UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

EPISTEMOLOGÍA DE LAS SECCIONES CÓNICAS Y SU ENSEÑANZA

TESIS PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN DOCENCIA DE MATEMÁTICA

ESTUDIANTE

ISAI STONESTREET VARGAS

Ced: 1-716-2005

PANAMÁ, 2018

Dedicatoria

Primero darle gracias a Dios por darme la fuerza, salud y sabiduría para culminar este proyecto de vida, ya que siempre me ha acompañado, de día y de noche en el bienestar de mi vida y durante mi formación académica, es por eso que le dedico este trabajo a mi Dios todopoderoso y que la gloria sea para él.

Este trabajo es el resultado de un largo camino lleno de lucha, sacrificio y el escuchar las palabras de grandes pilares de mi vida, es por eso que le dedico este trabajo también, con mucho amor y cariño a mi padre y a mi madre, que siempre estuvieron ahí desde el principio de mi carrera para guiarme con valores humanos que nos hace crecer, también a la familia que Dios me ha regalado, una esposa maravillosa y una hija preciosa llena de vida, donde ella también tuvo una gran influencia en mi vida para finalizar mi carrera.

Agradecimiento

La elaboración de este gran proyecto involucra un círculo familiar y un grupo social que se mezcla con los estudiantes de la facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología.

Primero debo agradecer a mi padres que me dieron su apoyo incondicional en las buenas y las malas para la formación de mi profesión, también debo reconocer la orientación dada por mi profesor de Matemáticas, que estuvo ahí desde que estaba en octavo grado, Amael De Gracia, siguiendo sus consejos para iniciar esta carrera. También a mis profesores de formación académica de la licenciatura, donde siempre estaba la orientación y la tenacidad de prepararnos para la vida; debo mencionar también a mi Asesor de Tesis Juan Manuel Nole, dándome su apoyo, sus sugerencias y el conocimiento necesario para la correcta investigación y redacción de la misma. Y por último debo agradecer a la directora de la escuela de docencia de matemática, que me dio su apoyo incondicional y consejos para la finalización de este trabajo.

ÍNDICE

Contenido Pág.

Introducción

La enseñanza de la matemática es un proceso que se desarrolla de manera sistemática y satisfactoria para todos los estudiantes que cursan su año escolar, desarrollando así las competencias que requiere la matemática, entre estas está la lógica, el análisis y la reflexiva, pero esto suele obstruirse con contenidos más abstractos, para los estudiantes; de lo cual solo se hace énfasis en enseñar contenidos muy básicos para el inicio del cálculo, como lo es el aprendizaje de las secciones cónicas. Es por esto que se desarrolla investigaciones en el área de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, para mejorar de manera exitosa, aprendizajes significativos. Este trabajo se suma a mostrar una parte del cálculo como lo es la Geometría Analítica, enfocado al estudio epistémico de las bases de la geometría analítica como lo son las secciones cónicas propuestas por Apolonio y Menecmo.

El presente trabajo propone desarrollar los principios de la Geometría Analítica a través de la historia, específicamente en las secciones cónicas, donde diferentes matemáticos abordaron el estudio de esta geometría en diferentes momentos de la historia de la matemática. En particular, se considera el tratamiento inicial de las secciones cónicas, como curvas determinadas en un cono recto, la concepción como lugar geométrico, la necesidad de representar curvas y superficies con el uso de rectas perpendiculares, hasta establecerse como plano cartesiano, conocido también como el puente para unir dos campos de la matemática que se encontraban separados.

La matemática es una de las ciencias más antiguas y más utilizadas hasta nuestros días para las interpretaciones geométricas de líneas rectas y curvas, desempeñando un gran papel en el cálculo y en todas las ramas de la ciencia. El concepto de matemática, se comenzó a formar desde que el hombre vio la necesidad de contar objetos, en la colección de objetos (frutas, trigo, leña, ..); esta necesidad lo llevó a la creación de sistemas de numeración que inicialmente se componían con la utilización de los dedos, piernas o piedras. De nuevo, por la necesidad, se hiso forzosa la implementación de sistemas avanzados y que pudieran resolver la mayoría de los problemas que se presentaban con la evolución de la historia; desde la teoría Geocéntrica hasta la teoría Heliocéntrica, *Los elementos de Euclides* , *las Cónicas de Apolonio* y la colección de Pappus fueron los primeros libros matemáticos de la antigüedad que tuvieron históricamente un mayor impacto durante siglos.

Esta propuesta responde a la necesidad de facilitar un contexto amplio de estudio de las secciones cónicas, exponiendo a matemáticos que contribuyeron de manera significativa a explicar la parábola, la elipse, la hipérbola y la circunferencia.

Las secciones cónicas revela una importancia en la enseñanza de la matemática, tanto en el nivel superior como en la secundaria, donde los primeros pasos inicia con las rectas tangentes para luego ser parte de estudio de curvas planas; contenidos curriculares iníciales donde vemos la unión del algebra con una geometría expresadas con un lenguaje algebraico, tan explícito y concreto, de manera de ser interpretados en un plano euclidiano, de manera impactante estas curvas no dejan de ser objeto de estudio en niveles superiores en el cálculo infinitesimal, por lo tanto el trabajo hará relevancias en los inicios como lo es el método de Exahuscion propuesto por Eudoxo de Cnido, famoso matemático y geómetra. Los griegos utilizaron este método exhaustivo, equivalente a nuestra integración moderna de las áreas y los volúmenes de figuras curvilíneas. Eudoxo dejó sus influencias matemáticas a través de sus alumnos Menecmo y Dinostrato. Posteriormente hay que mencionar también las obras de De Witt y John Wallis como la culminación de la aritmetización de las secciones cónicas que había comenzado Apolonio y Descartes. A partir de las obras de Wallis inicia una nueva etapa (El cálculo) abordado por Isaac Newton, Leibniz, Gauss, entre otros.

Una vez estudiada e interpretada las obras expuestas para el estudio de las secciones cónicas, el trabajo abordara una metodología constructiva para el aprendizaje de las secciones cónicas desde su definición como lugar geométrico y los elementos que las conforman como un tipo de sección cónica.

CAPÍTULO I

La Edad de Oro

I. La edad de Oro

El origen de la Geometría coincide con el origen de la humanidad. El pensamiento pre científico apoyado sobre el monoteísmo naturalista de Amenhotep IV, funda en el siglo XIV a. C. culto a la nueva imagen del dios Ra representado con un *círculo* dorado. La abstracción del pensamiento mágico representa el primer acercamiento informal e intuitivo a la Geometría. Anteriormente, *en el siglo XXVII A.C.*, el emperador chino Hoang-Ti mandó construir un observatorio astronómico con el fin principal de corregir el calendario.

Las primeras civilizaciones mediterráneas adquieren poco a poco conocimientos geométricos de carácter muy práctico basados en fórmulas, mejor dicho, algoritmos expresados en forma de recetario, para calcular áreas y longitudes. La finalidad era práctica al pretender con ello calcular la producción proporcional de las parcelas de tierra para determinar los impuestos, o reconstruir las parcelas de tierra después de las inundaciones. El conocimiento geométrico tanto de egipcios como de las culturas mesopotámicas pasa íntegramente a la cultura griega a través de Tales de Mileto, la *escuela* de los pitagóricos, y esencialmente de Euclides.

Lo que estamos en condiciones de afirmar, de acuerdo a las fuentes disponibles, es que:
Hacia el siglo V a. C. comenzaron a circular por la Grecia antigua una serie de problemas que cautivaron a los matemáticos de la época. ¿Cómo surgieron? Hay muchas historias detrás del mismo, pero seguramente su origen se encuentre relacionado con el afán de solucionar problemas análogos a otros, que ya fueron solucionados anteriormente.

A. Los tres problemas clásicos

Entre muchos problemas planteados en este contexto hay tres que traspasaron la barrera del tiempo, e interesaron de manera muy especial a los científicos griegos, nos referimos a: el problema de la cuadratura del círculo, el problema de la trisección del ángulo y el problema de la duplicación del cubo. El enunciado de los tres problemas es distinto. Si bien los tres pertenecen al ámbito geométrico, pero curiosamente, los tres están ligados a un mismo destino y desenlace.

Enunciado de los tres problemas

1) Dado un cubo cualquiera, construir otro de volumen el doble del anterior (duplicación del cubo)

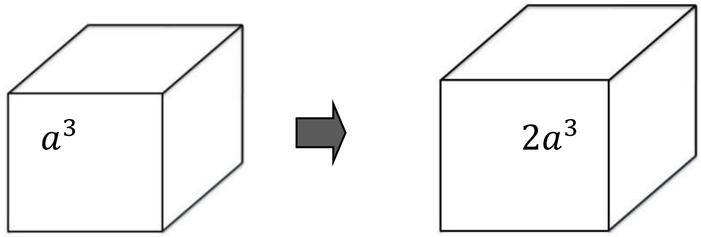
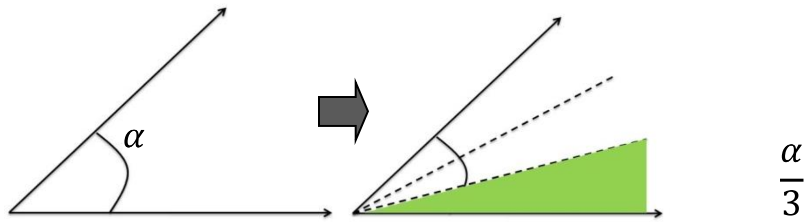


Figura 1

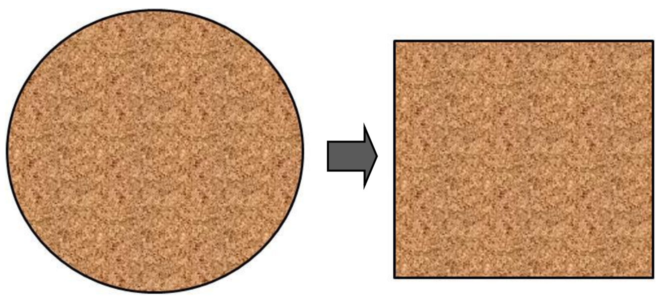
2) Dado un ángulo cualquiera, construir un ángulo que sea la tercera parte del ángulo dado. (trisección del ángulo)

Figura 2



3) Dado un círculo cualquiera, construir un cuadrado que tenga la misma área que el círculo: (cuadratura del círculo).

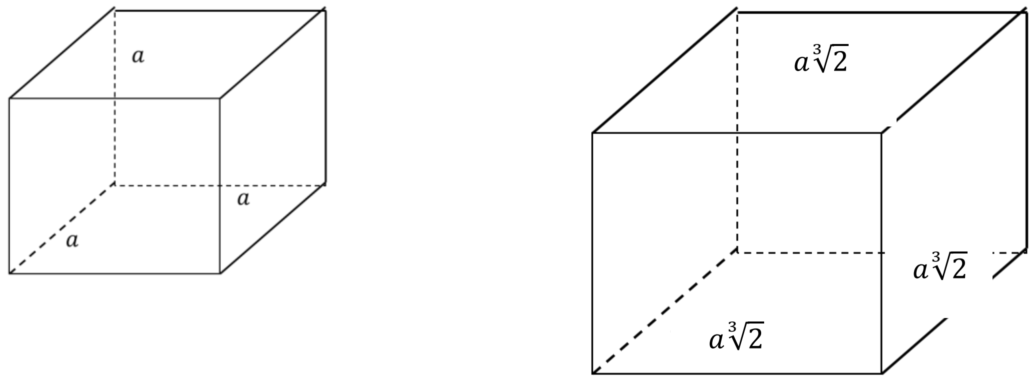
Figura 3



a. La duplicación del cubo

Pericles muere de la terrible peste que asola Atenas. Cuenta la leyenda que una terrible peste asolaba la ciudad de Atenas, hasta el punto de llevar a la muerte a Pericles. Una embajada de la ciudad fue al oráculo de Delos, consagrado a Apolo (en ciertas fuentes aparece el oráculo de Delfos, en lugar del de Delos, también consagrado a Apolo), para consultar qué se debía hacer para erradicar la mortal enfermedad. Tras consultar al Oráculo, la respuesta fue que se debía duplicar el altar consagrado a Apolo en la isla de Delos. El altar tenía una peculiaridad: su forma cúbica. Prontamente, los atenienses construyeron un altar cúbico cuyos lados eran el doble de las del altar de Delos, pero la peste no cesó, se volvió más mortífera. Consultado de nuevo, el oráculo advirtió a los atenienses que el altar no era el doble de grande, sino 8 veces mayor, puesto que el volumen del cubo es el cubo de su lado. Nadie supo cómo construir un cubo cuyo volumen fuese exactamente el doble del volumen de otro cubo dado, y el problema matemático persistió durante siglos.

Consiste en construir el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen del cubo inicial. Para eso habría que construir un segmento de longitud igual a la raíz cúbica de 2. Y esto es imposible utilizando solamente regla y compás ya que se trata de un número inconmensurable después llamado irracional.



$V = a^3$ $\qquad$ $V = 2a^3$

$lado \quad a$ $\qquad$ $lado \;= \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$

Figura 4

El deseo de buscar dos medias proporcionales entre dos valores dados pudo ser su origen, esto es: dados a y b, calcular dos valores x e y, tales que verifiquen las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

En el caso particular de que $b = 2a,$ obtenemos que el valor de x es el valor del lado del cubo que estamos buscando.

Nos surge por tanto, la siguiente pregunta: ¿Cómo construir los valores x e y medias proporcionales entre los valores a y 2a?

El concepto de introducir dos medias proporcionales x e y entre los valores **a** y $\boldsymbol{2a}$ daría lugar a las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Una de las respuestas más sorprendentes es la que presento **Arquitas de Tarento*(430-365 a. C)*** dice Arquitas que la intersección de un cilindro recto, un cono circular y un toro da como solución un punto que justamente tiene como coordenada el valor que resuelve el problema de la duplicación del cubo.

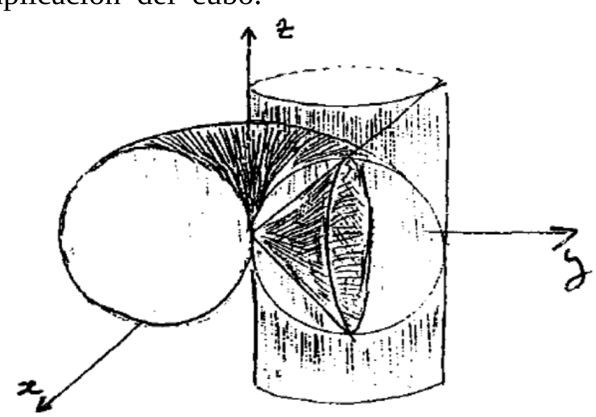


Figura 5

Para la época esta solución, sería una muy ingeniosa. La idea central de la construcción propuesta por Arquitas se basa en la división adecuada dentro del triángulo rectángulo *ABC*.

Si llamamos $\overline{AE} = a \quad y \quad \overline{AC} = 2a$

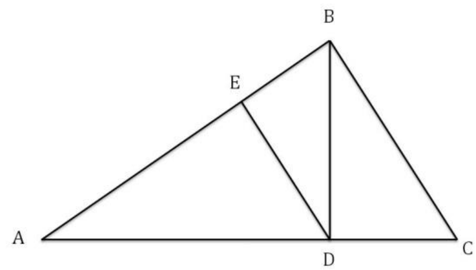


Figura 6

Al ser semejante los triángulos *ABC, ADB* y *AED*, se verifica que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Siendo $\overline{AB} = y \quad y \quad \overline{AD} = x.$

Por tanto, la ingeniosa construcción tridimensional esconde un problema bidimensional que es el siguiente: dados los segmentos $\overline{AC} = 2a$ y $\overline{AE} = a,$ construir el triángulo que se muestra en la figura, donde $\overline{AD}$ es la solución del problema de la duplicación del cubo.

