UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECONOLOGÍA

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

LA TOPOLOGÍA DE KHALIMSKY

Por:

ERIC A. ACEVEDO S.

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO DE CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA.

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2009

UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMATICA.

Título de la Tesis: **"LA TOPOLOGÍA DE KHALIMSKY"**

Nombre del Estudiante: **Eric A. Acevedo S.**, cédula N°. 3-106-612.

APROBADO POR :

Doctor Jaime Gutiérrez ,
Presidente

Magíster Octavio Matos
Miembro

Magíster Daniel Vásquez
Miembro

REFRENDADO POR:

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO.

Fecha: 11 de Diciembre del 2009

DEDICATORIA

Este trabajo se lo dedico a mis hijos Eric y Wyneth, a mi esposa y a mi querida madre Evelia, por apoyarme en los momentos más difíciles en la elaboración de esta investigación.

AGRADECIMIENTO

Primero agradecerle a Dios por toda la sabiduría que me dio, segundo al Doctor Jaime Gutiérrez por todos los consejos que me brindó en la elaboración de este trabajo y por último a los profesores Oscar Rubattino, Daniel Vásquez y Pedro Salamanca, a todos ustedes que Dios los bendiga y les colme de felicidad. Gracias........

ÌNDICE

RESUMEN

En este trabajo de graduación se presentan las propiedades básicas de los Espacios de Alexandroff. Además, se establecen las propiedades que caracterizan al espacio topológico de Khalimsky. Finalmente, determinamos a que categorías más comunes de espacios topológicos pertenece el espacio topológico de Khalimsky.

SUMMARY

This graduation work presents the basic properties of Alexandroff Spaces. Besides, It establishes the properties that indicate the Khalimsky topological spaces. Finally, We determinet to what common categories of the topological spaces belong the Khalimsky topological space.

INTRODUCCIÓN

En un espacio topológico, se exige que la unión arbitraria de abiertos sea también un abierto pero conocemos espacios topológicos en la que la intersección arbitraria de abierto no es un abierto.

Sin embargo, los espacios topológicos en las que los abiertos son estables por intersecciones arbitrarias, son de especial interés en la Topología General y la Topología Digital.

En el año 1936 Sergei Alexandroff realizó estudios acerca de aquellos espacios donde la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es abierta, mas adelante en el año 1977 Efim Khalimsky publicó ciertos estudios acerca de estos espacios y además desarrollo una topología sobre ellos, que hoy en día es la base de la Topología Digital para el procesamiento de imágenes en computadora.

Para tal fin hemos dividido nuestro trabajo en tres capítulos, en el primero, se definen los conceptos básicos que cumplen los Espacios de Alexandroff y además se demuestran algunas propiedades y caracterizaciones de estos espacios y su relación con los conjuntos parcialmente ordenados, que serán utilizados más adelante. En el segundo capítulo estudiamos la Topología de Khalimsky, y algunas de sus propiedades. Por último en el tercer capítulo veremos las propiedades topológicas que cumple el Espacio Topológico de Khalimsky utilizando como guía las definiciones contenidas en el libro de Ejemplos y Contraejemplos de Lynn Arthur Steen y J. Arthur Seebach Jr.

CAPITULO I

ESPACIOS DE ALEXANDROFF

En este capítulo trabajaremos con Espacios de Alexandroff, sus propiedades, algunas caracterizaciones de estos espacios y su relación con los conjuntos parcialmente ordenados.

En un espacio topológico, se exige que la unión arbitraria de abiertos sea también un abierto pero conocemos espacios topológicos en la que la intersección arbitraria de abierto no es un abierto.

Sin embargo, los espacios topológicos en las que los abiertos son estables por intersecciones arbitrarias, son de especial interés en la Topología General y la Topología Digital.

1.1 Espacios de Alexandroff

Definición 1.1.1 Un espacio topológico es de Alexandroff si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Ejemplo 1.1.2 Sea X un conjunto no vacío consideremos $\tau = 2^X$ (partes de X). Esta es una topología sobre X llamada la topología discreta, es claro que (X,τ) es de Alexandroff.

Ejemplo 1.1.3 Sea (X,τ) un espacio topológico y $\tau = \{X, \phi\}$; la topología grosera de X. Entonces (X,τ) es de Alexandroff.

Ejemplo 1.1.4 Sea X un conjunto no vacío y

$$\tau = \left\{ A \subseteq X \big/ A^c \quad es\ finito \right\} \cup \{\phi\}$$

La topología de los complementos finitos. Entonces (X,τ) no es de Alexandroff.

Ejemplo 1.1.5 Sea X un conjunto no vacío, $p \in X$.

$$\tau = \left\{ A \subseteq X \big/ p \in A \right\} \cup \{\phi\}$$

τ_p es una topología sobre X y (X,τ) es de Alexandroff (La topología centrada en p).

Ejemplo 1.1.6 Sea X un conjunto no vacío. Si $B \subseteq X$.

$$\tau_B = \left\{ A \subseteq X \big/ B \subseteq A \right\} \cup \{\phi\}$$

τ_B es de Alexandroff.

Si $B = X - \{p\}$, la topología de punto excluido.

1.2 Caracterizaciones de los Espacios de Alexandroff.

Proposición 1.2.1 Un espacio topológico (X,τ) es de Alexandroff si y solo si la unión arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.

Una característica importante de estos espacios es que tienen una base de elementos mínimos o vecindad mínima.

Definición 1.2.2 Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$.

Definimos

$$V(x) = \cap \{U \in \tau : x \in U\}$$

Observemos que para toda x elemento de un espacio topológico (X, τ); $V(x) \neq \phi$.

Pues, al ser X un elemento de τ tenemos que $x \in V(x)$.

Claramente, cuando (X, τ) es un espacio de Alexandroff, $V(x)$ será un elemento de τ. El reciproco de esta afirmación también es verdadero cuando $V(x) \in \tau$ para toda $x \in X$, a continuación damos la prueba.

Proposición 1.2.3 Sea (X, τ) un espacio topológico.

Entonces $V(x) \in \tau$, para toda $x \in X$ si y solo si (X, τ) es de Alexandroff.

Demostración: Si (X, τ) es de Alexandroff es inmediato que $V(x) \in \tau$, para toda $x \in X$. Ahora, supongamos que $V(x) \in \tau$ para toda $x \in X$ y sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos de τ. Hay que demostrar que $\cap_{i \in I} U_i \in \tau$.

Es suficiente con verificar que para todo $U \in \cap_{i\in I} U_i$ existe una vecindad de U que es un subconjunto de $\cap_{i\in I} U_i$.

Sea $x_0 \in \bigcap_{i\in I} U_i$, entonces, $x_0 \in U_j$ para toda $j \in I$, pero, por hipótesis $V(x_0) \in \tau$, por lo que $V(x_0) \subset U_j$ para toda $j \in I$. Por lo tanto $x_o \in V(x_0) \subset \cap_{i\in I} U_i$. Concluimos que (X,τ) es de Alexandroff.

Si (X,τ) es de Alexandroff, llamaremos a $V(x)$ la vecindad mínima de x o la estrella de x, y la denotaremos como $St(x)$.

