UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA

LA IMPORTANCIA DE LOS DETERMINANTES EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL

MAGELIS MICHEL CASAS MELA

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ
2018

Título de la Tesis: **"LA IMPORTANCIA DE LOS DETERMINANTES EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL"**

TESIS

Sometida para optar al título de Maestría en Matemática Educativa

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología

APROBADO POR:

Doctor Jaime Gutiérrez

Presidente

Profesor Josué Ortiz

Miembro

Profesor Eric Hidalgo

Miembro

REFRENDADO POR:

Representante de la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

FECHA: ______________________

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, agradezco a Dios nuestro padre por darme la vida y la inteligencia para poder culminar mis estudios.

También, al Doctor Jaime Gutiérrez, por haber aceptado asesorarme y al profesor Jorge Hernández por compartirme parte de sus conocimientos.

A mi familia, a mis padres y hermanos por su incondicional apoyo y comprensión. En especial a mi madre por brindarme sus palabras de aliento en los momentos más difíciles.

Finalmente deseo expresar mi más sincera gratitud a mis compañeros, amistades y familiares que de una u otra manera contribuyeron a que la culminación de mis estudios se realizara.

A todos muchas gracias.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo con mucho amor y cariño:

A mis padres Maribel y Epiménides por siempre haber estado junto a mí apoyándome.

A mis hermanos Edwin y Milagros por su comprensión y cariño.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

En esta investigación presentamos un estudio de un tópico muy particular del Álgebra lineal básica; a saber, empleando la teoría de los determinantes y sin el uso de ella. Seguimos los puntos de vista de Garry Tee, Sheldon Axler y Charles Broyden. Estudiamos para ello conceptos básicos de Álgebra lineal como lo son matrices, cambio de base, determinantes, vectores y valores propios de una matriz y de un operador, ecuación y polinomio característico de una matriz. Se ejemplifica la forma de hallar valores propios y su multiplicidad algebraica y geométrica. Probamos teoremas que relacionan los valores y vectores propios con el polinomio característico, así como otros resultados de valores y vectores propios. Finalmente se hace una comparación de los dos enfoques: Garry Tee y Charles Broyden estableciendo ventajas y desventajas de ambos. Para ello se presentan demostraciones de algunos teoremas, a fin de establecer una conclusion sobre si emplear o no los determinantes en el desarrollo del Álgebra lineal.

ABSTRACT

In this research we introduce a study of linear algebra using the theory of determinants and another one without this theory. We focus in the view points of Garry Tee, Sheldon Axler y Charles Broyden. We study to do so basics concepts of linear algebra like matrixes, change of base, determinants, vectors, and eigenvalues of a matrix and an operator, equation and characteristic polynomial of a matrix. It illustrates the form of finding eigenvalues, algebraic and geometric multiplicity. We review the proofs of theorems that relate values and eigenvectors with characteristic polynomial as well as some another results of values and eigenvectors. Finally, we make a comparison of two approaches: Garry Tee and Charles Broyden looking for advantages and disadvantages. For that we show demonstrations of some theorems trying to find a conclusion.

INTRODUCCIÓN

Son muchos los investigadores que emplean los determinantes en sus trabajos, sin embargo, para algunos matemáticos como Sheldon Axler los determinantes sólo son necesarios en alguna pequeña parte del pregrado, como por ejemplo la fórmula de cambio de variables en las integrales múltiples, pero para otros existen áreas significativas de la Matemática de pregrado que requieren el uso de los determinantes. El tema central de este trabajo radica en hacer un estudio de la teoría de determinantes en el Álgebra lineal y sus usos en esta.

En el primer capítulo nos centramos en el estudio de los conceptos básicos y propiedades de los determinantes en el Álgebra lineal. Así como los conceptos de permutaciones, matriz de cambio de base, semejanza, entre otros.

En el segundo capítulo estudiamos los vectores y valores propios de una matriz. Demostramos algunas equivalencias. Definimos polinomio característico, espacio propio de una matriz asociado al valor propio correspondiente, así como el concepto de multiplicidad geométrica y algebraica- También demostramos teoremas sobre la existencia de valores propios y matrices singulares y diagonales.

En el tercer capítulo estudiamos los escritos de Garry Tee y Sheldon Axler sobre los determinantes. Para ello, presentamos demostraciones de teoremas presentadas por ambos en los que el primero está a favor del uso de los determinantes en muchos temas del Álgebra Lineal y el segundo aboga para que estos sean eliminados.

Además en base a ambos enfoques buscamos dar una conclusión respecto a usar o no los determinantes en la enseñanza del Álgebra lineal.

CAPÍTULO I

MARCO TEÓRICO

1.1 Espacio vectorial

Definición 1.1.1: Sea $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ o $\mathrm{K}=\mathbb{C}$. $\mathrm{V}\neq\varnothing$ un conjunto con dos operaciones $+,\bullet$ tales que:

1) $x+y\in \mathrm{V} \quad ,\forall x,y\in \mathrm{V}$
2) $\alpha x\in \mathrm{V} \quad ,\forall \alpha\in \mathrm{K},\forall x\in \mathrm{V}$
3) $(x+y)+z=x+(y+z),\ \forall x,y,z\in \mathrm{V}$
4) $x+y=y+x \quad ,\forall x,y\in \mathrm{V}$
5) $\exists 0\in \mathrm{V}$ tal que $\mathrm{x}+0=\mathrm{x}\ ,\forall \mathrm{x}\in \mathrm{V}$
6) $\forall \mathrm{x}\in \mathrm{V}$ existe un $y\in \mathrm{V}$ tal que $\mathrm{x}+\mathrm{y}=0$

   O sea que $(\mathrm{V},+)$ es un grupo abeliano

7) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \quad ,\forall \alpha,\beta\in \mathrm{K},\forall x\in \mathrm{V}$
8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad ,\forall \alpha\in \mathrm{K},\forall x,y\in \mathrm{V}$
9) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad ,\forall \alpha,\beta\in \mathrm{K},\forall x\in \mathrm{V}$
10) $1\bullet x=x \quad ,\forall x\in \mathrm{V}$

   Luego se dice que$(V,+,\bullet)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo K

Definición 1.1.2: Sea $(V,+,\bullet)$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo K y W un subconjunto no vacio de V. W es un subespacio vectorial de V si y solo si W satisface las siguientes propiedades

1) $x+y\in \mathrm{W} \quad ,\forall x,y\in \mathrm{W}$
2) $\alpha x\in \mathrm{W} \quad ,\forall \alpha\in \mathrm{K},\forall x\in \mathrm{W}$

O equivalentemente, si $\alpha x+\beta y\in \mathrm{W} \quad ,\forall x,y\in \mathrm{W},\forall \alpha,\beta\in K$

Definición 1.1.3: Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial y $B \subset V$, $B \neq \varnothing$. $[B]$ es el menor subespacio de V que contiene al conjunto B. Si existe un subconjunto B de V tal que $V = [B]$, entonces se dice que B es un generador de V.

Definición 1.1.4: Sea V un espacio vectorial y $B \subset V$, $B \neq \varnothing$, B es una base para V si B es linealmente independiente y si B genera a V.

Definición 1.1.5: Se llama dimensión de un espacio vectorial V sobre el cuerpo K, al cardinal común de las bases de V.

1.2 Funciones lineales

Definición 1.2.1: Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo K y $T: V \rightarrow W$ una función. T es una función lineal u operador si:

1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$, $\forall x, y \in V$
2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $\forall x \in V, \forall \alpha \in K$

Propiedad 1.2.1: Supongamos que $\dim(V) = n < \infty$ y sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V y $\{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n\}$ un subconjunto de W. Entonces existe una única función lineal $T: V \rightarrow W$ tal que

$$T(v_1) = w_1 \qquad T(v_2) = w_2 \qquad \ldots \qquad T(v_n) = w_n$$

Teorema 1.2.1 (Las dimensiones): Sea $T: V \rightarrow W$ una función lineal y $\dim(V) < \infty$. Entonces

$$\dim(V) = \dim\left[Ker(T)\right] + \dim\left[Ran(T)\right]$$

Definición 1.2.2: Sea $T : V \rightarrow W$ una función lineal. Si T es biyectiva, entonces se dice que T es un isomorfismo. En este caso se dice que V y W son espacios isomorfos y se denota por $V \approx W$.

