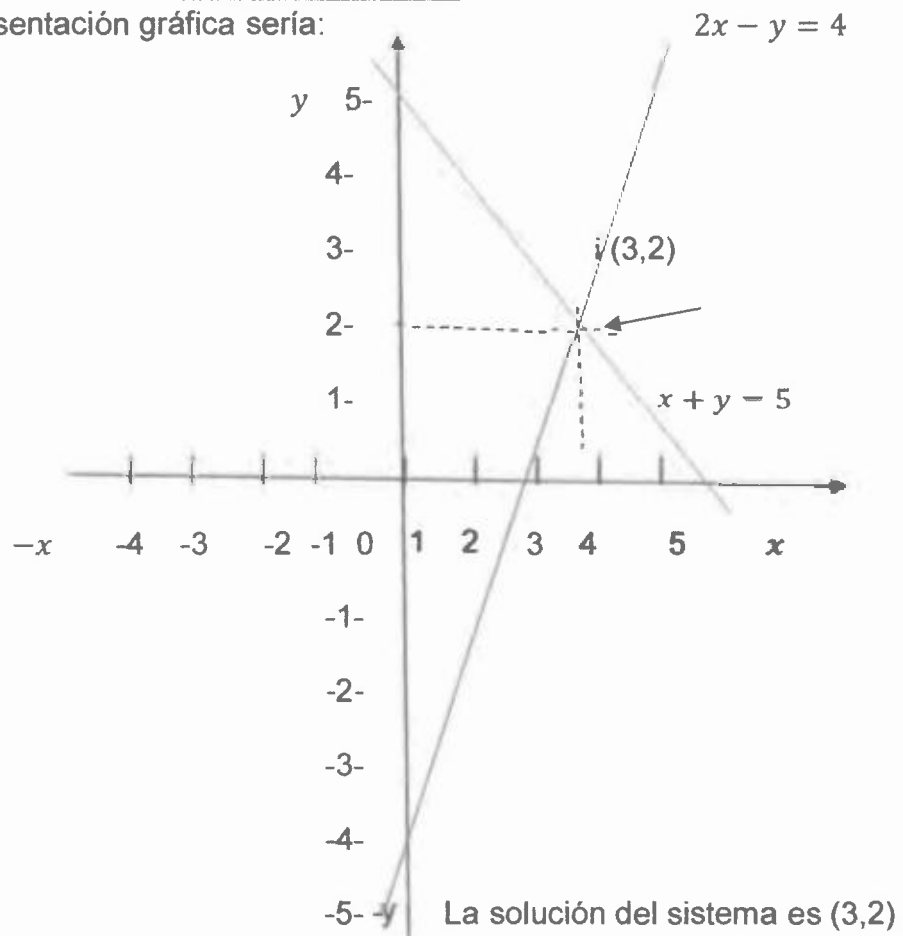
Para la ecuación  $2x - y = 4$

Para la ecuación:  $x + y = 5$

X	0	2
Y	-4	0

X	0	5
Y	5	0

Gráfica 3. La representación gráfica sería:



- **Representación gráfica de ecuaciones en dos variables.**

La representación gráfica de una ecuación se hace atendiendo al conjunto de soluciones. Una solución en cualquier ecuación es un par ordenado de números (a, b).

Cada solución en el conjunto de soluciones es la coordenada de un punto en el sistema de coordenadas cartesianas. El conjunto de todos los puntos en el sistema de coordenadas que provienen del conjunto de soluciones forman la gráfica de la ecuación dada. Graficar una ecuación en dos variables es graficar su conjunto de soluciones.

Para dibujar la gráfica de una ecuación se incluyen suficientes puntos de su conjunto de soluciones de manera que ésta se manifieste claramente.

Veamos el procedimiento que se sigue en la construcción de la gráfica de una ecuación cuadrática en dos variables es:

1. Hacer  $y = f(x)$  o  $x = f(y)$  de acuerdo con el grado de dificultad.
2. Construir una tabla de pares de valores (x, y).
3. Representar los puntos.
4. Trazar la curva que los une.

Al construir la tabla de valores debemos tomar en cuenta los puntos de intersección de la curva con los ejes. Estos corresponden a los ceros de la ecuación.

Dibuja la gráfica de  $y - x^2 + 4 = 0$

Solución:

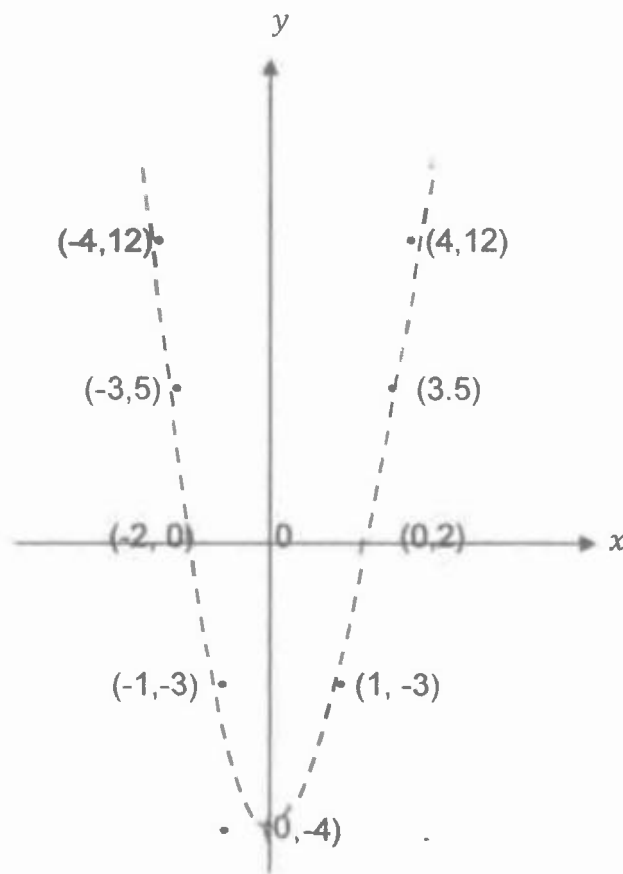
Se hace  $y = f(x)$ , esto es  $y = x^2 - 4$

Se elabora una tabla de pares ordenados (soluciones) de números que satisfacen la ecuación dada:

x	-4	-3	-2	0	1	2	3	4	-1
y	12	5	0	-4	-3	0	5	12	-3

Si luego de construir la gráfica quedan ciertas regiones sin claridad en la misma se buscan suficientes soluciones adicionales para resolverla. Estas soluciones están graficadas y unidas por una curva continua.

La gráfica sería:



Esta figura se denomina parábola.

**Gráfica N°4.** Representación gráfica de una ecuación en dos variables.

- Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones a un problema de economía.

### -Equilibrio con demanda no lineal.

Encontrar el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son  $p = \frac{q}{40} + 10$  y  $p = \frac{8000}{q}$ , respectivamente.

#### Solución:

Aquí la ecuación de demanda no es lineal. Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} p = \frac{q}{40} + 10 \\ p = \frac{8000}{q} \end{cases}$$

Por sustitución se obtiene,

$$\frac{8000}{q} = \frac{q}{40} + 10$$

$$320\,000 = q^2 + 400q \text{ (multiplicando ambos miembros por 40)}$$

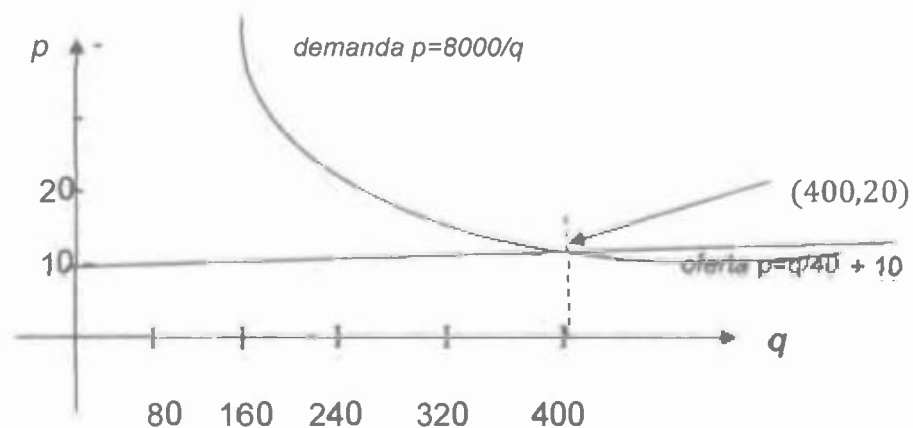
$$q^2 + 400q - 320\,000 = 0$$

$$(q + 800)(q - 400) = 0 \text{ (factorizando)}$$

$$q = -800 \text{ o } q = 400$$

Descartamos  $q = -800$ , ya que  $q$  representa cantidad. Eligiendo  $q = 400$  tenemos:

$$p = \frac{8000}{q} = \frac{8000}{400} = 20, \text{ de manera que el punto de equilibrio es } (400, 20).$$



**Gráfica N°5. Equilibrio con demanda no lineal.**

## Asignación N°2

1. Resuelva los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) 
$$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

1. Resuelva por sustitución:

a) 
$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

2. Resuelva gráficamente los siguientes sistemas:

a) 
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y = x + 6 \end{cases}$$

2. Representa gráficamente las ecuaciones siguientes:

a)  $y = 2x - 4$

### Aplicaciones en economía.

3. Se da una ecuación de oferta y una de demanda para un producto. Si  $p$  representa el precio por unidad en dólares y  $q$  el número de unidades por unidad de tiempo, encuentre el punto de equilibrio. Bosqueje el sistema.

a) Oferta :  $p = \frac{3}{100}q + 2$

Demanda:  $p = -\frac{7}{100}q + 12$

4. Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son:

$$3q - 200p + 1800 = 0$$

$$3q + 100p - 1800 = 0$$

$P$  representa el precio por unidad en dólares y  $q$  el número de unidades por periodo. Encuentre, algebraicamente, el precio de equilibrio y deduzcalo gráficamente. Encuentre el precio de equilibrio cuando se fija un impuesto de 27centavos por unidad al proveedor.

### 3.1.3 LOGROS OBTENIDOS.

Los estudiantes con este primer módulo se pudieron percatar de algunos conceptos y procedimientos que muchos de ellos no conocían, otros no los recordaban y otros que mantenían ciertos errores.

En el plan de estudio de esta carrera en economía ambiental, aparece el contenido sobre las **funciones**, aquí podemos destacar los siguientes temas:

- Definición y notación de función
- Dominio y rango de una función
- Tipos de funciones
- Operaciones con funciones
- Composición de funciones
- Gráfica de una función
- Función lineal y cuadrática
- Aplicaciones en la economía

Con el desarrollo de este módulo se trataron todos los conceptos y procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos que el alumno necesita para poder abordar con mayor facilidad los contenidos programáticos de la asignatura. Como por ejemplo:

Al abordar el tema sobre, ecuaciones lineales de primer grado, el estudiante desarrolla las habilidades y destrezas para manejar cómodamente procedimientos algebraicos, tales como: leyes de los signos, transposición de términos, operaciones en el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  (naturales, enteros, racionales, irracionales). Estos conocimientos los utilizará en el desarrollo de operaciones con funciones, así como en la composición de funciones. Otros de los

temas abordados fue la de la solución de ecuaciones cuadráticas, donde advertimos algunos de los métodos para encontrar las raíces o soluciones de una ecuación cuadrática, completa e incompleta, como el de factorización y fórmula general, métodos estos, más utilizados en aplicaciones económicas.

Además, la solución de los sistemas de ecuaciones lineales es utilizada ampliamente en economía para establecer relaciones entre las funciones de oferta y demanda, entre estas la de punto de equilibrio, así como también entre las funciones de costo, ingreso y beneficio.

Por último, las graficas de las ecuaciones en dos variables permiten que el estudiante pueda construir, inicialmente, una gráfica a través de una tabla de valores, despejando una de las variables y luego asignando valores numéricos a una de ellas. Aquí el alumno puede establecer la diferencia entre una ecuación y una función.

Las gráficas son indispensables en la economía, ya que permiten ver, predecir y tomar decisiones en un momento dado, de acuerdo al estudio económico que se esté realizando.

### 3.1.4 FOTOS QUE EVIDENCIAN LA FASE III.



**Foto N°1. M1.** Los participantes atienden a las explicaciones de un compañero y otros necesitaban una atención más personalizada del facilitador.



**Foto N°2. M1.** El facilitador hace una exposición dialogada con el grupo de participantes.



**Foto N°3. M1.** Los estudiantes resuelven prácticas individuales y hacen preguntas sobre el tema tratado.



**Foto N°4. M1.** Los estudiantes trabajan los talleres y comentan los resultados o soluciones.

### 3.1.5 DIAPOSITIVAS REALIZADAS.

#### Ecuaciones de primer grado, con una y dos incógnitas, y sus gráficas

**Contenidos:**

- Procedimientos para la solución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Solución de diferentes ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Aplicaciones de las ecuaciones de primer grado a problemas de economía.
- Solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
- Métodos para la solución de ecuaciones cuadráticas.
- Sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Representación gráfica de ecuaciones en dos variables.

#### Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

➤ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $6x + 12 = -6 + 3x$

**Solución:**

$$6x - 3x = -6 - 12$$

$$3x = -18$$

$$x = -18/3$$

$$x = -6$$

**Comprobación:**

$$6x + 12 = -6 + 3x$$

$$6(-6) + 12 = -6 + 3(-6)$$

$$-36 + 12 = -6 - 18$$

$$-24 = -24$$

➤ Como la igualdad se cumple la solución es correcta.

b)  $\frac{y}{6} - \frac{1}{4} = \frac{y}{2}$

**Solución:**

Buscamos m.c.m. (6,4,2)=12

$$12\left(\frac{y}{6}\right) - 12\left(\frac{1}{4}\right) = 12\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$2y - 3 = 6y$$

$$2y - 6y = 3$$

$$-4y = 3$$

Comprobación  $y = -3/4$

$$\frac{-3/4}{6} - \frac{1}{4} = \frac{-3/4}{2}$$

$$\frac{-3}{4 \cdot 6} - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4 \cdot 2}$$

$$\frac{-3}{24} - \frac{1}{4} = \frac{-3}{8}$$

$$\frac{-3}{24} - \frac{6}{24} = \frac{-3}{8}$$

$$\frac{-9}{24} = \frac{-3}{8}$$

#### Método Gráfico:

• Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Tabla de valores:

1	2	3	4	5
y	6	4	0	

$x + y = 5$

0	1	2	3	4	5
x					

Tabla de valores:

0	1	2	3	4	5
y	5	6	0		

#### Gráfica de ecuaciones en dos variables

• Graficar  $Y - x^2 + 4 = 0$

Tabla de valores:

1	0	1	1	2	3
y	4	3	2	1	0

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ  
 FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
 PROGRAMA DE MAESTRÍA EN DOCENCIA SUPERIOR  
 CAPACITACIÓN: APLICACIONES DE LA MATEMÁTICA EN LA ECONOMÍA AMBIENTAL  
 PLANEAMIENTO DIDÁCTICO

3.2

MÓDULO N°2

FACILITADOR: ONEL TUÑÓN AIZPRÚA.