Ante esta sorprendente construcción surge una pregunta inquietante:

¿Fue Arquitas capaz de resolver el problema de la duplicación del cubo de manera sintética, o bien conocía de alguna manera un método basado en coordenadas?

Menecmo (374-325 a. C.) atacó el problema de forma diferente; para él las relaciones

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \ ,$$

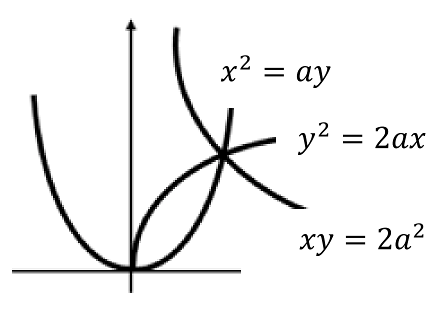
le llevaron a las siguientes condiciones:

$$x^2 = ay$$

$$y^2 = 2ax$$

$$xy = 2a^2$$

Figura 7

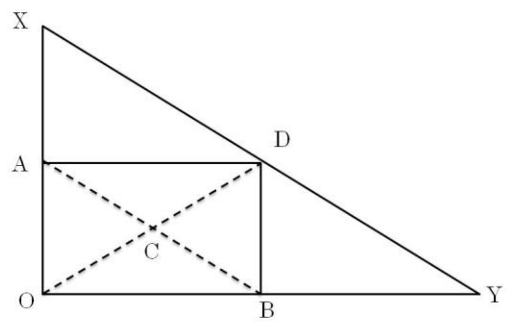


Visto ya, las dos primeras corresponden a ecuaciones de parábolas, mientras que la última ecuación es una hipérbola.

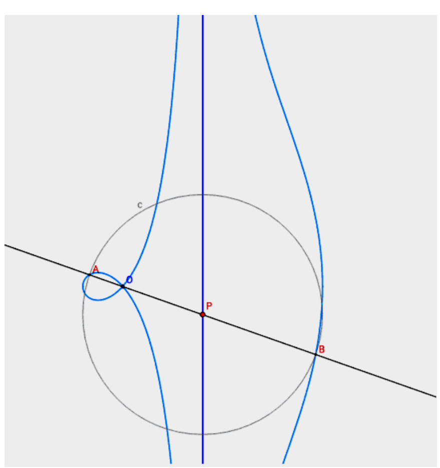
El gran Apolonio de Perga (262-190 a. C.) también dedicó un tiempo a resolver el problema de la duplicación del cubo; el encontró una solución original y relativamente simple, se basa en la siguiente construcción:

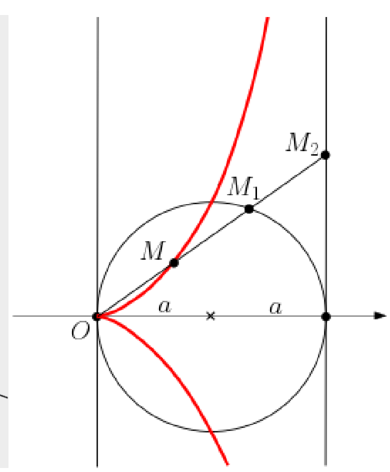
- ✓ Se sitúa un rectángulo OADB sobre los ejes, de lados a y $2a$.
- ✓ Luego se obtiene el punto medio del rectángulo, le llamamos *C*.
- ✓ Construimos los puntos *X* e *Y* de tal manera que el segmento *XY* contenga el punto *D*, además *X* está en la recta que sostiene al segmento *OA* e *Y* está sobre la recta que sostiene a *OB*. Por último, se ha de verificar que *CX* = *CY*.

Figura 8



En estas condiciones, Apolonio afirma que, el valor de los segmentos $AX = x$ y $BY = y$ son las medias proporcionales entre a y $2a$ (la demostración se puede realizar por varios procedimientos, uno de ellos es la aplicación conjunta del teorema de Tales y de la proposición III, 35 perteneciente a " Los elementos" de Euclides)
Entre otra soluciones esta la conocida ***concoide de Nicomedes*** (siglo II a. C) y de la ***cisoide de Diocles***, contemporáneos de Nicomedes; las dos son dos curvas notables y además capaces de resolver el problema de la duplicación del cubo.





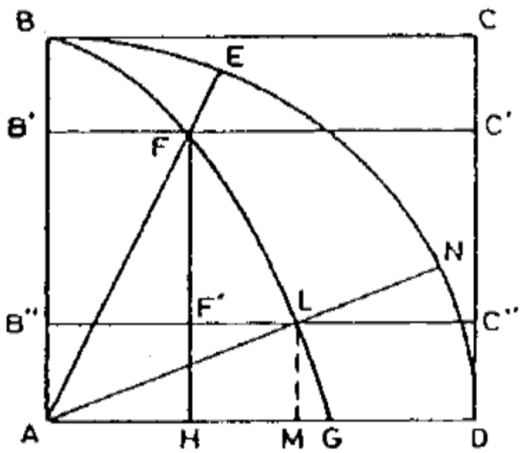
Concoide *Cisoide*

Figura 9 ***Figura 10***

b. La trisección del ángulo

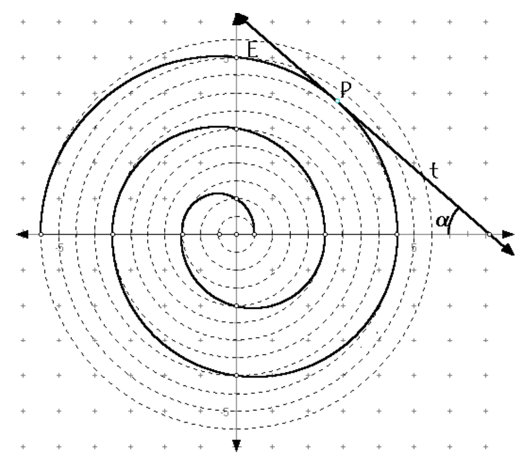
Este problema consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres ángulos iguales, empleando únicamente la regla y el compás, de manera que la suma de las medidas de los nuevos tres ángulos sea exactamente la medida del primero.

La trisección del ángulo también nos presentó curvas maravillosas y en las que subyace el enorme ingenio matemático; entre todas ellas merece especial distinción la ***cuadratriz de Hipías*** y ***la espiral del genial Arquímedes de Siracusa***.



Cuadratriz de Hipías

Figura 11



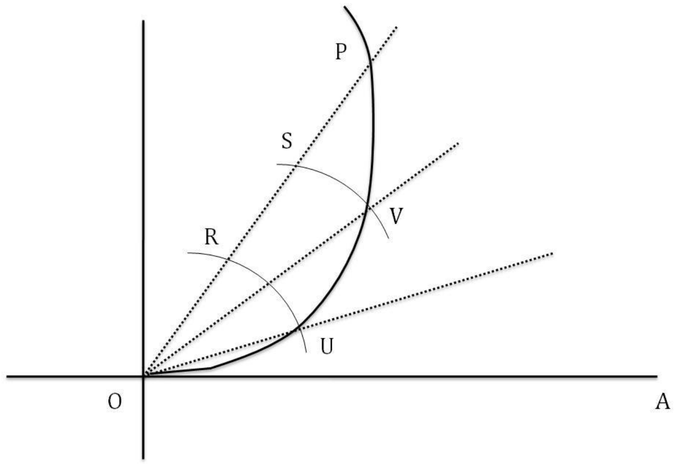
Espiral de Arquímedes

Figura 12

La cuadratriz es una curva que se genera al unir las sucesivas intersecciones de la recta *AB* cuando gira uniformemente sobre el punto A hasta llegar a la posición *DA*, y de la recta *BC* que se desplaza uniformemente y paralelamente hasta llegar a la posición *DA*. Como puede observarse es una curva continua *BFLG*, obteniéndose el punto G por continuidad.

Arquímedes también se vio atraído por los tres famosos problemas geométricos, lo mismo que sus predecesores, y la espiral de Arquímedes bien conocida, le permitió dar soluciones a dos de ellos (aunque no únicamente con regla y compas). La espiral de Arquímedes se define como el lugar geométrico de un punto del plano que, partiendo del extremo de una semirrecta se mueva uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira a su vez uniformemente alrededor de sus extremos; así pues, la ecuación de esta espiral en coordenadas polares es de la forma $r = a\theta$. Dada una de estas espirales, puede efectuarse fácilmente la trisección de un ángulo arbitrario de la manera siguiente. Situemos el ángulo de tal forma que el vértice y el lado inicial coincida con el origen O de la espiral y la posición inicial OA de la semirrecta que gira. Sea P el punto de intersección del segundo lado del ángulo con la espiral, y dividamos el segmento OP en tres partes iguales por medio de los puntos R y S;

Figura 13



Sea RU y SV las circunferencias de centro O y radios OR y OS respectivamente. Si estas circunferencias cortan a la espiral en los puntos U y V, entonces las semirrectas OU y OV trisecan al ángulo AOP.

La matemática griega suele verse caracterizada a veces como esencialmente estática y con escasa o nula atención a la idea de variabilidad, pero lo cierto es que Arquímedes, en su estudio de la espiral, parece haber determinado la tangente a la curva por medio de consideraciones cinemáticas que recuerdan el cálculo diferencial

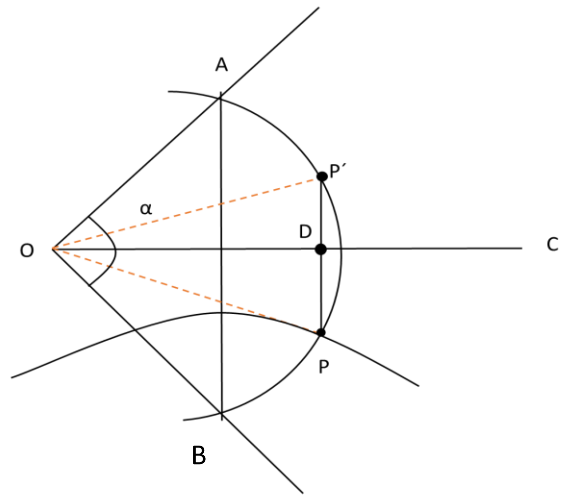
Hoy en día, la propiedad menos importante de estas curvas, en vista de su utilidad para el mundo matemático, es precisamente que cierto par de parábolas permite la duplicación del cubo y cierta hipérbola permite trisecar un ángulo. Ahora veremos con cierto detalle esta última construcción, desechada por los mismos griegos, debido a que las mismas cónicas no se pueden construir con regla y compas.

Sea **α** un ángulo arbitrario.

- ✓ Se construye la circunferencia de centro O y radio OA = OB de modo que $\widehat{AOB} = \alpha$.
- ✓ Sea la recta *OC* bisectriz de **α**. Con OC como directriz y B como foco.
- ✓ Se construye una rama de hipérbola de excentricidad e = 2.
- ✓ Sea P el punto de intersección de la hipérbola con el arco de circunferencia AB.

Análogamente se obtiene el punto P´ utilizando A como foco. La situación actual se representa en la figura siguiente:

Figura 14



Por definición de hipérbola, $BP = 2PD$ y $AP' = 2DP'$. Ademas, debido a la simetría, $PD = DP'$. En definitiva, resulta que $BP = PP' = P'A$ y queda así trisecado el ángulo α.

c. La cuadratura del círculo

La cuadratura del círculo consiste en tratar de obtener, dado un círculo, un cuadrado cuya área mide exactamente lo mismo que el área del círculo. ***Anaxágoras*** fue el primero en intentar resolverlo, dibujando en las paredes de su celda cuando fue hecho prisionero por explicar diversos fenómenos que los griegos atribuían a los dioses. Tampoco pudo ser resuelto por los geómetras de la antigüedad, y llegó a ser el paradigma de lo imposible. Como curiosidad, el filósofo inglés David Hume llegó a escribir un libro con supuestos métodos para resolver el problema. Hume no tenía conocimientos matemáticos serios, y nunca aceptó que todos sus métodos fallaban.

Hipócrates de Quíos (470 – 400 a.C), demostró que ciertos trozos de círculos llamados lúnulas son cuadrables. En particular, obtuvo que las siguientes lúnulas fuesen cuadrables:

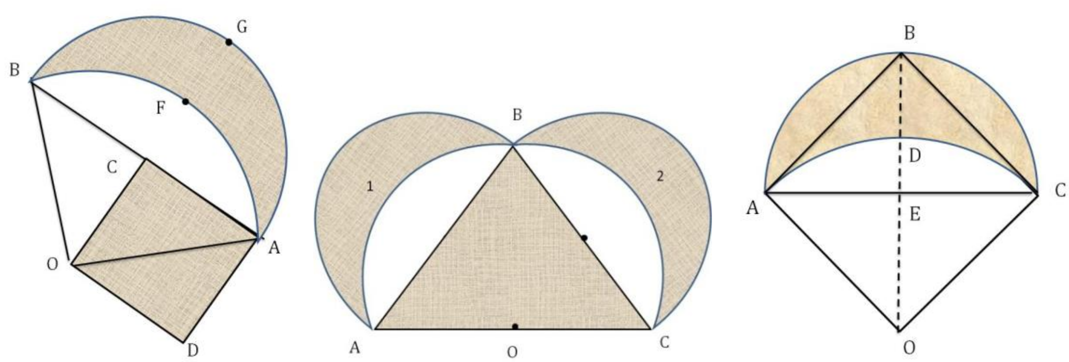


Figura 15

Entre los tres problemas, este sería el más interesante, la cuadratura del círculo. Fue el deseo de buscar una media proporcional entre dos valores dados; esto es, dados a y $b,$ calcular dos valores x. Dio lugar a una búsqueda insaciable de lograr trazar un cuadrado con área igual al de un círculo.

Los griegos fueron capaces de construir un cuadrado de superficie equivalente a un polígono dado.

Iniciemos como construyeron un cuadrado de superficie equivalente a un rectángulo dado. Esta transformación se representa por la ecuación $x^2 = a \cdot b$

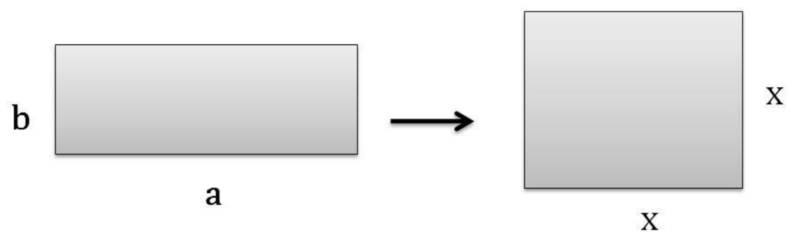
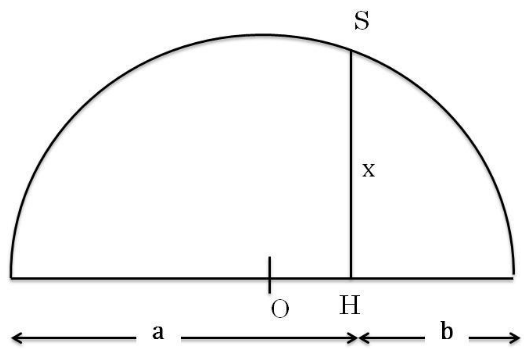


Figura 16

Esta ecuación se construye con regla y compas de la siguiente manera:

- ✓ Construya un trazo de largo $a + b,$ siendo H el punto en que se unen ambos trazos.
- ✓ Ubique el centro O del trazo $a + b$. Luego construya un semicírculo con centro en O y radio $r = (a + b)/2$.
- ✓ Constrúyase la perpendicular al trazo $a + b$ que pasa por H.