Observación: Si (X,τ) es un espacio de Alexandroff, $x \in X$ y V es una vecindad de x, entonces $St(x) \subseteq V$.

Proposición 1.2.4 Sea (X,τ) un espacio de Alexandroff.

Entonces

$$\beta = \{St(x);\ x \in X\} \cup \{\phi\}$$

Es una base de τ.

Demostración: Por ser (X,τ) de Alexandroff, $\beta \subset \tau$.

Para demostrar que β es una base de τ es suficiente con asegurar que para cada $x \in X$ y cada vecindad U de x, existe un $V \in \beta$ tal que $x \in V \subset U$.

Sean $x \in X$ y U una vecindad de x, sabemos que $St(x) \subset U$. Por lo tanto β es base de τ

Sea Z el conjunto de los números enteros y consideremos la familia β de subconjuntos de Z dado por

$$\beta = \{ \{2n,\ 2n+1,\ 2n+2 \} : n \in Z \}$$

o el equivalente, al generado por la base

$$\sigma = \{ \{2n,\ 2n+1,\ 2n+2 \} : n \in Z \} \cup \{ 2n+1 : n \in Z \} \cup \{\phi\}$$

Entonces β es sub-base de una única topología sobre Z.

A esta topología la llamamos la **Topología de Khalimsky** sobre Z y la denotamos τ_k.

Observación: Los abiertos de τ_k son uniones de conjuntos de la forma $\{ n-2,\ n-1,\ n \}$ con n par y $\{ n \}$ con n impar.

Proposición 1.2.6 $(Z,\ \tau_k)$ es un espacio de Alexandroff

Demostración: Comprobaremos que para cada $n \in Z$; $V(n) \in \tau_k$.

Sea $A = \{ n-2, n-1, n \}$ y $B = \{n, n+1, n+2\}$ dos abiertos de τ_k.

Si n es par, tenemos que $A \cap B = \{ n \}$ es abierto.

Sea $m \in Z, m \neq n$, si $m < n$, el abierto B no contiene a m, si $m > n$, el abierto A no contiene a m, por tanto $V(n) = \{n\} \in \tau_k$.

Si n es impar tenemos que $n+1$ es par y $C = \{ n-1, n, n+1 \}$ es abierto y contiene a n, donde $C = V(n) \in \tau_k$ (Por la observación anterior)

Sea V una vecindad de n, entonces existe un abierto O de τ_k tal que $n \in O \subseteq V(n)$.

Por lo tanto (Z, τ_k) es de Alexandroff.

Observación:

De la demostración anterior, tenemos que:

$$St(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{si } n \text{ es par} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Recordemos que en un espacio de Alexandroff habíamos convenido en llamar a $V(x)$ estrella y denotarlas como $St(x)$. Luego la base que define al espacio (Z, τ_k) de acuerdo a la **Proposición 1.2.4** quedaría de la siguiente manera:

$$\beta = \{ St(n) : n \in Z \}$$

Según el resultado anterior, (Z, τ_k) es un espacio de Alexandroff pero, claramente, tiene un número infinito de elementos; este espacio lo llamaremos **Espacio Topológico de Khalimsky** y es un contraejemplo al recíproco de la siguiente proposición.

Proposición 1.2.7 Sea (X,τ) un espacio topológico finito, entonces (X,τ) es de Alexandroff.

Demostración: Sea X finito, con n elementos. Luego $P(x) = 2^n$, lo que implica que cualquier familia $F \subset P(x)$ tiene un número finito de elementos, por lo que cualquier intersección de conjuntos abiertos es realmente una intersección finita por lo tanto la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto así (X,τ) es de Alexandroff.

Definición 1.2.8 (Ortocompacto) Dado un cubrimiento abierto de X existe un refinamiento que también es un cubrimiento abierto con la propiedad de que para cualquier punto, la intersección de todos los abiertos del refinamiento que contiene al punto es abierta.

Definición 1.2.9 (Refinamiento) Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{I}}$ un cubrimiento de un espacio topológico (X,τ).

Un cubrimiento $(W_\beta)_{\beta\in J}$ de X se dice que es más fino o que es un refinamiento de $(U_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{I}}$ si

$\forall\ \beta \in J \quad \exists\ \alpha \in \mathrm{I}\ /\ W_\beta \subset U_\alpha$

Definición 1.2.10 Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$ denotaremos por $\overline{\mathrm{A}}$ a la cerradura o clausura de A y se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

Teorema 1.2.11 Sea A un subconjunto del espacio topológico X.

(a) Entonces $x \in \overline{\mathrm{A}}$ sí y sólo si, cada conjunto abierto Uque contiene a $x$interseca a A.

(b) Suponiendo que la topología de X está dada por una base, entonces $x \in \overline{\mathrm{A}}$ sí y sólo si, cada subconjunto B que contiene a x interseca a A.

1.3 Espacios Topológicos Inducidos por Órdenes Parciales.

En esta sección, dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$; construiremos una topología en X tomando como base los conjuntos de la forma:

$U(x) = \{y \in X; x \leq y\}$ con $x \in X$.

Teorema 1.3.1 Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.

Entonces $(X, \leq)$ es un espacio topológico, donde $\tau_{\leq}$ es la topología generada por la base.

$$\beta = \{U(x) : x \in X\} \cup \{\phi\}$$

donde $U(x) = \{y \in X : x \leq y\}$

Demostración: Primero probaremos que $\bigcup_{x \in X} U(x) = X$.

Sea $x_0 \in X$, entonces, como $\leq$ es reflexiva $x_0 \in U(x_0)$.

Luego $X \subset \cup \beta$. Por lo tanto $\bigcup_{x \in X} U(x) = X$.

Sean $x_1, x_2 \in X$ y verifiquemos que existe $U(x) \subseteq U(x_1) \cap U(x_2)$

como $y \in U(x)$ entonces si $x_1 \leq x$ tenemos que $x_1 \leq y$ por lo tanto $y \in U(x_1)$. De igual forma se prueba que $y \in U(x_2)$.

Por lo tanto, $\tau_{\leq}$ es la única topología de la que β es base.

De acuerdo con el resultado anterior, $U(x)$ es un conjunto abierto, para cualquier $x \in X$. Más aún, no existe ningún abierto no totalmente contenido en $U(x)$.

Observación: En cualquier espacio topológico (X, τ) toda vecindad $U(x) \subset U$.

Colorario 1.3.2. Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $\tau_{\leq}$ es la topología dada por $\leq$ sobre X, $(X, \tau_{\leq})$ es de Alexandroff.

Demostración: Sea $\bigcap_{i \in I} U_i = \phi$ entonces, trivialmente $\bigcap_{i \in I} U_i \in \tau_{\leq}$.

Supongamos $\bigcap_{i \in I} U_i \neq \phi$, entonces $\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos de

Supongamos que $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ para toda $i \in I$, entonces $x \in U(x) \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i$, hemos probado así que $\bigcap_{i \in I} U_i$ es vecindad de todos sus puntos; por lo tanto es abierto.

Con esto $(X, \tau_{\leq})$ es de Alexandroff.