Tema: Aplicaciones de la aritmética, el álgebra y la geometría para facilitar la comprensión de problemas de límite de funciones en economía.

Duración: 8 horas

Objetivo General: Aplicar conceptos y procedimientos de la aritmética, el álgebra y la geometría esenciales para realizar el cálculo de límite de funciones en problemas de economía.

Objetivos Específicos	Contenido	Metodología	Recursos	Evaluación
1. Determinar el valor numérico de expresiones algebraicas.  2. Resolver los diferentes casos de productos notables.  3. Expresar en factores expresiones algebraicas.  4. Racionalizar expresiones con radicales.  5. Señalar la importancia del manejo de la aritmética y el álgebra en el cálculo de límites de funciones.	Valorización de expresiones algebraicas. -Simples y compuestas  Productos Notables -cuadrado de la suma de dos cantidades. -cuadrado de la diferencia de dos cantidades. -suma por la diferencia de dos cantidades. -Cubo de la suma y diferencia de dos cantidades. - producto de dos binomios con un término común.  Factorización de expresiones algebraicas. -Factor común monomio -factor común polinomio -Diferencia de cuadrados -trinomio cuadrado perfecto -trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ . -trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$ . -cubo perfecto de binomios. -suma y diferencia de cubos perfectos.  Racionalización del denominador y numerador de expresiones con radicales.  Aplicaciones de la aritmética y el álgebra al cálculo de límites con funciones.	-Exposición dialogada.  -Resolución de problemas en la sesión presencial.  -Presentación de diapositivas alusivas al tema.  -Asignación de taller para resolver en grupos y enviar por sesión virtual.  Presentación de diapositivas. Resolución de problemas en la sesión presencial.  Expositiva dialogada  Presentación de diapositivas  Asignaciones para trabajar en casa.	-Tablero acrílico y marcador.  -Borrador  -Reproductor multimedia  -Textos seleccionados  -Hojas blancas o de rayas.  -Presentación en diapositivas  -Uso de retroproyector multimedia.  Textos seleccionados  Hojas para apuntes.	<b>Diagnóstica</b> -preguntas exploratorias. - Lluvia de ideas.  <b>-Formativa</b> -Participación activa y autónoma de cada estudiante.  <b>Formativa</b> -Taller individual -Prácticas en clase  <b>Formativa</b> Taller grupal Participación activa de los estudiantes.  <b>Sumativa</b> -Post-test

### 3.2.1 CONTENIDOS

- **IMPORTANCIA DE LA ARITMÉTICA, EL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES EN PROBLEMAS DE ECONOMÍA.**

Los límites son de suma importancia en las diversas esferas de las ciencias. Ellos nos permiten resolver situaciones como; determinar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto. La velocidad de un objeto o partícula es la razón o tasa de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo. En física interesan también otras tasas de cambio; por ejemplo, la razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo (lo que se llama potencia). En química, al estudiar una reacción, interesa la razón o tasa de cambio de la concentración de algún reactivo con respecto al tiempo (lo que se denomina tasa de reacción). En economía, en la fabricación del acero es importante la tasa de cambio del costo de producción de  $x$  toneladas diarias de acero con respecto a  $x$  (o sea el **costo marginal**). En biología, es valioso conocer la razón de cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de la razón o tasa de cambio es de sumo interés en todas las ciencias naturales, en la ingeniería y aun en las ciencias sociales. Todas las razones de cambios instantáneas se pueden interpretar como pendientes de tangentes. Por lo anteriormente expresado se observa la necesidad de que el alumno cuente con todas las herramientas esenciales para trabajar con los límite de funciones.

Para el logro de los objetivos se desarrollaron los siguientes contenidos:

- Valorización de las expresiones algebraicas.
- Productos notables
- Factorización de expresiones algebraicas

-Técnica de racionalización

-Algunas aplicaciones en la economía

➤ **Valorización de las expresiones algebraicas.**

Si estuviésemos que determinar el interés simple, que produce un capital de B/. 10 000 en 4 años al 6%, utilizamos la fórmula  $I = Cit$ , donde

$I = \text{interés simple}$

$C = \text{capital}$

$t = \text{tiempo} = 4 \text{ años}$

$i = \text{tasa} = 6\%$

$I = Cit$

$I = (10\,000)(4)$ , luego

$I = B/2\,400$

Al proceso que acabamos de realizar se denomina **valorización de una expresión algebraica.**

La valorización de una expresión algebraica no es más que reemplazar las letras de la expresión algebraica por valores específicos o dados y efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplos: valore las expresiones algebraicas

1.  $C = \frac{S}{1+it}$ , para  $S = 3\,150$ ,  $i = 0,05$ ,  $t = 1/2$

Luego;

$$C = \frac{3\,150}{1+(0,05)(\frac{1}{2})} = 3073,17$$

2.  $2(2a - b)(x^2 + y) - (a^2 + b)(b - a)$ , para  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $x = 4$ ,  $y = \frac{1}{2}$

*Las operaciones indicadas dentro de los paréntesis deben efectuarse primero.*

$$2(2a - b) = 2(2 * 2 - 3) = 2(4 - 3) = 2(1) = 2$$

$$x^2 + y = 4^2 + \frac{1}{2} = 16 + \frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$$

$$a^2 + b = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$b - a = 3 - 2 = 1$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} 2(2a - b)(x^2 + y) - (a^2 + b)(b - a) &= 2 \times 16\frac{1}{2} \times 7 \times 1 \\ &= 2 \times \frac{33}{2} - 7 = 33 - 7 = 26 \end{aligned}$$

➤ **Productos Notables.**

Al multiplicar dos expresiones algebraicas encontramos, que en algunos casos, se trata de productos que se reconocen con facilidad y que su desarrollo sigue una línea o patrón definido.

Reconocer los casos de productos notables facilita en gran medida el cálculo de límites de funciones. Entre los que más son utilizados están:

**-El producto de la suma por la diferencia de dos números**

Este producto notable se representa por  $(x + a)(x - a)$ , para desarrollarlo multiplicaremos estos factores, utilizando la regla de la multiplicación de polinomios, esto es:  $(x + a)(x - a) = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2$

Este producto notable lo podemos definir de la siguiente manera:

“El producto de la suma por la diferencia de dos números  $x$  y  $a$  es igual, a la diferencia de los cuadrados de los números”

Ejemplos: Resuelva de manera directa, aplicando la regla los productos.

$$1. (3x + 2y)(3x - 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$$

$$2. \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y^3\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}y^3\right) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - \left(\frac{3}{4}y^3\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{16}y^6$$

**-El cuadrado de la suma  $a + b$**

Este producto notable tiene la forma:  $(a + b)^2$

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ , Este desarrollo lo podemos expresar de la siguiente manera:

“El cuadrado de la suma  $a + b$  es igual al cuadrado del primer término, más dos veces el producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término”

**-El cuadrado de la diferencia  $a - b$**

Este producto notable se representa por  $(a - b)^2$  y su desarrollo es el siguiente:

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Podemos expresarlo: “El cuadrado de una diferencia  $a - b$  es igual, al cuadrado del primer término, menos, dos veces el producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo”

Ejemplos: determina en forma directa aplicando la regla.

$$1. (3a^3 - 4b^4)^2 = (3a^3)^2 - 2(3a^3)(4b^4) + (4b^4)^2 = 9a^6 - 24a^3b^4 + 16b^8$$

$$2. \left(\frac{9}{4}m^6n^2 - \frac{2}{3}mn^3\right)^2 = \left(\frac{9}{4}m^6n^2\right)^2 - 2\left(\frac{9}{4}m^6n^2\right)\left(\frac{2}{3}mn^3\right) + \left(\frac{2}{3}mn^3\right)^2$$

$$= \frac{81}{16}m^{12}n^4 - 3m^7n^5 + \frac{4}{9}m^2n^6$$

**-El cubo de la suma  $a + b$**

Este producto tiene la forma de  $(a + b)^3$ , entonces:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

El desarrollo de este producto se puede expresar como: “El cubo de una suma  $a + b$  es igual, al cubo del primer término, más, tres veces el producto del cuadrado del primer término por el segundo, más, tres veces el producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término”.

Ejemplos: desarrolle:

$$1. (2x + 5y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(5y) + 3(2x)(5y)^2 + (5y)^3$$

$$= 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$$

$$2. (0.4x^2 + 1.5xy^3)^3 = (0.4x^2)^3 + 3(0.4x^2)^2(1.5xy^3) + 3(0.4x^2)(1.5xy^3)^2 + (1.5xy^3)^3$$

$$= 0.064x^6 + 0.72x^5y^3 + 2.7x^4y^6 + 3.375y^9$$

### -El cubo de la diferencia $a - b$

Este producto notable tiene la forma de  $(a - b)^3$ , entonces

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

El desarrollo de este producto se puede expresar como: “El cubo de una diferencia  $a - b$  es igual, al cubo del primer término, menos, tres veces el producto del cuadrado del primer término por el segundo, más, tres veces el producto del primer término por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo término”.

Ejemplos: Desarrolle

$$1. (3x^2 - 6y)^3 = (3x^2)^3 - 3(3x^2)(6y) + 3(3x^2)(6y)^2 - (6y)^3$$

$$= 27x^6 - 162x^4y + 324x^2y^2 - 216y^3$$

$$2. \left(\frac{1}{5}a^3 - \frac{5}{6}ab^6\right)^3 = \left(\frac{1}{5}a^3\right)^3 - 3\left(\frac{1}{5}a^3\right)^2\left(\frac{5}{6}ab^6\right) + 3\left(\frac{1}{5}a^3\right)\left(\frac{5}{6}ab^6\right)^2 - \left(\frac{5}{6}ab^6\right)^3$$

$$= \frac{1}{125}a^9 - \frac{1}{10}a^7b^6 + \frac{5}{12}a^5b^{12} - \frac{125}{216}a^3b^{18}$$

**-El producto de dos binomios que tienen un término en común.**

Este producto notable tiene la forma  $(x + a)(x + b)$ , su desarrollo es el siguiente:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + x(a + b) + ab \text{ y se expresa:}$$

“El producto de dos binomios que tienen un término en común es igual, al cuadrado del término en común, más, el producto de la suma de los términos diferentes por el término común, más, el producto de los términos diferentes”.

Ejemplos: calcula el producto de:

1.  $(x + 2)(x + 7) = x^2 + x(2 + 7) + 2(7) = x^2 + 9x + 14$

2.  $\left(\frac{3}{4}a^3b - \frac{1}{3}a\right)\left(\frac{3}{4}a^3b + \frac{1}{2}a\right) = \frac{9}{16}a^6b^2 + \frac{1}{8}a^4b - \frac{1}{6}a^2$

### Asignación N°1

**1. Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para**

$$a = 3, b = -8, c = \frac{1}{6}, d = \frac{1}{4}, m = -6, n = -\frac{1}{4},$$

1.  $a^2 - 5ab + 3b^3$

2.  $c\sqrt{3a} - d\sqrt{16b^2} + n\sqrt{8d}$

3.  $(b - m)(c - n) + 4a^2$

**2. Resuelva por simple inspección los siguientes productos.**

1.  $(2.5m^2 + 0.7n^3)(2.5m^2 - 0.7n^3)$

2.  $\left(\frac{7}{8}x^2y + \frac{5}{3}z^3\right)\left(\frac{7}{8}x^2y - \frac{5}{3}z^3\right)$

**3. Determina por simple inspección los resultados de:**

1.  $\left(\frac{1}{2}f^3 + \frac{2}{3}k^2\right)^2$

2.  $(0.9x^3y + 2.1y^2z^2)^2$

**4. Multiplique:** 1)  $(4a^2b - 6k^7)^3$

## 5. Desarrolle:

$$1) \left(\frac{1}{2} + 3a\right)\left(\frac{1}{2} + 5g\right)$$

### ➤ Factorización de expresiones algebraicas.

Si un número está escrito como el producto de otros, entonces cada número en el producto se denomina **factor** del número original. De igual manera, si una expresión algebraica está escrita como el producto de otras expresiones, entonces cada expresión algebraica en el producto se denomina factor de la expresión algebraica original.

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , 2, 3 y 5 son factores de 30.

$(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$ ,  $(x-2)$  y  $(x+2)$  son factores de  $(x^2 - 4)$

El proceso de escribir un número o una expresión algebraica como el producto de otros números o expresiones algebraicas se denomina **factorización**.

Por los productos notables se sabe que  $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ , entonces  $(x + 1)(x - 1)$  son factores de  $x^2 - 1$ .

### ➤ Entre los casos más importantes de factorización tenemos:

#### ➤ Factor común de varios monomios

Es una expresión que aparece en cada uno de los monomios. Puede estar formada por:

-El factor común de los coeficientes de los monomios que coinciden con el máximo común divisor de ellos.

-El factor común de la parte literal, formada por las variables presentes en todos los monomios, tomadas con el menor exponente que tengan en estos.

Por ejemplo: encuentre el factor común de los monomios.

a)  $9a^2b^4, 3a^3b^2, 27a^4b^3$ , luego el factor común es  $3a^2b^2$

b)  $36x^3y^4z^2, 90x^2y^3z, 18x^5yz^3, 27x^4y^5z^4$ , luego  $9x^2yz$ , es el factor común.

➤ **Factor monomio de un polinomio**

En muchas ocasiones un polinomio puede expresarse como el producto de dos factores uno de los cuales es un monomio, para encontrarlo, basta hallar el factor común de todos los términos del polinomio. El otro factor será el resultado o cociente de dividir el polinomio dado por el factor monomio encontrado.

Por ejemplo: Factorizar  $24a^2xy^2 - 36x^2y^4$

$12xy^2$  Es el factor común y la expresión factorizada será:

$$24a^2xy^2 - 36x^2y^4 = 12xy^2(2a^2 - 3xy^2)$$

➤ **Factor común polinomio de un polinomio**

Se encontrarán expresiones que pueden factorizarse en forma tal, que ambos factores son polinomios.

Ejemplos: factorice

a)  $(a - b)2c + (a - b)ab = (a - b)(2c + ab)$

b)  $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 = a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2)$   
 $= (x^2 + y^2)(a + b)$

➤ **Factores de binomios que son la diferencia de dos cuadrados.**

En los productos notables se analizó que, la suma de dos números multiplicados por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de los números, es decir

$$(x + a)(x + b) = x^2 - y^2$$

Para factorizar un binomio que es la diferencia de dos cuadrados se sigue los siguientes pasos:

- se extraen las raíces cuadradas de ambos términos.
- expresamos el producto de la suma de las raíces encontradas por la diferencia de las mismas en el mismo orden en el que aparecen los términos.