Figura 17

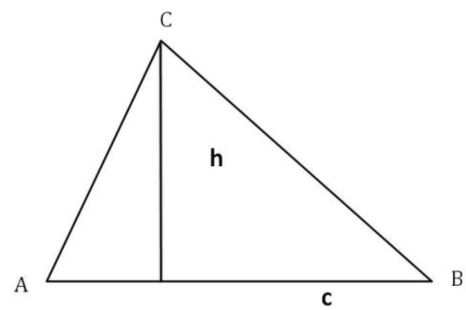


Sea S el lugar donde esta recta interseca al semicírculo. De acuerdo con el teorema de Tales, $\overline{HS}^2 = a \cdot b,$ o sea, $x = \overline{HS}$ es el lado del cuadrado cuya área es equivalente al área del rectángulo cuyos lados son a y b. Se dice que el trazo x es la media proporcional entre los trazos a y b.

Usando casi el mismo procedimiento se puede transformar cualquier triangulo en un cuadrado de área equivalente. El lado del cuadrado vendrá dado por la media proporcional de la mitad de un lado y la altura. Algebraicamente lo anterior es equivalente a encontrar ***x*** tal que

Figura 18

$$x^2 = \frac{1}{2} c \cdot h$$



Otro polígono cuadrable es el cuadrilátero. Sea el cuadrilátero *ABCD* en un triángulo *AED.* Para ello basta trazar la paralela *EC* a la línea que pasa por B y D. En efecto, los triángulos *DBC y DBE* tienen la misma base y la misma altura (por consiguiente también la misma área).

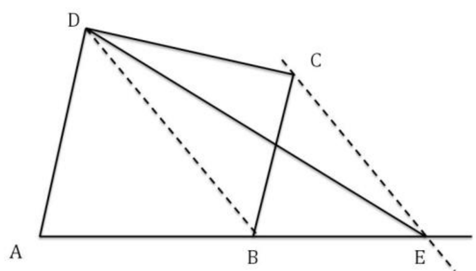


Figura 19

Es evidente que usando este procedimiento en forma reiterada se puede transformar un pentágono arbitrario en un cuadrilátero y luego este en un triángulo. Generalizando, cualquier figura rectilínea con n lados puede transformarse, con regla y compas, sucesivamente en figuras rectilíneas con $n-1,\ n-2, etc.$ lados, hasta transformarla en un triangulo con área equivalente. Este, a su vez, tal como ya hemos mencionado, se puede finalmente transformar en un cuadrado.

De este modo se plantea la siguiente pregunta: si cualquier figura rectilínea se puede transformar en un cuadrado con superficie equivalente, ¿Por qué no tratar de hacerlo con una figura curvilínea?

Intentemos con la figura curva más simple, el círculo. Tratemos de encontrar un cuadrado de superficie equivalente a un círculo de radio unitario. Algebraicamente el problema lleva a la ecuación $x^2 = \pi r^2$, o sea, el lado del cuadrado x es la media proporcional entre π y 1.

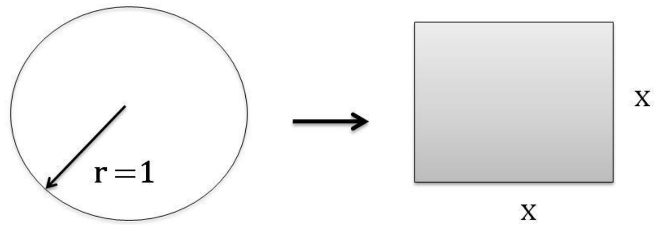


Figura 20

El problema se reduce a determinar, con regla y compas, la longitud $\boldsymbol{\pi}$. Esta es la condición primordial para resolver el problema en forma geométrica.

Recordemos que la regla es un instrumento que sirve para trazar líneas rectas, no para medir longitudes, mientras que el compás sirve para trazar círculos con centros diferentes y de cualquier radio. Para resolver un problema en forma geométrica, estos instrumentos deben ser utilizados un número finito de veces.

En la historia de las matemáticas se pueden definir tres épocas bien precisas del intento de construir geométricamente el número $\boldsymbol{\pi}$ o para determinar su valor exacto.

Construcción del número Pi

- ***Primer periodo***

Este abarca desde los antiguos tiempos griegos (siglo IV a. C) hasta mediados del siglo XVII d. C. Este periodo se caracteriza por ingeniosos intentos de encontrar el valor de $\boldsymbol{\pi}$ por métodos puramente geométricos (con regla y compas).

Arquímedes (287-212 a. C), el más grande de los antiguos matemáticos, calculó $\boldsymbol{\pi}$ como límite de polígonos regulares circunscritos e inscritos en una circunferencia. Uso polígonos hasta de 96 lados y llego a encerrar $\boldsymbol{\pi}$ **e**ntre los valores

$$3,1428571 = 3\frac{1}{7} > \quad \pi \quad > 3\frac{10}{71} = 3{,}140845$$

Ludolph Van Ceulen en el siglo XVI llegó a calcular $\boldsymbol{\pi}$ con 17 decimales, valor numérico que en Alemania aun es llamado número de Ludolph.
En el año 1621, el matemático Snell evaluó $\boldsymbol{\pi}$ con 35 decimales, usando para ello polígonos regulares (inscritos y circunscritos) de 2^{30} lados.

- ***Segundo periodo***

Comienza en el siglo XVIII. Con la ayuda del Análisis Matemático (cálculo) recientemente inventado, grandes matemáticos como ***Fermat*** (1601-1667), ***Wallis*** (1616-1703), ***Newton*** (1642-1727), ***Leibniz*** (1646-1716) y ***Euler*** (1707-1783), se dedican a trabajar en el problema de la cuadratura del círculo. Como resultado de estos estudios se descubrieron varias fórmulas que permitían expresar, de una u otra manera, el valor de π como series infinitas, productos de términos y fracciones continuas.

Estos esfuerzos, aunque acrecentaban la precisión de $\boldsymbol{\pi}$, no revelaban la naturaleza profunda de significado de este enigmático número, parecía curioso que $\boldsymbol{\pi}$, cuyo origen es puramente geométrico, pudiese ser calculado a partir de fracciones continuas y de series y productos infinitos, expresiones que tienen aparentemente pocos contactos con la geometría. Esto fue una fuente de gran asombro y llego a ser un gran estímulo para la actividad matemática.
El matemático ***Johann Lambert*** (1728-1777), en el año 1761, logró demostrar que $\boldsymbol{\pi}$ era un número irracional, es decir, no se podía representar como un cociente $^{a}/_{b}$ de dos números enteros. A pesar de este avance sustancial en el conocimiento sobre la naturaleza del número $\boldsymbol{\pi}$, el problema fundamental sobre la cuadratura del círculo permaneció sin resolverse, ya que hay muchos números irracionales que se pueden construir con regla y compas.
Auténticos matemáticos se han entretenido buscando, por medio de tanteos bien orientados, soluciones geométricas aproximadas que permitan "cuadrar" el círculo solo con regla y compas.
En el año 1685 el matemático **Adam Kochansky** dio a conocer un procedimiento que permite construir aproximadamente el número $\boldsymbol{\pi}$.

- ***Tercer periodo***

A partir de principios del siglos XIX , con el desarrollo del Análisis moderno, se pudo atacar el problema de la trascendencia de π con éxito.

El punto final del problema de la cuadratura del círculo fue puesto por el matemático alemán ***Ferdinand Lindemann*** (1852-1939) en una memoria publicada en 1882. Usando la relación encontrada por ***Euler*** y guiándose por el método señalado por ***Hermite,*** logra demostrar que π es trascendente. Con esto toda esperanza de poder construir π con regla y compas se desvanece, y lo más a que se puede aspirar son soluciones aproximadas, como la elegante construcción que Kochansky dio en el año 1685.

B. La teoría de proporciones

Los libros más admirables de los trece que componen los elementos han sido el quinto y el décimo, el primero de ellos sobre la teoría general de proporciones y el segundo sobre la clasificación de lo inconmensurable. El descubrimiento de los inconmensurables había provocado una crisis lógica que arrojaba graves dudas sobre las demostraciones que recurrían a la idea de proporcionalidad, pero la crisis había sido evitada con éxito por medio de los principios enunciados por Eudoxo. No obstante, los matemáticos griegos tendían a evitar las proporciones, pero Euclides, retrasa su uso al sustituir una relación entre longitudes que tendrían que ser de la forma $\boldsymbol{\frac{x}{a} = \frac{b}{c}}$ por la igualdad de las áreas $xc = ab$. Sin embargo eran necesarias las proporciones, y así Euclides ataca el problema en el libro V de los elementos, algunos comentaristas van tan lejos como para sugerir que el libro completo, que contiene 25 proposiciones, es obra de Eudoxo, pero esto parece improbable. Algunas de las definiciones de este libro, tales como la definición de razón, son tan vagas que resultan inútiles, pero la definición 4 en cambio es esencialmente el axioma de Eudoxo y Arquímedes:

a. Eudoxo de Cnido

Durante la juventud de ***Platón*** el descubrimiento de los inconmensurables había producido un verdadero escándalo lógico, al ser la causa de la ruina de todas las teorías de proporción. Dos cantidades, tales como la diagonal y el lado de un cuadrado, son inconmensurables cuando no tienen una razón tal como la de un número natural a otro; pero ¿Cómo puede uno comparar entonces las razones entre magnitudes inconmensurables? Si ***Hipócrates*** demostró realmente que dos círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros, debió tener alguna manera de manejar proporciones. No sabemos cómo pudo proceder ni si se anticipó en algún sentido a ***Eudoxo***, quien dio una definición nueva y universalmente aceptada de la igualdad de dos razones. Parece ser que los griegos habían hecho uso previamente de la idea de que cuatro cantidades están en proporción, $\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}:\boldsymbol{d}$, si las dos razones $\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}:\boldsymbol{d}$ tienen la misma suma y resta mutua. El descubrimiento de Eudoxo de la teoría de la proporción se utilizaba en el libro V de los Elementos de Euclides, la cual fue un éxito.

La palabra "razón" representaba en la matemática griega un concepto esencialmente indefinido, puesto que la "definición" de razón de Euclides como un cierto tipo de relación en tamaño entre dos magnitudes del mismo tipo pronto se mostró insuficiente. Mucho más importante es, en cambio, la afirmación de Euclides en el sentido de que dos magnitudes se dice que tienen una razón una a la otra si se puede encontrar un múltiplo de una cualquiera de ellas que supere a la otra; esta es esencialmente una formulación del llamado "***Axioma de Arquímedes***", propiedad que Arquímedes mismo atribuía a Eudoxo, así pues la idea de razón de Eudoxo excluye el cero y clarifica lo que debe entenderse por magnitudes del mismo tipo; un segmento.

A continuación, la definición de razones del libro "Los Elementos"

<u>Definición 5 del libro V</u>, la famosa formulación de Eudoxo:

"se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomamos cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente"

Es decir, $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ si y solo si, dados dos números naturales cualesquiera $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$, si $\boldsymbol{ma} < nb$ entonces $\boldsymbol{mc} < nd$, o si $\boldsymbol{ma} = \boldsymbol{nb}$ entonces $\boldsymbol{mc} = \boldsymbol{nd}$, o bien si $\boldsymbol{ma} > nb$ entonces $\boldsymbol{mc} > nd$.

La definición de igualdad de dos razones de Eudoxo no se diferencia mucho del procedimiento de los productos cruzados que utilizamos hoy para las fracciones.

Una vez desarrollada la teoría de proporciones en el libro V, la utiliza Euclides en el libro VI para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan al estudiar triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes.

b. El método de Exhausción

Uno de los aspectos más preocupantes de la crisis provocada por los inconmensurables quedaba resuelto con éxito gracias a la imaginación de Eudoxo, pero aún quedaba otros problemas importantes sin resolver: el de la comparación de figuras curvilíneas y rectilíneas, y también aquí parece haber sido Eudoxo quien dio la clave de la solución. Los matemáticos anteriores habían sugerido ya que lo mejor que uno podía intentar era inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea y proceder a multiplicar el número de lados o caras indefinidamente, con lo que las figuras rectilínea se iban aproximando cada vez más a la curvilínea, pero lo que no sabían era como cerrar el razonamiento, ya que la idea de limite les era desconocida y lo seguiría siendo durante más de dos milenios.

A partir del axioma de Eudoxo o de Arquímedes es muy fácil demostrar, por medio de una reducción al absurdo, la proposición que constituye la base del método de Exhausción griego:

"*sí de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano"*

Esta proposición, a la que nos referimos con el nombre de "propiedad de Exhausción", es equivalente a la proposición moderna que dice que si M es una magnitud dada, $\boldsymbol{\varepsilon}$ es otra magnitud del mismo tipo arbitraria, dada también, y $\boldsymbol{r}$ es también un numero tal que $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{r} < 1$, entonces podemos encontrar un entero positivo **N** tal $\boldsymbol{M}(\mathbf{1}-\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{n}} < \epsilon$ para todo numero natural $\boldsymbol{n} > N$. Es decir, la propiedad de exhausción es equivalente a la afirmación que, en términos modernos, nos asegura que $\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{M}(\mathbf{1}-\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$.

Vamos a dar aquí la demostración, en una forma un poco modernizada en lo que se refiere a la notación, del teorema que afirma que las áreas de dos círculos son entre sí como las de los cuadrados construidos sobre sus diámetros. La demostración, tal como la da Euclides en los Elementos, libro XII; prop. 2, es probablemente la misma de Eudoxo.

Sean dos círculos $\boldsymbol{c}$ ***y*** $\boldsymbol{C}$***, de diámetro*** $\boldsymbol{d}$ ***y*** $\boldsymbol{D}$ ***y areas*** $\boldsymbol{a}$ ***y*** $\boldsymbol{A}$.

Se trata de demostrar que $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{d^2}}{\boldsymbol{D^2}}$

- La demostración la podemos obtener si procedemos de una manera indirecta y refutamos las otras dos posibilidades que podrían darse, es decir, que $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{A}} < \frac{\boldsymbol{d^2}}{\boldsymbol{D^2}}$ y que $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{A}} > \frac{\boldsymbol{d^2}}{\boldsymbol{D^2}}$.
- Supongamos, pues, en primer lugar, que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$
- Entonces existirá una magnitud $\boldsymbol{a'} < a$, $tal\ \ que \frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$
- Tomemos $a - a'$ como magnitud prefijada $\epsilon > 0$
- Inscribamos ahora en los círculos $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{C}$ dos polígonos regulares del mismo número de lados $\boldsymbol{n}$ Y sean p_n y P_n sus áreas respectivas
- Consideremos las áreas intermedias que quedan fuera de los polígonos, pero dentro de los círculos, formados por $\boldsymbol{n}$ segmentos circulares cada una.