1.3 Permutación

Definición 1.3.1: Dado un conjunto finito, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, una permutación es una aplicación biyectiva f, en la que hay una reordenación de los elementos de S

$$f : S \rightarrow S$$

Para representar una permutación podemos usar las siguientes notaciones

- $f = (3, 2, 5, 6, 1, 4)$ permutación como lista

La notación $f = (3, 2, 5, 6, 1, 4)$, indica que 1 va a 3, 2 va a 2, 3 va a 5, 4 a 6, 5 va a 1 y 6 a 4.

- $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ permutación como aplicación biyectiva

Definición 1.3.2: El conjunto de las permutaciones de n elementos se denota por S_n y se llama grupo simétrico de grado n. Además $|S_n| = n!$. Si $n > 2$, S_n no es abeliano.

Definición 1.3.3: Para realizar la composición de permutaciones se procede de derecha a izquierda. Veamos un ejemplo

Sean $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} y \; g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definición 1.3.4: Si en una permutación se sustituye cada elemento por el siguiente y el último por el primero la permutación se llama cíclica. Se representa escribiendo la permutación en paréntesis. Si el ciclo tiene n elementos se llama n-ciclo o ciclo de longitud n. Cualquier 1-ciclo es la permutación identidad.

Ejemplo 1.3.1

Consideremos la permutación de S_6

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

En la misma se fijan los elementos 3 y 6. La permutación f se puede representar mediante la forma $\mho_6\,(1\,2\,5\,4)$, esto es

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \mho_6(1\,2\,5\,4)$$

Así f es un 4-ciclo o un ciclo de longitud 4

Observación: No se necesita iniciar por el número 1 en la escritura de un ciclo por lo tanto una permutación cíclica f, pude ser escrito de varias maneras, como se presenta a continuación:

$$f=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)=(2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1)=(3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2)$$

Definición 1.3.5: Sean dos ciclos de S_n: $f=(a_1\ a_2\ \dots\ a_m)$ y $g=(b_1\ b_2\ \dots\ b_r)$. Se dice que f y g son disjuntos si para todo i, j se verifica que $a_i \neq b_j$, con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$.

Con el uso de los ciclos podemos expresar las permutaciones como una composición de ellos. Veamos un ejemplo

Ejemplo 1.3.2

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

f se puede representar como la composición de ciclos

$$f=\circlearrowleft_6(1\,3)\circ\circlearrowleft_6(2\ 4\ 6)\circ\circlearrowleft_6(5)$$

Observemos que cada uno de estos ciclos son disjuntos dos a dos, por lo que el orden en el que aparecen no es relevante. Así

$$\begin{aligned} f&=\circlearrowleft_6(5)\circ\circlearrowleft_6(1\ 3)\circ\circlearrowleft_6(2\ 4\ 6)\\ &=\circlearrowleft_6(5)\circ\circlearrowleft_6(3\ 1)\circ\circlearrowleft_6(6\ 2\ 4)\end{aligned}$$

Para descomponer una permutación $f \in S_n$ en ciclos consideramos un elemento cualquiera del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, digamos el 1 y luego calculamos

$$1, f(1), f^2(1), f^3(1), ...$$

Notemos que esta lista podemos extenderla hasta donde deseamos, pero que dichos valores pertenecen al conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, por lo que por el principio del palomar existe $a \in \{1, 2, ..., n\}$ y $s \in \mathbb{N}$, tal que $f^s(a) = 1$. Si s=n, entonces f sería una permutación cíclica y

$$f = \circlearrowleft_n \left(1 \quad f(1) \quad f^2(1) \quad f^3(1) \cdots f^{n-1}(1)\right)$$

Si por el contrario la longitud del ciclo fuese menor que n, entonces repetiríamos el proceso, pero ahora iniciando por el primer elemento o cualquier elemento que no pertenezca al ciclo anterior y repetiríamos estos pasos hasta agotar los elementos del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Cada uno de los ciclos que vamos obteniendo son disjuntos dos a dos

Teorema 1.3.1: Si una permutación $f \in S_n$ es cíclica, entonces el orden de f es n. Para el caso en que f sea obtenida por la composición de ciclos de longitudes $l_1, l_2, ..., l_m$, entonces

$$\begin{aligned} orden(f) &= \min\{k \geq 1 : f^k = id\} \\ &= \min\{l_1, l_2, ..., l_m\} \end{aligned}$$

Definición 1.3.6: Una transposición es un 2-ciclo o ciclo de longitud 2 y su efecto es intercambiar 2 elementos y fijar al resto.

Definición 1.3.7: Se dice que una permutación $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, es una inversión si un entero mayor j_r precede a uno menor j_k. Una permutación se denomina par o impar si tiene un número par o impar de inversiones respectivamente.

Ejemplo 1.3.3

Consideremos la permutación principal (1,2,3,4,5)

- (1,2,3,5,4) es de orden impar (una inversión)
- (2,1,3,5,4) es de orden par (dos inversiones)

Para determinar el número de inversiones de una permutación se empieza por el primer elemento de la izquierda y se va comparando con cada elemento de su derecha, contando así cada inversión, luego se efectúa el mismo procedimiento con el segundo elemento de la permutación y así sucesivamente hasta llegar al penúltimo elemento, al final se suma para obtener el número total de permutaciones y así determinar si es par o impar.

Veamos que la permutación (3,2,4,5,1) es impar. Para determinar qué tipo de inversión es comparamos el 3 con el 2, luego el 3 con el 4, después el 3 con el 5 y finalmente el 3 con el 1 y tenemos 2 inversiones: el 3 con 2 y el 3 con 1. Luego repetimos este procedimiento con el segundo término de la permutación, es decir, el 2 con el 4, el 2 con el 5 y el 2 con el 1, resultando una inversión el 2 con el 1, ahora seguimos con el tercer término el 4, comparamos el 4 con el 5 y el 4 con el 1, resultando una inversión más y finalmente comparamos el 5 con el 1 la cual es otra inversión más, resultando así un total de 5 inversiones, por lo que la inversión es impar.

Definición 1.3.8: Los desbarajustes son un tipo especial de permutaciones, que no fijan elemento alguno, esto es, en la aplicación biyectiva se tiene que para cada $j = 1,\ldots,n$, el símbolo j no ocupa la posición j de la lista

Existen permutaciones que al ser descompuestas en ciclos cumplen ciertas propiedades especiales, tal es el caso de las permutaciones cíclicas que son un caso especial de los desbarajustes. Para las permutaciones cíclicas podemos escoger cuál es el primer elemento y por tanto solo debemos ordenar los elementos restantes. De donde la cantidad de permutaciones cíclicas es $(n-1)!$

De manera análoga para determinar el número de ciclos de orden k, empleamos la fórmula

$$\binom{n}{k}(k-1)!$$

Así para el caso de las transposiciones emplearíamos la fórmula

$$\binom{n}{2}$$

Consideremos b_j el número de ciclos de longitud j de una permutación $f \in S_n$

Así,

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \text{número total de ciclos}$$

$$\sum_{j=1}^{n} jb_j = \mathrm{n}$$

Notemos que cada elemento del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$, debe estar en algún ciclo de f. Además, los desbarajustes al no fijar ningún elemento tendríamos que $b_1 = 0$ y en el caso de las permutaciones cíclicas $b_n = 1$ y $b_j = 0$ para el resto.

Teorema 1.3.2: Toda permutación $f \in S_n$ distinta de id (permutación que deja fijos todos los elementos), se puede escribir como la composición de transposiciones.