Ejemplos: factorice

$$a) 25m^8 - 49n^6 = (5m^4 + 7n^3)(5m^4 - 7n^3)$$

$$b) \frac{4}{9}a^2b^4 - \frac{81}{121}k^{10} = \left(\frac{2}{9}ab^2 + \frac{9}{11}k^5\right)\left(\frac{2}{9}ab^2 - \frac{9}{11}k^5\right)$$

➤ **Factores de una expresión que es un trinomio cuadrado perfecto.**

Características de un trinomio cuadrado perfecto:

- Tiene tres términos, ordenados de forma creciente o decreciente respecto a una de las letras.
- Los términos primero y tercero son positivos y están elevados al cuadrado.
- El segundo término sin tomar en cuenta el signo, es igual a dos veces el producto de las raíces cuadradas del primer y tercer término.

De tal manera que, todo trinomio cuadrado perfecto es el desarrollo de uno de los productos notables, siendo:

- El cuadrado de la suma de las raíces cuadradas del primer y tercer término, si el segundo término es positivo.
- El cuadrado de la diferencia de las raíces cuadradas del primer y tercer término, si el segundo término es negativo.

Por ejemplo: Indica si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos.

$$a) \quad \begin{array}{ccc} 4x^2 & - 20xy & + 25y^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2x & 2(2x)(5y) = 20xy & 5y \end{array} = (2x - 5y)^2$$

Como se cumplen las condiciones dadas, el trinomio es cuadrado perfecto.

➤ **Factores de una expresión que es el cubo perfecto de binomios.**

Características de un cubo de un binomio

-Tiene cuatro términos ordenados en forma creciente o decreciente con respecto a una de sus letras.

- Todos los términos son positivos, o se alternan términos positivos con negativos

-El primer y cuarto término son cubos perfectos, esto es tienen raíces cúbicas exactas.

-El segundo término, sin el signo, es igual a tres veces el producto del cuadrado de la primera raíz por la segunda.

-El tercer término, sin el signo, es igual a tres veces el producto de la primera raíz por el cuadrado de la segunda.

De esta manera todo cubo perfecto es el desarrollo de uno de los productos notables vistos en el tema anterior siendo:

-el cubo de la suma de las raíces cúbicas del primer y cuarto término si el segundo término es positivo.

-El cubo de la diferencia de las raíces cúbicas del primer y cuarto término si el segundo término es negativo.

Ejemplos:

Factorice:  $125x^3 + 1 + 75x^2 + 15x$

Primero ordenamos la expresión algebraica en forma decreciente,  $125x^3 + 75x^2 + 15x + 1$ , se nota que tiene cuatro términos y todos son positivos, luego se extrae las raíces al primero y cuarto término así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 125x^3 & & +75x^2 & & +15x & +1 & = (5x+1)^3 \\
 \downarrow & & & & & \downarrow & \\
 5x & & 3(5x)^2(1) = 3(25x^2) = 75x^2 & & & 1 & \\
 & & 3(5x)(1)^2 = 3(5x) = 15x & & & & 
 \end{array}$$

➤ **Factores de un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$**

En el trinomio  $x^2 + bx + c$ , el coeficiente del primer término es igual a 1 y los factores deben ser de la forma  $(x + a)(x + b)$  ya que,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$$

Para factorizar un trinomio que no es cuadrado perfecto y cuyo primer término tiene coeficiente igual a uno, se utiliza el siguiente procedimiento:

- Extraemos la raíz cuadrada del primer término, esta raíz será el primer término de cada uno de los factores.
- El signo del primer factor será igual, al signo del segundo término del trinomio dado.
- El signo del segundo factor será igual, al producto de los signos del segundo y tercer término del trinomio dado.
- Los segundos términos de los factores serán dos números tales que:
  - Suma o diferencia sea igual al coeficiente del segundo término del trinomio dado.
  - Su producto sea igual al coeficiente del tercer término del trinomio dado.

Por ejemplos: Factoriza

a)  $t^2 + 7t + 12 = (t + 3)(t + 4)$

b)  $x^2 - 5x - 36 = (x - 9)(x + 4)$

➤ **Factorización del trinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$**

En este caso se hace el primer término del trinomio dado un cuadrado perfecto y se procede entonces como en el caso anterior y se siguen los siguientes pasos:

- Se multiplica y divide el trinomio dado por el coeficiente del primer término.
- Se hace la multiplicación sólo en el primer y tercer término del trinomio dado, en el segundo término e deja expresada la multiplicación asociándole a la letra en este término, el coeficiente original del primer término.
- Se procede a factorizar en forma similar al caso anterior.
- Una vez factorizado se procederá a factorizar los factores numéricos.

Por ejemplo: Factorice  $5y^2 + 13y - 6$

$$5y^2 + 13y - 6 = \frac{5(5y^2 + 13y - 6)}{5}$$

$$= \frac{25y^2 + 13(5y) - 30}{5} = \frac{(5y + 15)(5y - 2)}{5} = \frac{5(y + 3)(5y - 2)}{5} = (y + 3)(5y - 2)$$

Luego  $5y^2 + 13y - 6 = (y + 3)(5y - 2)$

➤ **Factores de la suma de dos cubos perfectos.**

La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores tales que:

- El primer factor es la suma de las raíces cúbicas.
- El segundo factor es igual al cuadrado de la primera raíz cúbica, menos el producto de la dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica.

Ejemplos:

Factorizar.

$$\frac{8}{125}x^3 + \frac{1}{216}x^{15} = \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{6}x^5\right) \left(\frac{4}{25}x^2 - \frac{1}{15}x^6 + \frac{1}{36}x^{10}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \frac{2}{5}x & & \frac{1}{6}x^5 \end{array}$$

➤ **Factores de la diferencia de dos cubos perfectos**

La diferencia de dos se descompone en dos factores tales que:

- El primer factor es la diferencia de las raíces cúbicas.
- El segundo factor es igual al cuadrado de la primera raíz cúbica, más el producto de las dos raíces cúbicas, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica.

Por ejemplo: Descomponer en factores:

$$\begin{array}{r} 27m^6 - 343n^3 = (3m^2 - 7n)(9m^4 + 21m^2n + 49n^2) \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ 3m^2 \qquad \qquad 7n \end{array}$$

➤ **Técnica de racionalización de denominador y numerador de una fracción.**

La racionalización es un proceso en el cual una fracción que tiene un radical en su denominador es expresada como una fracción equivalente sin radicales en su denominador. Esta técnica es utilizada en para calcular límites de funciones de manera analítica.

Se consideran tres casos:

Caso 1:

Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es monomio.

En este caso se multiplican los dos términos de la fracción por el radical, del mismo índice que el denominador, que multiplicado por éste dé como producto una cantidad racional.

Ejemplos:

1. Racionalizar el denominador de:  $\frac{3}{\sqrt{2x}}$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por  $\sqrt{2x}$  y tenemos:

$$\frac{3}{\sqrt{2x}} = \frac{3\sqrt{2x}}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{2x}} = \frac{3\sqrt{2x}}{\sqrt{2^2 \cdot x^2}} = \frac{3\sqrt{2x}}{2x} = \frac{3}{2x} \sqrt{2x}$$

Caso 2:

Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo orden.

En este caso se multiplica ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador y se simplifica el resultado.

Racionalizar el denominador de:

a)  $\frac{4-\sqrt{2}}{2+5\sqrt{2}}$ , multiplicando ambos términos de la fracción por  $2-5\sqrt{2}$ ,

$$\frac{4-\sqrt{2}}{2+5\sqrt{2}} = \frac{(4-\sqrt{2})(2-5\sqrt{2})}{(2+5\sqrt{2})(2-5\sqrt{2})} = \frac{8-22\sqrt{2}+10}{2^2-(5\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{18-22\sqrt{2}}{4-50} = \frac{18-22\sqrt{2}}{-46} = \frac{9-11\sqrt{2}}{-23} = \frac{11\sqrt{2}-9}{23}$$

Racionalizar el denominador en la expresión algebraica:

a)  $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right) \left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right) = \frac{(\sqrt{x+1})^2-(1)^2}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

Caso tres:

Racionalizar el numerador de una fracción cuando el numerador es un binomio que contiene radicales de segundo orden.

En este caso se multiplica ambos términos de la fracción por la conjugada del numerador y se simplifica el resultado.

Racionalizar el numerador en:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \\ &= \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} \\ &= \frac{(\sqrt{t^2+9})^2 - (3)^2}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)} = \frac{(t^2+9)-9}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)} = \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)} \end{aligned}$$

❖ **Aplicaciones en un problema de economía.**

La ecuación del costo total de producir  $q$  unidades de un producto está dada por:  $C = 12\,000 + 10q$ . Si el costo promedio está dado por la ecuación  $\bar{C} = \frac{C}{q}$

Calcule: a)  $\lim_{q \rightarrow \alpha} C$       b)  $\lim_{q \rightarrow \alpha} \bar{C}$

Solución:

$$\text{a) } C = 12\,000 + 10q$$

$$\text{b) } \lim_{q \rightarrow \alpha} \bar{C} = \lim_{q \rightarrow \alpha} \frac{1200}{q} + 10$$

$$C = \lim_{q \rightarrow \alpha} 1200 + \lim_{q \rightarrow \alpha} 10q$$

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} \bar{C} = 0 + 10$$

$$C = 12\,000 + 10(\alpha)$$

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} \bar{C} = 10$$

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} C = \alpha$$

**Asignación N°3**

I. Encuentra el factor común de los monomios:

a)  $8x^4y^5z^2, 24x^3y^6, 16x^6y^3z^4, 20x^2y^4z^3$

II. Factorice:

a)  $xy - 9y - 4x + 6$

b)  $169a^{12} - 36b^{14}$

c)  $\frac{144}{225}a^{2b^4} + \frac{24}{65}ab^2c^2 + \frac{9}{169}c^4$

d)  $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$

e)  $x^2 + x - 132$

f)  $3x^2 - 5x - 2$

g)  $\frac{1}{512}a^3 + \frac{64}{125}b^9$

III. Racionalice los denominadores en las siguientes expresiones.

a)  $\frac{7}{\sqrt[3]{49x}}$

b)  $\frac{1}{\sqrt[5]{a^6b^3c^4}}$

c)  $\frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

d)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$

IV. Racionalice el numerador en las siguientes expresiones:

a)  $\frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2-4}$

b)  $\frac{\sqrt{2-t} - \sqrt{2}}{t}$

### 3.2.2 LOGROS OBTENIDOS.

Con este módulo se buscaba examinar a los estudiantes en el uso y manejo de conceptos y procedimientos sencillos, estudiados en educación pre media y media; y que son esenciales para el cálculo de límites de funciones en economía.

En el programa de estudio de la asignatura Matemáticas para economía ambiental, aparece el tema de los límites y continuidad de funciones. Aquí a los alumnos se les presentan los siguientes contenidos:

- Definición de límites
- Propiedades de los límites
- Límites laterales
- Límites al infinito
- Continuidad y discontinuidad
- Aplicaciones a las ciencias económico administrativas.

Para poder comprender tales contenidos el estudiante necesita contar con las competencias necesarias en temas relacionados con la valorización de expresiones algebraicas, ya que para determinar el límite de una función, el valor del límite de la función, depende del valor al que tiende la variable en la función. Por lo que se hace necesario evaluar la función, es decir encontrar su valor numérico. No obstante, en muchas ocasiones al evaluar la función de acuerdo al valor al que tiende la variable, se presentan casos donde se llega a divisiones entre cero, que no están definidas. Por lo que se hace necesario recurrir a técnicas de cancelación y racionalización para darle solución a este tipo de situaciones. Es por ello que los temas de productos notables y factorización se hacen indispensables en el desarrollo de problemas de límite de funciones. De

igual manera los temas de continuidad y discontinuidad son comprensibles si somos capaces de aplicar estos temas al estudiar las funciones.

Al respecto los estudiantes pudieron responder a los contenidos tratados en el módulo de manera satisfactoria y lograr un mejor rendimiento en las pruebas de evaluación.

### 3.2.3 FOTOS QUE EVIDENCIAN LA FASE III.



Foto N°1. Los estudiantes escuchan activamente la explicación del facilitador.



Foto N°2. Un participante demuestra sus conocimientos adquiridos y participa activamente.



Foto N°3. Los estudiantes analizan los procedimientos y desarrollan las actividades propuestas.



Foto N°4. Algunos participantes necesitaban atención más personalizada.

### 3.2.4 DIAPOSITIVAS UTILIZADAS.

#### I. PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables: son aquellos productos que cumplen reglas fijas.

Se presentan los siguientes casos:

##### 1. Cuadrado de la suma de dos términos o dos cantidades.

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

“El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo”

#### 2. Producto de la forma $(x+a)(x+b)$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$$

- “El producto de la forma  $(x+a)(x+b)$  es igual al cuadrado del primer término más el producto del primer término por la suma de los segundos términos de cada factor, más el producto de los segundos términos”

#### II. FACTORIZACIÓN

##### CASOS MÁS COMUNES

FACTOR COMÚN

FACTOR COMÚN POR  
AGRUPACIÓN DE  
TÉRMINOS

DIFERENCIA DE  
CUADRADOS  
PERFECTOS

MONOMIO

POLINOMIO

TRINOMIO  
CUADRADO PERFECTO

CUBO PERFECTO DE  
BINOMIOS

TRINOMIO DE LA  
FORMA  
 $x^2+bx+c$

TRINOMIO DE LA  
FORMA  
 $ax^2+bx+c; a \neq 0$

#### III. Técnica de Racionalización

La racionalización es un proceso en el cual una fracción que tiene un radical en su denominador o su numerador es expresada como una fracción equivalente sin radicales en su denominador o su numerador

*Casos que se presentan:*

- Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es monomio.
- Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo orden.
- Racionalizar el numerador de una fracción cuando el numerador es un binomio que contiene radicales de segundo orden.

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ**  
**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN DOCENCIA SUPERIOR**  
**CAPACITACIÓN: APLICACIONES DE LA MATEMÁTICA EN LA ECONOMÍA AMBIENTAL**  
**PLANEAMIENTO DIDÁCTICO**

**FACILITADOR: ONEL TUÑÓN AIZPRÚA.**

**3.3**  
**MÓDULO N°3**

**Tema:** Operaciones con expresiones algebraicas, fracciones algebraicas, cálculo de derivadas y aplicaciones en economía.

**Duración:** 8 horas

**Objetivo General:** Aplicar la aritmética, el álgebra y la geometría, como herramientas esenciales, en la solución de problemas con derivada de funciones.