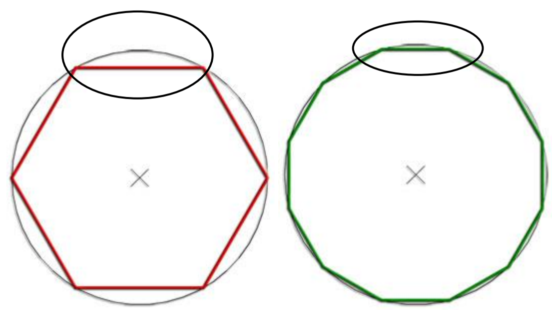


Figura 21

Si duplicamos el número de lados es obvio que de estas áreas intermedias sustraemos más de su mitad; en consecuencia, y por la propiedad de Exhausción, las áreas intermedias pueden irse reduciendo al duplicar sucesivamente el número de lados (es decir, haciendo n cada vez mayor), hasta que se tenga $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{p_n} < \varepsilon$

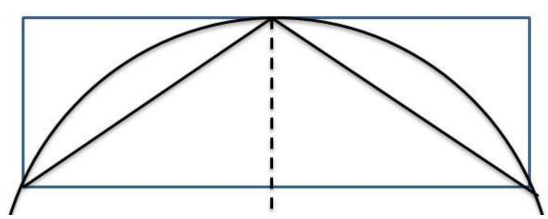


Figura 22

- Y entonces Dado que $a - a' = \varepsilon$
- Tendremos que $p_n > a'$
- Se sabe por teoremas anteriores que $\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$
- Y como habíamos supuesto que $\frac{a\prime}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ resulta que $\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A}$

- Por lo tanto, si $p_n > a'$ como hemos demostrado, $P_n > A$ debería ser también.
- Pero como P_n es el área de un polígono inscrito en el circulo de área A, es obvio que P_n no puede ser mayor que A.

Como una conclusión falsa implica una premisa falsa, hemos refutado así la posibilidad de que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$. De una manera análoga podemos refutar la posibilidad de que $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$, estableciendo en definitiva el teorema de que las áreas de los círculos son entre sí como las de los cuadrados construidos sobre sus diámetros.

C. Menecmo

Se atribuye a Menecmo (hacia 350 a.C.) de la *Academia* platónica el más famoso de los discípulos de Eudoxo y maestro de Aristóteles y Alejandro Magno. Escribió obras sobre geometría, el significado de la palabra elemento y sobre la diferencia entre los teoremas y los problemas.

La contribución más importante de Menecmo fue el descubrimiento de las secciones cónicas, lo que le permitió resolver el problema de los oráculos de Delos. En efecto, si Hipócrates redujo el problema de "la duplicación del cubo" al de la búsqueda de dos medias proporcionales entre dos rectas $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, es decir $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}$, Menecmo descubrió las propiedades de la parábola y de la hipérbola que corresponden, en coordenadas cartesianas, a las relaciones que resultan de la proporción continua:

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = bx, \qquad xy = ab$$

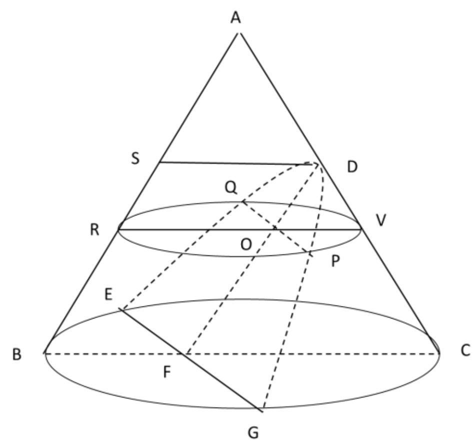
No obstante sabemos cómo, partiendo del método de obtención de las secciones cónicas, obtuvo Menecmo las ecuaciones $\boldsymbol{xy = ab}$ (hipérbola) e $\boldsymbol{y^2 = bx}$ (parábola) necesarias para la resolución de la duplicación del cubo.

Menecmo detectó que para la resolución del problema había una familia de curvas adecuadas, los tres tipos de cónicas obtenidos por el mismo método, a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos, según que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso.
Partiendo de un cono circular recto de una sola hoja con ángulo recto en el vértice, Menecmo descubrió que al cortar el cono por un plano perpendicular a una de sus generatrices, la curva intersección es tal que su ecuación.

Demostración:

- Sea pues el cono ABC y sea EDG la curva obtenida al cortarlo por un plano perpendicular a la generatriz ADC en el punto D.
- Por un punto cualquiera P de la curva pasa un plano horizontal que corta al cono en la circunferencia PVQR, siendo Q el otro punto de intersección de la curva (parábola) con esta circunferencia.

Figura 23



a) Por razones de simetría resulta que los segmentos $\overline{PQ} \perp \overline{RV}$ en el punto O,

b) Por lo tanto $\overline{OP}$ es la media proporcional entre $\overline{RO}$ y $\overline{OV}$. Por tanto $OP^2 = \overline{RO} \cdot \overline{OV}$.

c) Por otra parte la semejanza de los triángulos $\Delta\, OVD$ y $\Delta\, BCA$ se tiene: $\frac{OV}{DO} = \frac{BC}{AB}$, y de semejanza de los triángulos $\Delta\, SDA$ y $\Delta\, ABC$ se tiene: $\frac{SD}{AS} = \frac{BC}{AB}$.

d) Tomando $OP = y$, $OD = x$, como "coordenadas del punto P, se tiene $y^2 = RO \cdot OV$, de modo que sustituyendo:

$$y^2 = OP^2 = RO \cdot OV = SD \cdot OV = AS \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right) \cdot OD \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right) = \frac{AS \cdot BC^2}{AB^2} \cdot x$$

Ya que los segmentos $\overline{AS},\ \overline{BC}\ y\ \overline{AB}$ son los mismos para todos los puntos de la curva EQDPG, podemos escribir la ecuación de la curva "sección del cono rectángulo" en la forma:

$$y^2 = lx$$

Donde l es una constante que más tarde el "*latus rectum*".

De una forma totalmente análoga para conos con ángulo agudo y obtuso en el vértice Menecmo obtendría expresiones de la forma:

$y^2 = lx - \left(\frac{b^2}{a^2}\right) \cdot x^2$, secciónde cono acutángulo.
$y^2 = lx + \left(\frac{b^2}{a^2}\right) \cdot x^2$, sección de cono obtusángulo.

Sea un cubo de arista***a*,** a partir de la proporción continua: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, resultado de interpolar dos medias proporcionales entre **a** y su doble **2a**, se obtienen las parábolas $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$, y la hipérbola equilátera $xy = 2a^2$. Tanto la intersección de las dos parábolas como la intersección de una de las parábolas y la hipérbola proporciona $x^3 = 2a^3$, es decir, la arista del cubo de volumen doble.

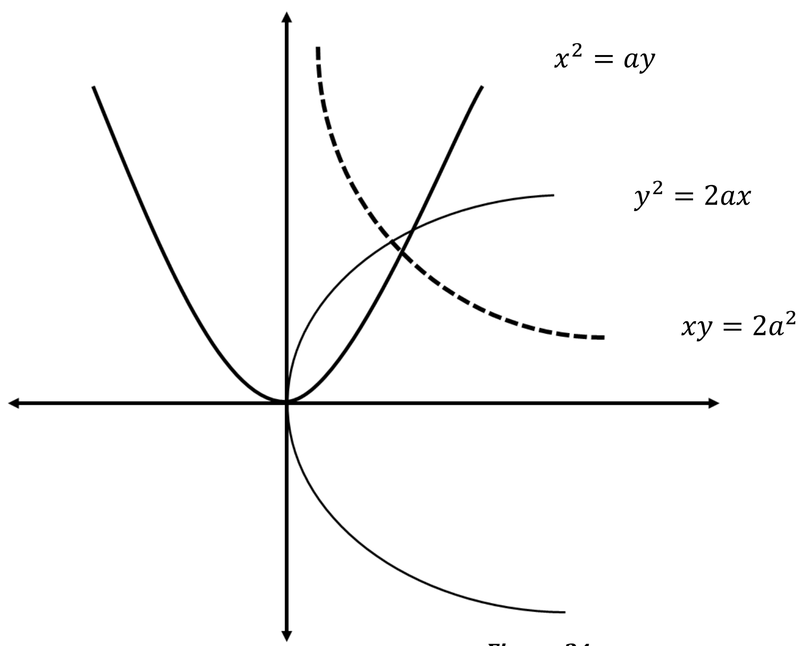


Figura 24

Lo que en nuestro lenguaje geométrico analítico realizamos utilizando las ecuaciones de las cónicas, Menecmo lo hallaría mediante la construcción de puntos de intersección de las cónicas obtenidas, desplazando convenientemente el plano de corte con el cono a fin de hallar cónicas con *latus rectum* conveniente al objetivo propuesto.

Aunque según el testimonio de Proclo y Eutocius fue ***Menecmo*** el primero que descubrió las secciones cónicas, tal vez no fue así, ya que antes Arquitas de Tarento (hacia 400 a.C.), gran político reformador y maestro y salvador de Platón, había estudiado el problema de la duplicación el cubo, obteniendo las dos medias proporcionales mediante una compleja intersección de un cono de revolución, un cilindro de revolución y una superficie teórica. Así pues, Arquitas pudo haber estudiado la elipse como sección oblicua del cilindro. Por otra parte, después de la línea recta, es la elipse la curva más habitual en la experiencia, ya que los objetos circulares mirados de forma oblicua, así como la sombra que arrojan son elípticos.

Donde **a y b** son constantes y el plano de corte es perpendicular, en ambos casos, a una generatriz. Como vemos hay una gran similitud entre estos desarrollos de Menecmo en relación a expresiones equivalentes a ecuaciones y la utilización de coordenadas, lo que ha inducido a algunos historiadores a afirmar que este geómetra ya conocía ciertos aspectos de la Geometría Analítica. De hecho, ignorando el lenguaje de ésta se hace difícil explicar el hallazgo de Menecmo.

Las cónicas de Menecmo tienen su origen en los intentos de Hipócrates de Quíos (hacia 400 a.C.) de resolución del problema clásico de la *duplicación del cubo* mediante la interpolación de dos medias proporcionales.

D. Arquímedes

Alejandría fue el centro de actividad matemática a lo largo de toda la época Helenística, sin embargo, el matemático más importante de esa época, no era natural de dicha ciudad. Arquímedes pudo haber estudiado durante algún tiempo en Alejandría con los discípulos de Euclides y, de hecho, mantenía una comunicación con los matemáticos de allí, pero vivió y murió en Siracusa. Los detalles que conocemos de su vida son escasos, pero disponemos de alguna información acerca de el por la historia de la vida de Marcelo, el general romano, escrita por Plutarco.

La reconstrucción biográfica de Arquímedes es producto de varios fragmentos de diversos autores, especialmente historiadores de las guerras púnicas. Con base en estas observaciones se sabe que Arquímedes nació en 287 a.C, vivió 75 años y murió a causa del saqueo que siguió a la caída de Siracusa en manos de Marcelo en el 212 a.C. Su padre fue Pheidias el astrónomo. En virtud del rigor, la originalidad y la trascendencia de sus resultados se le considera el primer matemático moderno. Arquímedes en momento de su formación visitó Alejandría y estuvo en contacto con los sucesores de Euclides. Particularmente mantuvo una relación estrecha con ***Conon de Samos*** (280−220 a.C), ***Dositeo de Pelusa*** y ***Eratóstenes de Cirene*** (276−194 a.C) (estos tres fueron sus maestros en Alejandría). El primero fue el descubridor de la espiral que hoy conocemos con el nombre de espiral de Arquímedes y estudió los puntos de intersección entre dos secciones cónicas. El tercero fue director de la biblioteca de Alejandría a partir de 235 a.C y autor del conocido método de la Criba para la determinación de números primos. Cuando Arquímedes regresó a Siracusa, dedicó toda su vida a la investigación científica. Mientras a Euclides se le consideraba el maestro por excelencia, creador de, lo que en el lenguaje moderno podría decirse, un libro de texto. La obra de Arquímedes fue desarrollada fundamentalmente a través de cartas escritas en el más absoluto rigor euclidiano y con un marcado énfasis en la aplicación de los métodos matemáticos a la Mecánica y la Física.

Obras:
<u>*Arenario*</u>, que contiene un sistema de numeración de números grandes, concebido en un principio para que Arquímedes pudiese escribir un número superior al número de granos de arena necesarios para llenar todo el universo.
<u>*Los cuerpos flotantes, libro I y II*</u>, que trata del equilibrio de un segmento de paraboloide de revolución que flota en un líquido, del principio hidrostático de Arquímedes, etc.
<u>*Tratado del método*</u>, en donde Arquímedes revela a Eratóstenes algunos de sus métodos de investigación, utilizados para descubrir varios de sus teoremas.

a. El método

El manuscrito del método de Arquímedes se encontró en 1906, en un pergamino de Constantinopla cuyo texto religioso ocultaba el texto del célebre siracusano. En esta obra cuenta como descubrió ciertos teoremas relativos a la curvatura y a la cuadratura, insistiendo en la veracidad de los teoremas y las demostraciones rigurosas por método geométricos irrefutables que deben realizarse antes de aceptar definitivamente la prueba de estos teoremas. De los tratados que se refieren principalmente al método de Exhausción el más popular fue el de la cuadratura de la parábola. Cuando escribía Arquímedes, las secciones cónicas se conocían desde hacía casi un siglo, sin embargo, no se había hecho ningún progreso en lo que se refiere al cálculo de áreas relacionadas con ellas. Se necesitó del genio del más grande matemático de la antigüedad para cuadrar una sección cónica, concretamente un segmento parabólico, lo que consigue en la proposición 17 de la obra dedicada a dicha cuadratura. Arquímedes demuestra rigurosamente que el área de un segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área de un triángulo que tenga la misma base y la misma altura.

Una anécdota muy conocida de Arquímedes tiene que ver con la famosa «Ley de la Palanca» que Arquímedes aplica en su método mecánico del MÉTODO para encontrar las cuadraturas y cubaturas. Según Pappus de Alejandría, Arquímedes habría pronunciado la célebre frase, tan arrogante como retórica y absurda: «Dadme un punto de apoyo y levantaré el mundo», en conexión con el problema de mover un peso dado, mediante una fuerza dada. Poco antes de narrar los asedios de Siracusa por Marcelo, Plutarco describe así las palabras de Arquímedes (Marcelo, XIV)

b. Proposición 1 del libro "el método"

"Sea ABC un segmento comprendido entre la recta AC y la sección ABC de un cono rectángulo; divídase AC por la mitad en D y trácese la recta DBE paralela al diámetro, y uniendo B con A y B con C, trácense las rectas AB y BC."

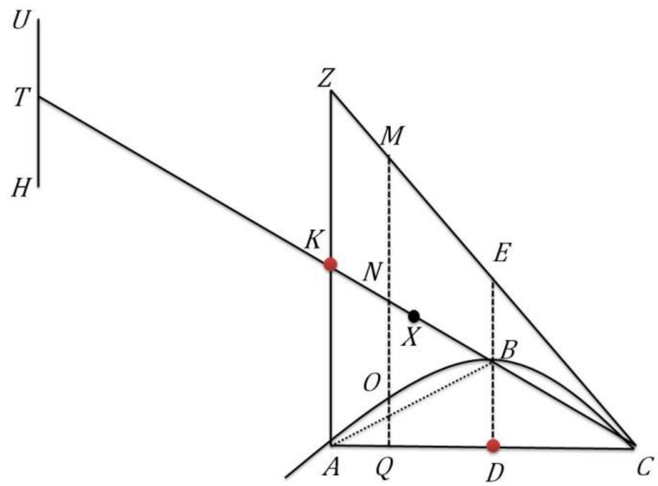


Figura 25

<u>*Demostración:*</u>

Trácense por los puntos A y C la recta AZ paralela a DBE y la CZ tangente a la sección en el punto C; prolónguese CB hasta K y sea KT igual a CK. Considérese CT como una palanca, siendo K su punto medio, y sea MQ una recta paralela a ED.

