

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología

Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática

Clasificación de Superficies Compactas

Trabajo de grado presentado por
Alberto De Leones
8-895-223

Como requisito final para obtener
el título de Licenciado en Matemática

Área de Conocimiento: Topología

Supervisado por: Prof. Josué Ortiz

II Semestre 2016

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por darme una buena educación y darme su apoyo. A todos los profesores que me impartieron clases en la Universidad de Panamá y destacando al profesor Josue Ortiz por aceptar ser el director de esta tesis. Mil gracias.

Resumen

Esta tesis trata de la demostración completa del Teorema de Clasificación de Superficies Compactas y Conexas (al hablar de superficies en esta tesis siempre supondremos que es conexas). Para llegar a demostrar el teorema la tesis constara de tres capítulos, en donde aparecerá lo que necesitamos para su justificación. El primero, Espacios Cocientes y Superficies Compactas conocemos que espacio topológico estudiamos y como lo representaremos. En el segundo, Sumas Conexas y Triangulación explicamos como generamos más superficies y qué es una triangulación de un superficie. El tercero aborda la demostración del teorema y la característica de Euler.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
1. Espacios Cocientes y Superficies Compactas	1
1.1. Espacios Cocientes	1
1.2. Superficies Compactas	3
2. Sumas Conexas y Triangulación	9
2.1. Sumas Conexas	9
2.2. Grafos Planos	12
2.3. Triangulación de superficies compactas	14
3. Clasificación de Superficies Compactas	20
3.1. Teorema de Clasificación de Superficies Compactas	20
3.2. La característica de Euler de una Superficie	28
3.2.1. Independencia de $\chi(S, T)$ de la Triangulación Elegida T	28
Conclusiones	32
Bibliografía	34

Capítulo 1

Espacios Cocientes y Superficies Compactas

1.1. Espacios Cocientes

Para llegar a nuestro objetivo este primer capítulo es esencial conocerlo o recordarlo de nuestro curso de Topología General, los espacios cocientes o de identificación. Las sumas conexas son técnicas de "pegar" y "cortar" entre poligonos como ya veremos mas adelante.

Definición 1.1.1. Sea (X, Γ) un espacio topológico y sea σ una partición o descomposición de X . Formamos un nuevo espacio Y , llamado el espacio identificación -o cociente- como sigue. Los puntos de Y son los miembros de σ y si $f : X \rightarrow Y$ es la función cociente, la topología para Y es la mas grande para la cual f es continua, es decir, $U \subset Y$ es abierto, sii, $f^{-1}(U)$ es abierto en X . Esta topología se llama la topología identificación -o cociente-.

Pensemos en Y como esos subconjuntos de X que han sido identificados a un solo punto por medio de σ . Como cada partición σ genera una relación de equivalencia \mathfrak{R} , a Y también lo denotamos como $Y = X/\mathfrak{R}$.

Presentaremos unos teoremas importantes de los espacios cocientes. El siguiente teorema nos dice como conocer la continuidad para estos espacios identificación.

Teorema 1.1.2. Sean $Y = X/\mathfrak{R}$ un espacio de identificación y (Z, κ) un espacio topológico. Una función $q : X/\mathfrak{R} \rightarrow Z$ es continua, sii, $q \circ f$ es continua para $f : X \rightarrow X/\mathfrak{R}$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X/\mathfrak{R} \\ & \searrow q \circ f & \downarrow q \\ & & Z \end{array}$$

Demostración. Si f es continua, claramente $q \circ f$ también lo es. En el otro sentido, asumamos que $q \circ f$ es continua y sea $U \subset Z$ con $U \in \kappa$. Para ver que $q^{-1}(U)$ es un abierto de Y , debemos tener que $f^{-1}(q^{-1}(U))$ sea abierto de X , es decir, $(q \circ f)^{-1}(U)$ lo sea. \square

Dados $(X, \Gamma), (Y, \Theta)$ dos espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva, la colección

$$R_f := \{f^{-1}(y)\}, (y \in Y)$$

determina una partición en X . Si $x \in X$ es claro que la función cociente $q : X \rightarrow X/R_f$ satisface $q(x) = [x] = f^{-1}(f(x))$, luego la función $h_f : X/R_f \rightarrow Y$ definida como $h_f([x]) := f(x)$ o lo que es igual $h_f(f^{-1}(y)) = y$, esta bien definida y es una biyección,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & X/R_f \\ & \searrow f & \downarrow h_f \\ & & Y \end{array}$$

Teorema 1.1.3. *La función $h_f : X/R_f \rightarrow Y$ es continua.*

Demostración. Dado U un abierto de Y tenemos $h_f^{-1}(U) = q(f^{-1}(U))$ con lo cual,

$$q^{-1}(h_f^{-1}(U)) = q^{-1}(q(f^{-1}(U))) = f^{-1}(U)$$

y como $f^{-1}(U)$ es abierto en X , tenemos que $h_f^{-1}(U)$ es abierto en X/R_f por la definición de la topología cociente. \square

¿Cuándo h_f es un homeomorfismo?

Teorema 1.1.4. *Sean $(X, \Gamma), (Y, \Theta)$ dos espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Si f es abierta o cerrada entonces $h_f : X/R_f \rightarrow Y$ es un homeomorfismo.*

Las funciones cocientes $q : X \rightarrow X/R$ la podemos generalizar de la manera siguiente.

Definición 1.1.5. Sean $(X, \Gamma), (Y, \Theta)$ dos espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva. Si Y tiene la mejor topología para la cual f es continua, es decir,

$$\Theta = \Gamma_f^Y = \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \Gamma\}$$

decimos que f es una función identificación.

Claramente toda función cociente es una identificación y el siguiente teorema generaliza a 1.1.2

Teorema 1.1.6. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función identificación, entonces $g : Y \rightarrow Z$ es continua, sii, $g \circ f$ lo es.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

Teorema 1.1.7. Si $f : X \rightarrow Y$ una función identificación entonces $Y \approx X/R_f$ -homeomorfo-

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & X/R_f \\ & \searrow f & \downarrow \approx h_f \\ & & Y \end{array}$$

¿Cómo podemos reconocer a las identificaciones? Parte de las respuestas nos la da el siguiente teorema.

Teorema 1.1.8. Sea $f : (X, \Gamma) \rightarrow (Y, \Theta)$ una función continua y sobre. Si además f es abierta o cerrada, entonces f es una identificación.

Demostración. Debemos ver que $\Theta = \Gamma_f^Y$. Claramente $\Theta \subset \Gamma_f^Y$ por la definición Γ_f^Y . Para la otra contención sea $U \in \Gamma_f^Y$, esto es $f^{-1}(U)$ es abierto, luego $U = f(f^{-1}(U))$ es abierto en Θ , puesto que la función f es abierta y sobreyectiva. \square

Corolario 1.1.9. Sea $f : (X, \Gamma) \rightarrow (Y, \Theta)$ una función continua y sobre. Si además X es compacto y Y es de Hausdorff, entonces f es una identificación.

1.2. Superficies Compactas

Definición 1.2.1. Sea n un entero tal que $n \geq 0$. Una variedad n -dimensional, o brevemente n -variedad, es un espacio topológico X tal que es de Hausdorff y además verifica que cada punto $x \in X$ posee un entorno abierto homeomorfo a la bola n -dimensional unidad $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$.

Ejemplo 1.2.2. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n es obviamente un variedad n -dimensional. Podemos demostrar fácilmente que la esfera unidad de dimensión n

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

es una n -variedad. En efecto, para el punto $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$, el conjunto $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_1 > 0$ es un entorno con las propiedades exigidas, como puede verse por proyección ortogonal sobre el hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} definido por $x_1 = 0$. Para cualquier otro punto $x \in S^n$, existe una rotación que transforma x en el punto $(1, 0, 0, \dots, 0)$. Dicha rotación es un homeomorfismo de S^n sobre sí mismo; por tanto x tiene también un entorno del tipo deseado.

Ejemplo 1.2.3. Si M^n es una variedad n -dimensional, cualquier abierto de M^n es también una variedad n -dimensional.

Ejemplo 1.2.4. Si M es una variedad m -dimensional y N un variedad n -dimensional, el espacio producto $M \times N$ es una variedad $(m+n)$ -dimensional. Esto se sigue del hecho de que $U^m \times U^n$ es homeomorfo a U^{m+n} . Para demostrarlo observemos que, si k es un entero positivo cualquiera, U^k es homeomorfo a \mathbb{R}^k , y $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a \mathbb{R}^{m+n} .

Una n -variedad puede ser compacta o no compacta, conexa o no conexa, pero toda n -variedad X posee dos importantes propiedades: es localmente compacta y localmente arcoconexa, y por tanto, también es localmente conexa. Así, las arcoconexiones coinciden con las componentes y son abiertas y cerradas en X , luego estas arcoconexiones son también n -variedades. Debido a este hecho, lo habitual es estudiar únicamente n -variedades conexas, que serán, debido a la propiedad de arcoconexión local, también arcoconexas.

Por ejemplo el plano \mathbb{R}^2 y el cilindro abierto $S^1 \times (0, 1)$ son superficies no compactas. En cambio, notemos que el cilindro cerrado $S^1 \times [0, 1]$ no es 2-variedad, luego no puede ser superficie.

Definición 1.2.5. Llamaremos superficies a toda 2-variedad conexa.

Ejemplo 1.2.6. Una banda de Möbius es un espacio topológico que se define como sigue. Designemos por X el siguiente rectángulo del plano:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Formemos entonces el espacio cociente de X obtenido al identificar los puntos $(x, 0)$ y $(1 - x, 1)$, para $0 < x < 1$ obtenemos así una superficie no compacta.

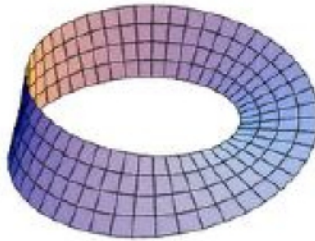


Figura 1.1: Banda de Möbius.

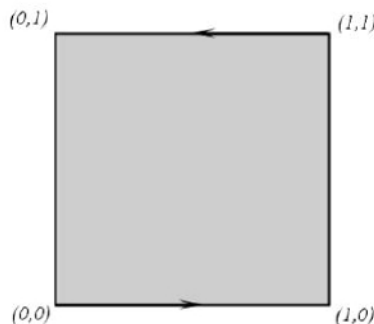


Figura 1.2: Espacio cociente. Banda de Möbius.