Ejemplo 1.3.4

Consideremos la permutación

$$f = \circlearrowleft_5(3\ 1\ 4)$$

f fija al 2 y al 5 y mueve al resto de elementos

$$3 \to 1 \to 4 \to 3$$

Esto es,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, f también puede ser escrita como

$$\begin{array}{rccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
{}_5(3\quad 1) & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\
{}_5(3\quad 4) & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5
\end{array}$$

De esta manera,

$$f = \circlearrowleft_5 (3 \quad 4) \circ \circlearrowleft_5 (3 \quad 1)$$

Al expresar una permutación en término de transposiciones, debemos tener en cuenta que estas no son disjuntas por lo que el orden en que se aplican sí importa.

De manera general para escribir un ciclo de longitud k, tenemos que

$$\begin{aligned} f &= \circlearrowleft_n (a_1 \quad a_2 \quad \cdots a_{k-1} \quad a_k) \\ &= \circlearrowleft_n (a_1 \quad a_k) \circ \circlearrowleft_n (a_1 \quad a_{k-1}) \circ \ldots \circ \circlearrowleft_n (a_1 \quad a_2) \end{aligned}$$

Dado el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ analicemos la cantidad de desbarajustes que tiene, el cual denotaremos por D_n.

Sabemos que las permutaciones cíclicas son un tipo especial de desbarajuste y que en una permutación $f \in S_n$ hay $(n-1)!$ de ellas. Además, como hay $n!$ permutaciones en el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$, entonces

$$(n-1)! \leq D_n \leq n!$$

Si una permutación $f \in S_n$ no es un desbarajuste, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(k) = k$.

Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{permutaciones de } \{1,2,\ldots,n\} \text{ tal que } \mathrm{f}(1) = 1\} \\ A_2 &= \{\text{permutaciones de } \{1,2,\ldots,n\} \text{ tal que } \mathrm{f}(2) = 2\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{\text{permutaciones de } \{1,2,\ldots,n\} \text{ tal que } \mathrm{f}(n) = n\} \end{aligned}$$

Luego,

$$D_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

Donde

$$|A_k| = (n-1)! \qquad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Ya que A_k contiene a las permutaciones con el número k en la posición k. Sabemos que hay $\binom{n}{2}$ intersecciones dos a dos de estos conjuntos y que si fijamos dos elementos, entonces deberíamos rotar a los n-2 restantes. Así la cantidad de permutaciones que fijan a dos elementos es $(n-2)!$. Procediendo de esta manera para los demás casos, tenemos que:

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \left[\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots \pm \binom{n}{n}(n-n)! \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(n-j)!(-1)^j \\ &= n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \end{aligned}$$

Por lo que, para el caso de n grande, digamos mayor o igual a 10, tenemos que

$$D_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{1}{e}$$

de manera que el número de desbarajustes es $\frac{n!}{e}$

1.4 Matrices

Definición 1.4.1: Se llama matriz de orden mxn a un arreglo de mxn números (o letras que representan números) dispuestos en m filas y n columnas y encerrado entre paréntesis o corchetes. El conjunto de matrices de orden mxn con coeficientes sobre un cuerpo K se denota por $M_{mxn}(K)$, es un espacio vectorial sobre K de dimensión mxn. Se le llama diagonal principal de una matriz cuadrada a la formada por los elementos a_{ii} (es decir : $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$).

Definición 1.4.2: A continuación, se presenta un listado con los principales tipos de matrices

a) **Matriz Cuadrada:** Es la matriz que tiene el mismo número de filas y de columnas.
b) **Matriz Diagonal:** Es la matriz cuadrada cuyos términos situados fuera de la diagonal principal son todos nulos.
c) **Matriz Identidad:** Es una matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a uno, se denota por I_n donde n indica el orden.
d) **Matriz Triangular Superior:** Una matriz cuadrada se dice triangular superior si todos los términos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.
e) **Matriz Triangular Inferior:** Una matriz cuadrada se dice triangular inferior si todos los términos situados por encima de la diagonal principal son ceros.
f) **Matriz Conjugada**: La matriz conjugada de la matriz A es el resultado de la sustitución de los elementos de A por sus conjugados y se denota por $\overline{A}$. Note que, si A es una matriz real, entonces $A = \overline{A}$.
g) **Matriz transpuesta:** La transpuesta de una matriz A, es la matriz que resulta de cambiar las filas por las columnas y se denota por A^T.

   Propiedades (Transpuesta)

Sean $A \in M_{mxn}(K)$ y $r \in K$, entonces

1) $\left(A^T\right)^T = A$

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(AB)^T = B^T A^T$

4) $(rA)^T = rA^T$

h) **Matriz Transpuesta Conjugada:** Es la matriz obtenida de calcular la transpuesta de una matriz dada y para la matriz resultante obtener su conjugada. Se denota por $A^* = \overline{A^T}$.

i) **Matriz Hermitiana o Autoadjunta:** Sea $A \in M_n(K)$, A es una matriz hermitiana sí $A = A^*$. A es una matriz antihermitiana sí $A^* = -A$.

j) **Matriz Simétrica**: Una matriz A es simétrica si $A = A^T$, esto es $a_{ij} = a_{ji}$

k) **Matriz Antisimétrica:** Una matriz cuadrada A es antisimétrica si $-A = A^T$

Definición 1.4.3: La traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de la diagonal principal. Esto es,

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \text{ donde } A = (a_{ij})_{nxn}$$

Propiedades

1) $Tr(I_n) = n$

2) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

3) $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$

4) $Tr(AB)=Tr(BA)$

Definición 1.4.4: Sean $A\in M_{mxn}(K)$ y $B\in M_{mxn}(K)$ dos matrices, se denota la suma y la diferencia de estas dos matrices como $A+B$ y $A-B$ respectivamente. Si $C=A\pm B$, entonces

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$$

Para realizar estas operaciones las matrices deben tener el mismo orden (número de filas por el número de columnas de la matriz).

Definición 1.4.5: Sean $A\in M_{mxp}(K)$ y $B\in M_{pxn}(K)$ dos matrices, se denota el producto de estas dos matrices como AB, supongamos que $C=AB$. Luego, cada elemento de la matriz C se obtiene mediante la siguiente fórmula

$$c_{ij}=(ab)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\text{ , donde } A=(a_{ij})_{mxp};B=(b_{ij})_{pxn}$$

Para multiplicar dos matrices A y B, debe cumplirse que el número de columnas de la primera matriz A, sea igual al número de filas de la segunda matriz, B.

Propiedades de la multiplicación de matrices

1) $A(BC)=(AB)C$

2) $A(B+C)=AB+AC$

3) $(A+B)C=AC+BC$

4) Si $AB=0$, no implica que $A=0$ **ó** $B=0$

Definición 1.4.6: Una matriz está en forma escalonada si se verifican las siguientes condiciones:

1. Las filas de ceros aparecen por debajo de las filas no nulas .
2. El primer elemento no nulo en cualquier fila no nula es 1.
3. Todos los elementos que están en la misma columna, pero en las filas situadas por debajo del primer elemento no nulo de una fila no nula son cero.
4. El primer elemento no nulo de cualquier fila no nula aparece en una columna posterior (hacia la derecha) que el primer elemento no nulo en cualquier fila precedente.

Definición 1.4.7: Una matriz cuadrada A se dice que tiene inversa si existe una matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

La matriz que tiene inversa se conoce como regular o invertible y las que no lo son se conocen como singular.

Propiedades

1) Si A es una matriz no singular, entonces A^{-1} es no singular y $(A^{-1})^{-1} = A$

2) Si A y B son matrices no singulares, entonces AB es no singular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) Si A es una matriz no singular, entonces A^T es no singular y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Definición 1.4.8: Se dice que $A \in M_n(\mathrm{K})$ es una matriz ortogonal si su inversa coincide con su transpuesta, esto es

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^T$$

Lo cual implica que

$$\mathrm{AA}^T = \mathrm{A}^T A = I$$

Definición 1.4.9: El rango de una familia de vectores es el número máximo de vectores linealmente independientes que se pueden encontrar en la familia. En una matriz se define como el número máximo de filas o columnas linealmente independientes.