Puesto que CBA es una parábola y que CZ es tangente a ella, y CD es una ordenada, EB es igual a BD, como se demuestra en los Elementos.

- *En su tratado Sobre la Cuadratura de la Parábola Arquímedes había dado ya una primera demostración mecánica de la cuadratura de la parábola (proposiciones 1-17), más larga que la presente, basada en los postulados de la Estática y previa a la geométrica por exhaución (proposiciones 18-24) que desarrolla posteriormente en el mismo tratado.*
- *Arquímedes distingue según que el diámetro sea perpendicular o no a la base del segmento (proposiciones 14 y 15), pero en ambos casos la solución es la misma.*
- *Arquímedes utiliza la perífrasis «sección de cono rectángulo» para referirse a una parábola.*
- *Aquí Arquímedes entiende por diámetro el eje de la parábola.*
- *CD es la cuerda paralela a la tangente en el vértice del segmento parabólico.*
- *Arquímedes no se refiere aquí a Los Elementos de Euclides sino a alguno de los tratados elementales sobre las secciones cónicas, ahora perdidos, debidos también a Euclides o quizá a Aristeo*

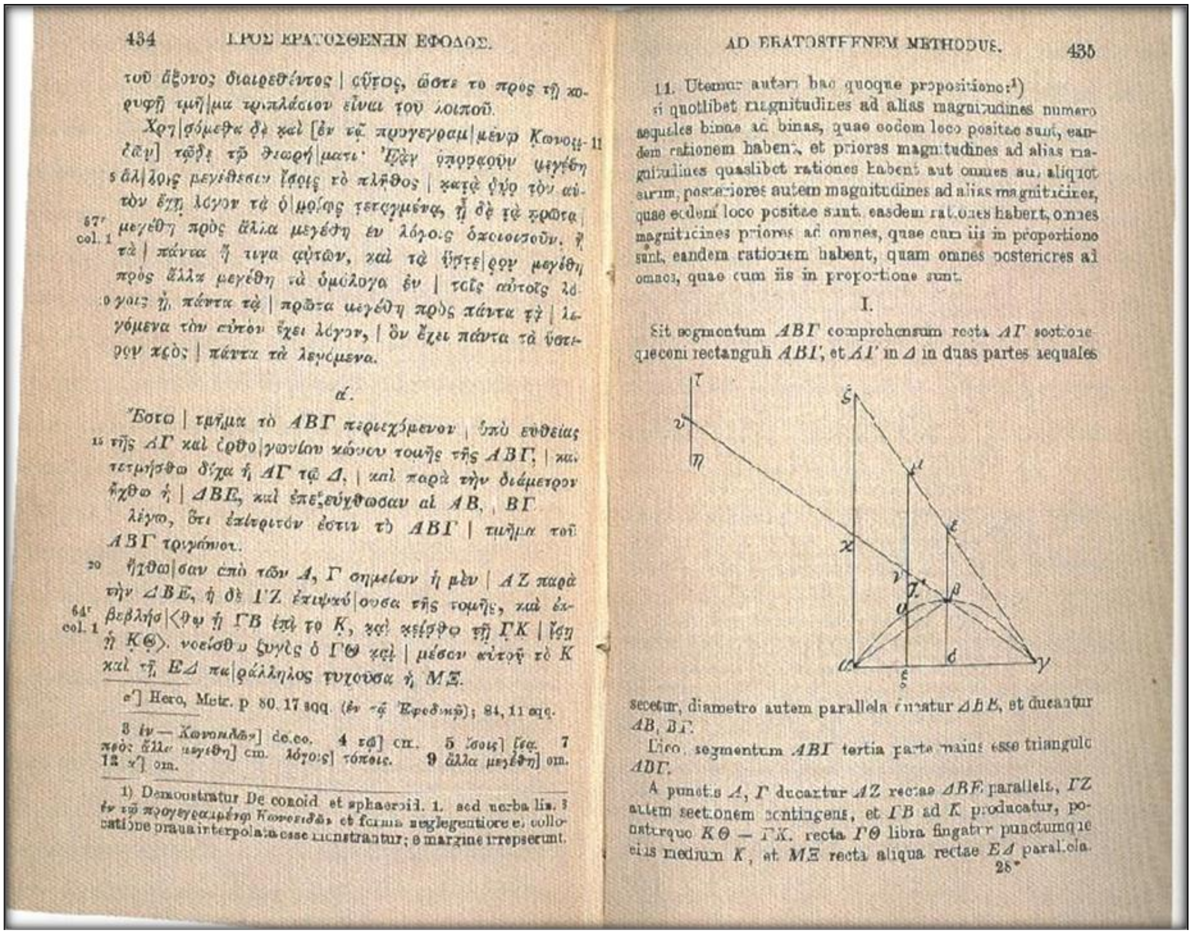
Por lo mismo y puesto que ZA y MQ son paralelas a la recta ED, son iguales MN y NQ, así como ZK y KA. Y puesto que la razón entre CA y AQ es igual que la razón entre MQ y QO, lo cual se expone en un lema, y la razón entre CA y AQ es igual a la razón entre CK y KN, sucede que siendo también CT igual que KT, la razón entre TK y KN será igual a la razón entre MQ y QO.

Ahora bien, puesto que el punto N es el centro de gravedad de la recta MQ, por ser MN igual que NQ, si tomamos la recta UH igual a QO de manera que su centro de gravedad sea el punto T, de modo que sea UT igual que TH, la recta UTH estará en equilibrio con la recta MQ, que permanece en su sitio, por estar TN dividida por el punto K en partes que están en razón inversa a los pesos UH y MQ, siendo la razón entre TK y KN igual a la razón entre MQ y HU, y por lo tanto K es el centro de gravedad del conjunto de ambos pesos.

De la semejanza de los triángulos MNC y EBC, así como QNC y DBC, resulta (Euclides, VI.4) : $\frac{EB}{MN} = \frac{BC}{CN} = \frac{BD}{NQ}$, *y de aquí:* $\frac{MN}{NQ} = \frac{EB}{BD}$, *de donde al ser* $EB = BD$, *se deduce que* $MN = NQ$. *Análogamente se razona que* $ZK = KA$.

Análogamente si en el triángulo ZAC se trazan tantas paralelas como se quiera a ED, éstas, permaneciendo en su lugar, estarán en equilibrio con los segmentos determinados sobre ellas por la sección y trasladados al punto T, de manera que el centro de gravedad de unas y otros será K. Ahora bien, las rectas trazadas en el triángulo CZA componen el propio triángulo y los segmentos rectilíneos obtenidos en la sección del mismo modo que OQ componen el segmento ABC; por lo tanto el triángulo ZAC, permaneciendo en su lugar, estará en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento de la sección trasladado hasta tener su centro de gravedad en T, de manera que el centro de gravedad del conjunto de ambos será el punto K. Divídase ahora CK por el punto X de manera que sea CK sea el triple de KX; por tanto el punto X será el centro de gravedad del triángulo AZC, como está demostrado en el libro Sobre el Equilibrio. Y puesto que el triángulo ZAC, permaneciendo en su lugar, está en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento BAC, trasladado con centro de gravedad en T, y que X es el centro de gravedad del triángulo ZAC, se verifica, por consiguiente, que la razón del triángulo AZC al segmento ABC colocado alrededor del centro T es igual a la razón de TK a XK. Ahora bien, siendo TK triple de KX, el triángulo ZAC será triple del segmento ABC. Además, el triángulo ZAC es cuádruple del triángulo ABC, ya que ZK es igual que KA y AD es igual que DC, luego el segmento ABC equivale a cuatro tercios del triángulo ABC.

En realidad, la proposición no queda demostrada por lo que hemos dicho ahora, pero da una cierta idea de que la conclusión es verdadera. Por lo cual, nosotros, viendo que la conclusión no está demostrada, pero sospechando que es verdadera, daremos la demostración geométrica, que encontramos y publicamos anteriormente



434 ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ.

AD ERATOSTHENEM METHODUS. 435

11. Utemur autem hac quoque propositione:[1])
si quotlibet magnitudines ad alias magnitudines numero aequales binae ad binas, quae eodem loco positae sunt, eandem rationem habent, et priores magnitudines ad alias magnitudines quaslibet rationes habent aut omnes aut aliquot earum, posteriores autem magnitudines ad alias magnitudines, quae eodem loco positae sunt, easdem rationes habent, omnes magnitudines priores ad omnes, quae cum iis in proportione sunt, eandem rationem habent, quam omnes posteriores ad omnes, quae cum iis in proportione sunt.

I.

Sit segmentum $AB\Gamma$ comprehensum recta $A\Gamma$ sectioneque coni rectanguli $AB\Gamma$, et $A\Gamma$ in Δ in duas partes aequales secetur, diametro autem parallela ducatur ΔBE, et ducantur AB, $B\Gamma$.

Dico, segmentum $AB\Gamma$ tertia parte maius esse triangulo $AB\Gamma$.

A punctis A, Γ ducatur AZ rectae ΔBE parallela, ΓZ autem sectionem contingens, et ΓB ad K producatur, ponaturque $K\Theta = \Gamma K$. recta $\Gamma\Theta$ libra fingatur punctumque eius medium K, et $M\Xi$ recta aliqua rectae $E\Delta$ parallela.

28*

Figura 26

La aplicación del método mecánico de Arquímedes al cálculo de la cuadratura de un segmento parabólico en Archimedis Opera Omnia de J.L. Heiberg

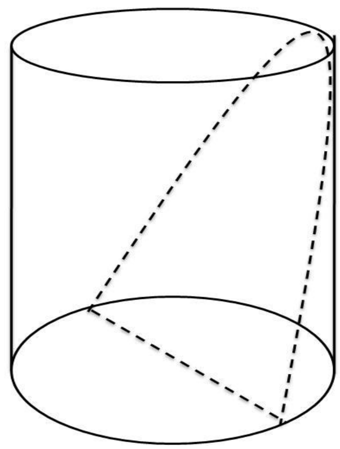
Aquí Arquímedes aplica que triángulos de la misma base y altura tienen igual área, así como la semejanza de los triángulos ACK, DCB : AK/BD = AC/DC = 2, de donde resulta: AK = 2BD, AK·AC = 2AC·BD. Ahora se tiene: ZAC = 2KAC = AK¨AC = 2BD·AC = 4ABC.

En el texto de J.L.Heiberg este último párrafo aparece al comienzo de la proposición siguiente. Debido a su significado, como colofón de la proposición sobre la cuadratura de la parábola, y de acuerdo con la mayor parte de los autores, parece más razonable ubicarlo aquí.

Arquímedes se refiere a la demostración puramente geométrica de la cuadratura del segmento parabólico ya publicada en la segunda parte del libro Sobre la Cuadratura de la Parábola. Aunque aquí anuncia la reproducción de esta demostración, seguramente al final del tratado, ésta no ha aparecido en el palimpsesto de Jerusalén.

El método del equilibrio de las secciones circulares con respecto a un vértice como punto de apoyo lo aplico Arquímedes para descubrir los volúmenes de los segmentos de tres sólidos de revolución, el elipsoide, el paraboloide y el hiperboloide, así como los centros de gravedad del paraboloide o conoide, de un hemisferio esférico y de un semicírculo. El método finaliza con la determinación de los volúmenes de dos sólidos que aparece como favorito en los textos modernos del cálculo infinitesimal, a saber, el de una cuña cortada de un cilindro circular recto por dos planos y el volumen de la intersección de dos cilindros circulares rectos iguales que se cortan de manera que sus ejes son perpendiculares.

Figura 27



La obra que contiene estos resultados tan maravillosos que datan de hace más de 2000 años, se recupera por accidente en 1906. El infatigable danés J. L. Heiberg tuvo noticias de que se había encontrado en Constantinopla un palimpsesto de contenido matemático. (Un palimpsesto es un pergamino en el que la escritura original ha sido lavada imperfectamente, tratando de borrarla y remplazarla por un texto nuevo y diferente superpuesto).

El manuscrito consistía en 185 hojas, la mayoría de pergamino y algunas de papel, con el texto arquimediano copiado por una mano del siglo X. El texto matemático de Arquímedes contenía el libro sobre la esfera y el cilindro, la mayor parte explica las espirales, parte de la medida del circulo y el equilibrio de los planos, así también como los cuerpos flotantes, todos los cuales se conocían por otros manuscritos y lo más importante de todo, el palimpsesto nos dio a conocer la única copia superviviente del método. En un cierto sentido este palimpsesto es un fiel símbolo de la contribución de la edad media a la historia de la matemática. La ferviente preocupación por los asuntos religiosos estuvo a punto de borrar de la faz de la tierra una de las obras más importantes del matemático más grande de la antigüedad, sin embargo, fue la erudición medieval la que en parte de una manera involuntaria, la conservo, así como muchas otras cosas que de otra forma se habrían perdido casi con toda seguridad.

E. Apolonio de Perga

Durante el primer siglo aproximadamente de la época helénica hubo tres matemáticos cuyas figuras aparecen sobresaliendo por encima de todos los demás de su tiempo, así como también por encima de la mayoría de sus predecesores y de sus sucesores. Estos matemáticos fueron ***Euclides***, ***Arquímedes*** y ***Apolonio***, y sus obras son las que han hecho que se denomine como "edad de oro" de la matemática griega al periodo que va del 300 al 200 a.C. En cierto sentido la matemática se había quedado rezagada con respecto a las artes y la literatura, ya que es realmente la edad de Pericles, a mediados del siglo V a.C, la que suele conocer en un sentido más general como “Edad de Oro” de la cultura griega. A lo largo de todo el periodo helénico, la ciudad de Alejandría constituyo el foco más importante de actividad matemática del mundo occidental.