La banda de Möbius es una superficie no orientable: si se parte con una pareja de ejes perpendiculares orientados, al desplazarse paralelamente a lo largo de la cinta, se llegará al

punto de partida con la orientación invertida. Una persona que se deslizara "tumbada" sobre una banda de Möbius, mirando hacia la derecha, al recorrer una vuelta completa aparecerá mirando hacia la izquierda.

Veamos a continuación algunos ejemplos de superficies compactas utilizando su representación plana. Notemos el interés de esta representación para dichas superficies, ya que, en muchas ocasiones, es más sencillo manipular objetos sobre la región poligonal (o disco) que las representa.

Ejemplo 1.2.7. La esfera S^2 es una superficie compacta. Notemos que también podemos pensar topológicamente la esfera como el espacio obtenido de un disco $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ identificando adecuadamente los puntos del borde; es decir, $S^2 = D^2/\mathfrak{R}$ donde $(x, y)\mathfrak{R}(x, -y)$ para todo $(x, y) \in S^1$.

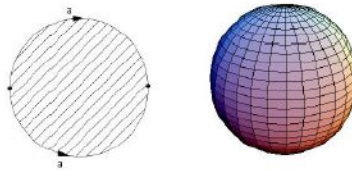


Figura 1.3: Esfera.

Ejemplo 1.2.8. El toro $T = S^1 \times S^1$ es una superficie compacta. Notemos que podemos obtener el toro a partir de un cuadrado I^2 identificando adecuadamente los puntos del borde; es decir, $T = I^2/\mathfrak{R}$, donde $(x, 0)\mathfrak{R}(x, 1)$, $(0, y)\mathfrak{R}(1, y)$, para todo $(x, y) \in I^2$.

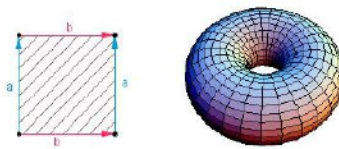


Figura 1.4: Toro.

Ejemplo 1.2.9. La botella de Klein. Las identificaciones son $(0, y)\mathfrak{R}(1, y)$, $(x, 0)\mathfrak{R}(1 - x, 1)$, donde como siempre $0 \leq x; y \leq 1$. Podemos visualizarlo como si primero pegáramos verticalmente para tener un cilindro, y luego pegáramos los bordes de éste "dándoles la vuelta". Las siguientes imágenes ayudan a entender esto.

Las circunferencias azules están mal orientadas para poder ser pegadas; hace falta pasar "a través" de la botella. En la tercera imagen empezamos a estirar el cilindro para ver esto más claro.

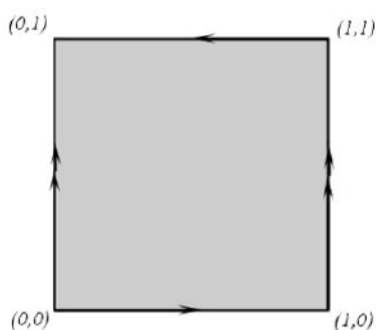


Figura 1.5:

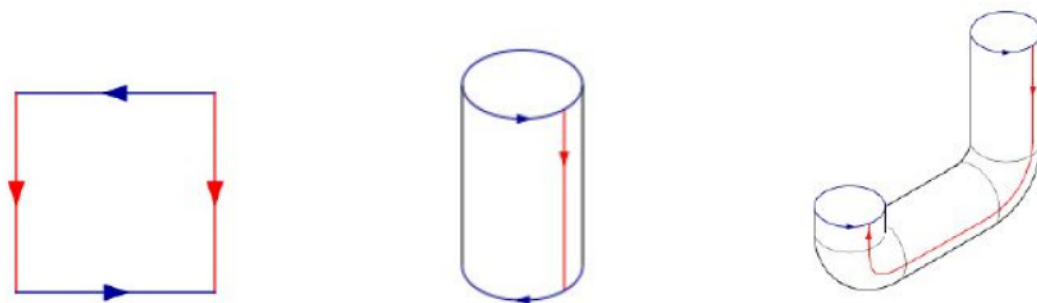


Figura 1.6:

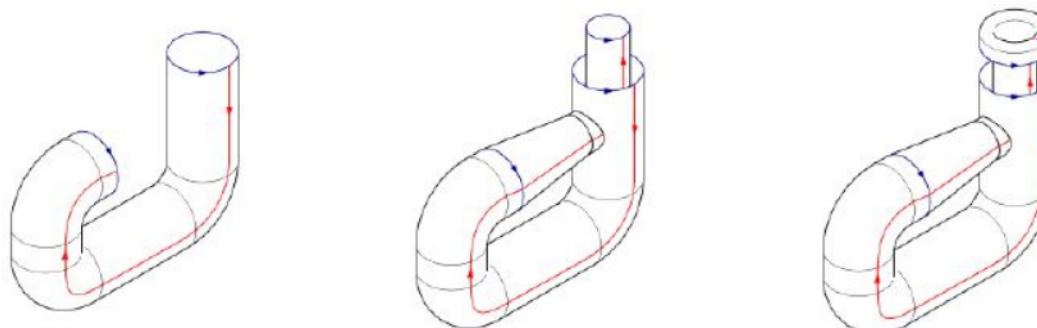


Figura 1.7:

Los tres pasos que faltan: el cuarto da continuidad a la descripción, en el quinto intentamos corregir la orientación de las circunferencias azules atravesando la botella, y en el último comenzamos la identificación que faltaba. Es muy importante darse cuenta de que, en contra de lo que nuestro dibujo tridimensional parece indicar, la botella de Klein NO TIENE AUTOINTERSECCIONES, ya que el espacio cociente no las tiene.

La botella de Klein puede describirse como dos bandas de Moebius cuyos bordes se identifican mediante un homeomorfismo $f : \partial B_1 = S^1 \rightarrow S^1 = \partial B_2$.

Ejemplo 1.2.10. El plano proyectivo se puede obtener también como cociente de la esfera unidad en \mathbb{R}^3 , $S^2 = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. De hecho, esta identificación nos permite

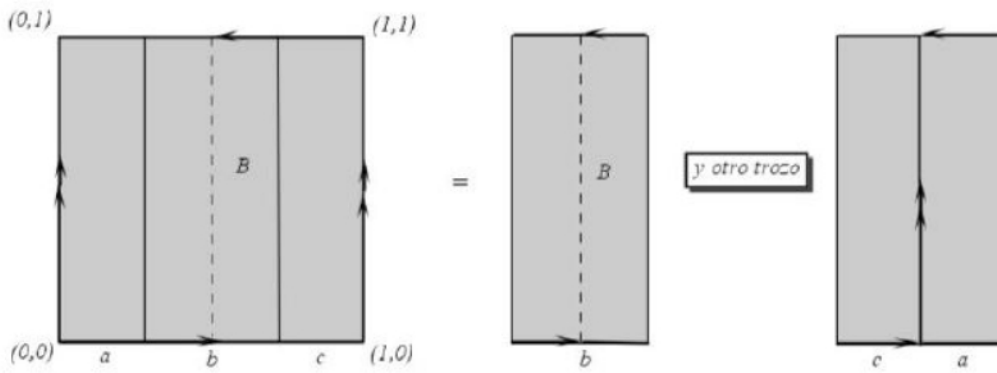


Figura 1.8:

comprobar que efectivamente coincide con el plano proyectivo real de geometría proyectiva.

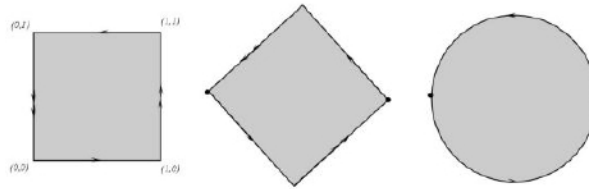


Figura 1.9:

Empezamos con el proyectivo obtenido como identificaciones en los bordes del cuadrado, y rotamos éste para darnos cuenta de que las identificaciones dadas dan un cociente homeomorfo al obtenido con un disco en el que identificaríamos puntos opuestos en el borde de éste.

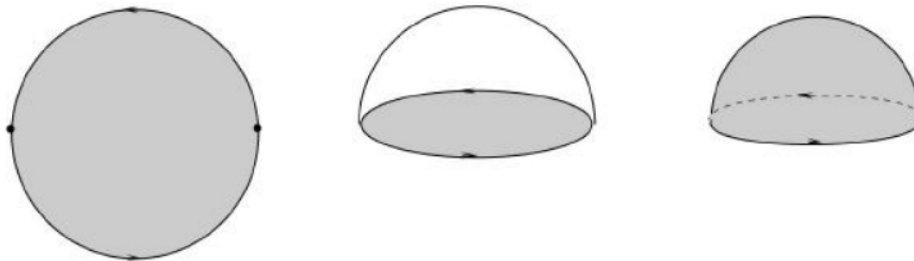


Figura 1.10:

Como ningún punto del interior del disco se identifica con nada diferente a sí mismo, el cociente indicado por el primer dibujo es equivalente al obtenido con el hemisferio superior de la esfera, en el que identificaríamos puntos opuestos en el ecuador.

Si añadimos el hemisferio sur (abierto) al dibujo, e identificamos puntos antipodales en toda la esfera, es fácil ver que se obtiene el espacio cociente precedente. Pero ésta es la identificación que se hacía originalmente para obtener el plano proyectivo real:

$$p, q \in S^2, p \sim q \Leftrightarrow p = q \vee p = -q$$

Capítulo 2

Sumas Conexas y Triangulación

2.1. Sumas Conexas

Indicaremos ahora cómo se pueden dar muchos más ejemplos de superficies compactas formando lo que se llaman sumas conexas. Sean S_1 y S_2 dos superficies disjuntas. Su *suma conexa*, designada por $S_1 \# S_2$, está formada practicando un pequeño agujero circular en cada superficie y pegando entonces las dos superficies a lo largo del borde de estos agujeros. Para ser precisos, escogemos subconjuntos $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$ tales que D_1 y D_2 sean discos cerrados (es decir, homeomorfos a E^2). Sea S'_i el complementario del interior de D_i en S_i , $i = 1, 2$. Escojamos un homeomorfismo h del círculo borde de D_2 . Entonces $S_1 \# S_2$ es el espacio cociente de $S'_1 \cup S'_2$ obtenido identificando los puntos x y $h(x)$, para todo x del borde de D_1 . Está claro que $S_1 \# S_2$ es una superficie. Parece natural, y puede ser demostrado rigurosamente, que el tipo topológico de $S_1 \# S_2$ no depende de la elección de los discos D_1 y D_2 , ni de la elección del homeomorfismo h .