Para calcular el rango de una matriz se puede emplear el método de Gauss, esto es realizar operaciones elementales sobre los renglones de la matriz a fin de simplificarla y el número de filas no nulas que resulte es el rango de la matriz.

Las operaciones elementales en una matriz son:

a) Intercambiar dos filas
b) Multiplicar una fila por un número distinto de cero
c) Sumar un múltiplo de una fila a otra fila

1.5 Cambio de base

Definición 1.5.1: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre K y sea $B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V. Entonces para todo $x \in V$ existe un único $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ tal que

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n \qquad (1)$$

El vector

$$[x]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

se llama el vector coordenado de x referente a la base ordenada B y los escalares α_i se llaman los componentes de x referente a la base ordenada B.

Es claro que:

- $[x+y]_B = [x]_B + [y]_B$
- $[\alpha x]_B = \alpha [x]_B$

Más aún, la función

$$T : V \to K^n$$

$$T(x) = [x]_B$$

Es una función lineal biyectiva. Por lo tanto, V y K^n son espacios vectoriales isomorfos.

Definición 1.5.2: Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$, dos bases de V y W, respectivamente y $T : V \to W$ una función lineal. Además,

$$[T(v_i)]_{B_2} = \begin{bmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ t_{3i} \\ \vdots \\ t_{mi} \end{bmatrix}$$

La matriz asociada de T respecto a las bases ordenadas B_1 y B_2 es

$$ {}_{B_2}[T]_{B_1} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ t_{31} & t_{32} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} $$

$$ = \left[[T(v_1)]_{B_2}, [T(v_2)]_{B_2}, \cdots, [T(v_n)]_{B_2} \right] $$

Si $\mathrm{V} = \mathrm{W}$ y $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2$ entonces, ${}_{B_1}[T]_{B_1}$ es llamada la matriz de T respecto a B_1

Teorema 1.5.1: Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$, las bases de V y W, respectivamente y $T : V \to W$ una función lineal y

$$ {}_{B_2}[T]_{B_1} = A = (t_{ij})_{m \times n} $$

Entonces para todo $x \in V$, se tiene que

$$ [T(x)]_{B_2} = {}_{B_2}[T]_{B_1} [x]_{B_1} = A[x]_{B_1} $$

Demostración

Sea $x \in V$ tal que

$$ [x]_{B_1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} $$

Luego

$$ x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n $$

De donde

$$ T(x) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) + \ldots + \alpha_n T(v_n) $$

Supongamos que

$$[T(v_i)]_{B_2} = \begin{bmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ t_{3i} \\ \vdots \\ t_{mi} \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Entonces

$$[T(x)]_{B_2} = \alpha_1 \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \\ \vdots \\ t_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \\ \vdots \\ t_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ t_{3n} \\ \vdots \\ t_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & & t_{2n} \\ t_{31} & t_{32} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & & & \\ t_{m1} & t_{m2} & & t_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= {}_{B_2}[T]_{B_1} [x]_{B_1}$$

$$= A[x]_{B_1}$$

1.6 Semejanza

Definición 1.6.1: una matriz $B \in M_n(K)$ es semejante a una matriz $A \in M_n(K)$ si existe una matriz invertible $S \in M_n(K)$ tal que

$$B = S^{-1}AS$$

A la matriz S se le llama matriz de paso asociada a la relación de semejanza.

Notación

$A \sim B$ significa que B es semejante a A.

Teorema 1.6.1: La relación $\sim$ es de equivalencia.

Demostración

Reflexiva

Notemos que $A \sim A$, ya que $A = I^{-1}AI$.

Simétrica

Supongamos que $A \sim B$, entonces existe una matriz invertible $S \in M_n(K)$ tal que

$$B = S^{-1}AS$$

De donde

$$\begin{aligned} A &= SBS^{-1} \\ &= \left(S^{-1}\right)^{-1} B\left(S^{-1}\right) \end{aligned}$$

Por lo que $B \sim A$

Transitiva

Sea $A \sim B$ y $B \sim C$. Luego, existe una matriz invertible S tal que

$$B = S^{-1}AS \quad (1)$$

Además, existe otra matriz invertible P tal que

$$C = P^{-1}BP \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) se tiene que

$$\begin{aligned} C &= P^{-1}\left(S^{-1}AS\right)P \\ &= P^{-1}S^{-1}(A)SP \\ &= (SP)^{-1}A(SP) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \sim C$

Observaciones:

a) Dos matrices semejantes tienen el mismo rango

b) Si $A \sim B$, entonces $\det A = \det B$

c) Si $A \sim B$, entonces $A^k \sim B^k$ con la misma matriz de paso

1.7 Determinante

Definición 1.7.1: Sea $M_n(\mathrm{K})$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n, sobre un cuerpo K, se llama determinante a la aplicación

$$|\;|: M_n(\mathrm{K}) \to \mathrm{K}$$

la cual se define como

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in S_n} (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

con $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ una matriz de orden nxn, $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ una de las n! permutaciones y $\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)$ indica el índice de la permutación $(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

Donde la suma varía sobre todas las permutaciones del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, n\}$.

El signo de $(-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ es + o – si la permutación $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ es par o impar, respectivamente.

En cada término de $(-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, los subíndices de las filas están en su orden natural y los subíndices de las columnas están en el orden

$j_1, j_2, \ldots, j_n$. Además, $j_1 j_2 \ldots j_n$ no tiene repeticiones, ya que es un reordenamiento de los números desde 1 hasta n. En consecuencia, cada término en $\det(\mathrm{A})$ es un producto de n elementos de A, cada uno con su signo adecuado, en el cual hay exactamente un elemento de cada fila y uno de cada columna.

Este procedimiento resulta tedioso en el caso de determinantes de orden superior o igual a tres. El resultado anterior se recuerda con gran facilidad mediante la regla de Sarrus que agrupa por una parte los términos positivos, y por otra los términos negativos.

Propiedades

1. Si $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathrm{K})$ es la matriz nula, entonces $\det(\mathrm{A}) = 0$
2. Si $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathrm{K})$ es tal que una de sus, filas o columnas, está formada solo por ceros, entonces $\det(A) = 0$
3. El determinante de la matriz A es igual al determinante de transpuesta, esto es
$$\det\left(A^T\right) = \det(A)$$
4. Para la matriz identidad, se tiene que
$$\det(\mathrm{I}_n) = 1$$
5. Si $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathrm{K})$ es multiplicada por un escalar $\lambda \neq 0$, entonces
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$
6. Sea $A \in M_n(\mathrm{K})$, una matriz triangular superior o inferior, entonces

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

7. Dada $A \in M_n(\mathrm{K})$ y $B \in M_n(\mathrm{K})$ la matriz obtenida de A por intercambio de dos filas o dos columnas, se verifica que $\det(B) = -\det(A)$
8. Sea $A \in M_n(\mathrm{K})$, tal que en ella existen dos filas o dos columnas iguales, entonces $\det(\mathrm{A}) = 0$
9. Sea $A \in M_n(\mathrm{K})$ y sea $B \in M_n(\mathrm{K})$ la matriz obtenida multiplicando los elementos de una cualquiera de las filas o columnas de A por una constante real arbitraria λ , entonces se tiene que $\det(B) = \lambda \det(A)$
10. Sea $A \in M_n(\mathrm{K})$, tal que en ella existen dos filas o dos columnas proporcionales entonces su determinante es nulo.
11. Si $A \in M_n(\mathrm{K})$ es tal que en una de sus líneas cada elemento es una suma de dos sumandos, se verifica que su determinante es igual a la suma de los determinantes de dos matrices en las cuales las líneas que no son de sumandos permanecen inalteradas; en la línea de sumandos, y en la primera matriz, aparecen los primeros sumandos; en la segunda matriz, y en esa misma línea, los segundos sumandos de la matriz inicial. Es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Con

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

De donde $\det(A)=\det(B)+\det(C)$

12. Sea B la matriz que se obtiene a partir de una matriz cuadrada A sumando a una fila de A otra fila de A multiplicada por un escalar λ, entonces $\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})$.