Apolonio escribió un libro, que se ha perdido, titulado *Reparto rápido*, en el que se enseñaban, al parecer, métodos rápidos de cálculo. Se dice también que Apolonio daba en este libro una aproximación de $\boldsymbol{\pi}$ mejor que la dada por Arquímedes, probablemente el valor que conocemos como 3,1416, pero no sabemos cómo se consiguió este valor que aparece más tarde en ***Ptolomeo*** y en la India. De hecho, nos encontramos con más preguntas sin respuesta sobre Apolonio y su obra que acerca de Euclides o Arquímedes, debido a que una gran parte de su obra ha desaparecido. Si conocemos, sin embargo, los títulos de muchas de las obras perdidas, tales como *secciones de una razón dada*, otra sobre *secciones en un área dada,* una sobre *secciones determinadas,* otra obra sobre *tangencias*, otra sobre *inclinaciones* y por último, sobre *lugares planos*. ***Pappus*** nos transmitió breves descripciones de unas pocas, junta con un par de tratados de lo más avanzado de Euclides, en una colección conocida como el “Tesoro del Análisis”, constituido en gran parte por obras de Apolonio.

a. Descripción de sus obras

Es posible obtener, a partir de las descripciones dadas por Pappus, entre otros, una idea bastante aproximada del contenido de algunas de las obras griegas perdidas.

a. 1. El libro sobre <u>*secciones en una razón*</u> dada, trataba, de los diversos casos de un problema general: dada dos rectas y un punto sobre cada una de ellas, trazar por un tercer punto dado una recta que corte a las anteriores en segmentos que estén en una razón dada. Este problema es equivalente a resolver una ecuación cuadrática del tipo $ax - x^2 = bc$, es decir, al aplicar a un segmento dado un rectángulo igual a otro rectángulo dado salvo un cuadrado de exceso.

a. 2. En el libro sobre <u>*secciones en un área dada*</u>, el problema a resolver es análogo, salvo lo que se pide es que los segmentos determinados por la intersección formen un rectángulo equivalente a otro, y no que estén en una razón dada. Este problema conduce a una ecuación cuadrática de la forma $ax + x^2 = bc$, es decir, a aplicar a un segmento a un rectángulo igual a otro rectángulo dado salvo el defecto de un cuadrado.

a. 3. El tratado sobre <u>*secciones determinadas*</u>, trataba de lo que podríamos llamar geometría analítica de una dimensión. Se considera el siguiente problema, formulado utilizando la típica forma geométrica del análisis algebraico de los griegos. Dado cuatro puntos A, B, C, D sobre una recta, determinar un quinto punto P sobre ella, tal que el rectángulo construido sobre AP y DP.

a. 4. El tratado sobre <u>*tangencias*</u> era de un tipo muy diferente a los tres, ya que tal como lo describe Pappus nos encontramos estudiando en el problema que hoy se conoce familiarmente como el “El problema de Apolonio”. Dados tres elementos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados. Este problema da lugar a diez casos posibles, desde los dos más sencillos en los que los tres elementos son tres puntos o tres rectas, al más fácil de todos, trazar una circunferencia tangente a otras tres rectas, al más difícil de todos, trazar una circunferencia tangente a otras tres dadas.

a. 5. El tratado de Apolonio sobre *inclinaciones* estaba dedicado al estudio de la clase de problemas del tipo de neusis que puede ser resuelto por métodos "planos" es decir, mediante el uso de regla y compas exclusivamente. La trisección efectuada por Arquímedes no es, desde luego, un problema de este tipo, ya que, como es bien sabido, en la época moderna se ha conseguido demostrar que un ángulo genérico no puede ser trisecado por medio de método. Según Pappus, uno de los problemas de los que se ocupaba Apolonio en las inclinaciones es el de trazar en una circunferencia dada una cuerda de longitud dada "inclinada" hacia un punto dado.

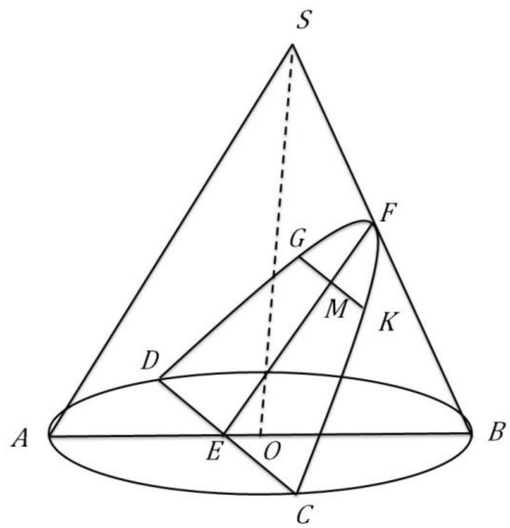
b. Las cónicas

Aunque Apolonio fue un astrónomo de talento y escribió sobre una gran variedad de temas matemáticos, su fama procede esencialmente de sus secciones cónicas en donde el método utilizado está mucho más próximo a los métodos de la geometría analítica actual que a los puramente geométricos. En los ocho libros que constituyen este trabajo y que contiene 400 proposiciones, el "gran geómetra", como se le llamaba sus contemporáneos, estudia ampliamente estas curvas, superando así claramente todos los trabajos de ***Menecmo, Aristeo*** y ***Euclides*** sobre este tema.

Los predecesores de Apolonio obtenían las secciones cónicas, la *elipse*, la *parábola* e *hipérbola* mediante secciones de conos circulares rectos de tres tipos distintos, según que el ángulo del vértice fuese agudo, recto u obtuso. Apolonio demuestra que no es necesario tomar secciones perpendiculares a un elemento del cono. Basta con variar, a partir de un cono ordinario, la inclinación de los planos que lo cortan. Además, Apolonio llego a obtener resultados generales sobre las cónicas utilizadas no solo el cono circular recto, sino también el cono oblicuo o el cono circular escaleno.
Parece ser que, por sugerencia de Arquímedes, Apolonio introdujo las palabras *elipse* e *hipérbola* para designar estas curvas, mientras que Arquímedes utilizaba el término *parábola* para designar la sección de un cono de ángulo recto en el vértice. Estos tres términos no fueron inventados por Apolonio, sino tomados por el de los Pitagóricos que lo utilizaban en la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la aplicación de áreas.
Apolonio obtiene las tres cónicas y sus propiedades fundamentales generando un doble cono, generalmente oblicuo, mediante un círculo y un punto, que no está en el plano del círculo, unidos por una recta que parte del punto y gira tocando cada uno de los puntos del círculo. Define el eje del cono como la recta trazada desde el vértice del cono al centro del círculo.

Así, SO es el ***eje*** del cono oblicuo (escaleno). Sea ASB un triángulo y DC la base de una sección, en ángulo recto con AB.
Entonces, si FE es el de la sección y GK cualquier cuerda de la sección paralela a DC que corta al eje FE en M, Apolonio demostró que M es el punto medio de GK

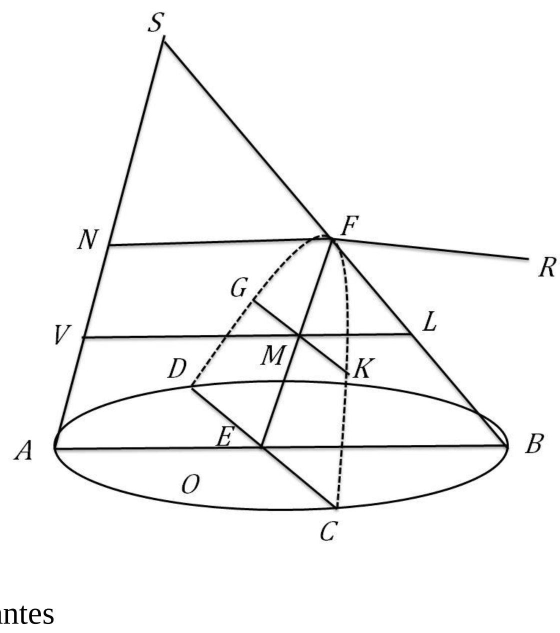
Figura 28



Además, *FE* es un diámetro de la sección (según su definición).
Entonces, explica que en general la cuerda *GK* no corta en ángulo recto a *FE* y que esto ocurrirá si el cono es recto, el plano de la sección forma un ángulo recto con la base del cono. Consideremos ahora los tres casos que corresponde a las tres cónicas:

1) El diámetro FE es paralelo a AS, generatriz del cono: Apolonio toma FR perpendicular a FE, cuya longitud es tal que $\frac{FR}{FS} = \frac{AB^2}{AS \cdot SB}$

Figura 29



Por triángulos semejantes

$$\frac{LM}{FM} = \frac{AB}{AS} (\Delta\, FML \quad y \quad \Delta\, ABS)$$

$$\frac{MV}{FS} = \frac{AB}{SB} (\Delta\ SNF \quad y\ \Delta\, ABS)$$

Además

$$\frac{GM^2}{FM \cdot SF} = \frac{LM \cdot VM}{FM \cdot SF}$$
$$= \frac{AB}{SB \cdot AS}$$
$$= \frac{FR}{FS}$$
$$= \frac{FR \cdot FM}{FS \cdot FM}$$

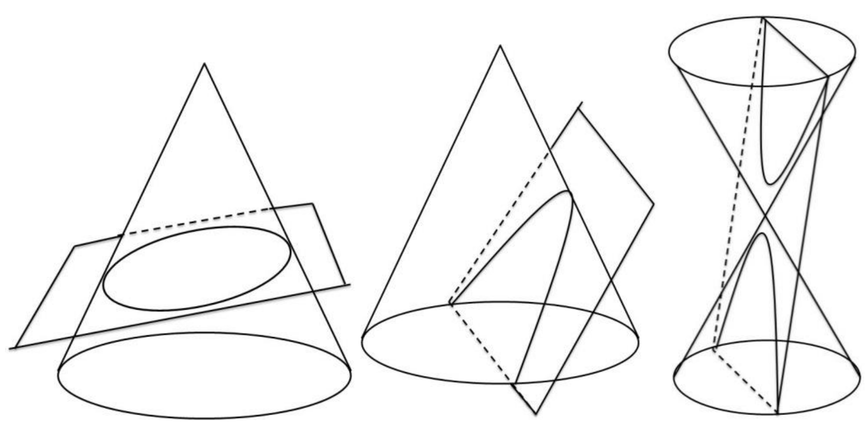
De donde

$$\boldsymbol{GM^2 = FR \cdot FM} \quad \text{(la parábola)}$$

Así. El cuadrado sobre la ordenada GM (GM^2) es igual al rectángulo aplicado a FR cuya longitud es la abscisa FM.

2) El diámetro FE corta a las dos semirrectas SA y SB; así se tiene la elipse.
3) La prolongación del diámetro FE corta a SA y a la prolongación, más allá de S, de SB; así se tiene la hipérbola.

Sea:



Elipse Parabola Hiperbola

Figura 30

El tratado de las secciones cónicas de Apolonio contiene una gran cantidad de materia; un tratamiento usual y partes muy específicas, cuyo contenido denso y diversificado es de difícil asimilación sin una preparación adecuada y una buena dosis de paciente labor. Este tratado, difícil de leer debido al gran número de complejas proposiciones y al contenido mucho más diversificado y especializado de lo que es habitual en nuestros cursos modernos, no por ello deja de presentar analogías, en lo referente al estudio de las cónicas, con los elementos de Euclides. Es evidente que elementos tales como la excentricidad y la directriz no aparecen en las cónicas de Apolonio y, si eran conocidas de la época, habría que buscarla en las otras obras del gran geómetra, de las que escasos originales han llegado hasta nosotros

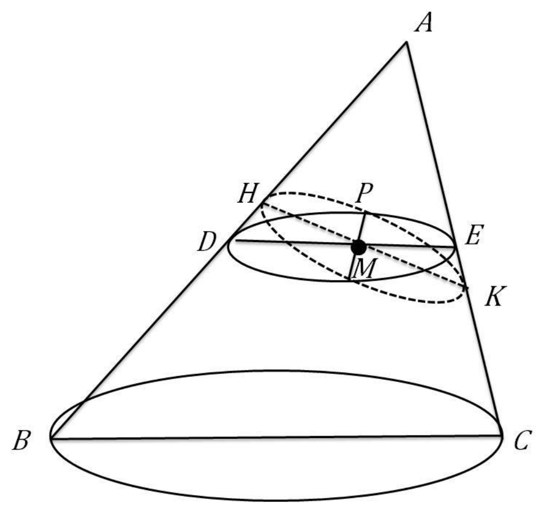
b. 1. El cono de dos hojas

Al obtener todas las secciones cónicas a partir de un único cono circular oblicuo de dos hojas, y de darle unos nombres tan adecuados como los que le dio, Apolonio hizo una contribución notable en la geometría, pero aun así no consiguió llegar al grado de generalidad todo lo lejos que podía haber ido.

Libro I, Proposición 5

Todo cono circular oblicuo tiene no solo un sistema infinito de secciones circulares paralelas ala de la base, sino también otro conjunto infinito de secciones circulares dadas por todas las que el llamo secciones subcontrarias o antiparalelas a las primeras. Sea *BFC* la base del cono circular oblicuo dado y sea *ABC* la sección triangular del cono por el plano. Sea ahora *P* un punto cualquiera perteneciente a una sección circular *DPF* paralela a la *BFC*, y sea *HPK* una sección por un plano tal que los triángulos *AHK* y *ACB* sean semejantes, pero orientados de manera opuesta, en esta situación Apolonio llama a la sección *HPK* una sección subcontraria de la *BFC*, y demuestra que esta sección es también una circunferencia .

Figura 31



La demostración se puede obtener fácilmente a partir de una semejanza de triángulos: $\Delta HMD \;\; Y \;\; \Delta EMK$, de esta semejanza se sigue que $HM \cdot MK = DM \cdot ME = PM^2$, propiedad característica de una circunferencia. En el lenguaje de la geometría analítica, si llamamos $HM = x,\; HK = a$ y $PM = y$, entonces $y^2 = x(a - x)$ o bien $x^2 + y^2 = ax$, que es la ecuación de una circunferencia.

b. 2. *Las propiedades fundamentales*

Los geométricos griegos clasificaron las curvas en tres categorías:

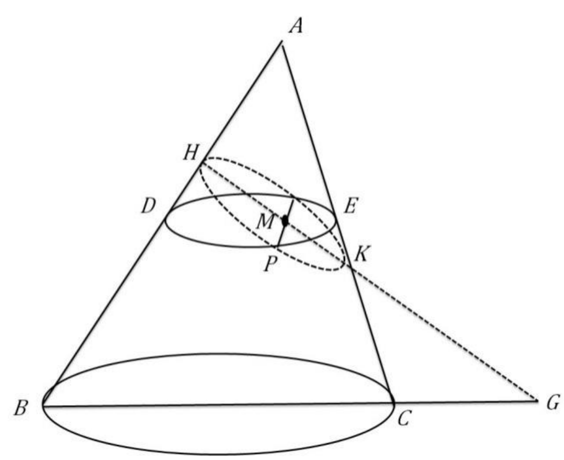
I. La primera, conocida con el nombre de *lugares planos*, contenía a todas las líneas rectas y circunferencias.
II. La segunda, conocida como la de los *lugares sólidos*, estaba constituida por todas las secciones cónicas.

III. La tercera categoría, conocida como la de los *lugares lineales*, agrupaba a todas las rectas restantes.

El nombre dado a la segunda clase venia sugerido sin duda por el hecho de que las secciones cónicas no se definían como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una condición determinada, tal como se suele hacer hoy, sino que se describe de una manera estereométrica (Parte de la geometría que trata de la medida de los sólidos) como secciones de una figura tridimensional por un plano.
Apolonio, al igual que sus predecesores, obtenían sus curvas a partir de un cono en el espacio tridimensional, pero intento prescindir del cono lo más rápidamente posible. A partir del cono dedujo una propiedad plana fundamental o "síntoma" de la sección, que viene a dar una condición necesaria y suficiente para que un punto este situado sobre la curva, y desde ese momento abandono el cono y procedió a estudiar dicha curva por método planimétrico (El concepto hace referencia a la herramienta focalizada en la medición y representación de una parte de la superficie de la Tierra sobre un plano) exclusivamente, basados en esta propiedad. Este proceso, que aquí vamos a ilustrar con el caso de la elipse, probablemente se parecía mucho al que había utilizado sus predecesores.

Sea ABC una sección triangular de un cono circular oblicuo y sea P un punto cualquiera de una sección plana HPK que corta a todas las generatrices del cono; prolonguemos HK hasta que corte a la recta BC en G, y tracemos por P un plano paralelo a la base, que cortara al cono según la circunferencia DPE y al plano HPK según la recta PM.