Tenemos que para estos espacios $U(x) = St(x)$.

Por lo que de ahora en adelante utilizaremos la notación $St(x)$ cuando trabajemos con este tipo de espacio. Por definición de $St(x)$, este es el abierto mínimo que contiene a x y podemos describirla en término de la relación de orden en (1)

Esto también es posible para describir al mínimo conjunto cerrado que contiene a un elemento x, es decir, podemos caracterizar a la cerradura de cualquier elemento a partir de la relación de orden.

Escrito de otra forma tenemos que:

Sea $x \in X$, entonces $\{U_i\}$ con $i \in I$ es la familia de abiertos de τ que contiene a x. Sabemos que $\bigcap_{i \in I} U_i$ es abierta y contiene a $U(x)$, por lo tanto $U(x) = St(x)$.

Proposición 1.3.3 Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $(X, \tau_{\leq})$ un espacio topológico y $x \in X$.

Entonces: $\overline{\{x\}} = \{y \in X : y \leq x\}$

Demostración: Sea $y \in \overline{\{x\}}$, como $St(y)$ es abierto y contiene a y entonces $St(y) \cap \{x\} \neq \phi$; es decir $x \in St(y)$ luego $y \leq x$. Supongamos que $y \leq x$, entonces $x \in St(y)$ y por lo tanto $St(y) \cap \{x\} \neq \phi$.

Esto implica que todo abierto U que contiene a y, cumple que $U \cap \{x\} \neq \phi$. Así $y \in \overline{\{x\}}$.

Ser de Alexandroff, no es la única propiedad que estos espacios tienen.

Recordemos que un espacio topológico (X, τ) es T_0 o de Kolgomoroff, si para todo $x,\ y \in X$ existe U vecindad de x tal que $y \notin U$, o, existe V vecindad de y tal que $x \notin V$

Colorario1.3.4 Si $(X, \leq)$es un conjunto parcialmente ordenado y $\tau_{\leq}$ una topología sobre X, entonces $(X, \tau_{\leq})$ es T_0.

Demostración: Sean $x, y \in X, x \neq y$. Si x,y son comparables podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \leq y$. Es decir, $y \in St(x)$; si $x \in St(y)$, tendríamos que $y \leq x$, lo que implicaría que $x = y$, pues $\leq$ es antisimétrica y esto contradice nuestras suposiciones. Por lo que $x \notin St(y)$.

Si x, y no son comparables entonces $St(y)$ es una vecindad de y que no contiene a x, lo mismo ocurre con $St(x)$, es una vecindad de x que no contiene a y.

Por lo tanto, $(X,\ \tau_{\leq})$ es T_0.

Ejemplo 1.3.5 Sea X un conjunto no vacío ordenado parcialmente y τ la topología sobre X que admite como sub-base la familia:

$\gamma = \{[x, \rightarrow) \ / \ x \in X\}$

Sean $x,\ y \in X$, $x \neq y$

- Si $x \leq y$, entonces $[y, \rightarrow) \in \tau$ y $x \notin [y, \rightarrow)$
- Si $y \leq x$, entonces $[x, \rightarrow) \in \tau$; $y \notin [x, \rightarrow)$
- Si $x \leq y$ entonces $[y, \rightarrow) \in \tau$ y $x \in [y, \rightarrow)$

Por consiguiente, X es un espacio topológico T_0.

Ejemplo 1.3.6 Sea X un conjunto no vació cualquiera, y τ_c la topología caótica, entonces $(X,\ \tau_c)$ no es T_0.

Ejemplo 1.3.7 Sean $X = \{(2n-1, 2n+1) \subset \Re : n \in Z\} \cup \{2n+1 \in \Re : n \in Z\}$ con la relación $\leq$, definida por $x \leq y$ si $x \in \overline{\{y\}}^{td}$, donde $\overline{\{y\}}^{td}$ denota la cerradura con respecto a la topología usual de $\Re$ del conjunto $\{y\}$.

Entonces:

a) $(X,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

b) Si denotamos con τ a la topología generada por $\leq$ como en el **Teorema 1.3.1** entonces (X,τ) es un espacio T_0 de Alexandroff.

Los elementos de este espacio son subconjuntos de números reales, uno formado por un solo número impar y otro formado por un intervalo abierto de longitud dos centrado en un número par.

Como ejemplo de los resultados obtenidos en esta sección construiremos un espacio topológico que resultará ser homeomorfo al **Espacio de Khalimsky** a partir de un conjunto parcialmente ordenado.

Proposición 1.3.8 Sea $(X,\tau_{\leq})$ un espacio topológico, entonces $(X,\tau_{\leq})$ es homeomorfo a (Z,τ_k), el **Espacio Topológico de Khalimsky.**

Demostración: Sea $f:(X,\tau_{\leq})\to(Z,\tau_k)$ dada por:

$$f(x)=\begin{cases}2n & si\ \ x=(2n-1,2n+1)\\ 2n+1 & si\ \ x=\{2n+1\}\end{cases}$$

Claramente f es inyectiva y sobreyectiva, luego f es invertible.

Veamos ahora que f y f^{-1} son continuas.

Como $\beta=\{\{2n,2n+1,2n+2\}:n\in Z\}\cup\{2n:n\in Z\}\cup\emptyset$ es una base en τ_k y

$$\sigma = \{\{(2n-1,2n+1),\{2n+1\},(2n+1,2n+3)\} \subset R : n \in Z\} \cup$$

$$\{(2n-1,2n+1) \subset R : n \in Z\} \cup \emptyset$$

es una base de τ.

Demostraremos que la imagen inversa de β bajo f es un abierto de τ.

Sea $U \in \beta$.

Si $U = \{2n\}$ para algún $n \in Z$, entonces

$$f^{-1} = (U) = \{(2n-1,2n+1)\} \in \sigma \subset \tau$$

Si $U = \{2n, 2n+1, 2n+2\}$ tenemos que

$$f^{-1}(U) = \{(2n-1,2n+1)\} \cup \{2n+1\} \cup \{(2n+1,2n+3)\} \in \sigma \subset \tau$$

Por lo tanto f es continua. Para demostrar la continuidad de f^{-1} utilizamos los mismos razonamientos.

Por lo tanto concluimos que f es un homeomorfismo.

Una de las consecuencias inmediatas de esta proposición es el siguiente corolario.

Corolario 1.3.9 El Espacio de Khalimsky es T_o.

Demostración: Ver Proposición 1.3.8

En la siguiente sección observaremos que dada una topología sobre un espacio, podemos generar una relación de orden ≤, para que un conjunto sea parcialmente ordenado.

1.4. Conjuntos Parcialmente Ordenados a partir de un Espacio Topológico.

Teorema 1.4.1 Sea (X,τ) un espacio topológico T_0 y $\leq$ una relación definida por $x \leq y$ si $x \in \overline{\{y\}}$. Entonces $(X,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Demostración: En primer lugar demostraremos que ≤ es reflexiva.

Sea $x \leq x$ entonces $x \in U_x$ $(U_x \subseteq U_x)$ por lo tanto $x \in \cap\, U_x$ y como los U_x son base de la topología de τ entonces $x \in (X,\tau)$. Entonces $\leq$ es reflexiva.