13. Si A y B son matrices del mismo orden, entonces $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$

Las propiedades 7 y 9 muestran las llamadas operaciones elementales sobre filas

1.7.2 Cálculo de un determinante

1) Método de Sarrus

Este método se recomienda para matrices de orden dos o tres y está basado en la definición de determinantes empleando permutaciones. Ejemplos

a) Para determinantes de orden dos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

b) Para determinante de orden tres

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \left(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}\right)$$

2) Método de cofactores

Este método se emplea para determinantes de orden superior a tres. Veamos algunas definiciones básicas:

a) Menor complementario: Sea $A \in M_n(\mathrm{K})$, se llama menor complementario del elemento a_{ij} al determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A y se denota por m_{ij}.

Ejemplo 1.7.2.1: Consideremos la matriz de orden tres

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego el menor del elemento a_{23} denotado por m_{23} es

$$m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

b) Adjunto: es el producto del menor complementario m_{ij} del elemento a_{ij} por $(-1)^{i+j}$ y se denota por A_{ij}. Esto es

$$A_{ij=}(-1)^{i+j}\, m_{ij}$$

Ejemplo 1.7.2.2: Para la matriz del ejemplo anterior

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\, m_{23} = -m_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

El determinante de una matriz de orden n, es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera (fila o columna) por sus respectivos adjuntos. Esto es

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

En el desarrollo del determinante de orden n hay en total n! sumandos, cada uno de ellos formado por un producto de n términos, uno de cada fila y uno de cada columna.

Para calcular el determinante suele elegirse la línea (una fila o columna) que contenga más ceros, ya que facilita el cálculo del determinante.

3) Método triangularizante

Este método consiste en transformar la matriz a la que se va a evaluar el determinante en otra escalonada, a través de las operaciones elementales de matrices, ya que el determinante de la matriz escalonada es equivalente al de la original.

Una matriz escalonada es triangular por lo que para calcular su determinante se emplea la propiedad 6.

Teorema 1.7.2.1: En toda matriz $A \in M_n(K)$ se verifica que la suma de los productos de los elementos de una cualquiera de sus filas o columnas por los adjuntos de los elementos de otra fila o columna, vale cero.

Teorema 1.7.2.2: Sea $A \in M_n(K)$, entonces

$$\mathrm{AAdj}(\mathrm{A}) = \mathrm{Adj}(\mathrm{A})\mathrm{A} = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}$$

con $\mathrm{Adj}(\mathrm{A})$ la matriz formada por los adjuntos de los elementos de A

Proposición 1.7.2.1: Sea $A \in M_n(K)$. A es regular si y solo si $\det(A) \neq 0$

Demostración

$\Rightarrow$) Si A es regular, entonces existe $A^{-1} \in M_n(K)$ tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Entonces

$$\begin{aligned}\det\left(AA^{-1}\right) &= \det\left(A^{-1}\right)\det(A) \quad \text{Propiedad 13}\\ &= \det(I)\\ &= 1\end{aligned}$$

Así pues,

$$\det\left(A^{-1}\right)\det(A) = 1$$

De donde $\det(A) \neq 0$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\det(A) \neq 0$

Consideremos la matriz $\mathrm{Adj}(\mathrm{A})$, la cual está formada por los adjuntos de cada elemento de la matriz A

$$\mathrm{Adj}(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea B la matriz que resulta de transponer y dividir los términos de la matriz anterior por $|A| = \det(A) \neq 0$. Luego

$$B=\frac{\mathrm{Adj}(A)}{|A|}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Calculamos AB

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\cdots+a_{1n}A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\cdots+a_{1n}A_{nn}}{|A|} \\ \frac{a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\cdots+a_{2n}A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{2n}A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2}+\cdots+a_{2n}A_{nn}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\cdots+a_{nn}A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{n1}A_{21}+a_{n2}A_{22}+\cdots+a_{nn}A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\cdots+a_{nn}A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

El numerador de los elementos de la diagonal principal corresponde al determinante de la matriz A, pues es la suma de los productos de cada elemento de una fila por sus respectivos adjuntos. Por lo tanto, cada elemento de la diagonal principal vale uno. Además, por el teorema anterior el resto de los elementos de la matriz vale cero. De donde

$$AB=I$$

De manera análoga sucede si consideramos el producto BA.

1.8 Sistemas homogéneos

Un sistema lineal de la forma

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

se le llama sistema homogéneo. Este sistema puede ser escrito en forma matricial como

$$Ax = 0$$

Si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es una solución del sistema, a dicha solución se le conoce como solución trivial del sistema. Dada una solución del sistema en que algún, $x_i \neq 0$ la solución se conoce como solución no trivial.

Teorema 1.8.1: Si A es una matriz cuadrada de orden n, el sistema homogéneo

$$Ax = b$$

tiene una solución no trivial, si A es singular

Teorema 1.8.2: Un sistema de ecuaciones con m ecuaciones y n incógnitas, tiene una solución no trivial si el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, esto es si $m < n$.

Teorema 1.8.3: Si A es una matriz cuadrada, A es regular si y solo si el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada matriz b de orden $nx1$

CAPÍTULO II

VALORES Y VECTORES PROPIOS

2.1 Valor y vector propio en una matriz y un operador

Definición 2.1.1: Dada una matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}\in M_n(K)$ se dice que $\lambda\in K$ es un valor propio de A si existe un vector columna n-dimensional x no nulo tal que $\mathrm{Ax}=\lambda\,\mathrm{x}$. El vector x se llama vector propio de A asociado al valor propio λ. Al valor propio λ también se le conoce como autovalor o valor característico. De manera similar, al vector propio x también se le conoce como autovector o vector característico. El vector propio no puede ser cero, en cambio un valor propio puede ser cero.

El conjunto de los valores propios de A se denota por $\sigma(A)$ y se llama el espectro de A. El radio espectral de A se denota por $\rho(A)$ y se define por:

$$\rho(A)=\sup\{|\lambda|\}$$

Ejemplo 2.1.1:

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 5 & 0\end{pmatrix}$ y x el vector columna $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, luego

$$Ax=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

De manera que x es un vector propio de la matriz A, asociado al valor propio $\lambda=5$

Observación: Para la matriz identidad I_n se verifica que $\lambda=1$ es su único valor propio, ya que

$$I_n v = 1v$$

para cualquier $v \neq 0$

Definición 2.1.2: Sea A una matriz cuadrada, $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathbb{C})$ y sea $\lambda \in \sigma(A)$, entonces la colección

$$W_\lambda = \left\{ v \in \mathbb{C}^n \,/\, Av = \lambda v \right\}$$

$$= \left\{ v \in \mathbb{C}^n \,/\, (A - \lambda I)v = 0 \right\}$$

Se llama el espacio propio de A asociado a λ.

Definición 2.1.3: Sea A una matriz cuadrada, $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathbb{C})$, si λ es un valor propio de A, entonces existe un vector propio x tal que

$$\mathrm{Ax} = \lambda\,\mathrm{x}$$

Lo cual equivale a que

$$(\mathrm{A}\text{-}\lambda \mathrm{I}_n)\mathrm{x} = 0$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n.

La ecuación anterior se le conoce como la ecuación característica de A.

Definición 2.1.4: Sea $T:V\to V$ una función lineal, V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\lambda\in\mathbb{C}$. λ es un valor propio de T, si existe un $v\in V, v\neq 0$ tal que

$$\mathrm{Tv} = \lambda\, \mathrm{v}$$

El conjunto de los valores propios de T se denota por $\sigma(T)$ y se llama el espectro de T. Además, diremos que v es un vector propio de T asociado al valor propio λ.