Figura 32



Sea DME el diámetro de esta circunferencia DPE y al plano HPK según la recta PM. Se DME el diámetro de esta circunferencia perpendicular a PM. Entonces, por la semejanza de los triángulos HDM y HBG tenemos:

$$\frac{DM}{HM} = \frac{BG}{HG}$$

Y de la semejanza de los triángulos MEK y KCG,

$$\frac{ME}{MK} = \frac{CG}{KG}$$

Ahora bien, por otra parte tenemos, debido a la propiedad de la circunferencia tantas veces utilizada,

$$PM^2 = DM \cdot ME$$

Por lo tanto

$$PM^2 = \frac{HM \cdot BG}{HG} \cdot \frac{MK \cdot CG}{KG}$$

Si llamamos $PM = y,\ HM = x$ y $HK = 2a$, la propiedad que expresa la igualdad anterior viene a traducirse en la ecuación.

$$y^2 = kx(2a - x)$$

Que podemos reconocer como la ecuación de una elipse referida al vértice *H* y a *HK* como su eje mayor. De una manera análoga obtiene Apolonio parta la hipérbola la condición equivalente a la ecuación.

$$y^2 = kx(x + 2a)$$

La forma de estas ecuaciones resulta estar en perfecto acuerdo con las formas que vimos anteriormente, como se puede comprobar tomando

$$k = \frac{b^2}{a^2} \qquad y \qquad l = \frac{2b^2}{a}$$

b. 3. *<u>Diámetros conjugados</u>*

Una vez Apolonio obtuvo, a partir de sus consideraciones estereométrica sobre el cono, las relaciones básicas entre lo que nosotros no podríamos por menos de llamar las coordenadas de un punto de la curva en el plano, expresadas por las tres ecuaciones

$$y^2 = lx - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$y^2 = lx$$

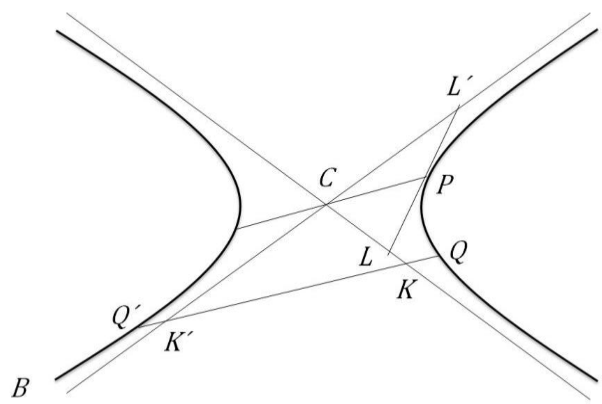
$$y^2 = lx + \frac{b^2x^2}{a^2}$$

Se dedicó a deducir las propiedades restantes a partir de estas ecuaciones planas, sin hacer ya ninguna referencia explícita al cono. El autor de las secciones Cónicas nos dice que ha tratado en su libro I de las propiedades fundamentales de estas curvas, donde se desarrolla, por ejemplo la teoría de los diámetros conjugados en una cónica. Es decir, lo que demuestra concretamente Apolonio es que los puntos medios del conjunto de las cuerdas paralelas a un diámetro de una elipse o una hipérbola están situados sobre un segundo diámetro, y denomina a ambos como "diámetros conjugados". De hecho, mientras que hoy se suele referir una cónica a un par de rectas perpendiculares como ejes, Apolonio utiliza

sistemáticamente un par de diámetro conjugado como equivalentes de un sistema de coordenadas oblicuas. Este sistema de diámetros conjugados constituye un marco de referencia extraordinariamente útil para referir a él una cónica, ya que, como demostró Apolonio, si se traza una recta por un extremo de un diámetro de una elipse o de una hipérbola, paralela al diámetro conjugado del primero, entonces esta recta será tangente a la cónica.
De una manera incidental, el concepto griego estático de la tangente a una curva, en contraste con la concepción cinemática de Arquímedes como consecuencia de lo anterior nos encontramos a menudo en las cónicas con el hecho de que se utilice un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como lo que podríamos llamar un sistema de coordenadas de referencia.

b. 4. *Tangentes y división armónica*
En el *libro II* se continúa el estudio de los diámetros conjugados y de las tangentes. Por ejemplo, si P es un punto cualquiera de una hipérbola de centro C, entonces la tangente en P cortara a las asíntotas en puntos L y L´ que equidistan de P (proposición 8 y 10).

Figura 33



Por otra parte, se demuestra en las proposiciones 11 y 16 que cualquier cuerda QQ´ paralela a CP corta a las asíntotas en puntos K y K´, tales que:
$QK = Q'K'$ y $QK \cdot QK' = CP^2$.

Las proposiciones restantes del libro II muestran como trazar tangentes a una cónica haciendo uso de las propiedades de la división armónica de un segmento. En el caso de la elipse, por ejemplo (proposición 49)

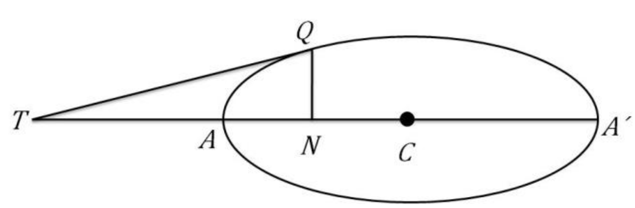


Figura 34

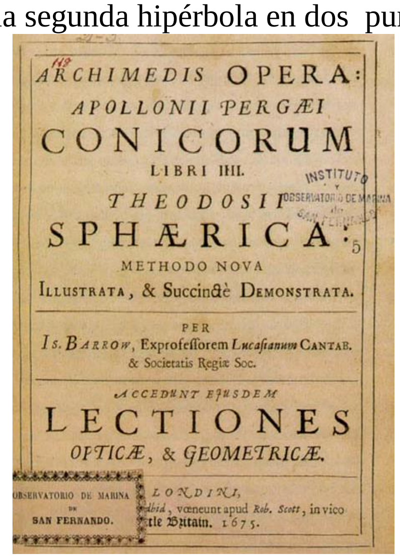
Si Q es un punto de la curva , Apolonio traza la perpendicular QN desde el punto Q al eje AA´, y halla el conjugado armónico T de N con respecto a A y A´, es decir, el punto T de la recta AA´ tal que $\frac{AT}{A'T'} = \frac{AN}{NA'}$,o bien, en otras palabras, el punto T que divide externamente al segmento AA´ en las misma razón en que N divide internamente a AA´, entonces la recta que pasa por T y Q será tangente a la elipse. En caso en que Q no esté situado sobre la curva puede reducirse a este utilizando las propiedades conocidas de la división armónica. Por lo tanto, puede demostrarse que no hay otras curvas planas más que las cónicas tales que , dada la curva y un punto, se pueda trazar con regla y compas la tangente a la curva que pasa por el punto dado, pero esto no lo sabía Apolonio, naturalmente.

b. 5. *<u>Intersección de cónicas</u>*

El libro IV de las cónicas lo describe su autor como el que se ocupa del problema de “de cuantas maneras diferentes pude cortarse unas a otras las secciones de conos”, y Apolonio se muestra especialmente orgulloso de los teoremas, ninguno de los cuales a sido tratado por los escritores anteriores.

La idea de considerar a la hipérbola como una curva de dos ramas se debe a Apolonio, que se expone en el descubrimiento y demostración de teoremas relativos a ella. Por ejemplo en su libro IV, proposición 42:

Si una rama de una hipérbola corta a las dos ramas de la otra hipérbola, entonces la rama opuesta de la primera hipérbola no cortara a ninguna de las dos ramas de la segunda hipérbola en dos puntos.


ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII
SPHÆRICA:
METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.
PER
Is. BARROW, Exprofessorem Lucasianum CANTAB. & Societatis Regiæ Soc.
ACCEDUNT EJUSDEM
LECTIONES
OPTICÆ, & GEOMETRICÆ.
LONDINI,
...ibid, vœneunt apud Rob. Scott, in vico ...tle Britain. 1675.

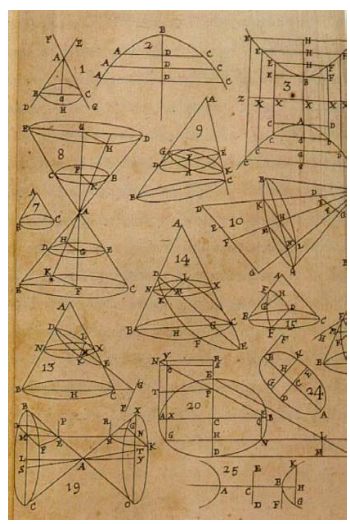


Figura 35

Las cónicas de Apolonio (Londres, 1675). Contiene también obras de Arquímedes y de Teodosio.

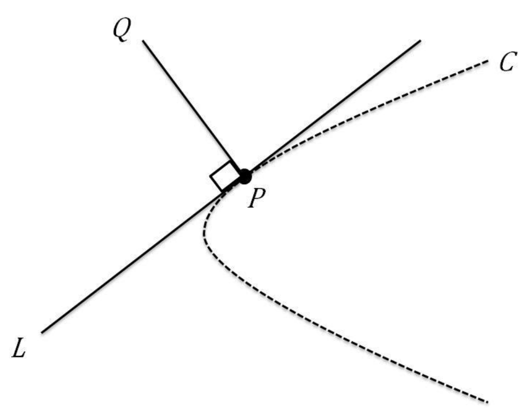
Las ilustraciones con la portada y las figuras de Apolonio proceden de la biblioteca de Real Instituto y observatorio de la Armada de San Fernando (Cadiz)

b. 6. ***Máximos y mínimo. Tangentes y Normales***

La introducción al libro V, que está dedicado a estudiar segmentos máximos y mínimos trazados con respecto a una cónica. Los teoremas de Apolonio sobre máximos y mínimos son en realidad teoremas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas. Sin un conocimiento de las propiedades de las tangentes a una parábola sería imposible un análisis preciso de las trayectorias locales en el movimiento de proyectiles y de la misma manera, un estudio detallado de las trayectorias de los planetas es inimaginable sin hacer referencia a las tangentes a una elipse.

Los matemáticos griegos no disponían de una definición muy satisfactoria de la tangente a una curva C en un punto P, considerándola como una recta L (ver figura 36), que tiene el único punto P común con la curva, y tal que no puede trazarse ninguna otra recta pasando por P e incluida entre la recta L y la curva C. quizá fuese porque Apolonio no se encontraba muy satisfecho con esta definición por lo que evita definir la normal a una curva C por un punto Q como la recta por Q que corta a la curva C en un punto P y es perpendicular a la tangente a C por P.

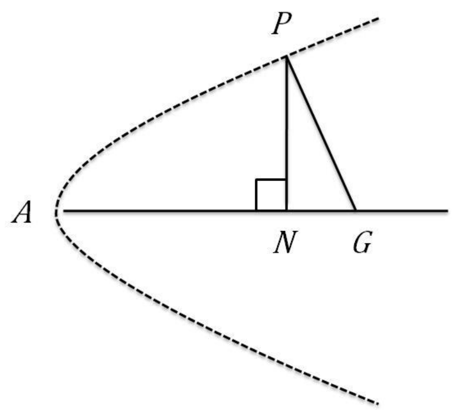
Figura 36



Apolonio demuestra en las cónicas (V, 8) un teorema relativo a la normal a una parábola que hoy podría formar parte de un curso de cálculo diferencial; formulando en terminología moderna este teorema afirma que la subnormal a la parábola $y^2 = 2px$ correspondiente a un punto cualquiera P de la curva, es constante e igual a p. En el lenguaje utilizado por Apolonio esta propiedad se expresa aproximadamente así:

"si A es el vértice de una parábola $y^2 = px$ y si G es un punto situado sobre su eje y tal que $AG > p$, y si N es un punto entre A y G tal que $NG = p$, y si NP es la perpendicular al eje por N, que corta a la parábola en P, entonces PG es el segmento mínimo que va desde G a un punto de la curva, y por lo tanto es normal a la parábola en P".

Figura 37



La demostración que hace Apolonio es una demostración siguiendo el típico método indirecto: lo que demuestra es que si P´ es otro punto cualquiera de la parábola, entonces P´G aumenta según P´ se mueve sobre la curva alejándose de P en cualquier dirección que lo haga.

b. 7. <u>Cónicas semejantes</u>

En su dedicatoria del libro VI de las cónicas al rey Atalo, Apolonio lo describe como dedicado a estudiar las proposiciones relativas a los segmentos (cónicas iguales y desiguales, semejantes y desemejantes, junto con algunas otras materias que no fueron tratados)

Dos cónicas son semejantes, según Apolonio, si las ordenadas trazadas al eje a distancias proporcionales del vértice, son respectivamente proporcionales a las correspondientes abscisas. Entre la proposiciones más fáciles que podemos ver en el libro VI, están las que asegura que todas las parábolas son semejantes (VI,11), y que una parábola no puede ser semejante a una elipse ni a una hipérbola, ni tampoco una elipse a una hipérbola (VI, 14,15).

Otras proposiciones de este mismo libro, como (VI, 26, 17), demuestran que si se corta un cono arbitrario por dos planos paralelos que dan lugar a secciones hiperbólicas o elípticas, entonces las dos secciones son semejantes pero no iguales.

El libro VII vuelve al tema de los diámetros conjugados, y contiene muchas proposiciones nuevas relativas a los diámetros de las secciones cónicas y a las figuras construidas sobre ellos. Entre ellas hay algunas que se pueden encontrarse también en los textos modernos, tales como las que demuestran que (VII, 12,13,29,30).

“en toda elipse la suma, y en toda hipérbola la diferencia de los cuadrados sobre dos diámetros conjugados cualquiera es igual a la suma, o diferencia, respectivamente, de los cuadrados construidos sobre los ejes”.

b. 8. *Los focos de las cónicas*

Las cónicas de Apolonio constituye un tratado de una amplitud y una profundidad tan extraordinaria que nos sorprende precisamente al notar que se han omitido algunas de las propiedades que a nosotros nos parece tan obviamente fundamentales. Tal como se definen las cónicas hoy en día en los libros de texto, los focos juegan un papel de primera importancia; sin embargo, Apolonio ni siquiera les da nombres especiales a estos puntos, y se refiere a ellos solo de una manera indirecta. Se supone que el mismo, y quizá incluso ya Aristeo y Euclides, estaban bien familiarizados con las propiedades de estas curvas referidas al foco y a la directriz, pero el caso es que nada de esto se menciona ni siquiera en las cónicas.

b. 9. *Sobre el uso de las coordenadas*

Los métodos que utiliza Apolonio en las cónicas son tan semejantes en muchos aspectos al planteamiento analítico moderno que su obra se ha considerado a menudo como una anticipación de la geometría analítica de Descartes en unos 1800 años. El uso de unas rectas de referencia general y de un diámetro y una tangente en uno de sus extremos en particular no difiere esencialmente, desde luego, del uso de un sistema de coordenadas, sea rectangular u oblicuo, en general. Las distancias medias a lo largo del diámetro a partir del punto de tangente son las abscisas, y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las ordenadas. Las relaciones que da Apolonio entre estas abscisas y las correspondientes ordenadas (o síntomas de la curva) no son otra cosa que formas retoricas de las ecuaciones analíticas de las curvas consideradas. Sin embargo, en el álgebra geométrica de los griegos no había lugar para las magnitudes negativas.