Objetivos Específicos	Contenido	Metodología	Recursos	Evaluación
1. Resolver operaciones con expresiones algebraicas.	Operaciones con expresiones algebraicas. -adición -Sustracción -Multiplicación -División -Potenciación y radicación	-Exposición dialogada.  -Resolución de problemas en la sesión presencial.	-Tablero acrílico y marcador.  -Borrador  -Reproductor multimedia	<b>Diagnóstica</b> -preguntas exploratorias. - Lluvia de ideas.
2. Resolver operaciones con fracciones algebraicas	Operaciones con fracciones algebraicas -Adición -Sustracción -Multiplicación -División	-Asignación de taller para resolver en grupos y enviar por sesión virtual.	-Textos seleccionados  -Hojas blancas o de rayas.	<b>-Formativa</b> -Participación activa y autónoma de cada participante
3. Aplicar las reglas de derivación en la resolución de problemas que involucren problemas de economía.	Derivadas de una función -definición de derivada -diferenciación de funciones por incrementos. -Reglas básicas de derivación. -Problemas de aplicación	-Expositiva dialogada con desarrollo de prácticas.	-Presentación en diapositivas	

### 3.3.1 CONTENIDOS

#### ❖ OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Este módulo promueve en los estudiantes repasar aquellos conceptos y procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos ya estudiados en secundaria y que son imprescindibles a la hora de solucionar problemas que incluyen derivadas y sus aplicaciones a la economía.

##### A. Adición de expresiones algebraicas.

“En la suma de expresiones Algebraicas, solamente se podrán sumar, los términos semejantes.”

- **Adición de monomios.**

Al sumar monomios semejantes, sumaremos sus coeficientes, tomando en cuenta las reglas para la adición estudiadas anteriormente, manteniendo su parte literal exactamente igual. Ejemplo:

1. *Sume:*  $-\frac{3}{5}m, -m, -\frac{2}{3}mn$

$$\left(-\frac{3}{5}m\right) + (-m) + \left(-\frac{2}{3}mn\right)$$

$$= \left(-\frac{3}{5} - 1\right)m - \frac{2}{3}mn = \left(\frac{-3 - 5}{5}\right)m - \frac{2}{3}mn = -\frac{8}{5}m - \frac{2}{3}mn$$

- **Adición de polinomios**

“Al sumar dos o más polinomios, los ordenaremos en forma creciente o decreciente, los colocaremos uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en una misma columna, luego sumaremos los términos del polinomio suma”.

Ejemplos:

- Sume:  $2x^2 - 3xy + 15y^2$ ;  $8x^2 - 7y^2 - 16xy$

$$2x^2 - 3xy + 15y^2$$

$$8x^2 - 16xy - 7y^2$$

---


$$10x^2 - 19xy + 8y^2$$

-Sume:  $\frac{2}{3}m^3 - \frac{1}{4}mn^2 + \frac{2}{5}n^3$ ;  $\frac{1}{6}m^2n + \frac{1}{8}mn^2 - \frac{3}{5}n^3$ ;  $m^3 - \frac{1}{2}m^2n - n^3$

$$\frac{2}{3}m^3$$

$$-\frac{1}{4}mn^2$$

$$+\frac{2}{5}n^3$$

$$\frac{1}{6}m^2n$$

$$+\frac{1}{8}mn^2$$

$$-\frac{3}{5}n^3$$

$$m^3$$

$$-\frac{1}{2}m^2n$$

$$-n^3$$

---


$$\frac{5}{3}m^3$$

$$-\frac{1}{3}m^2n$$

$$-\frac{1}{8}mn^2$$

$$-\frac{6}{5}n^3$$

- **Sustracción de expresiones algebraicas**

“En la diferencia de expresiones algebraicas, solamente se podrán restar los términos semejantes”.

### 1. Sustracción de Monomios

Al restar monomios semejantes, le cambiamos el signo al monomio sustraendo y luego lo sumamos atendiendo a la regla de adición de monomios semejantes.

**Ejemplo:**

1. Restar  $\frac{3}{8}m^3$  de  $-\frac{7}{10}m^3$

$$-\frac{7}{10}m^3 - \left(\frac{3}{8}m^3\right) = -\frac{7}{10}m^3 - \frac{3}{8}m^3$$

$$= \left(-\frac{7}{10} - \frac{3}{8}\right)m^3 = \left(\frac{-28-15}{40}\right)m^3 = -\frac{43}{40}m^3$$

**2. Resta o Sustracción de Polinomios:** Al restar dos polinomios, los ordenamos en forma creciente o decreciente, luego escribimos el polinomio sustraendo debajo

del polinomio minuendo, de tal manera que los polinomios semejantes queden en una misma columna, luego, le cambiamos el signo a todos los términos del polinomio sustraendo para finalmente sumarlos atendiendo a la regla de la adición de polinomios.

Ejemplo: De  $6a^2 - ab + 3b^2$  restar  $8b^2 + 4a^2 - 7ab$

$$6a^2 - ab + 3b^2$$

$$\underline{-4a^2 + 7ab - 8b^2}, \text{ cambiando el signo al sustraendo}$$

$$2a^2 + 6ab - 5b^2$$

- **Multiplicación de Expresiones Algebraicas**

Para multiplicar expresiones algebraicas se hace necesario dominar las leyes de los exponentes.

1. Producto de potencias de igual base: es una potencia de la base común, con un exponente igual a la suma de los exponentes de los factores.

Ejemplo:

$$(b)(b^2) = b^{1+2} = b^3$$

$$(m^2n^3)(m^5n^2) = m^{2+5}n^{3+2} = m^7n^5$$

2. Potencia de una potencia: es una potencia de la misma base, con un exponente igual al producto de los exponentes.

$$(x^4)^3 = x^{12}$$

$$(a^2b^4)^3 = a^6b^{12}$$

3. Potencia de un producto: Es igual al producto de las potencias.

Ejemplos:

$$A) (ch^2)^8 = c^8h^{16}$$

$$B) (x^3g^2)^4 = x^{12}g^8$$

- **Multiplicación de Monomios**

Al multiplicar dos o más monomios, multiplicamos primero sus coeficientes y luego sus partes literales.

Ejemplos:

Multiplique:

$$a) (-15x^4 y^3)(-4a^2 x^3) = 60a^2 x^7 y^3$$

$$b) \left(-\frac{1}{2}x^2 y^3\right)\left(-\frac{3}{5}xy^2\right)\left(-\frac{10}{3}x^2 y\right) = \frac{3}{4}x^8 y^4$$

- **Multiplicación de un monomio por un polinomio**

Al multiplicar un monomio por un polinomio, multiplicamos el monomio por cada término del polinomio.

Ejemplo:

Halle el producto de:

$$a)(x^2 - 2xy + y^2)(-2x^2) = -2x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2$$

$$\left(\frac{2}{9}x^4 - x^2y^2 + \frac{1}{3}y^4\right)\left(\frac{3}{7}x^3y^4\right) = \frac{2}{21}x^7y^4 - \frac{3}{7}x^5y^6 + \frac{1}{7}x^3y^8$$

**Multiplicación de Polinomios:** Al multiplicar dos polinomios, ordenamos ambos polinomios de la misma forma, creciente o decreciente respecto a la misma letra, luego multiplicamos cada término del polinomio multiplicador por todos los términos del polinomio multiplicando, por último sumamos los términos semejantes.

Ejemplo: Multiplique:  $(x^3 + 3x - 1 - 2x^2)(2x + 3) = (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)(2x + 3)$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x \\ + 3x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \\ \hline 2x^4 - x^3 + 7x - 3 \end{array}$$

- **División de Expresiones Algebraicas**

Para la división de expresiones algebraicas debemos tener presente las leyes de los exponentes para la división.

**-División de potencias de igual base** : es igual a una potencia de base común, con un exponente igual a la diferencia del exponente de la potencia en el numerador menos el exponente de la potencia del denominador.

Ejemplos:

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

$$\frac{b^4}{b^7} = b^{4-7} = b^{-3} = \frac{1}{b^3}$$

**-Potencia de un cociente**: es igual al cociente de las potencias de dichos números. Ejemplos:

$$a) \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$$

$$b) \left(\frac{m^2}{n^3}\right)^4 = \frac{m^8}{n^{12}}$$

**-Potencia cero de un número real a**,  $a \neq 0$ , la potencia cero de cualquier número real distinto de cero es igual a uno. Ejemplos:

$$a) \frac{b^3}{b^3} = b^{3-3} = b^0 = 1$$

$$b) \left(\frac{m^2}{n}\right)^0 = \frac{m^0}{n^0} = \frac{1}{1} = 1$$

❖ **División de Monomios.**

Al dividir monomios dividimos primero sus coeficientes y luego sus partes literales.

Ejemplos: Divida: a)  $\frac{45a^5b^6}{9a^4b^6} = 5a$       b)  $\frac{3m^4n^5p^6}{-\frac{1}{3}m^4np^5} = -9n^4p$

### ❖ División de Polinomios por Monomios

Al dividir un polinomio por un monomio, dividimos cada uno de los términos del polinomio por el monomio.

Ejemplos:

a) Divida:  $35a^4b - 45a^3b^2 + 65a^2b^3$  entre  $5a^2b$

$$\frac{35a^4b}{5a^2b} - \frac{45a^3b^2}{5a^2b} + \frac{65a^2b^3}{5a^2b} = 7a^2 - 9ab + 13b^2$$

b) Hallar el cociente de:  $\frac{1}{4}m^4 - \frac{2}{3}m^3n + \frac{3}{8}m^2n^2$  entre  $\frac{1}{4}m^2$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4}m^4}{\frac{1}{4}m^2} - \frac{\frac{2}{3}m^3n}{\frac{1}{4}m^2} + \frac{\frac{3}{8}m^2n^2}{\frac{1}{4}m^2} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1} m^{4-2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{1} m^{3-2}n + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{1} m^{2-2}n^2 \\ &= m^2 - \frac{8}{3}mn + \frac{3}{2}n^2 \end{aligned}$$

### ❖ División de Polinomios

Al dividir dos polinomios, seguiremos los siguientes pasos:

1. Ordenaremos el dividendo y el divisor, en orden creciente o decreciente con respecto a la misma letra.
2. Para obtener el primer término del cociente, dividimos el primer término del dividendo por el primer término de polinomio divisor.
3. Multiplicamos el divisor por el término del cociente y restamos el producto del dividendo.
4. Si hubiese residuo, lo consideramos como nuevo dividendo y repetimos el procedimiento anterior.

5. La división terminará cuando el residuo sea cero o cuando el grado del residuo sea menor que el grado del polinomio divisor.
6. En caso de que el residuo de la división sea diferente de cero, el resultado será igual al cociente encontrado al efectuar la división más una fracción cuyo numerador es el residuo y cuyo denominador es el polinomio divisor.

Ejemplo:

a) Divida:  $x^6 + 6x^3 - 2x^5 - 7x^2 - 4x + 6$  entre  $x^4 - 3x^2 + 2$

$$\begin{array}{r}
 x^6 \quad - 2x^5 \quad + 6x^3 \quad - 7x^2 - 4x + 6 \quad \overline{) \quad x^4 - 3x^2 + 2} \\
 \underline{-x^6 \quad + 3x^4 \quad - 2x^2} \\
 -2x^5 \quad + 3x^4 + 6x^3 \quad - 9x^2 - 4x + 6 \\
 \underline{2x^5 \quad - 6x^3 \quad + 4x} \\
 +3x^4 \quad - 9x^2 \quad + 6 \\
 \underline{-3x^4 \quad + 9x^2 - 6} \\
 \text{-----} \quad \text{-----} \quad \text{-----}
 \end{array}$$

#### ❖ Potencia de expresiones algebraicas

Al elevar un monomio a una potencia, se eleva el coeficiente a esa potencia y se multiplica el exponente de cada letra por el exponente que indica la potencia.

Si el monomio es negativo, el signo de la potencia es positivo (+) cuando el exponente es par y es negativo (-) cuando el exponente es impar.

Ejemplos: a)  $(-5a)^3 = -125$

b)  $\left(\frac{2m^3n}{3x^4}\right)^5 = \frac{32m^{15}n^5}{243x^{20}}$

Recordemos que la potencia n-ésima de una expresión algebraica es la misma expresión por sí misma n-veces.

Ejemplo:

$$1) \left(\frac{2x}{3} - \frac{3y}{5}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3} - \frac{3y}{5}\right)\left(\frac{2x}{3} - \frac{3y}{5}\right)$$

$$\frac{4x^2}{9} - \frac{6xy}{15}$$

$$- \frac{6xy}{15} + \frac{9y^2}{25}$$

$$\frac{4}{9}x^2 - \frac{4xy}{5} + \frac{9}{25}y^2$$

#### ❖ Radicación de una expresión algebraica:

**Raíz de una expresión algebraica** es toda expresión algebraica que elevada a una potencia refleja la expresión dada.

Ejemplos:

2a es la raíz cuadrada de  $4a^2$ .

-2a es la raíz cuadrada de  $4a^2$  ya que  $(-2a)^2 = 4a^2$

3x es la raíz cúbica de  $27x^3$  ya que  $(3x)^3 = 27x^3$

El signo de raíz es  $\sqrt{\quad}$ , llamado signo radical. Debajo de este signo se coloca la cantidad a la que se le extrae la raíz, llamada cantidad subradical.

El signo  $\sqrt{\quad}$ , no lleva índice que indica la potencia a la que hay que elevar la raíz.

Por convención el índice dos se suprime y cuando el signo radical no lleva índice se entiende que el índice es 2.

Para extraer la raíz de un monomio, extraeremos la raíz del coeficiente y dividiremos el exponente de cada letra por el índice de la raíz.

Si el índice del radical es impar, la raíz tiene el mismo signo que la cantidad subradical, y si el índice es par y la cantidad subradical es positiva, la raíz tiene el doble signo  $\pm$ .

Ejemplos:

Encuentre las siguientes raíces:

$$a) \sqrt{25x^6y^8} = \pm 5x^3y^4$$

$$b) \sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}} = -2ab^2x^4$$

*Simplificar un radical es reducirlo a su más simple expresión. En la simplificación de radicales consideramos dos casos:*

1. Cuando la cantidad subradical contiene factores cuyo exponente es divisible por el índice, se arreglan los factores de la cantidad subradical, aquellos cuyo exponente sea divisible por el índice se sacan del radical, dividiendo su exponente por el índice.