A la colección

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{v\in V \,/\, Tv=\lambda v\} \\ &= \{v\in\mathbb{C}^n \,/\, (T-\lambda I)v=0\} \end{aligned}$$

Se le llama el espacio propio de T asociado a λ

Definición 2.1.5: Sea $T:V\to V$ una aplicación lineal, del espacio vectorial V de dimensión finita n; sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de escalares. Además sea A una matriz cuadrada, $\mathrm{A}=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}\in M_n(K)$ y $\lambda\in\sigma(A)$. Se llama la multiplicidad geométrica del valor propio λ a la dimensión del espacio propio de T o de A

$$\begin{aligned} q_\lambda &= \dim(W_\lambda) \\ &= n - rango(A-\lambda I_n) \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} q_\lambda &= \dim(V_\lambda) \\ &= n - rango(T-\lambda I) \end{aligned}$$

Observación

Supongamos que $V = \mathbb{C}^n$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ y consideremos la función lineal T

$$T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$
$$T(v) = Av$$

Luego

- $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T)$
- $v \in W_\lambda \Leftrightarrow v \in V_\lambda$

Teorema 2.1.1: Sea $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathbb{C})$, $I_n \in M_n(\mathbb{C})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Los siguientes enunciados son equivalentes

i) $\lambda \in \sigma(A)$

ii) $\det(\lambda I_n - A) = |\lambda I_n - A| = 0$

iii) $\lambda I_n - A$ es singular

Demostración

ii) $\leftrightarrow$ **iii)** Es obvio

i) $\to$ **ii)** Supongamos que $\lambda \in \sigma(A)$ entonces, existe un $v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v$$
$$(A - \lambda I)v = 0,\ v \neq 0$$

Entonces, $A - \lambda I$ no es invertible

ii) $\rightarrow$ i) Supongamos que $A-\lambda I$ no es invertible. Luego,

$$\det(A-\lambda I)=0$$

Entonces, existe un $v\in\mathbb{C}^n, v\neq 0$ tal que

$$(A-\lambda I)v=0$$

$$Av-\lambda Iv=0$$

$$Av=\lambda v\ , v\neq 0$$

Por lo tanto, $\lambda\in\sigma(A)$

2.2 Polinomio característico

Definición 2.2.1: Sean $\mathrm{A}=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{I}_n\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. El polinomio característico de A se define como: $p_A(x)=\det(xI_n-A)$. Al desarrollar $p_A(x)=\det(xI_n-A)$, en base a la definición de determinante sabemos que cada uno de sus sumandos es el producto de n elementos de la matriz y que cada uno de ellos contiene exactamente un elemento de cada fila y uno de cada columna, por lo tanto, uno de sus elementos es

$$(x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{nn})$$

De allí que el grado de $p_A(x)$ es n, por lo que tiene n raíces contando multiplicidades y el coeficiente de x^n es 1.

Entonces, podemos escribir

$$p_A(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0$$

Para obtener los valores propios se resuelve el polinomio característico y para cada vector propio, se resuelve $(A\text{-}\lambda I_n)x = 0$, y se obtienen los vectores propios correspondientes al valor propio λ.

Observaciones

1) $\lambda \in \sigma(A)$ sí y solo si $p_A(\lambda) = 0$

2) Si $n \geq 1$, entonces

$$1 \leq \operatorname{card}(\sigma(A)) \leq n$$

Si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\}$, entonces $\operatorname{card}(\sigma(A)) = k$. Además

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

Con $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. La multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico $p_A(x)$ se llama multiplicidad algebraica de λ

Ejemplo 2.2.1

Hallar valores propios y espacio propios para la matriz A. Además, calcular las multiplicidades algebraica y geométrica.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

Determinamos $p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda-3)(\lambda-2)+2+4+2(\lambda-2)+2(\lambda-3)-2\lambda \\ &= \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4 \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

De donde tenemos 2 valores propios $\lambda=1$ y $\lambda=2$

Para $\lambda=1$ la multiplicidad algebraica es 1 y para $\lambda=2$ la multiplicidad algebraica es 2. Determinamos W_λ:

- W_1

$$A-1I=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Realizando las operaciones básicas de matrices buscamos la matriz escalonada reducida

$$A-1I=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2+f_3]{\frac{1}{2}f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1+f_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1-f_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde

$$x + y = 0 \qquad ; \qquad z = 0$$
$$y = -x$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : y = -x, z = 0\} \\ &= \{(x,-x,0) : x \in \mathbb{C}\} \\ &= \{x(1,-1,0) : x \in \mathbb{C}\} \\ &= [(1,-1,0)] \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda = 1$ tiene multiplicidad geométrica igual a uno

- W_2

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones básicas de matrices buscamos la matriz escalonada reducida

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_1+f_3]{f_1-f_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2-f_3]{f_1-2f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$x + 2z = 0 \qquad ; \qquad y = 0$$
$$x = -2z$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x = -2z, y = 0\} \\ &= \{(-2z,0,z) : z \in \mathbb{C}\} \\ &= \{z(-2,0,1) : z \in \mathbb{C}\} \\ &= [(-2,0,1)] \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda = 2$ tiene multiplicidad geométrica igual a uno

Teorema 2.2.1: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Sea $T : V \to V$ una función lineal y $A = {}_B[T]_B$. Entonces, A es una matriz diagonal si y solo si, v_i es un vector propio de T, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Más aún, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, a_{ii} es un valor propio correspondiente al vector propio v_i

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que A es una matriz diagonal, o sea que

$$A = diag\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

Sabemos que

$$[T(v_i)]_B = {}_B[T]_B [v_i]_B$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$[T(v_i)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$$= a_{ii} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$$= a_{ii} [v_i]_B$$

O sea que

$$[T(v_i)]_B = [a_{ii} v_i]_B$$

De donde

$$T(v_i) = a_{ii} v_i$$

Así a_{ii} es un valor propio de T y v_i es un vector propio de T asociado a a_{ii}

$\Leftarrow$) Supongamos que v_i es un vector propio de T asociado a a_{ii}. Luego

$$T(v_i) = a_{ii} v_i$$

De donde

$$\left[T(v_i)\right]_B = a_{ii}\left[v_i\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i \qquad (*)$$

Además, por hipótesis sabemos que

$$A = {}_B\left[T\right]_B$$

De donde

$$A = \left[\left[T(v_1)\right]_{B_2}, \left[T(v_2)\right]_{B_2}, \cdots, \left[T(v_n)\right]_{B_2}\right] \quad (**)$$

Luego por $(*)$ y $(**)$ tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, A es una matriz diagonal

Propiedades

1) La suma de los valores propios de la matriz es igual a la traza de la matriz
2) Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal principal.

3) Si x es un vector propio de una matriz regular A, correspondiente al valor propio λ, entonces x también es un vector propio de A^{-1} correspondiente al valor propio $\frac{1}{\lambda}$.

4) El producto de todos los valores propios de una matriz (contando multiplicidades) es igual al determinante de la matriz.

5) Si x es un vector propio de una matriz A, correspondiente al valor propio λ, entonces λ^n y x son un pareja de valor y vector propio de A^n, para cualquier entero positivo n.

6) Si λ es un valor propio de A, entonces λ también es un valor propio de A^T

7) Un valor propio λ puede tener asociados distintos vectores propios. Ya que si λ es un valor propio de A asociado al vector propio x, entonces

$$Ax = \lambda x$$

Luego,

$$A(kx) = k(Ax) = k(\lambda x) = \lambda(kx)$$

De donde λ es un valor propio asociado al vector propio kx

En el caso de que la matriz A sea real y simétrica, se tienen las siguientes propiedades

1. Las raíces de la ecuación característica son reales, por lo que sus valores propios son reales

2. Vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales

2.3 Diagonalización

Teorema 2.3.1: Una matriz A es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal, D. Es decir si existe una matriz

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Con

$$D = P^{-1}AP$$

Los valores propios de la matriz A son los mismos a los de la matriz D, luego por la propiedad 2 los elementos de la diagonal de la matriz D son valores propios de la matriz A.