Ahora probaremos la antisimetría de ≤, sean $x, y \in X$ tales que $y \leq x$ y $x \leq y$.

Demostraremos que $x = y$.

Supongamos que $x \neq y$, entonces para toda vecindad U_x, tenemos que $y \in U$; lo mismo ocurre para toda vecindad V_y, $x \in V$, esto contradice el hecho de que (X,τ) es T_o, por lo tanto $x = y$ y esto implica entonces que $\leq$ sea antisimétrica.

Finalmente, probaremos la transitividad.

Sea $z \in U_x \cap U_y$, entonces $z \leq x$ y $z \leq y$ por lo tanto se tiene que $z \in U_z \subseteq U_x \cap U_y$ (la pertenencia vale por la reflexividad de $\leq$ y la inclusión por la transitividad) donde

$$U_x = \{y \in X \,/\, y \leq x\} \text{ y } U_y = \{x \in X \,/\, x \leq y\}.$$

Así $\leq$ es también transitiva

Por lo tanto $(X, \leq)$, es un conjunto parcialmente ordenado.

La topología definida a partir de un conjunto parcialmente ordenado y la relación de orden que se define a partir de un espacio topológico están estrechamente relacionadas.

Corolario 1.4.2 Sean (X, τ) un espacio topológico T_0 de Alexandroff, $\leq$ una relación de orden y sea $\tau_{\leq}$ la topología en X generada por $\leq$. Entonces $\tau_{\leq} = \tau$.

Demostración: Para ver que $\tau_{\leq} = \tau$ demostraremos que existe una base de τ y una base de $\tau_{\leq}$ que son iguales.

Por la **Proposición 1.2.4** $\{St(x)\}_{x \in X}$, es base de τ, y por el **Teorema 1.3.1** $\{U(x)\}_{x \in X}$ es base de $\tau_{\leq}$ donde $U(x) = \{y \in X : x \leq y\}$.

Entonces, comprobaremos que $St(x) = U(x)$ para toda $x \in X$.

Sean $x \in X$ y $y \in U(x)$. Verifiquemos que $y \in U(x)$ si y solo si $y \in St(x)$.

Por definición de $U(x)$, $x \in \{\bar{y}\}$ y esto es equivalente a afirmar que toda vecindad $U(x)$ también contiene a y ; es decir $y \in St(x)$. Por lo que, $x \leq y$ es equivalente a que $y \in St(x)$.

Por lo tanto, $St(x) = U(x)$ para toda $x \in X$. Concluimos entonces que

$\tau = \tau_{\leq}$.

1.5 Propiedades Topológicas de los Espacios de Alexandroff.

Observaremos ahora las propiedades topológicas que cumplen los Espacios de Alexandroff.

Teorema 1.5.1 Sea X un espacio de Alexandroff, y β una base de X, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) β es una base mìnimal.

ii) Si β' es una subfamilia de β tal que $\cup_{\beta \in \beta'} \beta \in \beta \Rightarrow \cup_{\beta \in \beta'} \beta \in \beta'$.

Demostración:

$\Leftarrow$ Sea β' una base de X tal que $\beta' \subseteq \beta$ y sea $A \in \beta$ entonces

$A = \cup_{\beta_i \in \beta'} \beta_i \in \beta$ (por hipótesis) $\Rightarrow A \in \beta'$. Así $\beta \subseteq \beta'$. Luego β es mìnimal.

$\Rightarrow$ Supongamos que $\beta' \subsetneq \beta$ es base de X. Sea $B \in \beta \setminus \beta'$, entonces

$B = \cup_{B_i \in I} B_i \in \beta \Rightarrow B \in \beta'$ y esto es absurdo.

Así toda base de X es incomparable con β o contiene a β. Luego β es mínimal.

Teorema 1.5.2 Sea X un espacio de Alexandroff X es T_0 sí y solamente si $V(x)=V(y)$, esto implica que $x=y$.

Demostración:

Sean $x, y \in X$. $Si\ x \neq y$ entonces podemos suponer que existe O abierto tal que $x \in O,\ y \notin O$; luego $V(x) \subseteq O,\ V(y) \nsubseteq O \Rightarrow V(x) \neq V(y)$.

Sean $x, y \in X,\ x \neq y \Rightarrow V(x) \neq V(y)$. Supongamos que no es T_0 y sean $x, y \in X$ tal que todo abierto que contiene a x contiene a y y viceversa, entonces $V(x)$ es abierto y contiene a y por la tanto $V(y) \subseteq V(x)$.

De esta forma se tiene que $V(x) \subseteq V(y)$ y así $V(x) = V(y)$. Por la tanto no es $T_0 \Rightarrow \exists\ x, y \in X, x \neq y : V(x) = V(y)$.

Observación: Los siguientes teoremas no se demostrarán en esta sección por que el interés de este trabajo es el estudio de la **Topología de Khalimsky,** sin embargo en el Capítulo III se darán las demostraciones de cada uno.

Teorema 1.5.3 Sean X y Y espacios de Alexandroff; U y V sus respectivas bases mínimas.

Entonces:

1. Si X es un sub-espacio de Y, entonces $U = \{V_i \cap X : V_i \in V\}$.
2. $X \times Y$ es un espacio de Alexandroff y su base mínima está dada por $U \times V = \{U_i \times V_i :\ U_i \in U,\ V_i \in V\}$

Teorema 1.5.4 Sea X un espacio de Alexandroff – T_0. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es conexo por arco
2. X es conexo
3. X es conexo por cadena
4. Para todo $a,b \in X$, existe $a_0,....a_{n+1} \in X$ tal que $a_0 = a,\quad a_{n+1} = b$ y $V(a_i) \cap V(a_j) \neq \varnothing$ si $|i-j| \leq 1.$
5. Para todo $a,b \in X$, existe $a_0,....a_{n+1} \in X$ tal que $a_0 = a,\quad a_{n+1} = b$ y $\overline{V(a_i)} \cap \overline{V(a_j)} \neq \varnothing$ si $|i-j| \leq 1.$
6. Para todo $a,b \in X$, existe $a_0,....a_{k+1} \in X$ tal que $a_0 = a,\quad a_{k+1} = b$ y $\overline{\{a_i\}} \cap \overline{\{a_j\}} \neq \varnothing$ si $|i-j| \leq 1.$

Teorema 1.5.5 Sea X un espacio Alexandroff - T_O entonces:

1. X es localmente conexo por arco
2. X es primer contable
3. X es ortocompacto
4. X es paracompacto si y solo si, toda $V(x)$ contiene solamente un número finito de $V(y)$, si X es paracompacto entonces X es localmente finito (Su inversa no es cierta).
5. X es segundo contable si y solo si, el es contable

6. X es separable si y solo si $X = \overset{\infty}{\underset{n=1}{U}} \{\overline{x_n}\}$

7. X es Lindelöff si y solo si $X = \overset{\infty}{\underset{n=1}{U}} V(x_n)$.

8. Existen espacios Lindelöff T_0 – Alexandroff que no son separable y espacio separable T_0 – Alexandroff que no son Lindelöff.