Ejemplos:

$$a) \frac{3}{5} \sqrt{125mn^6} = \frac{3}{5} \sqrt{5^2 \cdot 5mn^6} = \frac{3}{5} \cdot 5n^3 \sqrt{5m} = 3n^3 \sqrt{5m}$$

$$b) \sqrt{3a^3b^2 - 3a^2b^2} = \sqrt{3a^2b^2(a-1)} = ab\sqrt{3(a-1)}$$

*Cuando la cantidad subradical es una fracción y el denominador es irracional hay que multiplicar ambos términos de la fracción por la cantidad necesaria para que el denominador tenga raíz exacta. Ejemplo:*

Simplifique:

$$a) 5 \sqrt{\frac{9n}{5m^3}} = 5 \sqrt{\frac{3^2 \cdot n \cdot 5m}{5m^2 m \cdot 5m}} = 5 \sqrt{\frac{3^2 \cdot 5mn}{5^2 m^2 m^2}} = \frac{5 \cdot 3}{5m \cdot m} \sqrt{5mn} = \frac{3}{m^2} \sqrt{5mn}$$

2. Cuando los factores de la cantidad subradical y el índice tiene un divisor común, dividimos el índice y los exponentes de los factores por su divisor común. Ejemplos:

$$\text{Simplifique: a) } \sqrt[6]{343a^9x^{12}} = \sqrt[6]{7^3 \cdot a^9x^{12}} = \sqrt[2]{7a^3x^4} = ax^2\sqrt{7a}$$

$$\text{b) } \sqrt[15]{m^{10}n^{15}x^{20}} = \sqrt[3]{m^2n^3x^4} = nx\sqrt{m^2x}$$

### Asignación N°1

- Adiciona los siguientes monomios:

$$1. \frac{3}{4}a^2b, \frac{1}{2}ab^2, -\frac{1}{4}a^2b, \frac{1}{2}ab^2, a^2b, -\frac{5}{6}ab^2$$

Suma los siguientes polinomios

$$1. 5ab - 3bc + 4cd; 2bc + 2cd - 3de;$$

$$2. x^4 + 2x^2y^2 + \frac{2}{7}x^4; -\frac{5}{6}x^4 + \frac{3}{8}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{14}y^4; -\frac{5}{6}x^3y - \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4$$

- Resta los siguientes monomios:

$$1. \text{ restar } 45a^3b^2 \text{ de } -\frac{1}{3}a^3b^2$$

$$2. \text{ De } m^3 + \frac{7}{12}mn^2 - \frac{4}{7}n^3 \text{ restar } -\frac{7}{6}m^2n - \frac{3}{6}mn^2 + n^3 - \frac{1}{8}m^3$$

- Multiplique las expresiones algebraicas:

$$1. (a^4 - 6a^3x + 9a^2x^2 - 8)(3ax^3)$$

$$2. (5y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 2y)(y^4 - 1 - 3y^2)$$

- Divide:

$$1. -120m^5n^7 \text{ entre } 24m^6n^4$$

$$2. x^3 + 4x^2 - 5x + 8 \text{ entre } x^2 - 2x + 1$$

- Simplifique los radicales:

$$1. \frac{1}{3}\sqrt[4]{81a^4b^6};$$

$$2. \sqrt{(a-b)(a^2-b^2)}$$

## ❖ OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

### • Adición y sustracción de fracciones algebraicas:

Al sumar y restar fracciones algebraicas, debemos considerar los siguientes pasos:

- Simplificar las fracciones dadas de ser posible
- Determinar el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas.
- Efectuar los productos indicados en el numerador de la fracción resultante.
- Se reducen los términos semejantes en el numerador
- Se simplifica de ser posible la fracción resultante

Observemos el siguiente caso aplicando los pasos anteriores.

$$\begin{aligned}\frac{ab}{9a^2 - b^2} + \frac{a}{3a + b} &= \frac{ab}{(3a + b)(3a - b)} + \frac{a}{3a + b} = \frac{ab + a(3a - b)}{(3a + b)(3a - b)} \\ &= \frac{ab + 3a^2 - ab}{(3a + b)(3a - b)} = \frac{3a^2}{(3a + b)(3a - b)}\end{aligned}$$

### ❖ Multiplicación de fracciones algebraicas:

Al multiplicar fracciones algebraicas debemos considerar los siguientes pasos:

- De ser posible factorizar todos los numeradores y denominadores de las fracciones a multiplicar.
- Cancelar todos los factores comunes que aparecen en el numerador y denominador de las fracciones a multiplicar.
- Finalmente, se multiplican los numeradores entre si y los denominadores entre si de las fracciones simplificadas.

Ejemplo:

Considerar los pasos anteriores para resolver la siguiente operación:

$$\frac{xy - 2y^2}{x^2 + xy} * \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{y(x - 2y)}{x(x + y)} * \frac{(x + y)^2}{x(x - 2y)} = \frac{y(x + y)}{x^2} = \frac{xy + y^2}{x^2}$$

- **División de fracciones algebraicas:**

Cuando dividimos fracciones algebraicas, se multiplica el dividendo por el inverso del divisor.

Ejemplo: Divida

$$\frac{a^4 - 1}{a^3 + a^2} * \frac{a^4 + 4a^2 + 3}{3a^3 + 9a}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^4 - 1}{a^3 + a^2} * \frac{3a^3 + 9a}{a^4 + 4a^2 + 3} = \frac{(a^2 + 1)(a^2 - 1)}{a^2(a + 1)} * \frac{3a(a^2 + 3)}{(a^2 + 3)(a^2 + 1)} \\ &= \frac{(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)}{a^2(a + 1)} * \frac{3a(a^2 + 3)}{(a^2 + 3)(a^2 + 1)} = \frac{3(a - 1)}{a} \end{aligned}$$

❖ **Aplicaciones de los conceptos y procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos para el cálculo de derivadas.**

- ❖ **La derivada**

Con la derivada se inicia el estudio del cálculo diferencial, que se ocupa de observar cómo varía una cantidad respecto a otra.

Después de aprender cómo calcular las derivadas, las emplearemos para resolver problemas en que intervienen tasas de cambio.

Los límites con forma:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Surgen siempre al calcular una rapidez de cambio en cualquier ciencia o rama de la ingeniería, como la rapidez de reacción en química o un costo marginal en economía. Dado que este tipo de límite se da con suma frecuencia se le da un nombre y una notación especiales.

**Definición:** La derivada de la función  $f$  en un número  $a$ , representada por  $f'(a)$ , es :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

En caso de existir ese límite.

Si escribimos  $x = a + h$ , entonces despejando  $h$ , tenemos  $h = x - a$  y  $h$  tiende a cero (0) si y sólo si  $x$  tiende a " $a$ "; por consiguiente, un modo equivalente de enunciar la definición de la derivada, es

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2)$$

El proceso de hallar la derivada se llama diferenciación.

Ejemplo: Determinar la derivada de la función  $f(x) = x^2 - 8x + 9$  en el número  $a$ .

Solución: atendiendo a la definición (1) tenemos:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2a + h - 8)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h - 8) = 2a - 8 \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Encontrar la derivada por medio de su definición. Si  $f(x) = x^2$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Observa que al tomar el límite tratamos a  $x$  como una constante, porque era  $h$  y no  $x$  la que estaba cambiando.

Además de la notación  $f'(x)$ , se dan a continuación otras maneras de denotar la derivada de  $y = f(x)$ ,

$$\frac{\partial y}{\partial x} \quad (\text{Derivada de } y \text{ con respecto a } x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad (\text{Derivada de } f(x) \text{ respecto a } x)$$

$$y' \quad (\text{Ye prima})$$

Si la derivada  $f'(x)$  puede evaluarse en  $x = x_1$ , el número  $f'(x_1)$  resultante se llama derivada de  $f$  en  $x_1$  e se dice que  $f$  es diferenciable en  $x_1$ .

La diferenciación directa de una función por medio de la definición de la derivada puede ser un proceso largo y por tanto tedioso. Es por ello, que existen las reglas que permiten efectuar la diferenciación en forma por completo mecánica y eficiente. Con estas se evita el uso directo de límites. Las más utilizadas son las siguientes:

- **Derivada de una constante.**

**Si  $c$  es una constante, entonces**

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Esto es, la derivada de una función constante es cero.

Ejemplo:

$\frac{d}{dx}(3) = 0$ ; Porque 3 es una función constante.

- **Derivada de una función potencia**

Si  $n$  es cualquier número real, entonces

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ ; Siempre que  $x^{n-1}$  esté definida. Esto es, la derivada de una potencia constante de  $x$  es igual al exponente multiplicado por la  $x$  elevada a una potencia menor en una unidad que la potencia dada.

Ejemplo:  $g(x) = x^2$

**Solución:**

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$$

Ejemplo:  $f(x) = x$

Solución:  $\frac{d}{dx}(x) = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

Ejemplo:  $f(x) = \sqrt{x}$

**Solución:**

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- **Regla del factor constante.**

Si  $f$  es una función diferenciable y  $c$  una constante, entonces  $cf(x)$  es diferenciable

y  $\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$ ;

Esto es, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

## ❖ APLICACIONES DE LA DERIVADA EN LA ECONOMÍA

### ➤ ANÁLISIS MARGINAL

Sean “x” e “y” dos variables económicas cualesquiera, relacionadas por la ecuación  $y = f(x)$ . En general se entiende por **análisis marginal** el estudio de las variaciones de la variable “y” en términos de la variación de la variable “x”.

En el entorno el conjunto formado por los valores que toman las variables económicas tales como: precio, costo, oferta demanda y beneficio, es un conjunto finito; sin embargo, con el fin de aprovechar la potencia que nos brinda el cálculo diferencial supondremos que los valores de las mencionadas variables son números reales.

### ❖ COSTO, INGRESO Y BENEFICIO MARGINAL

#### -Costo Marginal:

La función de costo total de un fabricante,  $c = f^8 q^9$  nos da el costo total  $c$  de producción y comerciar  $q$  unidades de un producto. La razón de cambio de  $c$  con respecto a  $q$  se llama costo marginal. Así,

$$\text{Costo marginal} = \frac{dc}{dq}$$

De igual manera, supongamos que  $C = C(q)$  la función de costo asociada a un cierto bien  $A$ , llamamos costo marginal del bien  $A$  en el nivel de producción  $q$  al valor de la derivada de la función de costo en  $q_0$ , es decir a  $C'(q)$ , siempre y cuando dicha derivada exista.

El costo marginal del bien  $A$  en el punto  $q_0$  representa la velocidad instantánea o tasa con la cual aumenta o disminuye el costo del bien en el nivel de producción.

**Ejemplo:** Sea  $c=0.1q^2 + 3$ ; una función, donde  $c$  está en dólares y  $q$  en kilogramos. Entonces,

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q$$

El costo marginal cuando se producen 4 kilogramos es  $\frac{dc}{dq}$  evaluado cuando  $q=4$ ;

$$\left. \frac{dc}{dq} \right|_{q=4} = 0.3 (4) = 0.80$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 1 kilogramo, de 4 a 5 kilogramos, entonces el cambio en el costo es aproximadamente 0.80 dólares. Esto es, el kilogramo adicional cuesta aproximadamente 0.80 dólares. En general, se interpreta el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional producida.

Si  $c$  es el costo total de producir  $q$  unidades de un producto, entonces el costo medio por unidad,  $\bar{c}$  es

$$\bar{c} = \frac{c}{q} \quad (2)$$

**Ejemplo:** Si el costo total de 20 unidades es de B/. 100, entonces el costo medio por unidad es de

$$\bar{c} = \frac{100}{20} = 5 \text{ dólares.}$$
 Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2) por  $q$

obtenemos,

$$c = q\bar{c}$$

Esto es, el costo total es el producto del número de unidades producidas multiplicadas por el costo medio unitario.

**Ejemplo:** Si la ecuación del costo promedio de un fabricante es

$$\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q},$$

Encontrar la función de costo marginal, ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades?

Solución: La función de costo marginal es la derivada de la función de costo total

c. Encontramos c, multiplicando  $\bar{c}$  por q.

$$c = \bar{c}q$$

$$= \left[ 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q} \right] q$$

$$c = 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 5q + 5000,$$

Al calcular la derivada de c, obtenemos la función de costo marginal. Esto es,

$$c' = 0.0001(3q^2) - 0.02(2q) + 5(1) + 0$$

$$c' = 0.0003q^2 - 0.04q + 5.$$

El costo marginal cuando se producen 50 unidades es:

$$c'(50) = 0.0003(50)^2 - 0.04(50) + 5 = 3.75$$

Si c es el precio y la producción se incrementa en 1 unidad, de q =50 a q=51, el costo de la unidad adicional es aproximadamente de B/. 3.75.

### **-INGRESO MARGINAL**

Supongamos que  $r = f(q)$  es la función de ingreso total de un fabricante.

La ecuación  $r = f(q)$  establece que el valor total recibido al vender q unidades de un producto es r. El ingreso marginal se define como la razón de cambio del valor total recibido con respecto al número total de unidades vendidas. Por lo tanto, el ingreso marginal es solamente la derivada de r con respecto a q.

**Ingreso marginal**  $= \frac{dr}{dq}$ , es la razón a la que el ingreso cambia con respecto a las unidades vendidas. Se interpreta como el ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción.

**Ejemplo:** Supongamos que un fabricante vende un producto a B/. 2.00 por unidad.

Si se venden  $q$  unidades, el ingreso total está dado por  $r = 2q$ .

**Solución:** La función de ingreso marginal es,  $\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}(2q) = 2$ , que es una función constante.

El ingreso marginal es entonces igual a dos (2) independientemente del número de unidades vendidas. Esto es lo que esperaríamos porque el fabricante recibe B/2.00 por cada unidad vendida.

Si  $r$  es el ingreso total de vender  $q$  unidades de un producto, entonces el ingreso

medio por unidad  $\bar{r}$  es:  $\bar{r} = \frac{r}{q}$

**Ejemplo:** La función de demanda de un cierto bien está dada por

$p = \frac{400}{q+2}$ . *Determina:*

- a) La función de ingreso
- b) La función de ingreso medio
- c) La función de ingreso marginal

**Solución:** La función de ingreso  $r(q)$ , se obtiene multiplicando el precio unitario de venta "p" por el número de unidades a vender "q", esto es:

$$r(q) = p \cdot q = \frac{400}{q+2} q = \frac{400q}{q+2}$$

b) La función de ingreso medio es:  $\bar{r}(q) = \frac{r}{q} = \frac{\frac{400q}{q+2}}{q} = \frac{400}{q+2}, q > 0$ .

c) La función de ingreso marginal no es más que la derivada de la función de

ingreso, por lo tanto:  $r'(q) = \frac{400(q+2) - 400(q+1)}{(q+2)^2} = \frac{800}{(q+2)^2}$ .