Teorema 2.3.2: Sea $A \in M_{nxn}(K)$. A es una matriz singular si y solo si 0 es un valor propio.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que A es una matriz singular. Entonces, $\det(A) = 0$

Por lo que

$\det(0v - A) = 0$, con v un vector distinto de cero

Luego por el teorema 2.1.1 se tiene que 0 es un valor propio de la matriz A

$\Leftarrow$) Supongamos que 0 es un valor propio de la matriz A. Luego

$$Av = 0v\,, \quad v \neq 0$$

$$Av = 0\,, \quad v \neq 0$$

$$\det(Av) = 0\,, \quad v \neq 0$$

Por lo que

$$\det(A) = 0$$

Así pues A s una matriz singular o no invertible

Teorema 2.3.3: Una matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in M_n(K)$ es diagonalizable sí y sólo si la matriz posee n vectores propios linealmente independientes.

Teorema 2.3.4: Vectores propios de unas matrices correspondientes a valores propios diferentes son linealmente independientes.

Teorema 2.3.5: Una matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in M_n(K)$ es diagonalizable sí y sólo si la multiplicidad de cada valor propio de A coincide con la dimensión de su subespacio propio correspondiente.

Teorema 2.3.6: Los valores propios de $A \in M_{n\times n}(K)$ son las raíces del polinomio característico de A.

Demostración

Sea λ un valor propio de la matriz A correspondiente al vector propio $v \neq 0$. Luego

$$Av = \lambda v \quad ,v \neq 0$$

Lo cual equivale a

$$Av - \lambda I_n v = 0 \quad ,v \neq 0$$

$$(A - \lambda I_n)v = 0 \quad ,v \neq 0$$

Luego,

$$\det\left((A - \lambda I_n)v\right) = 0 \quad ,v \neq 0$$

Por lo que existe un $x = \lambda$, en $p_A(x)$tal que

$$p_A(\lambda) = 0$$

Teorema 2.3.7: Si la matriz A tiene n valores propios distintos, A es diagonalizable.

CAPÍTULO III

ÁLGEBRA LINEAL CON O SIN DETERMINANTES

CAPÍTULO III

ÁLGEBRA LINEAL CON O SIN DETERMINANTES

Charles Broyden en una conferencia de Álgebra lineal en 1963 hizo un llamado a eliminar los determinantes del Álgebra lineal. Y para el año de 1995, Sheldon Axler publica un artículo titulado ¡Abajo los determinantes! en el que sugiere hacer Álgebra lineal sin emplear los determinantes. Veamos este enfoque para la enseñanza del Álgebra Lineal

3.1 Álgebra Lineal sin determinantes: Sheldon Axler

Axler emplea los operadores lineales T sobre un espacio vectorial n-dimensional complejo V en muchas de sus definiciones en lugar de trabajar con matrices. A continuación, algunas de las definiciones y teoremas que emplea

Definición 3.1.1: Un número complejo λ se dice que es un valor propio del operador lineal $T:V\to V$, si $T-\lambda I$ no es inyectivo

Teorema 3.1.1: Todo operador lineal sobre un espacio vectorial complejo de dimensión finita tiene un valor propio

Demostración (hecha por Axler)

Sea $T:V\to V$ un operador lineal sobre un espacio vectorial complejo V de dimensión n y sea $v\in V, v\neq 0$. Los vectores $v, Tv, T^2v, \ldots, T^n v$ no pueden ser linealmente independientes, porque V tiene dimensión n y hay n+1 vectores. Por consiguiente, existen números complejos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ no todos nulos, tales que

$$a_0 v + a_1 Tv + a_2 T^2 v + \cdots + a_{n-1} T^{n-1} v + a_n T^n v = 0$$

Consideremos a los a_j como los coeficientes de un polinomio que puede escribirse así:

$$a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = c(z - r_1)\cdots(z - r_n)$$

Donde c es un número complejo distinto de cero y cada r_j es complejo, y la ecuación es válida para todo número complejo z. Entonces tenemos

$$\left(a_o I + a_1 I + a_2 I^2 + \cdots + a_{n-1} I^{n-1} + a_n I^n\right) v = c(T - r_1 I)\cdots(T - r_m I) v$$

Lo cual significa que $T - r_j I$ para por lo menos un j. En otras palabras, T tiene un valor propio.

Proposición 3.1.1: Vectores propios diferente de cero correspondientes a distintos valores propios de T son linealmente independientes

Demostración (hecha por Axler)

Supongamos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores propios no nulos correspondientes a distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Debe probarse que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son linealmente independientes. Supongamos que existen números complejos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \ldots + a_n \lambda_n = 0$$

Aplicando el operador lineal $(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I)\ldots(T - \lambda_n I)$a ambos lados de la ecuación anterior y resolviendo

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\ldots(\lambda_1 - \lambda_n) v_1 = 0$$

Así $a_1 = 0$. En una forma similar, $a_j = 0$, para cada j

Definición 3.1.2: Un vector $v \in V$ es llamado un vector generalizado de T si

$$(T - \lambda I)^k v = 0$$

Para algún valor propio λ y algún entero positivo k. El conjunto de los vectores propios generalizados es un subespacio de V.

Lema 3.1.1: El conjunto de los vectores propios generalizados correspondiente al valor propio λ es igual a $Ker(T - \lambda I)^n$

Proposición 3.1.2: Los vectores generalizados de T expanden a V

Teorema 3.1.2: Los vectores generalizados no nulos correspondiente a distintos valores propios de T son linealmente independientes.

Teorema 3.1.3: Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ los distintos valores propios de T, con $U_1, U_2, ..., U_n$ denoten los respectivos conjuntos de vectores generalizados. Entonces

i) $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n$;

ii) Cada $(T - \lambda_j I)/_{U_j}$ es nilpotente

iii) Cada $T/_{U_j}$ tiene solo un valor propio, λ_j

iv) T relaciona cada U_j con el mismo

Definición 3.1.3: Como el espacio de los operadores lineales sobre V es de dimensión finita, existe un mínimo entero positivo k tal que

$$I, T, T^2, \ldots, T^k$$

son linealmente independientes. Así existen unos únicos números complejos $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ tal que

$$a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \ldots + a_{k-1} T^{k-1} + T^k = 0$$

El polinomio

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0$$

Es llamado el polinomio mínimo de T. Este es el polinomio mónico (polinomio cuyo coeficiente del término de mayor grado es 1) de grado más pequeño tal que $p(T) = 0$.

Teorema 3.1.4: Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los distintos valores propios de T, sea U_j el conjunto de los vectores propios de T correspondiente a λ_j y sea α_j el entero más pequeño tal que $(T - \lambda_j I)^{\alpha_j} v = 0$, para cada $v \in U_j$. Sea

$$p(z) = (z - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (z - \lambda_m)^{\alpha_m}$$

Entonces,

i) p es el polinomio mínimo de T

ii) p tiene como grado máximo dim V

v) Si q es un polinomio tal que tal que $q(T)=0$, entonces q es un polinomio múltiplo de q.

Definición 3.1.4: La multiplicidad de un valor propio λ de T se define como la dimensión del conjunto de vectores propios generalizados de T correspondientes a λ. Además la suma de multiplicidades de valores propios de T es igual a n, la dimensión de V.

Para Axler la definición que se emplea usualmente de multiplicidad (como la multiplicidad de las raíces del polinomio $\det(zI-T)$) carece de significado

Definición 3.1.5: Sean $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ los distintos valores propios de T, con multiplicidades $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ respectivamente. El polinomio

$$(z-\lambda_1)^{\beta_1}(z-\lambda_2)^{\beta_2}(z-\lambda_3)^{\beta_3}\ldots(z-\lambda_n)^{\beta_n}$$

es llamado el polinomio característico de T.