9. Si X es finito, entonces X es compacto.

10. Si X es localmente finito, entonces es localmente compacto.

11. X es contable si y solo si X es localmente contable y Lindelöff.

12. Si X es localmente finito, X es compacto si y solo si X es finito.

Teorema 1.5.6 Sea X un Espacio de Alexandroff entonces:

1. X es regular si y solamente si $V(x)$, es cerrado para todo $x \in X$ (donde X es 0 – dimensional)

2. Si X es regular y compacto, entonces X es localmente compacto.

3. Si X es regular y separable, entonces X es perfectamente normal.

4. X es pseudo- metrizable si y solamente si $V(x)$ es cerrado y finito para todo $x \in X$.

CAPÍTULO II

LA TOPOLOGÍA DE KHALIMSKY

En el año 1936 Sergei Alexandroff realizó estudios acerca de aquellos espacios donde la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es abierta, en el año 1970 Efim Khalimsky realizó ciertos estudios acerca de estos espacios y más adelante en el año 1977 los público; desarrollando una topología sobre ellos, que hoy en día es la base de la Topología Digital para el procesamiento de imágenes en computadora.

2.1 Topología de Khalimsky

Definición 2.1.1 El conjunto Z con la topología τ_k definida en la **Proposición 1.2.5** recibe el nombre de **Topología de Khalimsky.**

Observamos entonces que está topología tiene como sub-base a la familia

$$\beta=\{\{2n,\ 2n+1,\ 2n+2\}: n\in Z\}$$

o el equivalente formado por la base

$$\sigma=\{\{2n,\ 2n+1,\ 2n+2\}: n\in Z\}\cup\{2n+1\ :\ n\in Z\}\cup\{\phi\}$$

Observación: Los abiertos de τ_k son uniones de conjuntos de la forma $\{n-2, n-1, n\}$ con n par y $\{n\}$ con n impar.

Definición 2.1.2 Otra forma de definir la Topología de Khalimsky es la siguiente:

Recordemos que un número real x se puede expresar de la forma:

$x = [x] + \{x\}$ donde $[x]$ es la parte entera de x, es decir el mayor entero menor que x y $\{x\}$ es la parte decimal de x.

Por definición $[x] \in Z$, y $0 \leq \{x\} < 1$.

Consideremos $\Re$ con la topología usual y las funciones $g : \Re \rightarrow Z$ y $f : \Re \rightarrow Z$ definidas de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} [x] & si\ [x]\ es\ par \\ \{x\} + 1 & si\ [x]\ es\ impar \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} [x] & si\ \{x\} < \frac{1}{2} \\ g(x) & si\ \{x\} = \frac{1}{2} \\ [x] + 1 & si\ \{x\} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donde f no es más que la conocida función de redondeo.

La topología de Khalimsky sobre Z es la topología más fina sobre Z tal que $f : \Re \rightarrow Z$ es continua.

Definición 2.1.3 El conjunto Z con la topología τ_k definida en la **Proposición 1.2.5** recibe el nombre de **Línea de Khalimsky.**

Observamos entonces que la **Línea de Khalimsky** es un espacio de vecindades mínimas y además conexo.

Definición 2.1.4 Un intervalo de la forma $[a,b]\cap Z$ es llamado **Intervalo de Khalimsky.**

Definición 2.1.5 (Topología Final) Sea (X,τ) un espacio topológico y $f: X \to Y$ una aplicación suryectiva.

Definimos la siguiente topología τ_f en Y

$$\tau_f = \{O' \subset Y; f^{-1}(O') \subset \tau\}$$

Esta topología se llama topología final en Y determinada por (X,τ) y f. Esta topología tiene las siguientes propiedades:

1. La aplicación $f: (X,\tau) \to (Y,\tau_f)$ es continua.
2. La topología τ_f es la topología más fina en Y que hace continua a f. Esto significa lo siguiente: Sea τ' otra topología en Y que satisface que la aplicación $f: (X,\tau) \to (Y,\tau')$ sea continua. Entonces $\tau' \subset \tau_f$.
3. Sea g una aplicación tal que $g: (Y,\tau_f) \to (Z,\tau')$. Entonces g es continua si y solamente si $g \circ f$ es continua.

Definición 2.1.6 Sea $f : M \to N$ una aplicación entre dos espacios métricos, se dice que f satisface la condición de Lipschitz si existe una constante $k > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$ para todo $x, y \in M$. En tal caso, k es llamada la constante de Lipschitz de la función.

Además toda función Lipschitz es uniformemente continua y por lo tanto continua. Las funciones de Lipschitz donde $k = 1$ reciben el nombre de funciones cortas.

Proposición 2.1.7 Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathrm{Z}$ una aplicación continua y $x_o \in X$. Si $f(x_o)$ es impar entonces f es constante en $V(x_o)$ y $|f(x) - f(x_o)| \leq 1$ para todo $x \in \{\bar{x}\}$. Si $f(x_o)$ es par, entonces f es una constante en $\{\bar{x}\}$ y $|f(x) - f(x_o)| \leq 1$ para todo $x \in V(x_o)$.

Demostración: Sea $y_o = f(x_o)$ impar. Entonces $\{y_o\}$ es un abierto, donde $f^{-1}(\{y_o\})$ es abierto dado que $V(x_o) \subset f^{-1}(\{y_o\})$, donde $f(V(x_o)) = \{y_o\}$ . .Más aún, si el conjunto $A = \{y_o, y_o \pm 1\}$ es cerrado, entonces el conjunto $f^{-1}(A)$ es un cerrado y esto implica que $f(x) \in A$ para todo $x \in \{\bar{x}\}$.

Teorema 2.1.8 Una función $f: Z \to Z$ es continua si y solo si

1. f es Lipschitz 1

2. Para todo x par, $f(x) \not\equiv x \, mod(2)$ implica que $f(x \pm 1) = f(x)$.

Demostración: Sea $A = \{y-1, y, y+1\}$ donde y es un número par de cualquier elemento de una sub-base, mostraremos que $f^{-1}(A)$ es un abierto. Si $x \in f^{-1}(A)$ es impar, entonces $\{x\}$ es una vecindad de x. Si x es par, tenemos entonces dos casos:

- Si $f(x)$ es impar, la condición (2) implica que $f(x+1) = f(x)$ así que $\{x-1, x, x+1\} \subset f^{-1}(A)$ es una vecindad de x.
- Si $f(x)$ es par, entonces $f(x) = y$, la condición Lip-1 implica que $|f(x \pm 1) - y| \leq 1$ donde obtenemos otra vez que $\{x-1, x, x+1\} \subset f^{-1}(A)$ es una vecindad de x.

Por la tanto f es continua.

Teorema 2.19 Sea $\{x_n\}$, una sucesión en el espacio (Z, τ_k). Si $\{x_n\}$ converge entonces tiene rango finito. (Lo contrario no es cierto)

CAPÍTULO III

PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL ESPACIO DE KHALYMSKY.