## ASIGNACIÓN N°2

A) En las situaciones siguientes están dadas funciones de costo, donde  $c$  es el costo de producir  $q$  unidades de un producto. En cada caso encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal para el valor o valores dados de  $q$ ?

a)  $c = 500 + 10q$ ;  $q = 100$

b)  $c = 0.3q^2 + 2q + 850$ ;  $q = 3$

c)  $c = 0.03q^3 - 0.6q^2 + 4.5q + 7700$ ;  $q = 10$ ,  $q = 20$ ,  $q = 100$

Respuestas. a)  $c'(q) = 10$ ; 10 b)  $c'(q) = 0.6q + 2$ ; 3,8 c)  $c'(q) = 0,09q^2 - 1,2q + 4,5$ ; 16,5; 784,5

B) En los siguientes ítems, están dadas las funciones de costo promedio, que es una función del número  $q$  unidades producidas. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores indicados de  $q$ .

a)  $\bar{c} = 0.01q + 5 + \frac{500}{q}$ ;  $q = 50$ ,  $q = 100$

b)  $\bar{c} = 0.00002q^2 - 0.01q + 6 + \frac{20000}{q}$ ;  $q = 100$ ,  $q = 500$

R. a)  $c'(q) = 0,02q + 5$ ; 6; 7 b)  $c'(q) = 0.00006q^2 - 0.02q + 6$ ; 4.6; 11

**Resuelve:**

1.  $\frac{a^3}{a^3+1} + \frac{a+3}{a^2-a+1} - \frac{a-1}{a+1}$

2.  $\frac{b}{a^2-b^2} - \frac{b}{a^2+ab}$

3.  $\frac{a^2-ab+a-b}{a^2+2a+1} * \frac{3}{6a^2-6ab}$

4.  $\left(\frac{x^3-121x}{x^2-49}\right) \div \left(\frac{x^2-11x}{x+7}\right)$

### 3.3.2 LOGROS OBTENIDOS.

Con el desarrollo de este módulo los estudiantes pudieron recordar toda esa información, sobre las operaciones con expresiones algebraicas y que son la base para posteriores aprendizajes.

En el curso Matemáticas para economía ambiental, se aborda el tema de las derivadas de funciones, al respecto se estudian los tópicos siguientes:

- Definición de derivada
- Diferenciación de funciones por incrementos.
- la derivada como razón de cambio.
- Reglas básicas de derivación.
- Aplicaciones a las ciencias económico administrativas: costo marginal, ingreso marginal, utilidad marginal.

Para poder comprender el concepto de derivada de una función y determinar las derivadas de funciones, los estudiantes deben contar con todos los conocimientos en álgebra, aritmética y geometría elemental, ya que la propia definición de derivada parte de conceptos geométricos, como lo son: pendiente y recta tangente; además necesitan dominar todas las operaciones con expresiones algebraicas, así como las operaciones con fracciones algebraicas. En su gran mayoría pudieron dar solución a situaciones que tenían que ver con las reglas básicas de derivación. Aquí se pudo notar las apropiaciones de los participantes en la materia tratada y un mejor desenvolvimiento a la hora de realizar las asignaciones. También, demostraron su interés en participar en clase a la hora de resolver los problemas de aplicación en economía.

### 3.3.3 FOTOS QUE EVIDENCIAN LA FASE III.



**Foto N°2.** Los participantes muestran su interés por las explicaciones del facilitador.



**Foto N°3.** Los participantes resuelven las situaciones planteadas activamente.



**Foto N°3-M3.** Existía una buena comunicación entre los participantes, se ayudaban mutuamente.



**Foto N°4-M3.** Momento donde los participantes presentan su examen semestral

### 3.3.4 DIAPOSITIVAS UTILIZADAS.

Operaciones con expresiones algebraicas

Adición de monomios y polinomios	Adición: $3xy + 8x^2 - 5xy - 5x^2$ $3xy + 8x^2 - 5xy - 5x^2 = 2xy + 3x^2$
Sustracción de monomios y polinomios	De $4x - 7y + 5$ restar $-8x + 9 - 7y$ $4x - 7y + 5 - (-8x + 9 - 7y)$ $4x - 7y + 5 + 8x - 9 + 7y = 12x - 4$
Multiplicación de monomios y polinomios	$(x + y)(x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$
División de monomios y polinomios	$a^2 + 2a - 3 \div a + 3 = a - 1$ $a^2 - ab + a = a^2 - ab / a = a - b$

Operaciones con expresiones algebraicas

POTENCIACIÓN	$a^2 (-5a)^3 = -125a^5$ $a^2 \left(\frac{2x^2}{3y}\right)^3 = \frac{8x^6}{27y^3}$
MULTIPLICACIÓN	$\frac{2x^2 + 3x - 1}{x - 2} \cdot \frac{x + 1}{x - 2}$ $\frac{(2x^2 + 3x - 1)(x + 1)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^3 + 5x^2 - 2x - 1}{(x - 2)^2}$

La derivada

- Definición: La derivada de la función  $f$  en un número  $a$ , está representada por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

En caso de existir ese límite.

- Si escribimos  $x = a + h$ , entonces despejando  $h$ , tenemos  $h = x - a$  y  $h$  tiende a cero (0) si y sólo si  $x$  tiende a "a"; por consiguiente, un modo equivalente de enunciar la definición de la derivada, es

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2)$$

Ejemplo:

- Encontrar la derivada por medio de su definición

Si  $f(x) = x^2$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ**  
**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN DOCENCIA SUPERIOR**  
**CAPACITACIÓN: APLICACIONES DE LA MATEMÁTICA EN LA ECONOMÍA AMBIENTAL**  
**PLANEAMIENTO DIDÁCTICO**

**MÓDULO Nº4**

**FACILITADOR: ONEL TUÑÓN AIZPRÚA.**

**Tema:** Aplicaciones de la aritmética, el álgebra y la geometría para resolver problemas de economía con derivadas: de funciones logarítmicas, exponenciales y algunas aplicaciones.

**Duración:** 8 horas

**Objetivo General:** Aplicar la aritmética, el álgebra y la geometría en el cálculo de derivadas de funciones logarítmicas, exponenciales que se emplean en la solución de problemas de economía.

Objetivos Específicos	Contenido	Metodología	Recursos	Evaluación
1. Aplicar las propiedades de las potencias en el desarrollo de operaciones.	Potenciación -Definición -Propiedades Función exponencial -Gráfica	-Exposición dialogada.  -Resolución de problemas en la sesión presencial.	-Tablero acrílico y marcador.  -Borrador  -Reproductor multimedia	<b>Diagnóstica</b> -preguntas exploratorias. - Lluvia de ideas.
2. Aplicar las propiedades de la radicación en el desarrollo de operaciones.	Radicación -Definición -Exponente fraccionario -Propiedades	-Asignación de taller para resolver en grupos y enviar por sesión virtual.	-Textos seleccionados	<b>-Formativa</b> -Participación activa y autónoma de cada participante.
3. Aplicar las propiedades de los logaritmos en operaciones con expresiones algebraicas.	Logaritmos -Definición -Propiedades -Aplicaciones -Función logarítmica -Gráfica	-Prácticas individuales.	-Hojas blancas o de rayas.	
4. Determinar el conjunto solución en desigualdades cuadráticas y lineales.	Desigualdades -Lineales -Cuadráticas	-Participación activa por los estudiantes en el tablero.	-Presentación en diapositivas	-Taller grupal -Taller individual -Post-test

### 3.4.1 CONTENIDOS

#### POTENCIACIÓN, RADICACIÓN, LOGARITMOS Y DESIGUALDADES

Este módulo requería el dominio de algunas propiedades importantes de las potencias, radicación y logaritmos, vistas por los estudiantes en educación secundaria, y que deberían ser aplicadas en el desarrollo de los temas estudiados. Además el trazado de curvas, tema a tratar en el siguiente semestre, demandaba el dominio de las desigualdades o inecuaciones lineales y cuadráticas.

##### ❖ POTENCIACIÓN

La teoría de los exponentes juega un papel fundamental en álgebra y los logaritmos.

Se llama potencia de una expresión algebraica al resultado de tomarla como factor un número determinado de veces.

En la expresión  $(4ab^2)^3 = (4ab^2)(4ab^2)(4ab^2) = 64a^3b^6$

$4ab^2$  es la cantidad que se repite como factor y recibe el nombre de base; 3 es el número que nos indica las veces que se repite la base como factor y se llama exponente, mientras que  $64a^3b^6$  es el resultado llamado potencia.

Signos de una potencia.

Al obtener la potencia de una fracción, pueden darse diferentes casos:

1. Cualquier potencia de una base positiva es positiva.
2. Toda potencia par de una base negativa es positiva.
3. Toda potencia impar de una base negativa es negativa.

Observemos algunos ejemplos:

$$(3a)^2 = (3a)(3a) = 9a^2$$

$$(3a)^3 = (3a)(3a)(3a) = 27a^3$$

$$(-3a)^2 = (-3a)(-3a) = 9a^2$$

$$(-5a)^3 = (-5a)(-5a)(-5a) = -125a^3$$

❖ **LEYES DE LOS EXPONENTES**

A)  $a^m a^n = a^{m+n}$  multiplicación de potencias de igual base.

B)  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ,  $a \neq 0$ ,  $m > n$ , división de potencias de igual base.

C)  $a^0 = 1$ ,  $a \neq 0$

D)  $(a^m)^n = a^{mn}$ , potencia de una potencia.

E)  $(ab)^n = a^n b^n$ , potencia de un producto.

F)  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ,  $b \neq 0$ , potencia de un cociente.

G)  $a^1 = a$

H)  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ,  $a \neq 0$ .

Ejemplos:

Aplicando las propiedades de los exponentes desarrollar los ejercicios siguientes:

$$1. \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{27}{8}$$

$$2. 7^{-2} 7^5 = 7^{-2+5} = 7^3 = 343$$

$$3. \frac{7^3}{7^{-1}} = 7^{3-(-1)} = 7^{3+1} = 7^4 = 2401$$

$$4. (3^{-4})^{-1} = (3)^4 = 81$$

$$5. (100)^0 = 1$$

$$6. (3 \times 1/6)^4 = 3^4 (1/6)^4 = \frac{1}{16}$$

❖ **Aplicaciones de las leyes de los exponentes**

-Expresar con exponentes positivos y simplificar:

$$1) \frac{a^{-1}b}{2a^{-4}b^{-1}} = \frac{a^4bb}{2a} = \frac{a^3b^2}{2}$$

$$2) \frac{3^{-3}x}{3x^{-2}} = \frac{xx^2}{33^3} = \frac{x^3}{81}$$

-Expresar si denominador y simplificar:

$$a) \frac{x^{-2}y}{4^2} = 4^{-2}x^{-2}y$$

$$b) \frac{1}{m^{-1}n^4} = mn^{-4}$$

### ❖ Función exponencial y Sus Propiedades:

Una función exponencial es aquella que está definida por la ecuación de la forma

$f(x) = a^x$ ,  $a > 0$   $a \neq 1$ , donde  $a$  es una constante denominada base, y el exponente  $x$  es una variable. Se define en cinco etapas:

1. Si  $x = n$ , un entero positivo, entonces

$$\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

2. . Si  $x = 0$ ,  $a^0 = 1$ ,

3. Si  $x = -n$ , donde  $n$  es un entero positivo,

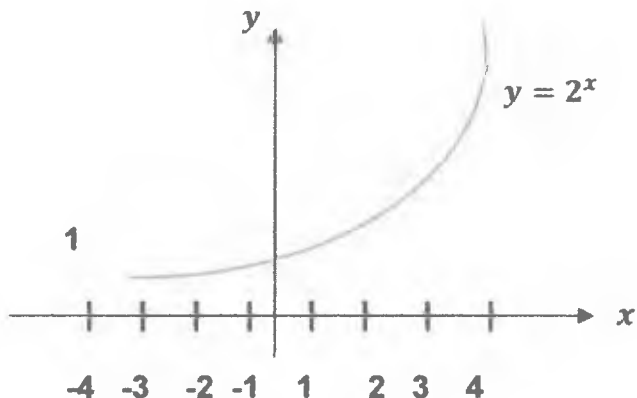
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

4. Si  $x$  es número racional,  $x = \frac{p}{q}$  donde  $p$  y  $q$  son enteros, y  $q > 0$ ,

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

5. Si  $x$  es un número irracional, deseamos definir  $y = a^x$  para rellenar los huecos de la gráfica de la función  $f(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  una función continua.

## Gráfica N°1.M4. Función exponencial



### Teorema sobre las propiedades de la función exponencial

Si  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , entonces  $f(x) = a^x$  es una función continua cuyo dominio es  $\mathbb{R}$ , y el rango es  $(0, \infty)$ . Si  $0 < a < 1$ ,  $f(x)$  es decreciente; si  $a > 1$ ,  $f$  es creciente.

#### ❖ Propiedades de las funciones exponenciales

1.  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

2.  $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

3.  $(a^x)^y = a^{xy}$

4.  $(ab)^x = a^x b^x$

#### ❖ RADICACIÓN.

Se llama raíz de una expresión algebraica a aquella que elevada a una potencia reproduce la expresión dada.

En la expresión  $\sqrt[3]{8x^6} = 2x^2$ ,  $2x^2$  es la raíz, ya que elevada a la tercera potencia resulta  $8x^6$ .

El signo  $\sqrt{\quad}$ , se llama signo radical,  $8x^6$  es la cantidad subradical o radicando, el número colocado en la abertura del signo radical es el índice y determina el grado del radical.

En general, la raíz enésima (de índice  $n$ ) de un número es uno de sus factores (divisores) iguales. Cuando el índice es dos, se omite.

Signos de una raíz:

Si tomamos en consideración el índice y el signo de la cantidad subradical tenemos:

- a) Si el índice es impar, la raíz tiene el mismo signo que la cantidad subradical.
- b) Si el índice es par y la cantidad subradical positiva, la raíz tiene doble signo: + y -
- c) Si el índice es par y la cantidad subradical es negativa, no hay raíz en el campo de los números reales ( $\mathbb{R}$ ).

Exponente Fraccionario:

Se origina al extraer la raíz a una potencia cuyo exponente no es divisible por el índice de la raíz. Por lo que podemos decir que, toda raíz es una potencia de exponente fraccionario cuyo numerador y denominador representan, respectivamente el exponente del radicando y el índice de la raíz.

Así  $x^{\frac{a}{b}} = \text{equivale } \sqrt[b]{x^a}$

❖ **Propiedades de las raíces:**

Para el cálculo de la potencia fraccionaria de una expresión debemos considerar las leyes:

1.  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ , *Raíz de un producto*

2.  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ,  $b \neq 0$ ; *Raíz de un cociente*

3.  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ; *Raíz de una raíz*

$$4. (\sqrt[n]{a^p})^m = \sqrt[n]{a^{pm}}, \text{ Potencia de una raíz}$$

Problemas de aplicación de las propiedades de las raíces:

Expresar con exponente positivo y signo radical:

$$a) kx^{\frac{2}{5}}m^{-\frac{1}{3}}n = \frac{k^{\frac{2}{5}}}{m^{\frac{1}{3}}} = \frac{n^{\frac{5}{3}}k^2}{\sqrt[3]{m}}$$

$$b) \left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{4}} = \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{y^{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}}$$

### Asignación N°1

I. Aplique las propiedades de los exponentes para resolver cada situación:

$$1. \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2. \frac{4^{0.537}}{4^{-0.463}}$$

$$3. (2^{-2} \cdot 4)^4$$

$$4. \frac{x^{-3}y^{-3}}{x}$$

$$5. \left(\frac{0.4}{0.2}\right)^{-2}$$

II. Aplique las propiedades de las raíces. Expresar con exponente positivo y signo radical

$$1. x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$$

$$2. \frac{2}{a^{-\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{8}}}$$

$$3) \frac{p^{\frac{3}{5}}q^{-\frac{1}{8}}}{3^{-\frac{1}{2}}r}$$

### ❖ LOGARITMOS

Logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar otro número llamado base del sistema, para obtener el número dado.