Ejemplo 2.1.1. Si S_2 es una 2-esfera, entonces $S_1 \# S_2$ es homeomorfo a S_1 .

Ejemplo 2.1.2. Si S_1 y S_2 son dos toros, entonces $S_1 \# S_2$ es homeomorfo a la superficie de un bloque que tenga dos agujeros que lo perforen. (Se supone, desde luego, que los agujeros no están tan juntos que sus bordes se toquen o intersecten.)

Ejemplo 2.1.3. La suma conexa de dos planos proyectivos es una botella de Klein. Para probar esto por la técnica "cortar y pegar", como sigue. Si S_i es un plano proyectivo, y $D_i \subset S_i$ es un disco cerrado, entonces S'_i , complementario del interior de D_i , es homeomorfo a una banda de Moebius (incluido el borde). En efecto, si consideramos S_i como el espacio obtenido por identificación de los puntos diametralmente opuestos del borde del disco unidad E^2 en \mathbb{R}^2 , podemos elegir D_i como la imagen del conjunto $\{(x, y) \in E^2 \mid |y| \geq \frac{1}{2}\}$ por la identificación, y entonces queda clara la veracidad de la afirmación. De aquí se deduce que $S_1 \# S_2$ se obtiene pegando dos bandas de Möbius a lo largo de sus bordes.

De la operación suma conexa observamos que el ejemplo 2.1.1 muestra que la esfera es un elemento unidad o neutro, de esta operación. La suma conexa es asociativa y conmutativa. Lo

que no podemos encontrar es un elemento inverso para cada variedad, con lo que podemos decir que las clases de equivalencias de variedades homeomorfas junto con la operación suma conexa forman un semigrupo. La suma conexa de dos variedades es orientable si y sólo si lo son las dos variedades.

Ejemplo 2.1.4. Doble toro. Recordemos nuestra descripción de un toro como un cuadrado con los lados opuestos identificados (véase figura 1.4). Podemos obtener una descripción análoga de la suma conexa de dos toros, T_1 y T_2 , como un cuadrado con los lados opuestos identificados, tal como muestra la figura 2.1. Obsérvese que los cuatro vértices de cada cuadrado están identificados en un sólo punto del toro correspondiente. Para formar su suma conexa tenemos, primero, que recortar un agujero circular en cada toro, lo cual podemos hacerlo como mejor nos convenga. Es conveniente cortar las regiones sombreadas en los dia-

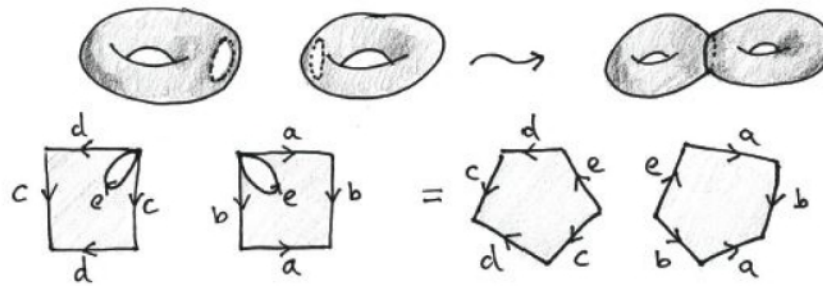


Figura 2.1:

gramas. Designemos por e los bordes de los agujeros, que están identificados tal y como indican las flechas.

Podemos representar también los complementarios de los agujeros en los dos toros por los pentágonos de la figura 2.1, ya que las identificaciones de las aristas indicadas implican que los dos extremos del segmento e están identificados. Identificamos, ahora, los segmentos e ; obtenemos el octógono de la figura 2.2, en el cual los lados están identificados a pares, tal como está indicado.

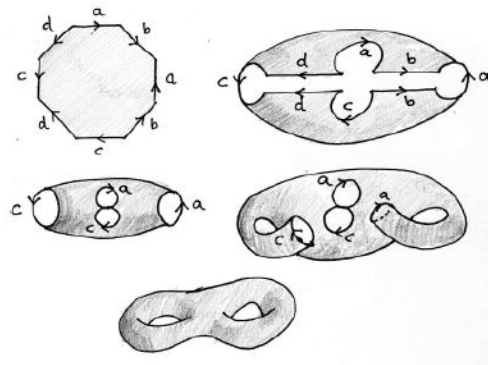


Figura 2.2:

Ejemplo 2.1.5. Estudiemos el procedimiento análogo para la suma conexa de planos proyectivos. Hemos considerado el plano proyectivo como el espacio cociente de un disco circular, al identificar los puntos diametralmente opuestos de su borde. Eligiendo un par de puntos de borde diametralmente opuestos como vértices, el círculo del disco queda dividido en dos segmentos. Así, podemos considerar el plano proyectivo como obtenido a partir de un polígono de dos lados al identificarlos. Las figuras 2.3 y 2.4 muestra cómo podemos obtener una representación de la suma conexa de dos planos proyectivos como un cuadrado con las aristas identificadas a pares.

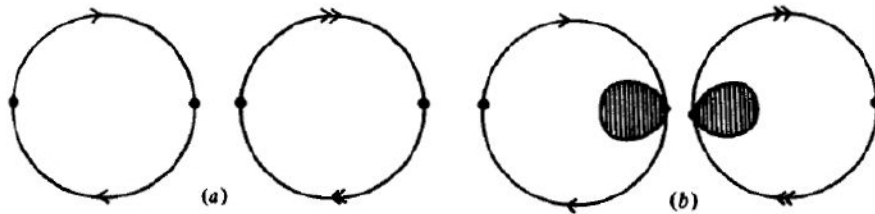


Figura 2.3:

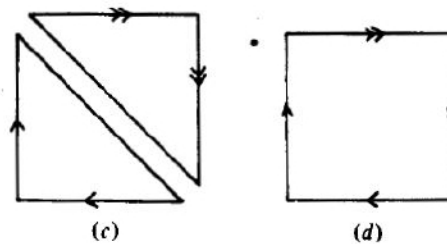


Figura 2.4:

Mediante una inducción bastante obvia, podemos probar que, para todo entero positivo n , la suma conexa de n planos proyectivos es el espacio cociente de un polígono de $2n$ lados con los lados identificados a pares, según un cierto esquema. De igual modo, la suma conexa de n toros es homeomorfa al espacio cociente de un polígono de $4n$ lados cuyas aristas están identificados a pares según un esquema, que se precisa.

Introduciremos ahora un método bastante obvio pero cómodo para indicar de manera precisa los pares de aristas identificados en uno de estos polígonos. consideremos el diagrama en el que está indicado cómo se identifican las aristas; partiendo de un vértice determinado, recorramos el borde del polígono, anotando una tras otra las letras asignadas a los diferentes lados. Si la flecha de un lado indica la misma dirección en que recorreremos el borde, entonces escribimos la letra de este lado sin exponente (o con exponente $+1$). Por otra parte, si la flecha indica la dirección contraria, entonces escribimos la letra de este lado con exponente

–1. Por ejemplo, el octógono de la figura 2.2, las identificaciones queda indicada de manera precisa por el símbolo.

$$aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$$

Empezamos en el vértice a del diagrama y recorremos su borde en el sentido de las agujas del reloj. Estos símbolos determinan sin ambigüedad las identificaciones; por otra parte, al escribir el símbolo correspondiente a un diagrama dado, podemos empezar por cualquier vértice y recorrer el borde tanto en el sentido de las agujas del reloj como en sentido contrario.

2.2. Grafos Planos

Esta sección es necesaria pues desarrolla dos teoremas que utilizaremos en la sección siguiente.

Sea V un conjunto, denotamos por $[V]^2$ el conjunto de subconjuntos $\{u, v\}$ tal que $u, v \in V$ y $u \neq v$.

Definición 2.2.1. Un grafo, G , es una terna (V, E, st) , donde V es un conjunto finito cuyos puntos llamaremos vértices, E es conjuntos cuyos elementos llamaremos aristas y $st : E \rightarrow [E]^2$ asigna a cada aristas $\{u, v\}$ dos vértices que llamaremos sus extremos. Dos aristas diferentes son paralelas si tienen sus mismos extremos. Se dice que G es simple si no tiene aristas paralelas. En este caso, denotaremos en ocasiones por uv el único lado con extremos u y v , si existe.

Un subgrafo de $G = (V, E, st)$, es un grafo $H = (V_H, E_H, st_H)$ tal que $V_H \subseteq V$, $E_H \subseteq E$ y st_H es la restricción de st a E_H .

En lo que sigue entenderemos que los grafos considerados son simples y denotaremos por $G - \{v\}$ al grafo obtenido al eliminar el vértice v del conjunto de vértices V y el conjunto de aristas incidentes con v del conjunto de aristas E .

Definición 2.2.2. Una cadena en un grafo G es una sucesión

$$\pi = (v_0, e_1, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$$

tal que e_i es una arista de G que no tiene como extremos $\{v_{i-1}, v - i\}$. Se dice que π une v_0 y v_n . Si $v_i \neq v_j$, para todo $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, decimos que π es un camino, y si $v_i \neq v_j$, para todo $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n - 1$ y $v_0 = v_n$ decimos que es un ciclo.

Definición 2.2.3. Un grafo, G , es conexo si para cualesquiera dos vértices de G hay un camino que los une. Decimos que G es 2-conexo si tiene como mínimo tres vértices y $G - \{v\}$ es conexo para cualquier vértice $v \in G$.

Teorema 2.2.4. Sea G un grafo 2-conexo. Entonces, para cualquier subgrafo H 2-conexo de G , el grafo G se puede construir a partir de H formando una sucesión de grafos 2-conexos, $G_0 = H, G_1, \dots, G_n = G$, tales que para $i = 0, \dots, n - 1$, G_{i+1} se obtiene de G_i añadiendo un camino de G el cual tiene solo sus extremos y ninguno de sus lados en G_i .