En este capítulo veremos las propiedades topológicas que cumple el Espacio de Khalimsky utilizando el Libro de Lynn Arthur Steen y J. Arthur Seebach Jr. Por ser el Espacio de Khalimsky (Z,τ_k) homeomorfo a un Espacio T_o de Alexandroff, entonces podemos verificar que este espacio cumple con las siguientes propiedades.

3.1 Propiedades Topológicas que cumple el Espacio de Khalimsky.

Teorema 3.1.1

El espacio (Z,τ_k) es T_o.

Demostración:

Utilizando la **Proposición 1.3.8 y el Teorema 1.3.5,** vemos que este espacio es homeomorfo a un espacio T_o de Alexandroff, por lo tanto es T_O.

Teorema 3.1.2

El espacio (Z,τ_k) es T_1.

Demostración:

En el espacio topológico (Z,τ_k) los conjuntos unitarios con n impar no son cerrados.

Teorema 3.1.3

El espacio (Z,τ_k), es T_2.

Demostración:

El espacio (Z,τ_k) no es T_1.

Teorema 3.1.4

El espacio (Z,τ_k), es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Demostración:

No. Porque (Z,τ_k) no es T_2.

Teorema 3.1.5

El espacio (Z,τ_k) es T_3.

Demostración:

El espacio (Z,τ_k), no es T_2.

Teorema 3.1.6

El espacio (Z,τ_k) no es $T_{3\frac{1}{2}}$.

Demostración:

En este espacio (Z,τ_k) las únicas funciones continuas que existen son constantes.

Teorema 3.1.7

El espacio (Z,τ_k) es T_4.

Demostración: El espacio (Z,τ_k), no es T_3.

Teorema 3.1.8

El espacio (Z,τ_k), es T_5.

Demostración:

El espacio (Z,τ_k), no es T_4.

Teorema 3.1.9

El espacio (Z,τ_k), es de Uryshon.

Demostración:

No. En este espacio las únicas funciones continuas son constantes.

Teorema 3.1.10

El espacio (Z,τ_k), es Semiregular.

Demostración:

El espacio (Z,τ_k), no es un espacio T_2.

Teorema 3.1.11

El espacio (Z,τ_k), es Regular.

Demostración:

El espacio (Z,τ_k), es T_o pero no es T_3.

Teorema 3.1.12

El espacio (Z,τ_k), es completamente Regular.

Demostración:

No. Las únicas funciones continuas son constantes.

Teorema 3.1.13

El espacio (Z,τ_k), es Normal.

Demostración: Este espacio no es T_1 ni tampoco T_4.

Teorema 3.1.14

El espacio (Z,τ_k), es Completamente Normal.

Demostración:

El espacio (Z,τ_k) no es T_1 ni T_5.

Teorema 3.1.15

El espacio (Z,τ_k), es Perfectamente Normal

Demostración:

El espacio (Z,τ_k), no es un espacio T_1.

Teorema 3.1.16

El espacio (Z,τ_k), es totalmente T_4.

Demostración:

No. El espacio topológico (Z,τ_k)no es regular.

Teorema 3.1.17

El espacio (Z,τ_k), es compacto.

Demostración:

No. Este espacio topológico no posee un subcubrimiento finito que cubra todo el espacio.

Teorema 3.1.18

El espacio (Z,τ_k), es $\sigma - Compacto.$

Demostración:

Si. El espacio (Z,τ_k), está formado por la unión de conjuntos contables compactos.

Teorema 3.1.19

El espacio (Z, τ_k) es *Lindelöff*.

Demostración:

El espacio (Z, τ_k), es primero y segundo contable.

Teorema 3.1.20

El espacio (Z, τ_k), es contable compacto.

Demostración:

No. Las vecindades mínimas en este espacio forman un cubrimiento contable pero no poseen un subcubrimiento finito.

Teorema 3.1.21

El espacio (Z, τ_k), es secuencialmente compacto.

Demostración: Si.

Teorema 3.1.22

El espacio (Z, τ_k), es débil contable compacto.

Demostración:

No. El conjunto de números pares no tiene un punto de acumulación.

Teorema 3.1.23

El espacio (Z, τ_k), es pseudo compacto.

Demostración:

Si. Tenemos que la únicas funciones continuas sobre $\Re$ en este espacio son constantes y por lo tanto acotadas.

Teorema 3.1.24

El espacio (Z,τ_k), es localmente compacto.

Demostración:

Si. En este espacio las vecindades mínimas son finitas y por tanto compactas.

Teorema 3.1.25

El espacio (Z,τ_k), es fuerte localmente compacto.

Demostración:

Si. En este espacio las clausuras de las vecindades mínimas son finitas y por tanto compactas.

Teorema 3.1.26

El espacio (Z,τ_k), es σ-localmente compacto.

Demostración:

Si. El espacio (Z,τ_k) es σ- compacto y localmente compacto.

Teorema 3.1.27

El espacio (Z,τ_k) es separable.

Demostración:

El espacio (Z,τ_k) es primer y segundo contable.

Teorema 3.1.28

El espacio (Z,τ_k) es primer contable.

Demostración:

El espacio (Z,τ_k) posee una vecindad mínima en donde cada una tiene una base local contable.

Teorema 3.1.29.

El espacio (Z, τ_k) es segundo contable.

Demostración:

Todo espacio segundo contable es primer contable.

Teorema 3.1.30

El espacio (Z, τ_k) es paracompacto y metacompacto.

Demostración:

Tenemos que en este espacio la familia de vecindades mínimas es un refinamiento de todo cubrimiento de Z y es obvio que ésta es puntualmente finita y localmente finita. Por lo tanto es meta y paracompacto.

Teorema 3.1.31

El espacio (Z, τ_k), es conexo.

Demostración:

Si. Tenemos que este espacio (Z, τ_k) es la imagen de la función redondeo de $\Re$ en Z dotado de la topología de Khalymski.

Teorema 3.1.32

El espacio (Z, τ_k), es conexo por camino.

Demostración:

Si. Sea m un entero par entonces existe una función continua

$$f : [0,1] \rightarrow Z \quad tal\ que\ f(0) = m\ y\ f(1) = m + 1.$$

En efecto si definimos $f(x)=m$ si $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ y $f(x)=m+1$ si $x \in \left(\frac{1}{2},1\right]$, f resulta continúa.

Sea $n \in Z$ si n es impar su vecindad mínima es $V(n)=\{n\}$.

Si n es distinto de $m+1$, $f^{-1}(V(n))$ es vacío, luego abierto, si $n=m+1$, $f^{-1}(V(n))=\left(\frac{1}{2},1\right]$ que también es abierto en $[0,1]$.

Si n es par y $n \neq m$, $f^{-1}(V(n))$ es vacío, luego abierto, si $m=n$, como la vecindad mínima de n es $V(n)=\{n-1,\ n, n+1\}=\{m-1,\ m,\ m+1\}$, resulta que $f^{-1}(V(n))=[0,1]$.

Hemos probado así que las vecindades mínimas tienen imágenes inversas abiertas por f, y esto equivale a decir que f es continua.

Esto prueba que dos enteros consecutivos siempre se pueden unir por un camino en Z, y por lo tanto Z es conexo por caminos.

Teorema 3.1.33

El espacio (Z,τ_k) es arco conexo.