Es decir, de las igualdades de la primera columna, se deducen las de la segunda columna:

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001, \quad \text{resulta} \quad \log 0.001 = -3$$

$$10^3 = 1000, \quad \text{resulta} \quad \log 1000 = 3$$

$$10^5 = 100000; \quad \text{resulta} \quad \log 100000 = 5$$

### **Propiedades para el cálculo de los logaritmos:**

Si B es la base de un sistema de logaritmos y M y N son dos números cualesquiera, tenemos:

$$\text{Si } \log M = x, \quad \text{entonces } B^x = M \quad (1)$$

$$\text{Si } \log N = y, \quad \text{entonces } B^y = N \quad (2)$$

**Logaritmo de un producto:** “El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores”

Multiplicando miembro a miembro (1) y (2), tenemos:

$$B^x \cdot B^y = MN,$$

$$B^{x+y} = MN$$

$$\therefore \log MN = x + y, \quad (3)$$

$$\text{Pero } \log M = x \quad \text{y} \quad \log N = y$$

Sustituyendo estos valores en (3), tenemos:

$$\log MN = \log M + \log N$$

### **Logaritmo de un cociente:**

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor”

Dividiendo miembro a miembro (1) y (2), tenemos:

$$\frac{B^x}{B^y} = \frac{M}{N}$$

$$B^{x-y} = \frac{M}{N}$$

$$\therefore \log \frac{M}{N} = x - y \quad (4)$$

Pero  $\log M = x$  y  $\log N = y$

Sustituyendo estos valores en (4) tenemos:

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

**Logaritmo de una potencia:**

“El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base”

Elevando a la potencia “n” ambos miembros de la igualdad (1), tenemos:

$$(B^x)^n = M^n$$

$$B^{n \cdot x} = M^n$$

$$\therefore \log M^n = n \cdot x \quad (5)$$

Y como  $\log M = x$ , *sustituyendo este valor en (5), tenemos:*

$$\log M^n = n \log M$$

**Logaritmo de una raíz:** “El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo radicando dividido entre el índice de la raíz”

Extrayendo la raíz enésima de ambos miembros de la igualdad (1) tenemos:

$$\sqrt[n]{B^x} = \sqrt[n]{M}$$

$$\therefore B^{x/n} = \sqrt[n]{M}$$

$$\therefore \log \sqrt[n]{M} = \frac{x}{n}, \quad (6)$$

Y como:  $\log M = N$ , *sustituyendo este valor en , tenemos  $\log \sqrt[n]{M} = \frac{\log M}{n}$*

Ejemplos:

$$1. \log(3.4 \times 5.62) = \log 3.4 + \log 5.62$$

$$2. \log \frac{1.8}{0.72} = \log 1.8 - \log 0.72$$

$$3. \log 3.2^9 = 9 \log 3.2$$

$$4. \log \sqrt[5]{6.32} = \frac{\log 6.32}{5}$$

$$5. \log \left( \frac{\sqrt[4]{9}}{2} \right) = \frac{\log 9}{4} - \log 2$$

#### ❖ Funciones Logarítmicas:

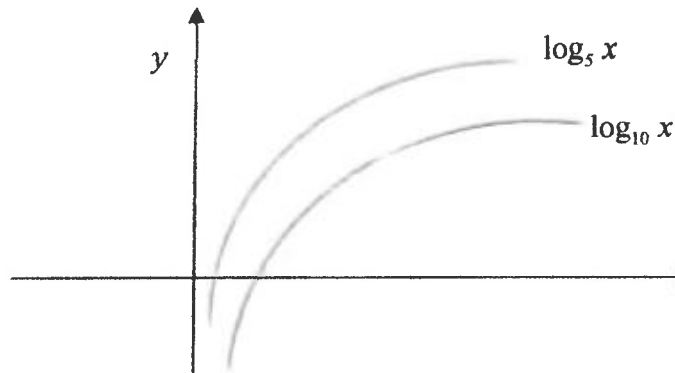
Si  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , la función exponencial  $f(x) = a^x$ , es creciente o decreciente, y por lo tanto, tiene una función inversa, que se llama función logarítmica con base  $a$ , y se representa mediante  $\log_a$

Si utilizamos la definición:  $f^{-1}(x) = y \leftrightarrow f(y) = x$

Entonces  $\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$

Así si  $x > 0$ ,  $\log_a x$  es el exponente al que se debe elevar la base  $a$  para obtener  $x$ .

#### Gráfica N°2.M4. De 2 funciones logarítmicas



La función logarítmica tiene su dominio en  $(0, \infty)$  y su codominio en  $\mathbb{R}$ .

#### Propiedades de las funciones Logarítmicas

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^y) = y \log_a x$$

### Logaritmos Naturales- Propiedades

Los logaritmos con base **e** se conocen como logaritmos naturales.

$$\log_e x = \ln x$$

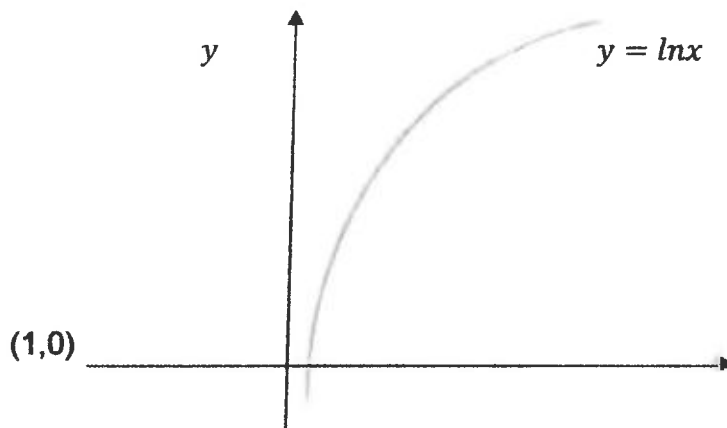
### Propiedades de los logaritmos naturales.

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

$$\ln(e^x) = x \rightarrow x \in R \quad e^{\ln x} = x$$

Si  $x=1$ , llegamos a  $\ln e = 1$

### GráficaN°3. M3.Función logaritmo natural.



### ❖ DESIGUALDADES

Escribe los siguientes enunciados en forma simbólica:

- a) La mitad de  $x$  es menor que 9.  $x/2 < 9$
- b) El número siguiente de  $x$  es a lo sumo -8.  $x+1 \leq -8$
- c) El número posterior a  $x$  es positivo.  $x+1 > 0$

Estos enunciados que escribimos anteriormente se denominan: Desigualdades de primer grado con una incógnita. Cada desigualdad se verifica para un conjunto de valores de la incógnita, al que llamamos conjunto solución S.

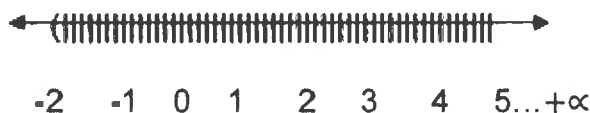
Ejemplo: resuelve y representa gráficamente las siguientes desigualdades:

1.  $4x + 7 \geq -1$

$4x > -1 - 7$

$x > -\frac{8}{4}$

$x > -2$ . El conjunto solución es,  $S = (-2, +\infty)$ . La representación de S en la recta real es:



3.  $\frac{x}{x-3} < 4, x \neq 3$

Como  $x \neq 3$  luego,  $x - 3 > 0$  o  $x - 3 < 0$ .

Solución:

1. Si  $x - 3 > 0$  entonces  $x > 3$ , luego

$\frac{(x - 3)x}{x - 3} < 4(x - 3)$

$x < 4x - 12$

$x - 4x < -12$

$-3x < -12,$

$x > 4$



Solución:  $(4, +\infty)$

2. Si  $x - 3 < 0$  entonces  $x < 3$

$$\frac{(x-3)x}{x-3} > 4(x-3)$$



$$x > 4x - 12$$

$-\infty$                       0   1   2   3   4

$$x - 4x > -12$$

Solución:  $(-\infty, 3)$

$$-3x > -12$$

$$x < 4$$

Solución final:  $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$

❖ **Desigualdades Cuadráticas:**

La clave para resolver desigualdades cuadráticas es la factorización, ya que todo polinomio cuadrático no es factorizable si se permiten coeficientes complejos.

Hallar el conjunto solución de:

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

Factorizando:  $(x + 5)(x - 2) > 0$

Los factores  $(x+5)$   $(x-2)$  deben ser de signos iguales para que su producto resulte mayor que cero.

Tendríamos los casos:

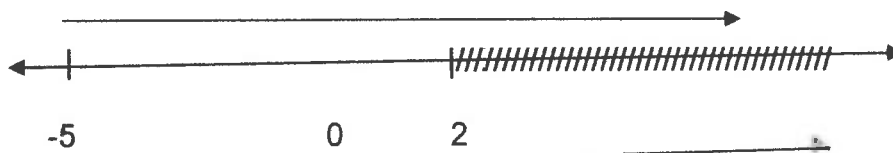
a.  $x + 5 > 0$

$x - 2 > 0$

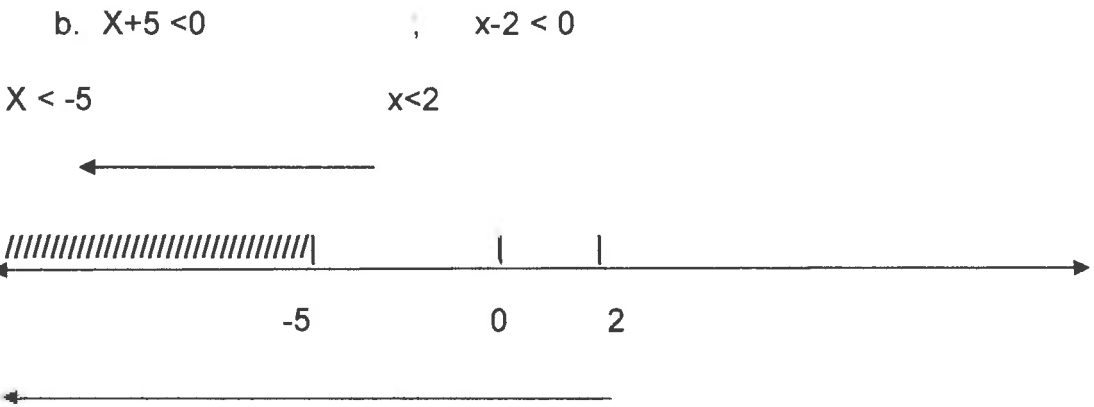
$x > -5$

$x > 2$

Ilustrando tenemos:

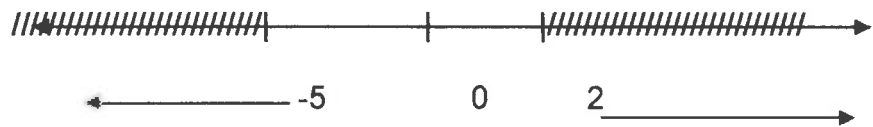


De la gráfica se obtiene que los valores de  $x$  que satisfacen la condición  $x > -5$  y a la vez  $x > 2$ , están dados por la intersección de esos dos intervalos:  $(-5, +\infty)$  y  $(2, +\infty)$ , que dan como solución para este caso  $(2, +\infty)$



La intersección de los intervalos  $(-\infty, -5) \cup (-\infty, 2)$  es  $(-\infty, -5)$

El conjunto solución de la desigualdad  $x^2 + 3x - 10 > 0$ , es la unión de las soluciones para cada caso. Es decir:  $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$ , que gráficamente es:



Otro método consiste en determinar los valores que hacen ceros los correspondientes factores.

1.  $2x^2 + 7x + 3 \leq 0$

Factorizando tenemos:  $(2x + 1)(x + 3) \leq 0$

Los valores que hacen cero a cada uno de los factores son  $-\frac{1}{2}$  y  $-3$ . Localizamos estos puntos sobre la recta numérica y observamos que la dividen en tres partes que determinan los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -3) \quad \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$



Seleccionamos valores prueba  $k$  en los intervalos para determinar el signo de cada uno de ellos. Se resumen en la siguiente tabla:

Intervalo	$k$	Valor de $k$ para $2x^2 + 7x + 3$	Signo de $2x^2 + 7x + 3$ en el intervalo.
$(-\infty, -3)$	-4	7	+
$(-3, -1/2)$	-1	-2	-
$(-1/2, \infty)$	0	3	+

Concluimos que la solución de  $2x^2 + 7x + 3 < 0$  está dada por el intervalo  $(-3, -\frac{1}{2})$ .

Además, como en la igualdad propuesta el producto de ambos puede ser cero, entonces debemos incluir los valores  $-3$  y  $-1/2$  en el conjunto solución y tendríamos  $[-3, -\frac{1}{2}]$

**Gráficamente:**



### Asignación N°2

I. Aplica los logaritmos a las siguientes expresiones:

1)  $ab$       2)  $5x$     3)  $\frac{c}{d}$       4)  $x^n$       5)  $\sqrt[3]{A}$

II. Resuelva las siguientes desigualdades y grafique el conjunto solución. Exprese en forma de intervalo dicho conjunto.

1.  $3x - 5 < 1$     y     $4 - 2x \geq 8$

2.  $(2x + 6) < 4x - 2$     y     $x - 1 < 5 + 3x$

3.  $x^2 - 5x - 14 < 0$

### 3.4.2. LOGROS OBTENIDOS.

Este módulo procuraba hacer una introducción hacia los aprendizajes que los participantes debían concebir posteriormente en la segunda parte del curso de Matemáticas aplicadas a la economía ambiental. Aquí éstos hacen un reconocimiento de las propiedades de las potencias, las raíces y de los logaritmos, aplicadas a las funciones exponenciales y logarítmicas para la solución, posterior, de problemas de aplicación en el ámbito económico que involucra además el cálculo de derivadas.

Los temas presentados son:

- Derivadas de funciones logarítmicas
- Derivadas de funciones exponenciales.
- Diferenciación Implícita
- Diferenciación logarítmica
- Aplicaciones de la derivada
  - Función creciente y decreciente
  - Extremos relativos y absolutos

En este módulo los participantes debían casi en su totalidad aplicar los conocimientos adquiridos en los tres primeros módulos. Adicionalmente era el trabajo con las funciones logarítmicas y exponenciales, donde el dominio de las propiedades o leyes de los exponentes y logaritmos eran esenciales. Sin embargo, a la hora de presentar la primera prueba de evaluación en la segunda parte del curso, los resultados de los participantes, fueron satisfactorios.