Demostración. Procederemos por inducción en el número de lados de G que no están en H . Si $G = H$ la demostración es trivial. Si $G \neq H$, se pueden dar dos casos:

1. Si $V = V_H$, sea H' el subgrafo 2-conexo obtenido al añadir a H un lado $e \in E - E_H$. Entonces, $|E - E'_H| < |E - E_H|$ y por hipótesis de inducción sobre H' tenemos el resultado.
2. Si $V \neq V_H$, como G es conexo debe de haber un lado e con extremos $\{u, v\}$ donde u está en V_H y v en $V - V_H$. Al ser G 2-conexo, entonces $G - \{u\}$ es conexo. Sea π un camino en $G - \{u\}$ de longitud mínima entre las que unen v con un vértice de H . Entonces el camino obtenido uniendo (u, e, v) y π tiene como extremos u y algún vértice de V_H , y el resto de sus vértices fuera de V_H . Sea H' el subgrafo 2-conexo obtenido al añadir a H dicho camino. Se tiene $|E - E'_H| < |E - E_H|$ y por hipótesis de inducción sobre H' tenemos el resultado.

□

Definición 2.2.5. Dado X espacio topológico, un grafo $G = (V, E, st)$ en X es un grafo tal que $V \subset X$ y cada arista de extremos u y v es una curva simple en X que une u y v , de forma que un mismo punto de X no puede pertenecer a dos aristas distintas salvo que sea un vértice común a ambas. Un grafo plano es un grafo en \mathbb{R}^2 .

Definición 2.2.6. Un isomorfismo entre dos grafos G_1 y G_2 , $f : G_1 \rightarrow G_2$, es un par (f_V, f_E) con $f_V : V_1 \rightarrow V_2$ y $f_E : E_1 \rightarrow E_2$ ambas biyecciones y tal que $st_1 = st_2 \circ f_E$.

Dado un grafo plano G , denotamos por $|G|$ al subconjunto de \mathbb{R}^2 que consiste en la unión de todos los vértices y aristas de G . $|G|$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 y su complementario, $\mathbb{R}^2 - |G|$, es un abierto de \mathbb{R}^2 , cuyas componente arco-conexas se llaman caras de G . Llamaremos borde de una cara a su frontera en \mathbb{R}^2 . La cara exterior de G es la única cara no acotada de G .

Definición 2.2.7. Un camino en \mathbb{R}^2 es un camino poligonal si su imagen es la unión de un número finito de segmentos de línea recta.

Observación 2.2.8. Es obvio que todo camino poligonal contiene a un camino poligonal simple con los mismos extremos.

Lema 2.2.9. Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^2 . Entonces dos puntos cualesquiera de Ω están unidos por un camino poligonal en Ω .

Lema 2.2.10. Dado un grafo plano G , existen un grafo plano G' con $V(G) = V(G')$ y tal que todas las aristas de G son caminos poligonales, y un homeomorfismo entre $|G|$ y $|G'|$ que es también un isomorfismo de grafos.

Teorema 2.2.11. Sea G un grafo plano 2-conexo y sea H un subgrafo 2-conexo de G . Entonces existen un grafo plano G' homeomorfo e isomorfo a G con $V(G) = V(G')$ y una sucesión de grafos planos 2-conexos, $G_0 = H, \dots, G_m = G'$, tal que para $i = 1, \dots, m-1$, G_{i+1} se obtiene de G_i añadiendo un camino poligonal el cual tiene solo sus extremos y ninguno de sus lados en G_i . Además el homeomorfismo deja H invariante.

Demostración. La prueba se hace por inducción como en el teorema 2.2.4, utilizando una representación plana con aristas poligonales (excepto en H), construida según el lema 2.2.10. \square

Teorema 2.2.12. *Sea G un grafo plano 2 – conexo. Entonces el borde de cada cara de G es un ciclo. Sea G' otro grafo plano y sea g un homeomorfismo de $|G|$ en $|G'|$ que es además isomorfismo de grafos, y tal que el borde de cada cara de G se aplica en el borde de alguna cara de G' , y el borde de la cara exterior de G se aplica en el borde de la cara exterior de G' . Entonces g se puede extender a un homeomorfismo del plano.*

Demostración. La primera afirmación se deduce del hecho de que si existiese alguna arista en G que solo perteneciera al borde de una cara, dicha arista no podría formar parte de ningún ciclo y por lo tanto G no sería 2 – conexo. Respecto a la segunda parte la probaremos por inducción en el número de lados de G , ya que si G es un ciclo entonces no hay más que usar el teorema de Jordan-Schönflies. Apliquemos la proposición 1.10 al grafo G , eligiendo como H el ciclo borde de su cara exterior. Se tiene entonces un grafo 2 – conexo G_{n-1} y un camino π tal que su única intersección con G_{n-1} son sus extremos y de forma que G se obtiene al añadir π a G_{n-1} . Obviamente, π debe estar contenido en alguna cara de G_{n-1} , cuyo borde será un ciclo C , y a la que π divide en dos caras, cuyos bordes son los dos subciclos de la unión de C y π . Además, debido a la elección de H , la cara exterior de G_{n-1} es la misma que la de G . Esta situación se traslada por el homeomorfismo g a G' , donde se tendrán un grafo G'_{n-1} de borde C' y un camino π' correspondientes por g a G_{n-1} , C y π . Aplicamos inducción a G_{n-1} y a los subciclos de la unión de C y π para extender las restricciones de g a homeomorfismos del plano. Estos homeomorfismos convenientemente restringidos y pegados producen el homeomorfismo buscado. \square

2.3. Triangulación de superficies compactas

Definición 2.3.1. Una triangulación de una superficie compacta S consiste en una familia finita de subconjuntos cerrados $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ que cubren S , y una familia de homeomorfismo $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i, i = 1, \dots, n$, donde T'_i es un triángulo del plano \mathbb{R}^2 (es decir, un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 limitados por tres rectas distintas). Los subconjuntos T_i se llaman $\langle\langle \text{tringulos} \rangle\rangle$. Los subconjuntos de T_i que son imágenes por φ_i de vértices y aristas del triángulo T'_i se llaman $\langle\langle \text{vrtices} \rangle\rangle$ y $\langle\langle \text{aristas} \rangle\rangle$ respectivamente. Finalmente se impone la condición de que dos triángulos distintos T_i y T_j o son distintos, o solo tienen un vértice común, o tienen toda arista común.

Si T es un triángulo y ∂T su frontera, su interior se obtiene como $\text{int}(T) = T - \partial T$. Además, se asume que la frontera ∂T posee orientación prefijada. Una superficie compacta siempre puede ser triangulizable. Para dar una demostración tuvimos que recurrir a unos teoremas esenciales de los grafos planos. Se hará mención de matemáticos en donde se ha sacado la demostración, que también han sido referenciados en escritos matemáticos, llámense estos artículos o trabajos de grado de otras personas para ellos demostrar este teorema.



Figura 2.5: Tres tipos no admisibles de intersecciones de triángulos.

El ingrediente más importante para la demostración que nos ocupa es, sin embargo, la siguiente versión fuerte del Teorema de la Curva de Jordan.

Teorema 2.3.2. (*Jordan-Schönflies*). Si $f : C \rightarrow C'^+$ es un homeomorfismo entre dos curvas cerradas simples C y C' en el plano, entonces f puede extenderse a un homeomorfismo de todo el plano.

Con lo anterior enfrentamos el resultado central de esta sección.

Teorema 2.3.3. *Toda superficie es triangulable.*

Demostración. Hemos adaptado la prueba de Thomassen [4] a nuestra presentación, con mayor despliegue de detalles. Sea S una superficie. Sabemos que para cada $p \in S$, existe un disco abierto D del plano que es homeomorfo a una vecindad abierta U de p en S mediante una parametrización $\psi : D \rightarrow U$.

En D es posible dibujar dos triángulos (cerrados) T_1 y T_2 tales que

$$p \in \text{int}(\psi(T_1)) \subset \text{int}(\psi(T_2))$$

Como S es compacta, existen un conjunto finito $\{p_1, \dots, p_n\}$ de puntos para los que se puede repetir la construcción anterior de tal suerte que

$$S = \bigcup_{k=1}^n \text{int}(\psi_k(T_{1k}))$$

No hay inconveniente alguno en suponer que los dominios D_1, \dots, D_n son fijos y disjuntos dos a dos en el plano. Lo que sí cambiaremos según convenga serán los homeomorfismos ψ_k , $1 \leq k \leq n$, sus correspondientes recorridos $U_k \subset S$ y los triángulos T_{1k} . En concreto, vamos a probar que los T_{11}, \dots, T_{1n} , resultantes de cierto procedimiento, producen el grafo buscado.

Basta con mostrar que cada subconjunto de dos elementos de

$$\{\partial\psi_1(T_{11}), \dots, \partial\psi_n(T_{1n})\}$$

, tiene intersección finita. En este caso, el grafo

$$G = \bigcup_{j=1}^n \text{int}(\partial\psi_j(T_{1j}))$$

tiene la propiedad de que cada componente conexo de $S - G$ está encerrado por un cierto camino cerrado (o ciclo) en G . Para cada ciclo C de estos se puede construir un polígono regular convexo plano P cuyos vértices se correspondan con los vértices de C . Luego de dividir los polígonos en triángulos equiláteros e identificar los lados que correspondan, se obtiene una superficie S' . En virtud del Teorema 2.3.2, S y S' son homeomorfas. La Figura 2.6 puede ayudar a comprender este proceso.

El argumento se realiza por inducción suponiendo que $T_{11}, \dots, T_{1(k-1)}$ han sido ya elegidos de tal forma que cada par de elementos de $\{\partial\psi_j(T_{1j}) : 1 \leq j \leq k-1\}$ tengan intersección finita en S . Si sigue teniendo intersección finita con aquellos, no hay nada que probar. Si $\psi_k(T_{1k})$ no, tiene infinitos puntos en común con alguno de ellos. Consideremos la relación de $\psi_k(T_{2k})$ con las imágenes respectivas de $T_{11}, \dots, T_{1(k-1)}$. Para ello, introducimos algunos conceptos útiles. Un segmento malo (en el sentido de Thomassen) de $\psi_j(T_{1j})$, $1 \leq j \leq k-1$ fijo, es

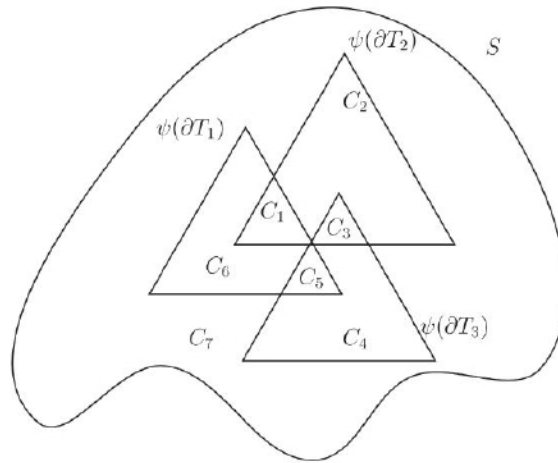


Figura 2.6: Las fronteras de los triángulos tienen intersección finita.