Demostración:

No, porque no se puede definir una función inyectiva de [0,1] en Z.

Teorema 3.1.34

El espacio (Z,τ_k) es localmente conexo por camino.

Demostración:

Las vecindades mínimas son conexas por caminos.

Teorema 3.1.35

El espacio (Z, τ_k) es hiperconexo.

Demostración:

No, porque {1} y {3} son abiertos disjuntos.

Teorema 3.1.36

El espacio (Z, τ_k) es ultraconexo.

Demostración:

No, porque $\{2\}$ y $\{4\}$ son cerrados disjuntos.

Teorema 3.1.37

El espacio (Z, τ_k) es localmente conexo.

Demostración:

Si, las vecindades mínimas son conexas. Si n esta en $Z = \{n, n+2\}$ no es abierto.

Teorema 3.1.38

El espacio (Z, τ_k) es localmente arco-conexo.

Demostración: No, porque no es contable.

Teorema 3.1.39

El espacio (Z, τ_k) es biconexo.

Demostración:

El conjunto de los enteros mayores o iguales a cero es conexo puesto que es la imagen de la función valor absoluto de $\Re$ en Z, es continua, Lips-1 y además par.

Si se prueba que el conjunto de los enteros negativos $Y = \{-1,-2,-3,....\}$ es conexo, podemos concluir que no es biconexo.

Basta probar que $X = \{1,2,3,.....\}$ es conexo, pues la aplicación $f(n) = -n$ también es Khalimsky continua.

Supongamos que X no es conexo y $X \subset A \cup B$, donde A, B son abiertos y $A \cap B = \phi$, esto quiere decir que todos los pares no pueden estar incluidos en A, porque sino también estarían incluidos los impares y B sería entonces vacío. Sea m el menor par no incluido en A, entonces m está en B.

Como B es abierto $\{m-1, m, m+1\} \subset B$. Esto implica que $m+2$ tampoco está en A, pues si $m+2 \subset A$, $\{m+1, m+2, m+3\}$ estaría incluido en A.

Esto es absurdo, pues $m+1 \in B$. De esta forma se prueba que A no contiene ningún par mayor que m, es decir todos los pares mayores o iguales a m están en B. Esto implica que todos los impares mayores o iguales a $m-1$ están en B. Es decir sea $C = \{m-1, m, m+1,....\} \subset B$. De igual forma si n es el menor par no incluido en B, $D = \{n-1, n, n+1,....\} \subset A$.

Así $C \cap D \subset A \cap B = \phi$.Pero esto es absurdo porque $B \cap C \neq \phi$.

Luego X es conexo y por lo tanto Y es conexo.

Así $\mathrm{Z} = \{X \cup \{0\} \cup Y\}$ con $\{X \cup \{0\}\}$, Y conexos no vacíos disjuntos.

Por la tanto Z no es biconexo.

Teorema 3.1.40

El espacio (Z, τ_k) es localmente biconexo.

Demostración:

No. Porque no es biconexo.

Teorema 3.1.41

En el espacio (Z,τ_k) todos sus puntos son de dispersión.

Demostración:

Si n es par $\mathrm{Z}-\{n\}=\{m;\, m<n\}\cup\{m;\, m>n\}$, ambos abiertos.

Si n es impar $\mathrm{Z}-\{n\}=\{m;\, m<n\}\cup\{m;m>n\}$, ambos cerrados.

Por lo tanto todos sus puntos son de dispersión.

Teorema 3.1.42

El espacio (Z,τ_k) es totalmente disconexo por camino.

Demostración:

No, porque es conexo por camino.

Teorema 3.1.43

El espacio (Z,τ_k) es totalmente disconexo.

Demostración:

No, porque es conexo.

Teorema 3.1.44

El espacio (Z,τ_k) es totalmente separado.

Demostración:

No, los espacios totalmente separados son disconexos.

Teorema 3.1.45

El espacio (Z,τ_k) es extremadamente disconexo.

Demostración:

No. Porque el espacio (Z, τ_k) no es T_2.

Teorema 3.1.46

El espacio (Z, τ_k), es Cero-dimensional.

Demostración:

No. Porque (Z, τ_k) es conexo.

Teorema 3.1.47

El espacio (Z, τ_k), es disperso.

Demostración:

No. Si A contiene solamente números pares y $n \subset A$, $\{n-1, n, n+1\} \cap \{A - \{n\}\} = \phi$.

Si A contiene a n impar $\{n\} \cap \{A - \{n\}\} = \phi$. Ningún subconjunto de Z es denso en sí mismo.

Teorema 3.1.48

El espacio (Z, τ_k), es discreto.

Demostración: No.

Teorema 3.1.49

El espacio (Z, τ_k), es metrizable.

Demostración:

No, porque no es pseudometrizable.

Teorema 3.1.50

El espacio (Z, τ_k), es de segunda categoría.

Demostración:

Sí. Los nunca densos son los subconjuntos del conjunto de los números pares. Por lo tanto cualquier unión de nunca densos es distinta de Z.

Teorema 3.1.51

El espacio (Z, τ_k), es topológicamente completo.

Demostración:

No, porque no es metrizable.

Teorema 3.1.52

El espacio (Z, τ_k), tiene una familia localmente finita.

Demostración:

Si pues la base formada por las vecindades mínimas es una familia localmente finita.

Teorema 3.1.53

El espacio (Z, τ_k), es fuertemente conectado.

Demostración:

Si, pues no existen funciones continúas sobre $\Re$ no constantes.

GLOSARIO

1. **Axioma** T_o: Si $a, b \in X$, entonces existe un conjunto abierto $A \in \tau$ tal que se verifica una de las siguientes proposiciones; $a \in A$ y $b \notin A$ o bien $b \in A$ y $a \notin A$.
2. **Axioma** T_1: Si $a, b \in X$, entonces existen abiertos $O_a, O_b \in \tau$, con $a \in O_a$ y $b \in O_b$ respectivamente, tal que $b \notin O_a$ y $a \notin O_b$.
3. **Axioma** T_2: Si $a, b \in X$, entonces existen conjuntos abiertos disjuntos V_a y $V_b \in \tau$ tales que $a \in V_a$ y $b \in V_b$.
4. **Axioma** T_3: Si A es un cerrado y $b \notin A$, entonces existen abiertos disjuntos V_a y V_b tales que $A \subset V_a$ y $b \in V_b$.
5. **Axioma** T_4: Si A y B son cerrados disjuntos en X, entonces existen abiertos disjuntos V_a y V_b tales que $A \subset V_a$ y $B \subset V_b$.
6. **Axioma** T_5: Si A y B son conjuntos separados en X, entonces existen abiertos disjuntos O_A y O_B tales que $A \subset O_A$ y $B \subset O_B$.
7. **Axioma** $T_{2\frac{1}{2}}$: Si a y b son dos puntos de un espacio topológico X, entonces existen conjuntos abiertos O_a y O_b con $a \in O_a$ y $b \in O_b$ tal que $\overline{O_a} \cap \overline{O_b} = \emptyset$.