### 3.4.3. FOTOS QUE MUESTRAN LA FASE III.



**Foto N°1.M4.** Los participantes resuelven las asignaciones y hacen las consultas necesarias.



**Foto N°2.M4.** Los participantes observan las gráficas de algunas funciones.



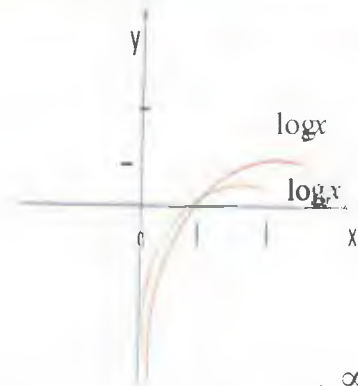
Foto N°3. M4. Los participantes resuelven las prácticas asignadas.



Foto N°4. M4. Los estudiantes observan las diapositivas para este tema y resuelven las asignaciones.

### 3.4.4 DIAPOSITIVAS UTILIZADAS.

#### Gráficas de las funciones logarítmicas



- La función logarítmica tiene su dominio en  $(0, \infty)$  y su codominio en  $\mathbb{R}$ .

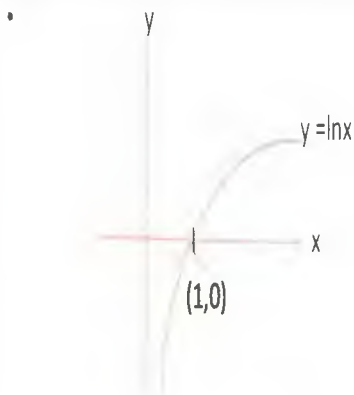
#### Propiedades de las funciones Logarítmicas

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

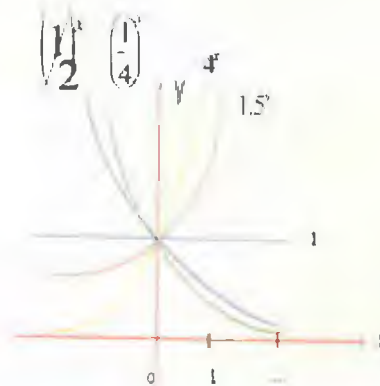
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a x$$

#### Gráfica de la función logaritmo natural.



#### Gráfica de la función $f(x) = a^x$ para diversos valores de la base $a$ .



#### 4. INFORME DE RESULTADOS

Atendiendo a la necesidad, claramente identificada, en un grupo de estudiante de primer año, de la Facultad de Economía del Centro Regional Universitario de Coclé, se acordó junto con las autoridades de la institución, el desarrollo del proyecto de intervención pedagógica titulado “Aplicaciones de la Matemática en Economía Ambiental”. Este proyecto nos permitió, por un lado, poner en práctica muchos de los conocimientos adquiridos, y por otro, evidenciar una serie de deficiencias presentes en la formación académica de los estudiantes que ingresan a la universidad.

La capacitación se llevó a cabo, desde el día 26 de julio hasta el 30 de agosto del presente año; aquí los discentes participantes se mantuvieron en una comunicación permanente, hasta cumplir las 40 horas presenciales y las horas a distancia requeridas. La mayoría de los participantes que se anotaron para recibir la capacitación fueron a las sesiones presenciales en un 100%. Sin embargo, hubo otros que por algunos compromisos adquiridos asistieron en un 60 y 70% a las sesiones presenciales. Cabe señalar que los horarios de capacitación fueron algunos sábados y en días de semana establecidos por los participantes.

A continuación se observa una tabla que ofrece las calificaciones obtenidas por los participantes después de recibir la capacitación, tanto en el examen semestral y el primer parcial del segundo semestre.

**Tabla 4.1. Podemos observar la calificación lograda por los participantes, luego de haber recibido la capacitación o seminario en matemáticas.**

N°	Cédula	Nombre	C. Semestral(I)	Parcial N°1(S.2)
1	02-0725-1148	AGUILAR CAMILO	C	84
2	02-0721-147	ALONSO ANDRES LUIS	C	72
3	02-727-2382	ARAUZ YASURIS	C*	81
4	02-729-1008	CASTILLO PABLO	B	81
5	02-727-1165	CASTILLO XIOMARA	A	98
6	08-840-488	DEGRACIA MARIA	A	100
7	02-727-905	GONZALEZ EVELYN	C	89
8	02-718-1911	LORENZO JOSE	C*	58
9	02-727-1109	MARTINEZ RIVERA MARIA	C	83
10	02-729-1442	MORAN YESICA	B	87
11	02-729-232	OVALLE ENMA	C	50
12	08-850-1908	PALACIO QUIJAD MARYORIE	C	83
13	02-721-942	SILVA CARLOS	C	92
14	02-722-1582	VARGAS DARIO	B	71

Luego de haber culminado esta capacitación y atendiendo a los resultados obtenido en cada uno de los módulos y los plasmados en la tabla anterior, se espera que cada día los estudiantes se preocupen por su formación académica y aspiren por recibir una educación de calidad en todos los niveles educativos. Seguidamente se presentan las conclusiones y recomendaciones que ha proyectado la capacitación, en el módulo de Práctica Pedagógica Profesional.

#### 4.1 ACTIVIDADES ASIGNADAS A LOS PARTICIPANTES EN LAS HORAS NO PRESENCIALES, POR MÓDULOS.

Para la complementación de cada tema desarrollado en la capacitación, se dieron diversas asignaciones a los estudiantes participantes, los cuales debían resolver en su casa y discutirse en las sesiones posteriores. Cabe señalar que además se les proponía enviar por correo electrónico sus dudas e incomprensiones de cada actividad.

En el desarrollo del primer módulo, luego de ofrecer y discutir todos los temas establecidos, se procedió a asignar las actividades 1 y 2 a distancia, distribuidos de la siguiente manera:

**Actividad 1**, ecuaciones de primer grado (4 problemas propuestos), Ecuaciones cuadráticas (10 problemas propuestos); **actividad 2**, sistemas de ecuaciones (4 problemas propuestos y 2 problemas de aplicación a la economía). Aquí en estas dos actividades se espera que el estudiante pueda utilizar alrededor de unas 20 horas no presenciales.

Para el desarrollo del segundo módulo, además de aclararse alguna duda sobre las asignaciones anteriores y abordarse los diferentes temas se dejaron como trabajo no presencial dos actividades: en la **actividad 1** se propusieron tres problemas sobre valor numérico de expresiones algebraicas y seis de productos notables, para la **actividad 2** se asignaron ocho problemas de factorización y seis de racionalización de denominadores y numeradores; promoviendo alrededor de 25 horas no presenciales para los estudiantes.

Para complementar el desarrollo del módulo 3, se asignaron dos actividades: la **actividad 1** contenía 11 problemas de operaciones con expresiones algebraicas y

la **actividad 2** presentaba 6 problemas de aplicación y 4 sobre operaciones con fracciones algebraicas; para el desarrollo de estas actividades se estiman en 25 las horas no presenciales que serían utilizadas por los estudiantes.

En la complementación del módulo 4 fueron proporcionadas dos actividades: la primera contenía 5 problemas con leyes de los exponentes y tres con propiedades de las raíces; en la segunda actividad se dejaron 4 de aplicaciones de los logaritmos y tres de desigualdades lineales y cuadráticas. En este último módulo se requería por parte del participante unas 10 horas no presenciales. De esta manera fueron establecidas las ochenta horas no presenciales exigidas en la tercera fase o fase de ejecución del proyecto de intervención pedagógica.

## CONCLUSIONES

**Al culminar con este proyecto de intervención pedagógica se puede concluir que:**

1. Los proyectos de intervención pedagógica favorecen en gran medida la puesta en práctica de los conocimientos recibidos y nos llevan a discernir entre lo que se hace actualmente en las aulas, en el desarrollo del proceso educativo y lo que realmente exige la sociedad.
2. Para que un economista logre ser un profesional idóneo debe poseer unas buenas bases, en matemáticas básicas y aplicadas, ya que el manejo de algunos conceptos elementales de economía tales como: costo y beneficio, oferta y demandas así lo exigen.
3. En todos los niveles educativos, esencialmente premedia y media, se debe destacar la importancia de la aritmética, el álgebra, la geometría elemental y sus aplicaciones, ya que forman las bases para la consecución de todos los aprendizajes, matemáticos, posteriores.
4. El Ministerio de Educación y las Universidades debe crear políticas que favorezcan un cambio de actitud, de todos los entes responsables de garantizar una educación de calidad, para que se llegue a la formación de un individuo capaz de dar solución a los problemas latentes en la sociedad.

## RECOMENDACIONES

**Al terminar este proyecto de intervención pedagógica se recomienda:**

1. A las autoridades del Centro Regional Universitario de Coclé, ofrecer una orientación adecuada a todos los estudiantes que ingresan a las diferentes carreras y hacerles saber las competencias mínimas, en matemáticas, que deben tener para un mejor desenvolvimiento académico.
2. Brindar una capacitación obligatoria en las diferentes áreas de las matemáticas, a todo estudiante que pretenda ingresar en carreras que exigen una rigurosidad matemática, para de esta manera evitar la gran cantidad de reprobados y de estudiantes que abandonan los estudios superiores.
3. Aplicar los proyectos de intervención pedagógica a nivel de licenciaturas, y maestrías en las diferentes especialidades, ya que contribuyen a la formación a nivel superior en gran medida, debido a que se hace uso de todas las habilidades, destrezas y conocimientos adquiridos en cada una de ellas.
4. Las autoridades deben estar al tanto, sobre aquellos estudiantes que ingresan a las universidades, sin contar con las competencias necesarias y buscarles una opción, donde puedan asistir y solucionar sus dificultades para seguirse perfeccionando.

## BIBLIOGRAFÍA

ERNEST F. HEUSSLER, JR, RICHARD S, PAUL; MATEMÁTICAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA, C. SOCIALES Y DE LA VIDA. OCTAVA EDICIÓN, EDITORIAL PRENTICE HALL, MEXICO, 1997.

AURELIO J. BALDOR; ALGEBRA. PRIMERA EDICIÓN, EDITORIALCULTURAL, MEXICO, 2005.

AURELIO J. BALDOR; GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO; SEGUNDA EDICIÓN, EDITORIAL CULTURAL CENTROAMERICANA, ESPAÑA 1967.

RAYMOND A. BARNET; ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA. SEGUNDA EDICIÓN, EDITORIAL McGRAW-HILL, MEXICO, 1997.

STEWART, JAMES; CÁLCULO. TERCERA EDICIÓN, EDITORIAL INTERNATIONAL THOMSON, MEXICO, 1998.

ZOILA BENDIBURG, G; UBALDINO SANDOBAL M; MATEMATICA I LICEO. CUARTA EDICIÓN, EDITORIAL CRISOL, S.A, PANAMÁ 1988.

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ, TEMARIO PARA LA PRUEBA DE CONOCIMIENTOS GENERALES; AREA DE ADMINISTRACIÓN PÚBLICA Y ECONOMÍA. PANAMÁ, 2004.

EARL W, SWOKOSWSKI. CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. SEGUNDA EDICIÓN, EDITORIALIBEROAMERICA, MEXICO, 1989.

ROBERTO H, SAMPIERI; CARLOS F, COLLADO; PILAR B, LUCIO, METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN; PRIMERA EDICIÓN, EDITORIAL Mc Graw Hill, MEXICO, 1998.



# ANEXO

1. Nota de autorización de la práctica pedagógica
  
2. Nota del Docente, facilitador de la cátedra de Matemática, del grupo que recibió la capacitación y que certifica la culminación del seminario.
  
3. Lista de asistencia de los participantes
  
4. Nota del profesor de español que reviso el proyecto



**Universidad de Panamá**  
**Centro Regional Universitario de Coclé**  
*"Dr. Bernardo Lombardo"*



**DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO**

CRUCO-DIP N° 286-10

Penonomé, 29 de junio de 2010

Profesora  
Lelany Urriola  
Coordinadora de la Facultad de Economía  
C.R.U. de Coclé  
E. S. M.

Respetada Coordinadora.

Solicito, respetuosamente su anuencia para que el profesor Onel Tuñón A. con cédula n° 2-722-1807, participante del programa de Maestría en Docencia Superior realice el Seminario "Aplicaciones de la matemática en la Economía Ambiental".

Lo llevará a cabo del 26 de junio al 26 de julio de 2010; con el grupo de Primer año de la Licenciatura en Economía y Gestión Ambiental.

Agradezco el apoyo que le brinde al Profesor Tuñón.

Atentamente,

  
MAGISTRA CASILDA G. DE HERRERA  
COORDINADORA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

Copia: archivo  
CHyc



**Universidad de Panamá**  
Centro Regional Universitario de Coclé

Penonomé, 9 de septiembre de 2010.

Doctor  
Eduardo S. Barsallo V.  
Facilitador de la asignatura: Práctica Pedagógica Profesional.  
C. R. U. de Coclé  
E. S. M.

Respetado doctor saludos cordiales.

Respetuosamente me dirijo a usted, para notificarle, que la capacitación ofrecida por el estudiante de Maestría en Docencia Superior; Onel Tuñón Aizprúa, con cédula n° 2-722-1807, titulada "Aplicaciones de la matemática en la Economía Ambiental" se desarrolló satisfactoriamente, logrando que los estudiantes que participaron de la misma, adquirieran un mayor rendimiento académico a la hora de presentar las pruebas parciales y el semestral; así como también se notó una mejor disposición de los estudiantes para el logro de aprendizajes posteriores. Esta capacitación la llevó a cabo el participante, en el curso "Matemáticas para economía ambiental" que se imparte a estudiantes de primer año, de la Licenciatura en Economía y Gestión Ambiental del Centro Regional Universitario de Coclé.

Espero que la misiva cuente con la información requerida por usted.

Atentamente,

Nivia Gordón de Him.

Profesora Titular del Centro Regional Universitario de Coclé.

---

2010: Año del 75º Aniversario

Penonomé, Prov. de Coclé, República de Panamá  
Teléfonos: 997-9246\_9642 Fax: 997-8260





El Valle de Antón, 15 de octubre de 2010.

Dr. Eduardo Sergio Barsallo  
Centro Regional Universitario de Coclè  
E. S. M

Respetado Doctor Barsallo:

La misma tiene la finalidad comunicarle que Yo la profesora de Español Yulissa del C. Bonilla G. con cédula de de identidad personal 2-160-338 revisé el trabajo: Proyecto de Intervención Pedagógica titulado “Aplicaciones de la Matemática en Economía Ambiental” del participante Onel Tuñòn A. con cédula de identidad 2-722-1807.

Tengo 9 años de experiencia laboral y actualmente laboro en el Instituto Profesional y Técnico El Valle.

Sin más que agregar

Atentamente,



---

Yulissa del C. Bonilla G.