1. un segmento de $\psi_j(T_{1j})$ (es decir, la imagen bajo ψ_j de un segmento recto que une dos puntos de T_{1j} que, además,
2. une dos puntos de $\psi_k(\partial T_{2k})$ de tal suerte que todos los puntos restantes yacen en $int(\psi_k(T_{2k}))$.

Un segmento pésimo (en el sentido de Thomassen) de $\psi_j(T_{1j})$, $1 \leq j \leq k-1$ fijo, es

1. un segmento malo de $\psi_j(T_{1j})$, tal que
2. existe un triángulo $\psi_k(T_{3k})$ entre $\psi_k(T_{1k})$ y $\psi_k(T_{2k})$ que lo interseca, pero no interseca a ningún otro segmento malo de $\psi_j(T_{1j})$.

La Figura 2.7 sugiere la situación; en ella, los segmentos son rectos para facilitar el entendimiento. Al recorrer $1 \leq j \leq k-1$, se encuentra que el conjunto total de segmentos malos

puede ser infinito, mientras que el conjunto de segmentos pésimos es siempre finito. También, luego de recorrer los triángulos $T_{11}, \dots, T_{1(k-l)}$, se halla una región $\psi_k(V_{3k})$, encerrada por una curva poligonal cerrada simple, en $\text{int}(\psi_k(T_{2k}))$ tal que $\text{int}\psi_k(T_{1k}) \subseteq \psi_k(V_{3k})$. Dicha

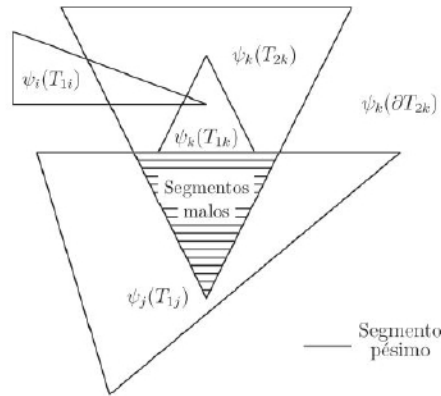


Figura 2.7: Segmentos malos y pésimos.

curva $\partial\psi_k(V_{3k})$ interseca los segmentos pésimos pero no interseca los demás segmentos malos.

La unión de los segmentos pésimos con $\partial\psi_k(T_{2k})$ forma un grafo 2-conexo Γ . Por el teorema 2.2.4, podemos reconstruir copias de Γ dentro de $\psi_k(T_{2k})$ para obtener grafos Γ' (isomorfos planos con Γ , cuyos lados son arcos poligonales simples). Ahora aplicamos el teorema 2.2.12 para extender el isomorfismo plano de Γ sobre cierto Γ' en un homeomorfismo de $\psi_k(T_{2k})$ que deja fijo a $\partial\psi_k(T_{2k})$, v. Figura 2.8. Mediante este homeomorfismo, $\psi_k(T_{1k})$ y $\psi_k(V_{3k})$ se

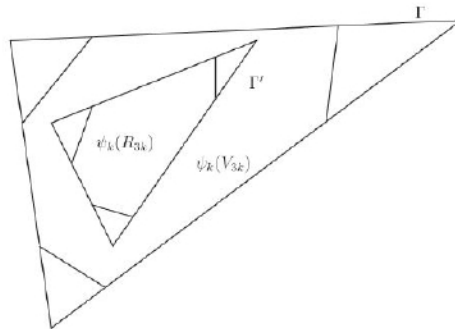


Figura 2.8: Remoción de los segmentos pésimos.

convierten en regiones $\psi_k(R_{1k})$ y $\psi_k(R_{3k})$, encerradas por curvas cerradas simples. También, se tiene que $p_k \in \text{int}(\psi_k(R_{1k})) \subseteq \text{int}(\psi_k(R_{3k}))$. Para terminar el proceso inductivo, se toma (una parte triangular) de $\psi_k(R_{3k})$ en lugar de $\psi_k(T_{1k})$. Con esto, los subconjuntos binarios de $\{\psi_k(\partial T_{11}), \dots, \psi_k(\partial T_{1k})\}$ tienen intersección finita. \square

Ejemplo 2.3.4. La superficie de un tetraedro regular es homeomorfa a la esfera S^2 . De este modo, una triangulación, que llamaremos T_1 , de la esfera S^2 es:

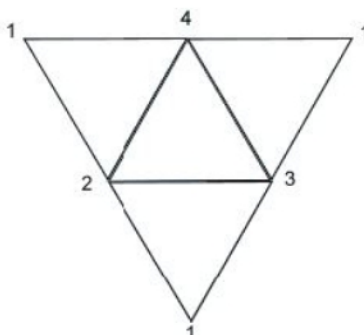


Figura 2.9:

Los vértices son numerados del 1 al 4, y sus triángulos son:

123 134
124 234

Ejemplo 2.3.5. A continuación mostraremos una triangulación T_2 del plano proyectivo real 2-dimensional ($P_{\mathbb{R}}^2$) considerado como el espacio cociente D_2 obtenido al identificar los puntos opuestos diametralmente en el borde del disco D_2 .

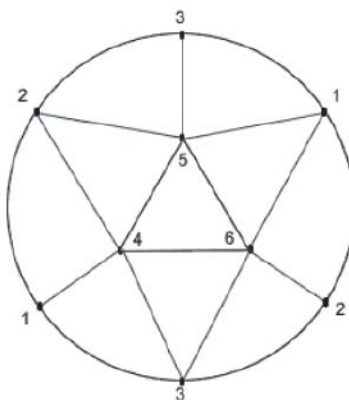


Figura 2.10:

Los vértices son numerados del 1 al 6 y sus triángulos son:

124	245
235	135
156	126
236	346
134	456

Ejemplo 2.3.6. Mostraremos una triangulación T_3 del toro ($S^1 \times S^1$) considerado como el espacio cociente de $I \times I$ ($I = [0, 1]$) obtenido al identificar los puntos de los lados opuestos. Hay 9 vértices y los siguientes 18 triángulos:

124	245	235
356	361	146
457	578	658
689	649	479
187	128	289
239	379	137

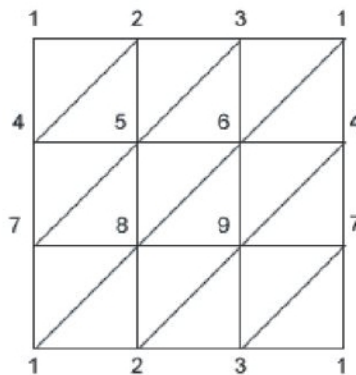


Figura 2.11:

Capítulo 3

Clasificación de Superficies Compactas

3.1. Teorema de Clasificación de Superficies Compactas

Una superficie triangulada puede considerarse como construida soldando de una cierta forma los distintos triángulos, algo parecido a reconstruir un puzzle o a construir una pared de ladrillos. Puesto que dos triángulos distintos no pueden tener los mismos vértices podemos determinar completamente una triangulación de una superficie enumerando los vértices y especificando qué terna de vértices son vértices de un triángulo. Una tal lista de triángulos determina completamente la superficie junto con la triangulación dada, salvo un homeomorfismo.

Teorema 3.1.1. *Toda superficie compacta es homomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.*

Demostración. Sea S una superficie compacta. Demostraremos el teorema, probando que S es homomorfa a un polígono con las aristas identificadas a pares, según alguno de los símbolos de la lista dada al final de la sección 2.1.

Primer paso. Por lo dicho en la sección 2.3, podemos suponer que S es triangulable. Designemos por n el número de triángulos. Podemos enumerar los triángulos T_1, T_2, \dots, T_n , de manera que el triángulo T_i tenga una arista e_i común con uno, al menos, de los triángulos, T_1, \dots, T_{i-1} , $2 \leq i \leq n$. Para demostrarlo, llamemos T_1 a uno cualquiera de los triángulos; elegimos como T_2 cualquier triángulo que tenga alguna arista común con T_1 , como T_3 cualquier triángulo que tenga una arista común con T_1 o con T_2 , etc. Si en algún punto no pudiéramos continuar este proceso, entonces tendríamos dos conjuntos de triángulos $\{T_1, \dots, T_k\}$ y $\{T_{k+1}, \dots, T_n\}$ tales que ningún triángulo del primer conjunto tendría una arista o vértice común con ningún triángulo del segundo conjunto. Pero esto daría una partición de S en dos conjuntos y no vacíos, en contra de la hipótesis de que S es conexa. Utilizamos a ahora esta ordenación de los triángulos T_1, T_2, \dots, T_n , junto con la elección de aristas e_2, e_3, \dots, e_n , para construir, en el plano euclídeo, un $\langle\langle \text{modelo} \rangle\rangle$ de la superficie S ; este modelo será un polígono cuyos lados estén identificados a pares. Recordemos que, para cada triángulo T_i , existe un triángulo euclídeo ordinario T'_i en \mathbb{R}^2 y un homomorfismo φ_i de T'_i sobre T_i . Podemos

suponer que los triángulos T'_1, T'_2, \dots, T'_n son disjuntos dos a dos; si no lo fueran podríamos trasladar algunos de ellos a otras partes del plano \mathbb{R}^2 . Sea

$$T' = \bigcup_{j=1}^n T_j$$

; entonces T' es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 . Definimos una aplicación $\varphi : T' \rightarrow S$ por $\varphi|_{T'_i} = \varphi_i$; la aplicación φ obviamente continua y exhaustiva. Puesto que T' es compacto y S es un espacio de Hausdorff, φ es una aplicación cerrada y, por tanto, S tiene la topología cociente determinada por φ . Éste es el enunciado preciso de nuestra idea intuitiva de que S se obtiene pegando los triángulos a lo largo de aristas apropiadas. El polígono que deseamos lo construiremos como un espacio cociente de T' . Consideremos una arista cualquiera de las e_i , $2 \leq i \leq n$. Por hipótesis, e_i es una arista del triángulo T_i y de otro triángulo T_j con $1 \leq j < n$. Por tanto, $\varphi^{-1}(e_i)$ consta de una arista del triángulo T'_i y una arista del triángulo T'_j . Identifiquemos estas dos aristas de los triángulos T'_i y T'_j , identificando aquellos puntos que se aplican por φ en un mismo punto e_i (intuitivamente hablando, pegamos los triángulos T'_i y T'_j). Hacemos estas dos identificaciones para cada una de las aristas e_2, e_3, \dots, e_n . Designemos por D el espacio cociente de T' así obtenido. Está claro que la aplicación $\varphi : T' \rightarrow S$ induce una aplicación ψ de D sobre S , y que S tiene la topología cociente inducida por ψ (ya que al ser D compacto y S de Hausdorff, ψ es una aplicación cerrada). Veamos que D es topológicamente equivalente a un disco cerrado. La demostración depende de los dos hechos siguientes:

1. Sean E_1 y E_2 espacio disjuntos, topológicamente equivalentes a discos cerrados (es decir, homeomorfos a E^2). Sean A_1 y A_2 subconjuntos del borde de E_1 y E_2 , respectivamente, que sean homeomorfos al intervalo cerrado $[0, 1]$, y $h : A_1 \rightarrow A_2$ un homeomorfismo determinado. Formemos un espacio cociente de $E_1 \cup E_2$ identificando los puntos que se corresponden por h . Entonces el espacio cociente es también topológicamente equivalente a un disco. Intuitivamente esto significa que si pegamos dos discos a lo largo de un segmento común de sus fronteras, obtenemos de nuevo un disco.
2. Al formar el espacio cociente D de T' podemos hacer todas las identificaciones a la vez, o bien hacer primero la identificación correspondiente a e_2 , luego la correspondencia a e_3 , etc., sucesivamente.

Haciendo uso de estas dos consideraciones probaremos ahora que D es un disco, de la siguiente manera: T'_1 y T'_2 son topológicamente equivalentes a discos. Por tanto, el espacio cociente de $T'_1 \cup T'_2$ obtenido al identificar puntos de $\varphi^{-1}(e_2)$ es nuevamente un disco, según (1). Formamos un espacio cociente de la unión de este disco y T'_3 haciendo las identificaciones correspondientes a la arista e_3 , etc. Es claro que S se obtiene a partir de D identificando ciertos pares de aristas del borde de D .

Ejemplo 3.1.2. La figura 3.1 muestra un ejemplo fácil de ver. Hemos triangulado la superficie de un cubo, dividiendo cada cara en dos triángulos mediante una diagonal. El disco D que resulta puede considerarse como el diagrama de la figura 3.2; depende, desde luego, de cómo hayamos numerado los triángulos y de cómo hayamos escogido las aristas e_2, \dots, e_{12} . Hemos

indicado, en la forma usual, las aristas de D que hay que identificar. Una vez hecho esto, podemos olvidarnos de las aristas e_2, e_2, \dots, e_{12} . Así, en lugar de trabajar con el polígono de la figura 3.1, podemos hacerlo igualmente bien con el de la figura 3.2.

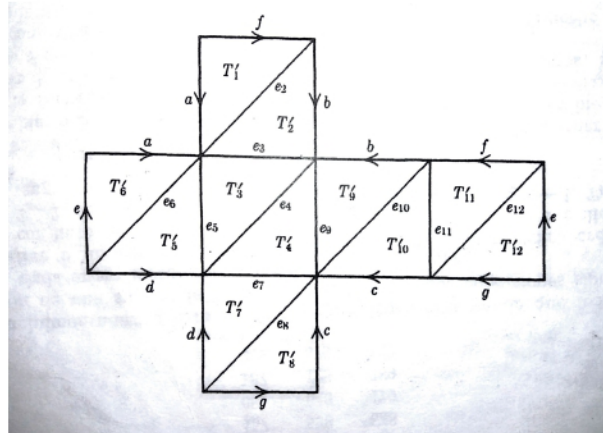


Figura 3.1: Ejemplo que ilustra el primer paso de la demostración del teorema 3.1.1

Segundo paso. Eliminación de aristas adyacentes de primera especie. Hemos obtenido un polígono D tal que la superficie dada S resulta al identificar a pares las aristas de D . Podemos indicar estas identificaciones con los símbolos apropiados; por ejemplo, las identificaciones de la figura 3.2 pueden indicarse mediante

$$aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e.$$

Si la letra que indica un cierto par de aristas aparecen en el símbolo con los dos exponentes $+1$ y -1 , entonces decimos que este par de aristas es de *primera especie*; de lo contrario, el par es de *segunda especie*. Por ejemplo, en la figura 3.2, los siete pares son de primera especie.

Vamos a mostrar que podemos eliminar un par de aristas adyacentes de primera especie, supuesto que el polígono tenga por lo menos cuatro aristas. Este proceso queda fácilmente reflejado en la sucesión de diagramas de la figura 3.3. Podemos continuar este proceso hasta que hayan sido eliminados todos los pares de este tipo, o hasta que obtengamos un polígono con sólo dos lados. En el último caso, este polígono, cuyo símbolo será aa o aa^{-1} , será un plano proyectivo o una esfera, y ya habremos acabado la demostración. En caso contrario procedemos de la siguiente manera.

Tercer paso. Transformación en un polígono tal que todos los vértices estén identificados a uno solo. A pesar de que las aristas de nuestro polígono han de estar identificadas a pares, los vértices pueden estar identificados en un conjuntos de uno, dos, tres, cuatro, Diremos que dos vértices del polígono son *equivalentes* si y sólo si están identificados. Por ejemplo, el lector puede comprobar fácilmente que en la figura 3.2 hay ocho clases de equivalencias de

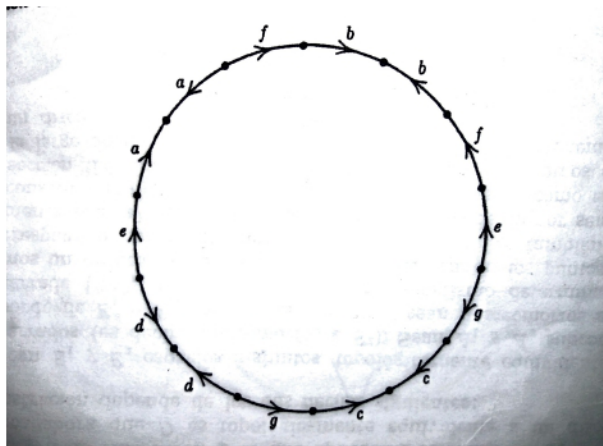


Figura 3.2: Versión simplificada del polígono de la figura 3.1

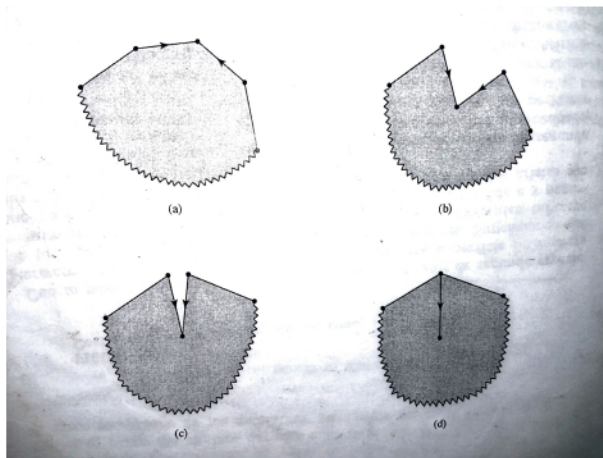


Figura 3.3: Eliminación de un par de aristas adyacentes de primera especie.

vértices distintas. Algunas clases de equivalencias contienen sólo un vértice, mientras otras contienen dos o tres vértices. Supongamos que hemos llevado a cabo el segundo paso tantas veces como ha sido posible. Queremos demostrar que podemos transformar nuestro polígono en otro tal que todos los vértices pertenezcan a una sola clase de equivalencia.

Supongamos que por lo menos hay dos clases de equivalencia distintas. Entonces existen un par de vértices adyacentes del polígono que no son equivalentes. Designemos a estos vértices por P y Q . La figura 3.4 muestra cómo debemos proceder. Puesto que P y Q no son equivalentes y hemos realizado ya el segundo paso, los lados a y b no pueden estar identificados. Cortemos a lo largo de la línea c , desde el vértice Q hasta el otro vértice de la arista a (es decir, hasta el vértice de la arista a distinto de P). Entonces pegamos las dos aristas designadas por a . Resulta así un nuevo polígono con un vértice menos en la clase de equivalencia de P y uno más en la de Q . Si es posible, realizamos de nuevo el segundo paso. Entonces, llevamos a cabo, otra vez, el tercer paso para reducir el número de vértices de la clase de equivalencia de P , y volvemos a realizar el segundo paso. Vamos alternando el tercero y se-

gundo pasos hasta que la clase de equivalencia de P sea totalmente eliminada. Si quedan a un más de una clase de equivalencia de vértices, repetimos este proceso para reducir su número. Si continuamos así, obtenemos finalmente un polígono con todos los vértices identificados a uno solo.

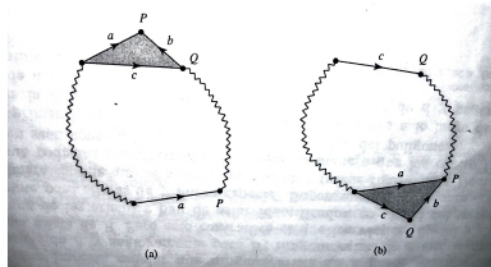


Figura 3.4: Tercer paso en la demostración del teorema 3.1.1.

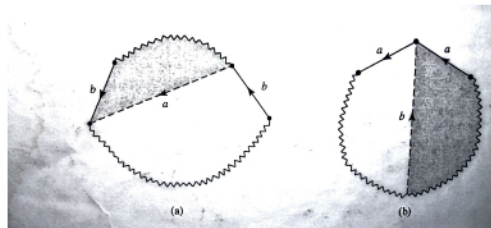


Figura 3.5: Cuarto paso en la demostración del teorema 3.1.1.