8. **Axioma** $T_{3\frac{1}{2}}$: Si $A \subset X$, A cerrado y $b \notin A$, existe una función de Uryshon para A y $\{b\}$.
9. **Primer Contable:** Un espacio topológico es primer contable si el tiene un sistema de vecindades en donde cada punto posee una base local contable.
10. **Segundo Contable:** Un espacio topológico es segundo contable si tiene una base contable.
11. **Separable:** Un espacio topológico es separable si tiene un subconjunto denso contable.
12. **Lindelóff:** Un espacio topológico es llamado Lindelóff si cada cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento contable.
13. **Localmente Compacto:** Un espacio topológico es llamado localmente compacto si cada punto está contenido en una vecindad compacta.
14. **Localmente Finito:** Sea X un espacio topológico. Una colección A de subconjuntos de X se dice que es localmente finito en X si todo punto de X tiene una vecindad que interseca sólo a un número finito de elementos de A.
15. **Paracompacto:** Un espacio X es paracompacto si todo cubrimiento abierto A de X tiene un refinamiento abierto localmente finito B que recubre X.

23. **Conexo por Camino:** Un espacio es conexo por camino si para cada par de puntos a y b , existe una función continua f tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$. La existencia de una función continua entre dos puntos en un espacio, es una relación de equivalencia.

24. **Localmente Conexo por Arco:** Un espacio es localmente conexo por arco si los arco-componente de los subconjuntos abiertos de X son abiertos en X

25. **Conexo:** Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Un conjunto A es conexo, si A es la unión de dos conjuntos no vacíos separados.

26. **σ– Compacto:** Sea X un espacio topológico, X es llamado σ-compacto si él es la unión contable de conjuntos compactos

27. **Espacios Contable Compacto**: Un espacio topológico X es llamado contable compacto si una de las condiciones equivalentes se satisface:

    - Todo cubrimiento abierto contable de X tiene un subconjunto finito.
    - Todo conjunto infinito tiene un punto w-acumulación en X.
    - Toda sucesión tiene un punto de acumulación en X.
    - Toda colección contable de conjuntos cerrados con una intersección vacía tiene una subfamilia finita con una intersección vacía.

28. **Espacio Secuencialmente Compacto:** Un espacio topológico X es llamado secuencialmente compacto si toda sucesión tiene una sub-sucesión convergente.

29. **Espacio Débil Contable Compacto:** Un espacio topológico X es débil contable compacto si todo conjunto infinito tiene un punto límite.

30. **Espacio Pseudocompacto**: Un espacio X es llamado pseudocompacto si toda función real continua en X es acotada.

31. **Disperso:** Un espacio X es disperso si tiene un subconjunto denso en sí mismo.

32. **Familia localmente finita:** Es una familia de conjuntos de un espacio topológico para la cual cada punto tiene una vecindad que corta solo un número finito de miembros de la familia.

33. **Segunda categoría:** No es la unión contable de nunca densos.

34. **Base σ- localmente finita:** Una base que es la unión de familias localmente finitas.

35. **Espacio Compacto Local Fuerte:** Un espacio X es llamado compacto local fuerte si para cada punto x existe un abierto O cuya clausura contiene a x y es compacto.

36. **Espacio σ —Localmente Compacto:** Un espacio X es localmente compacto si es σ-compacto y localmente compacto.

37. **Condición de Cadena Contable:** Toda familia disjunta de conjuntos abiertos es contable.

38. **Espacio Semiregular:** Llamamos a un espacio Semiregular a un espacio T_2 en donde los conjuntos abiertos regulares forman una base para la topología.
39. **Hiperconexo:** Un conjunto en donde no existen abiertos no vacíos disjuntos.
40. **Ultraconexo:** Un conjunto en donde no existen cerrados no vacíos disjuntos.
41. **Biconexo**. Conexo que no es la unión de dos conexos no vacíos disjuntos.
42. **Puntos de dispersión**. Si existe x tal que $X - \{x\}$ es disconexo.

CONCLUSIONES

Es importante destacar que este trabajo es único con respecto a la categorización de la Topología de Khalimsky, por eso podemos afirmar los siguientes enunciados.

- El espacio (Z, τ_k) posee las siguientes propiedades:
  - T_o
  - σ- Compacto.
  - $Lindelöff$
  - Primero y segundo contable.
  - Secuencialmente compacto
  - Pseudo compacto
  - Localmente compacto
  - Fuerte localmente compacto
  - $\sigma -$ localmente compacto
  - Separable
  - Paracompacto y metacompacto
  - Conexo
  - Conexo por camino
  - Localmente conexo por camino
  - Localmente conexo

- Todos sus puntos son de dispersión.
- Segunda categoría
- Tiene una familia localmente finita
- Fuertemente conectado.

➢ El espacio (Z, τ_k) no posee las siguientes propiedades:

- T_1
- T_2
- $T_{2\frac{1}{2}}$
- T_3
- $T_{3\frac{1}{2}}$
- T_4
- T_5
- Uryshon.
- Semiregular.
- Regular.
- Completamente Regular.
- Normal.
- Completamente Normal.
- Perfectamente Normal.
- Totalmente T_4

- Compacto
- Contable compacto
- Débil contable compacto
- Arco conexo
- Hiperconexo
- Ultraconexo
- Localmente arco-conexo
- Biconexo
- Localmente biconexo
- Totalmente disconexo por camino
- Totalmente disconexo
- Totalmente separado
- Extremadamente disconexo
- Cero-dimensional
- Disperso
- Discreto
- Metrizable
- Topológicamente completo

BIBLIOGRAFÍA

1. ALEXANDROFF, PAUL, Diskrete Raume. Mat, Sb.2 (44), (1937), 501-519
2. ARENAS, FRANCISCO G, "Alexandroff Spaces." Acta Math. Univ.Comenianae LXVIII, 1 (1999),17-25
3. KHALIMSKY, EFIM, "Topological Structures in Computer Science". Journal of Applied Math. And Simulation Vol.1 (1987), 25-40.
4. KHALIMSKY, EFIM; KOPPERMAN, RALPH; MEYER, PAUL R. "Computer Graphics and Connected Topologies on Finite Ordered Sets" Topology Appl. 36 (1990), 1-17.
5. KOVALEVSKY, VLADIMIR "Axiomatic Digital Topology", 2006.
6. MELIN, ERIK, "Continuous Digitization in Khalimsky Spaces" Journal of approximation Theory 2008 Vol. 150 Page. 96-116. 2008.
7. MELIN, ERIK, "Connectedness and Continuity in Digital Spaces with the Khalimsky Topology" 2003.
8. MELIN, ERIK, "Digital Straight lines in the Khalimsky Plane" 2003.
9. MELIN, ERIK, "Extension of Continuous Functions in Digital Spaces with the Khalimsky Topology". 2004.
10. MELIN, ERIK Tesis Doctoral Universidad de Uppsala.
11. MUNKRES, J.R., Topología, Prentice-Hall, 2^a edición, España, 2000.
12. RUBIANO, G. N., Topología General, Sección de publicaciones de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional, Colombia, 1997.

13. STEEN L. A. Y SEEBACH J. A. Counterexample in Topology, Dover Publications, Inc., New York, 1995.