De acuerdo a Axler la definición usual de polinomio característico que involucra determinantes implica que estos son usados para probar la existencia de valores propios. Sin mencionar los determinantes este procedimiento cambia. Primero probamos que T tiene n valores propios, contando multiplicidades y lo usamos para dar una definición más natural de polinomio característico.

Teorema 3.1.5: Sea q el polinomio característico de T. Entonces $q(T)=0$.

Este teorema se conoce como Teorema de Cayley – Hamilton.

3.2 Álgebra Lineal con determinantes: Garry Tee

Para Garry Tee el teorema más importante de los determinantes es el que establece que una matriz es regular sí $\det(A)\neq 0$ y que

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left[Adj(A)\right]^{T}$$

Sin embargo, esta última expresión no es tan empleada para el cálculo de la inversa de una matriz para ello se suelen emplear otros métodos.

Teorema 3.2.1 (Cayley-Hamilton): Sea P el polinomio característico de la matriz cuadrada A, entonces $P(A)=0$

Demostración

Sea

$$B=Adj(A-\lambda I)$$

De donde cada elemento de B es el adjunto de cada elemento de la matriz $A-\lambda I$, por lo tanto, es un polinomio en λ de grado -1 o menor. Así, la matriz B puede escribirse como

$$B=B_{n-1}+B_{n-2}\lambda+\cdots+B_0\lambda^{n-1}$$

Donde las matrices $B_{n-1}, B_{n-2}, ..., B_0$ no dependen de λ. Luego, por el teorema 1.7.2.2 se tiene que:

$$\begin{aligned}(B_{n-1} + B_{n-2}\lambda + \cdots + B_0\lambda^{n-1})(A - \lambda I) &= B(A - \lambda I) \\ &= \det(A - \lambda I)I \\ &= (-1)^n(\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - c_2\lambda^{n-2} - \cdots - c_n)I\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes (matrices) de λ en ambos lados, tenemos un sistema de n+1 ecuaciones matriciales

$$\begin{aligned} -B_0 &= (-1)^n I \\ B_0A - B_1 &= (-1)^{n+1} c_1 I \\ \cdots &= \cdots \\ B_{n-2}A - B_{n-1} &= (-1)^{n-1} c_{n-1} I \\ B_{n-1}A &= (-1)^{n+1} c_n I \end{aligned}$$

Premultiplicando estas ecuaciones por $A^n, A^{n-1}, A^{n-2}, ..., A, I$ obtenemos la siguiente ecuación de matrices

$$0 = (-1)^n(A^n - c_1A^{n-1} - c_2A^{n-2} - \cdots - c_nI) = P(A)$$

Donde P es el polinomio característico de A.

3.2.2 Ventajas del uso de determinantes

Entre las ventajas que señala Garry Tee en el uso de los determinantes en el álgebra lineal puede mencionarse:

- En la demostración de la propiedad 3 de los determinantes, esto es $\det(A^T)=\det(A)$ la cual resulta según Tee, sencilla empleando determinantes
- La definición de valor propio resulta complicada para estudiantes de bachillerato
- La demostración del Teorema 3.1.1 usa conceptos más elevados o complicados que si se usará la teoría de determinantes. Además, señala que Axler cae en errores en sus planteamientos pues en una de las proposiciones que esta emplea habla de "vectores propios no nulos" cuando se sabe por la definición de valor propio que este no debe ser nulo. Pues si un vector propio fuese nulo, esto es $v=0$, entonces todo escalar sería un valor propio de v y de cualquier matriz cuadrada.
- La definición de multiplicidad de valor propio dada por Axler es más complicada que la basada en la descomposición en factores lineales del polinomio característico
- La demostración del Teorema de Cayley- Hamilton es mucho más sencilla empleando determinantes que sin usarlos

BIBLIOGRAFÍA

1. Aitken, A. C. . *Determinants and Matrices*. (1939) Oliver & Boyd, Edinburgh. [Ninth edition, reset and reprinted: 1967. Fourth edition, revised: 1946; reprinted: 1983, Greenwood Press, Westport, CT. Existe traducción castellana de la segunda edición inglesa, hecha por Tomás Rodríguez Bachiller. Editorial Dossat, Maddrid/Buenos Aires.].
2. Alvárez, Yolima (2014).*Introducción del álgebra lineal en España y Colombia durante la segunda mitad del s.XIX y la primera mitad del s. XX*. Universidad de la Rioja, Servicio de Publicaciones.
3. Broyden, Charles G (1975) *Basic Matrices: An Introduction to Matrix Theory and Practice*. Macmillan, London.
4. Faddeev, D. K. & Faddeeva, V. N. (1963). *Computational Methods of Linear Algebra*, translated from the Russian by Robert C.Williams.W. H. Freeman, San Francisco.
5. Faddeeva, V. N. (1959). *Computational Methods of Linear Algebra*, translated from the Russian by Curtis D. Benster. Dover, New York.
6. Farebrother, R. William & Styan, George P. H. (2002). *A genealogy of the Spottiswoode family: 1510-1900*. IMAGE 25, 19-21.
7. Farebrother, R. William, Jensen, Shane T. & Styan, George P. H (2002). *Sir Thomas Muir and nineteenth-century books on determinants*. IMAGE 28, 6–15.
8. Farebrother, R. William, Jensen, Shane T. & Styan, George P. H. (2002). *Sir Thomas Muir and nineteenth-century books on determinants*.IMAGE 28, 6-15.
9. Farebrother, Richard W. (2002). *A genealogy of William Spottiswoode: 1825-1883*. IMAGE 23, 3-4.
10. Fox, Leslie (1964). *An Introduction to Numerical Linear Algebra*. Clarendon Press, Oxford.
11. Gerschgorin, S. A. (1931). *Uber die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*. Izvestija Akademii Nauk SSSR, VII Serija, 749–754.
12. Grossman, Stanley (1988). *Álgebra Lineal*. Grupo Editorial Iberoamericana.
13. Hoppensteadt, Frank C. & Peakin, Charles S. (2002). *Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences*, Second edition. Springer-Verlag, New York.

14. Luzardo, Deivi & Peña, Alirio (2006). *Historia del Álgebra Lineal hasta albores del siglo XX*. Divulgaciones Matemáticas Vol. 14 No. 2(2006), pp. 153-170
15. Mikami, Yoshio (1913). *The Development of Mathematics in China and Japan. Abhandlugen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*
16. Mikami, Yoshio (1977). *On the Japanese theory of determinants*. In *Science and Technology in East Asia* (Nathan Sivin, ed.), Science History Publications, New York, págs. 3–30.
17. Muir, Thomas (1930). *Contributions to the History of Determinants: 1900- 1920*. Blackie, London.
18. Sheldon, Axler. (1995) *Down with determinants!* The American Mathematical Monthly, 102, 139–154.
19. Sylvester, James J (1871). *A plea for the mathematician*. Nature, 1, 238. [Reprinted in The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester: Volume II, 1854-1873, Cambridge University Press, pp. 655–656, 1908.]
20. Tee, Garry J. (1972). *A simple example of an ill-conditioned matrix*. SIGNUM Newsletter, **7** (2), 19–20.
21. Tee, Garry J. (1994). *Fermat's little theorem generalized to algebraic integers and to integer matrices*. The Australian Mathematical Society Gazette, **22**, 160–164.
22. Tee, Garry J.(1993). *Integer sums of recurring series*. New Zealand Journal of Mathematics, **22**, 85–100.
23. Uña, Isaias J. *Nueva metodología del concepto de determinante en la asignatura de matematicas 3 del curso de orientacion universitaria*.
24. Vásquez, Fidel. (2014). *Demostración del Teorema de Jacobi acerca de los menores de la matriz adjugada*. México
25. Westren,Turnbull H. (1935). *Thomas Muir*, The Journal of the London Mathematical Society, **10**, 76–80.
26. Wilkinson, James H. & C. Reinsch, eds. (1971). *Handbook for Automatic Computation: Volume II, Linear Algebra*. Springer-Verlag, Berlin.