Cuarto paso. Cómo hacer adyacentes todo par de aristas de segunda especie. Queremos demostrar que podemos transformar nuestra superficie de manera que todo par de aristas de segunda especie sean adyacentes. Supongamos que tenemos un par de aristas de segunda especie que no sean adyacentes, tal como muestra la figura 3.5 (a). Cortemos a lo largo de la línea punteada a y peguemos a lo largo de b . Tal como muestra la figura 3.5 (b), las dos aristas son ahora adyacentes.

Continuamos este proceso hasta que todos los pares de aristas de segunda especie sean adyacentes. Si no hay pares de primera especie ya hemos acabado, puesto que el símbolo del polígono será de la forma $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$, y por tanto la superficie es la suma conexa de n planos proyectivos. Supongamos, por el contrario, que en este punto de la reducción hay al menos un par de aristas de primera especie; designémosla con la letra c . Afirmamos entonces que por lo menos hay otro par de aristas de primera especie tal que estos dos pares se separan uno al otro; es decir, al recorrer el borde del polígono las aristas de estos dos pares aparecen alternativamente (por tanto, el símbolo será de la forma $c \dots d \dots c^{-1} \dots d^{-1} \dots$, donde los puntos indican otras letras posibles).

Para probar esto, supongamos que las aristas c no están separadas por ningún otro par de aristas de primera especie. Entonces, nuestro polígono tendría un aspecto como el de la figura

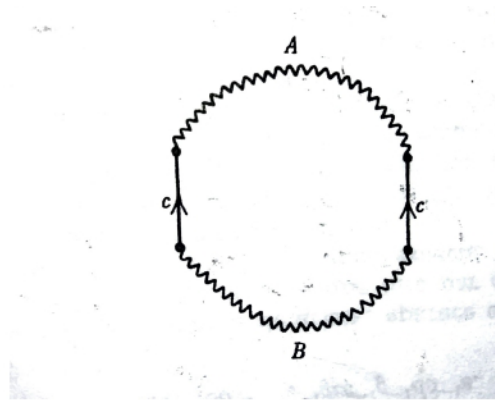


Figura 3.6: Un par de aristas de primera especie.

3.6, donde A y B designan sendas sucesiones de aristas. Importa señalar que ninguna arista de A puede identificarse con otra arista de A , y análogamente para B ; ninguna arista de A está identificada con otra arista de B . Pero esto contradice el que los vértices inicial y final de cada una de las aristas c han de estar identificados, en virtud del tercer paso.

Quinto paso. Pares de primera especie. Supongamos que tenemos dos pares de primera especie que se separan uno al otro (véase figura 3.7). Demostraremos que podemos transformar el polígono de manera que los cuatro lados en cuestión sean consecutivos a lo largo del perímetro del polígono.

En primer lugar, cortamos a lo largo de c y pegamos a lo largo de b , para obtener la figura 3.7 (b). Después cortamos a lo largo de d y pegamos a lo largo de a para obtener (c) como deseábamos.

Continuamos este proceso hasta que todos los pares de primera especie estén en grupos

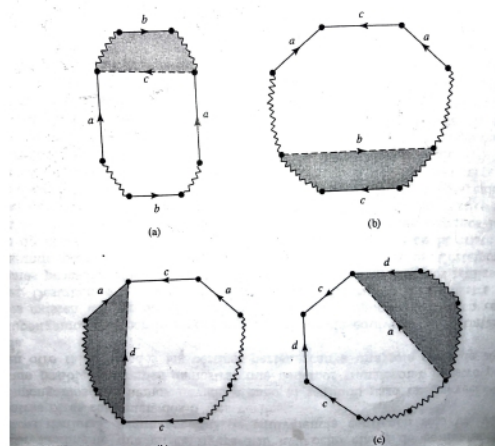


Figura 3.7: Quinto paso en la demostración de teorema 3.1.1.

adyacentes de cuatro aristas, tal como el $cdc^{-1}d^{-1}$ de la figura 3.7 (c). Si no hay pares de

segunda especie, tenemos ya el resultado buscado porque, en tal caso, el símbolo será de la forma

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

y la superficie es la suma conexa de n toros.

Falta, pues, considerar el caso en que, después de cinco pasos, haya pares de aristas de primera y segunda especie simultáneamente. El siguiente lema, bastante sorprendente, nos resuelve la situación.

Lema 3.1.3. *La suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de tres planos .*

Demostración. Hemos observado ya que la suma conexa de dos planos proyectivo es homeomorfa a la botella de Klein. Tenemos, pues, que probar que la suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de un plano proyectivo y una botella de Klein. Para ello será conveniente dar una nueva construcción de la suma conexa de una superficie S y un toro o una botella de Klein. Podemos representar el toro y la botella de Klein como rectángulos con los lados opuestos identificados, tal como muestra la figura 3.8. Para formar la suma conexa recortamos primero el disco sombreado en los diagramas, recortamos un disco análogo en S , y pegamos el borde del agujero del toro o de la botella de Klein con el borde del agujero S . Sin embargo, en lugar de

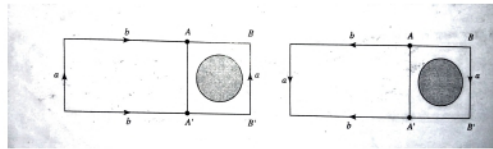


Figura 3.8: (a) Toro con agujero. (b) Botella de Klein con agujero.

pegar el toro o la botella de Klein completos de una vez, lo hacemos en dos pasos: primero, pegamos la parte del toro o de la botella de Klein que es imagen del rectángulo $ABB'A'$ por la identificación, y después, pegamos el resto del toro o botella de Klein. En el primer paso hemos formado la suma conexa de la superficie S con un tubo abierto o cilindro. Un tubo abierto o cilindro es homeomorfo a la esfera con dos agujeros, y como al formar la suma conexa de S con una esfera no cambia nada, el espacio que se obtendrá después del primer paso, será homeomorfo a la superficie original S con dos agujeros. En el segundo paso, conectaremos los bordes de estos dos agujeros con un tubo que es el resto del toro o de la botella de Klein. La diferencia entre los dos casos radica en que una vez se han conectado los bordes con la misma orientación, y la otra con orientaciones opuestas. La figura 3.9, en la que S es una banda de Möbius, ilustra la situación.

Afirmamos ahora que los dos espacios de la figura 3.9 (a) y (b) (esto es, la suma conexa de una banda de Möbius con un toro y con una botella de Klein) son homeomorfos. Para verlo, imaginemos que cortamos cada uno de estos espacios topológicos a lo largo de las líneas AB . En cada caso se obtiene la suma conexa de un rectángulo y un toro, con los dos extremos del

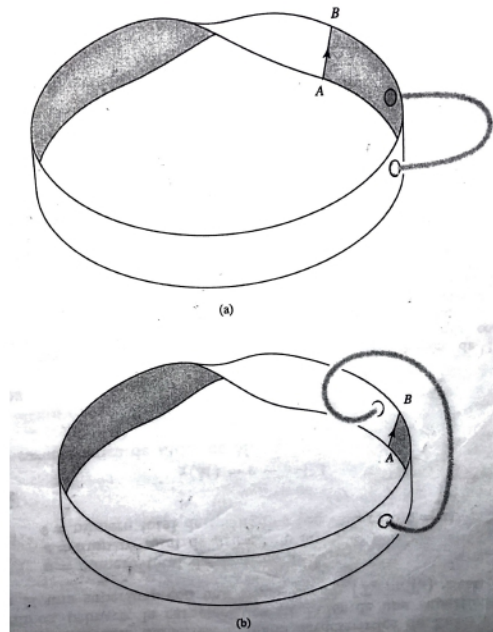


Figura 3.9: (a) Suma conexa de una banda de Möbius y un toro. (b) Suma conexa de una banda de Möbius y una botella de Klein.

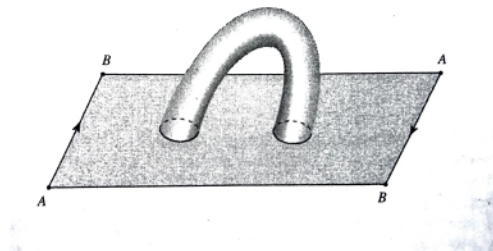


Figura 3.10: Resultado de cortar los espacios de la figura 3.9 a lo largo de la línea AB .

rectángulo identificados en sentidos opuestos, tal como muestra la figura 3.10. Por tanto, los dos espacios son homeorfos.

Tal como hemos dicho anteriormente, el plano proyectivo puede obtenerse pegando el borde en un disco al borde de una banda de Möbius. Puesto que los espacios de la figura 3.9 son homeomorfos, también son los espacios resultantes al pegar un disco al borde de cada uno de ellos. Así, la suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de un plano proyectivo y una botella de Klein, como queríamos demostrar. \square

Es inmediato que este lema resuelve el caso que nos quedaba. En efecto, supongamos que después de haber realizado el quinto paso, el polígono tiene m pares ($m > 0$) de segunda especie, tales que las dos aristas de cada par son adyacentes, y n cuaternas ($n > 0$) de lados, cada una de ellas formada por dos pares de primera especie que se separan uno al otro. Entonces, la superficie es la suma conexa de m planos proyectivos y n toros, que por el lema

anterior es homeomorfa a la suma conexas de $m + 2n$ planos proyectivos. Esto completa la demostración de teorema 3.1.1. \square

3.2. La característica de Euler de una Superficie

Sea S una superficie compacta con triangulación $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. Sean

- v = número total de vértices de (S, T) ,
- e = número total de aristas de (S, T) ,
- t = número total de triángulos (S, T) .

La característica de Euler de (S, T) , denotada por $\chi(S, T)$, es

$$\chi(S, T) = v - e + t.$$

De los ejemplos 2.3.4, 2.3.5 y 2.3.6 se puede verificar que: $\chi(S^2, T_1) = 2$, $(P_{\mathbb{R}}^2, T_2) = 1$ y $(S^1 \times S^1, T_3) = 0$.

3.2.1. Independencia de $\chi(S, T)$ de la Triangulación Elegida T

Consideremos la siguiente triangulación T_4 de $P_{\mathbb{R}}^2$.

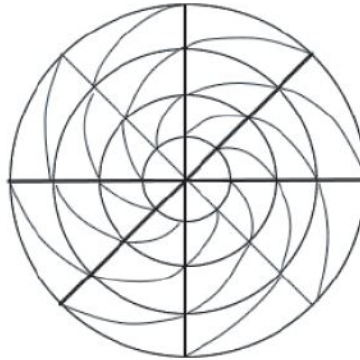


Figura 3.11:

Esta triangulación es distinta a la dada en el ejemplo 2.3.5, sin embargo se puede verificar que $(P_{\mathbb{R}}^2, T_4) = 1$. Esto no es una mera coincidencia, mostraremos que dada una superficie compacta S la (S, T) no depende de la triangulación T elegida. Comenzaremos dando algunas definiciones y proposiciones útiles en dicha prueba.

Definición 3.2.1. Sea S una superficie compacta. Sea \mathfrak{S} la colección de todas las triangulaciones de S . Sean $T_{\alpha}, T_{\beta} \in \mathfrak{S}$ tales que

$$T_{\alpha} = \{T_{\alpha 1}, T_{\alpha 2}, \dots, T_{\alpha n}\},$$

$$T_\beta = \{T_{\beta_1}, T_{\beta_2}, \dots, T_{\beta_n}\}.$$

Si para cada j , con $j = 1, 2, \dots, n$, se tiene que

$$T_{\alpha_j} = \bigcup_{i \in B} T_{\beta_i}$$

para algún

$$B \subset \{1, 2, \dots, m\}$$

se dice que T_α es menor que T_β . Esto se denota por $T_\alpha < T_\beta$.

Definición 3.2.2. Sean P_1, P_2, \dots, P_n una sucesión de n puntos distintos del plano \mathbb{R}^2 con $n \geq 3$. Supongamos que los segmentos $L_i = \overline{P_i P_{i+1}}$, $i = 1, \dots, n-1$, y $L_n = \overline{P_n P_1}$ tienen las siguientes propiedades:

1. $L_i \cap L_{i+1} = P_{i+1}$ ($L_n \cap L_1 = P_1$).
2. $L_i \cap L_j = \emptyset$, si $j \neq i-1, j \neq i+1, j \neq i$.

Entonces, la unión de los n segmentos se llama polígono.

Observación 3.2.3. De la definición 3.2.2 se deduce que si P es un polígono del plano \mathbb{R}^2 , entonces el complemento de P es la unión de dos conjuntos disjuntos, abiertos y conexos tal que uno de ellos es homeomorfo al interior de D^2 . A este conjunto llamaremos región interior de P y lo denotaremos por P_{in} . Al otro conjunto abierto y conexo lo denotaremos por P_{ex} . Luego, $P^c = P_{in} \cup P_{ex}$.

Definición 3.2.4. El segmento que une dos vértices no consecutivos P_i y P_j de P se llama diagonal de P si su interior está completamente contenido en P_{in} .

Teorema 3.2.5. *Todo polígono con más de tres vértices admite una diagonal.*

Demostración. Sea P un polígono con n vértices, $n > 3$. Sea P_i un vértice de P . Consideremos el segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$ (para $i = n$, $\overline{P_n P_1}$). Prolongamos este lado en P_{i+1} (para $i = n$, P_1) hasta el punto donde no sale de $P \cup P_{in}$. De este modo obtenemos un punto Q en el borde de P . Mantenemos fijo P_i y movemos Q en el borde de P con la condición que el interior del segmento $\overline{P_i Q}$ este completamente contenido en el interior de P . En algún instante este segmento tocará un vértice P_{j_0} de P . Luego, se tiene que $\overline{P_i P_{j_0}}$ es una diagonal de P . \square

Teorema 3.2.6. *Si T_α y T_β son dos triangulaciones de S , existe $T \in \mathfrak{S}$ tal que $T_\alpha < T$ y $T_\beta < T$.*

Demostración. Si $T_\alpha < T_\beta$, entonces $T = T_\beta$.

Supongamos que ni $T_\alpha < T_\beta$ ni $T_\beta < T_\alpha$. Al superponer T_α sobre T_β se tiene una subdivisión de S que llamaremos M . De este modo definimos:

- Los vértices de M son: los vértices de T_α , los vértices de T_β y los puntos de intersección de los lados de T_α y los lados de T_β .

- Los lados de M son los subconjuntos conexos de los lados de T_α o T_β que contienen exactamente dos vértices de M .
- Las caras de M son las clausuras de las componentes conexas de $(T_\alpha \cup T_\beta)^c$.

Cada cara de M admite una triangulación ya que su imagen inversa por el homeomorfismo asociado al triángulo en el cual está contenida es un polígono, y sabemos por la teorma 3.2.5 que todo polígono tiene una triangulación. Luego, la unión de todos los triángulos de cada cara de M es una triangulación de S . Esto finaliza la demostración. \square

Teorema 3.2.7. *Si T_α y T_β son dos triangulaciones de S tales que $T_\alpha < T_\beta$, entonces $\chi(S, T_\alpha) = \chi(S, T_\beta)$.*

Demostración. Sean $T_\alpha = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ y $T_\beta = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ dos triangulaciones de S tal que $T_\alpha < T_\beta$, y A_i, B_j son triángulos de T_α y T_β respectivamente. Por una subdivisión M de S entenderemos una descomposición de S en un número finito de polígonos, no necesariamente triángulos, tal que cualesquiera dos de ellos son disjuntos o se intersectan sólo en sus lados y vértices. Sean v , l y c el número total de vértices, lados y polígonos de (S, M) respectivamente. Definimos la característica de Euler de (S, M) por:

$$\chi(S, T) = v - l + c.$$

Mostraremos que la característica de Euler de (S, M) es invariante bajo los siguientes procesos:

- I. Si solamente dos lados de M concurren en un vértice dado, podemos fusionar los dos lados en uno eliminando el vértice.
- II. Si dos polígonos de M tienen un lado en común, podemos juntar sus dos regiones interiores en una removiendo el interior del lado común.

Para (I), si fusionamos los dos lados eliminando su vértice común, el número de vértices disminuye en 1 al igual que el número de lados. Luego, la Característica de Euler queda invariante. De manera similar se prueba para (II).

Por otro lado, sea A_i un triángulo de T_α . Como $T_\alpha < T_\beta$ se tiene que

$$A_i = \bigcup_{j=1}^k B_j$$

donde B_j es un triángulo de T_β y k es un número natural. Llamaremos vértices interiores de A_i a los vértices de B_j , $j = 1, \dots, k$, que se encuentran en el interior de A_i . Llamaremos vértices del borde de A_i a los vértices de B_j , $j = 1, \dots, k$, que se encuentran en el borde de A_i menos los vértices de A_i . Definimos la multiplicidad de un vértice interior v de A_i como el número de lados de los B_j que concurren a v . Eliminaremos vértices y lados de los B_j hasta obtener sólo los vértices y lados de A_i mediante el siguiente algoritmo.

- 1) Escogemos entre los vértices interiores de A_i el de multiplicidad menor. Si todos tienen la misma multiplicidad escogemos uno cualquiera de ellos. Al vértice escogido llamaremos v_0 .
- 2) Eliminamos el interior de un lado que concurre a v_0 . Al eliminar este lado hay dos posibilidades:
 - a) v_0 queda con multiplicidad dos. Si esto ocurre eliminamos v_0 fusionando así dos lados en uno y, luego, borramos el interior de este lado fusionando así dos regiones interiores en una. Posteriormente chequeamos si hay otros vértices interiores de A_i que tienen multiplicidad dos. Si los hay, realizamos para cada uno de ellos el proceso descrito para v_0 .
 - b) Si v_0 no tiene multiplicidad dos, entonces eliminamos el interior de otro lado que concurre a v_0 y nuevamente tenemos dos posibilidades. En algún momento v_0 tendrá multiplicidad dos y será eliminado junto con su lado asociado.
- 3) Volvemos a (1) y repetimos el proceso hasta eliminar todos los vértices interiores de A_i .
- 4) Eliminamos el interior de los lados de B_j , $j = 1, \dots, k$, cuyos extremos son vértices del borde de A_i .

Para cada A_i de T_α realizamos el algoritmo descrito anteriormente, y para finalizar eliminamos los vértices del borde de A_i con $i = 1, \dots, n$. De este modo podemos ir de T_β a T_α mediante un número finito de procesos del tipo (I) y (II). Luego, se tiene que

$$\chi(S, T_\alpha) = \chi(S, T_\beta).$$

□

Teorema 3.2.8. Si T_α y T_β son dos triangulaciones de S , entonces $\chi(S, T_\alpha) = \chi(S, T_\beta)$.

Demostración. Por el teorema 3.2.6, existe una triangulación T de S tal que $T_\alpha < T$ y $T_\beta < T$. Luego, se tiene que $\chi(S, T_\alpha) = \chi(S, T)$ y $\chi(S, T_\beta) = \chi(S, T)$ por el teorema 3.2.7. Por lo tanto,

$$\chi(S, T_\alpha) = \chi(S, T_\beta).$$

□

Conclusiones

Dentro de las Matemáticas las superficies son objetos estudiados desde el punto de vista del Análisis Matemático (áreas y volúmenes) y de la geometría Diferencial (curvatura, líneas geodésicas, etc). Además el desarrollo de la dinámica resaltó el papel de estos espacios en la Física.

Por su extensa utilización, las superficies son los espacios topológicos más importantes en dimension 2. Su estudio y clasificación interesó a matemáticos como A.F. Möbius (1790-1868), B. Riemann (1826-1866), E. Betti (1823-1892) y Klein, hasta que W. von Dyck (1856-1934) obtuvo su clasificación completa alrededor de 1890.

Recomendaciones

El teorema de Superficies Compactas se encuentra en casi todos los libros de Topología Algebraica o Teoría de Homología, para este trabajo de grado no utilizamos nada de Teoría de Homología para lograr nuestro objetivo. Recomiendo estudiar la Teoría de Homología para conocer otro modo de demostración de este interesante teorema.

Bibliografía

- [1] WILLIAM. S. MASSEY, *Algebraic Topology: An Introduction*, Editorial Harcourt, Brace and World, Inc. New York. USA, 1972.
- [2] RAFAEL AYALA, ELADIO DOMÍNGUEZ, ANTONIO QUINTERO, *Elementos de la Teoría de Homología Clásica*, SECRETARIADO DE PUBLICACIONES UNIVERSIDAD DE SEVILLA, págs. 127-138, 2002.
- [3] J. R. MUNKRES, *Topología*, Segunda edición. Prentice-Hall, Madrid, 2002. Traducida de Topology. 2end ed. Prentice-Hall, Inc., 2000.
- [4] THOMASSEN, C. *The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces*. American Mathematical Monthly, 99 (2), 116-131, 1992.