No parece presentarse ningún caso en la geometría antigua en el que se fije un sistema de coordenadas de referencia "a priori", con el fin de representar gráficamente una ecuación o relación expresada de manera simbólica y retórica. Podemos decir de la geometría griega que las ecuaciones vienen determinadas por las curvas, pero no que las curvas vengan determinadas por las ecuaciones. Las coordenadas, variables y ecuaciones fueron, pues conceptos subsidiarios derivados de una situación geométrica concreta, y se pude asegurar que desde el punto de vista griego no era suficiente en absoluto para definir curvas el darles de manera abstracta como lugares geométricos de los puntos que satisfagan condiciones dadas sobre sus dos coordenadas. Para garantizar que un lugar geométrico era realmente una curva, los antiguos griegos consideraron necesario o bien producirla de una manera estereométrica como una sección de un sólido o describir su construcción de una manera cinemática.

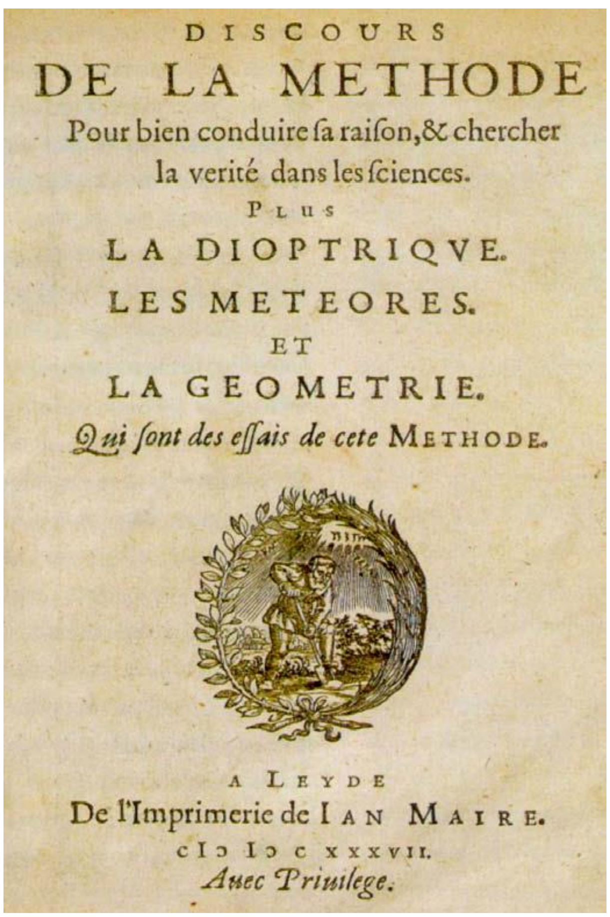
CAPÍTULO II

La Geometría De Descartes y Fermat

I. La geometría de Descartes y Fermat

A. René Descartes

René Descartes (1596–1650) fue un filósofo francés, figura entre las cumbres del pensamiento universal, como menciona José Manuel Sánchez Ron (Sánchez J. M. 1996). Su geometría cartesiana, sus análisis filosóficos y algunas de sus contribuciones a la física forman parte importante de la base de la ciencia y pensamiento contemporáneos. Descartes gozaba de una modesta fortuna que le permitió dedicarse con bastante libertad a estudiar en "el gran libro del mundo", viajando libremente y estudiando matemáticas, filosofía, física, astronomía y fisiología. Después de varios años de apartarse de las interrupciones que le impedían dedicarse a la reflexión filosófica, publicó su Discurso del método (1637) que, aunque en principio se trató de un prólogo a tres ensayos: Dióptrica, Meteoros y Geometría, terminó convirtiéndose en una de las obras más famosas de la historia. En particular su obra Geometría establece los principios de una nueva rama de la matemática, la Geometría Analítica, o Geometría Cartesiana.



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon,& chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↄ Iↄ c xxxvii.
Avec Privilege.

Figura 38

La primera edición de el Discurso del método con los tres ensayos la Dióptrica, los Meteoros y la Geometría (Leyden, 1637)

El discurso del método es la autobiografía intelectual de Descartes.

Descartes encontró en la Matemática, un modelo paradigmático en la búsqueda de las primeras verdades absolutamente ciertas que pudieran servirle de base, apoyo y fundamento en la reconstrucción de todo el edificio científico y filosófico, por eso la matemática devino en la base racional de su pensamiento.

Cuando se habla del cartesianismo como método de la razón se debe entender "método de la razón matemática" en el sentido de que las reglas del método son extraídas por Descartes del saber y del conocimiento matemáticos, por una parte, y del a práctica, estilo y procedimientos matemáticos, por otra.

Concretamente Descartes habla de tres Artes o ciencias que había de contribuir a su propósito:

- *La logia* como parte de la filosofía.
- El antiguo *Análisis de los geómetras*.
- El *Algebra* de los modernos.

Esta nueva geometría surgió como una prueba de que su Método funcionaba para resolver problemas de la geometría, haciendo un análisis profundo de los elementos puestos en juego, empleando el recién propuesto simbolismo algebraico de Viète y dejando a un lado el estudio sintético de la geometría que se llevaba hasta el momento. En 1650, luego de cinco meses de ejercer como tutor de la reina Cristina de Suecia, Descartes murió de una enfermedad pulmonar producida por las jornadas de labor con la reina.

Descartes en su obra no propone como tal un plano de coordenadas rectangulares como se ve en la actualidad, pero sí genera un sistema coordenado sobre el cual construirá distintos tipos de curvas, que él clasifica en tres distintos grupos. Descartes presenta su obra Geometría en tres libros, el primero, Sobre los problemas que pueden construirse empleando solamente círculos y líneas rectas, el segundo, Sobre la naturaleza de las líneas curvas, es donde se encuentra el aspecto más moderno de su trabajo a pesar de que Descartes lo describe como un estudio preliminar al tercer libro, y el tercer libro, Sobre la construcción de problemas sólidos y supersólidos. En esta obra él indica la forma de proceder para resolver problemas geométricos clásicos, como el propuesto por Pappus de las tres y cuatro líneas y la trisección del ángulo usando su nueva geometría algebraica y establece, aunque sin darle mucha importancia en su momento, el principio fundamental de la geometría analítica, que toda ecuación en dos incógnitas representa una curva o lugar en el plano y viceversa.

a. Libro I "Le Geometrie"

El Libro Primero de La Geometría trata «De los Problemas que pueden construirse sin emplear más que círculos y líneas rectas.» En este libro Descartes fija con base siempre en El Discurso del Método la metodología cartesiana que aplicará a la traducción algebraica de los problemas geométricos clásicos, de modo que el libro contiene el núcleo de toda la formulación cartesiana de La Geometría. Empieza el libro con una auténtica declaración de principios en la que Descartes anuncia las coordenadas.

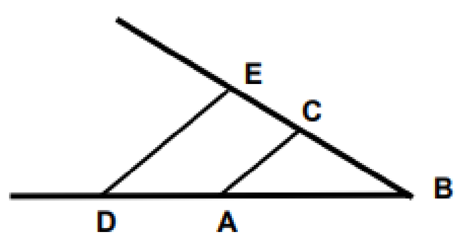
> «Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos.»

Así pues, como las líneas rectas son lo que se nos presenta de la forma más clara y distinta en el campo de la Geometría, para resolver problemas geométricos, partiremos de ciertas líneas rectas en realidad de algunos segmentos rectilíneos; pero como un problema geométrico sólo está completamente resuelto es decir, geométricamente resuelto cuando se ha construido la solución, es preciso dar ésta en términos de segmentos que se deben construir. El primer punto consistirá en advertir que las operaciones aritméticas elementales entre segmentos producen siempre un nuevo segmento, por eso en los primeros capítulos Descartes expone los procedimientos ya conocidos para construir de forma geométrica las operaciones de la Aritmética: omite las construcciones de la suma y diferencia de segmentos y construye la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas, a base de introducir el concepto de segmento unidad. Así pues, Descartes pone de manifiesto que el producto de dos o de tres segmentos es otro segmento, así como que el cociente de dos segmentos también es otro segmento.

Esta interpretación geométrico algebraica de las operaciones aritméticas marca un hito en la Historia de la Matemática porque, por una parte soslaya la limitación pitagórica que la inconmensurabilidad había impuesto a la Geometría griega la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas ante el fantasma de lo inconmensurable, y por otra, permite romper con el problema de la homogeneidad dimensional, que había sido, sin duda hasta entonces, otra de las grandes limitaciones de la aplicación del Álgebra a la Geometría. Desde luego así había sido en la Geometría griega, pero incluso en la época de Descartes el producto de dos segmentos era un rectángulo, y el producto de tres segmentos un paralelepípedo, por tanto, el producto de más de tres segmentos no tenía sentido y en consecuencia no se llevaba a efecto.

Veamos la construcción efectiva de Descartes del producto, el cociente y la raíz cuadrada:

Figura 39



La multiplicación:

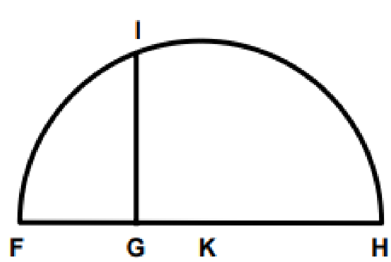
Sea, por ejemplo, AB la unidad, y que deba multiplicarse BD por BC; no tengo más que unir los puntos A y C, luego trazar DE paralela a CA, y BE es el producto de esta multiplicación.

Como en muchos problemas de La Geometría, Descartes aplica el Teorema de Tales (Euclides, VI.4) a la semejanza de triángulos. En este caso, como en el siguiente de la división, la semejanza de los triángulos Δ BAC y Δ BDE, que determinan BE/BD = BC/BA.

La división:

O bien, si deben dividirse BE por BD, habiendo unido los puntos E y D, se traza AC paralela a DE y BC es el resultado de esa división.

Figura 40



La raíz cuadrada:

Para la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con ese punto como centro se traza el círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada.

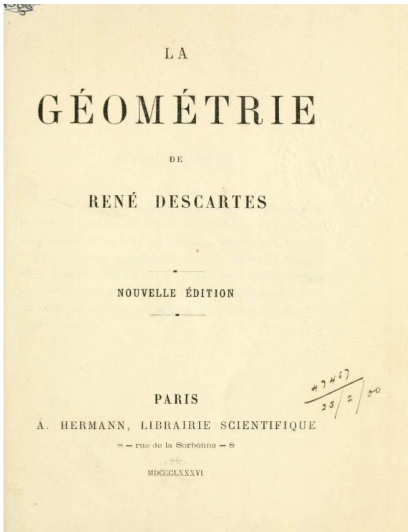
En esta ocasión, Descartes usa el otro Teorema de Tales (Euclides, III.31) y el Teorema de la Altura (Euclides, VI.8). No hay ninguna novedad en la traducción geométrica de las operaciones algebraicas elementales que hace Descartes pensando en la ulterior resolución de ecuaciones. De hecho, sabemos que el Álgebra Geométrica de los griegos era una forma geométrica sintética de resolver ecuaciones, y después de los griegos, los matemáticos árabes disponían de algoritmos de resolución de ecuaciones mediante ciertas construcciones geométricas, que traducían las operaciones algebraicas casi en los mismos términos que Descartes.

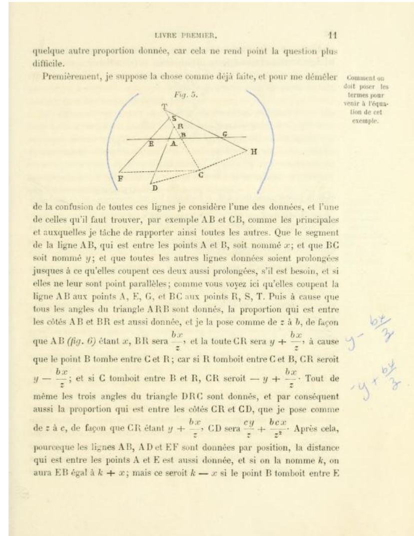
El simbolismo algebraico, que apuntaba a convertirse en el lenguaje universal traería simplificación, generalización, mecanización y unificación en la notación, entrañando economía de pensamiento y difusión rápida. Después de Descartes, el Álgebra es uno de los más potentes lenguajes creados por el hombre, un instrumento para la expresión breve, intuitiva y mecánica de relaciones enormemente complicadas que puedan tener entre sí objetos abstractos cualesquiera, y en su aplicación a la Geometría

Tras la construcción geométrica de las operaciones, Descartes pasa a mostrar «Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas» y «Cómo se resuelven», lo que aplicará a dar solución al Problema de Pappus que trata en la forma más general, creando el método analítico de solución y discusión de los problemas matemáticos. Este problema había sido resuelto por Descartes en 1632 cuando Golius se lo propuso para que aplicara sobre él sus nuevos métodos, convirtiéndose en una auténtica piedra de toque que pone a prueba el nuevo método cartesiano.

Descartes muestra cómo estos problemas con rectas y círculos se pueden llevar a ciertas ecuaciones de segundo grado en particular y, finalmente, presenta una forma de generar ecuaciones de segundo grado para dar solución al problema de Pappus de las tres y cuatro líneas. En este momento, cuando presenta el problema de Pappus,

Descartes da muestra de un primer paso en el trabajo con geometría coordenada, con una pequeña pero significativa propuesta de utilizar las letras $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ para determinar dos segmentos muy particulares, él presenta a uno de ellos como dado y otro que se pretende hallar.





LIVRE PREMIER. 11

quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la question plus difficile.

Premièrement, je suppose la chose comme déjà faite, et pour me démêler

Comment on doit poser les termes pour venir à l'équation de cet exemple.

Fig. 5.

de la confusion de toutes ces lignes je considère l'une des données, et l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB et CB, comme les principales et auxquelles je tâche de rapporter ainsi toutes les autres. Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A et B, soit nommé x; et que BC soit nommé y; et que toutes les autres lignes données soient prolongées jusques à ce qu'elles coupent ces deux aussi prolongées, s'il est besoin, et si elles ne leur sont point parallèles; comme vous voyez ici qu'elles coupent la ligne AB aux points A, E, G, et BC aux points R, S, T. Puis à cause que tous les angles du triangle ARB sont donnés, la proportion qui est entre les côtés AB et BR est aussi donnée, et je la pose comme de z à b, de façon que AB (*fig. 6*) étant x, BR sera $\frac{bx}{z}$, et la toute CR sera $y + \frac{bx}{z}$, à cause que le point B tombe entre C et R; car si R tomboit entre C et B, CR seroit $y - \frac{bx}{z}$; et si C tomboit entre B et R, CR seroit $-y + \frac{bx}{z}$. Tout de même les trois angles du triangle DRC sont donnés, et par conséquent aussi la proportion qui est entre les côtés CR et CD, que je pose comme de z à c, de façon que CR étant $y + \frac{bx}{z}$, CD sera $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}$. Après cela, pourceque les lignes AB, AD et EF sont données par position, la distance qui est entre les points A et E est aussi donnée, et si on la nomme k, on aura EB égal à $k + x$; mais ce seroit $k - x$ si le point B tomboit entre E

$y - \frac{by}{z}$

$-y + \frac{by}{z}$

Figura 41

Publication date 1886 ,Topics Geometry -- Early works to 1800 Publisher Paris A. Hermann, Digitizing sponsor University of Toronto, Contributor Gerstein - University of Toronto, Language French

Para demostrar el problema de Pappus, Descartes hace uso de la representación expuesta en la siguiente figura.

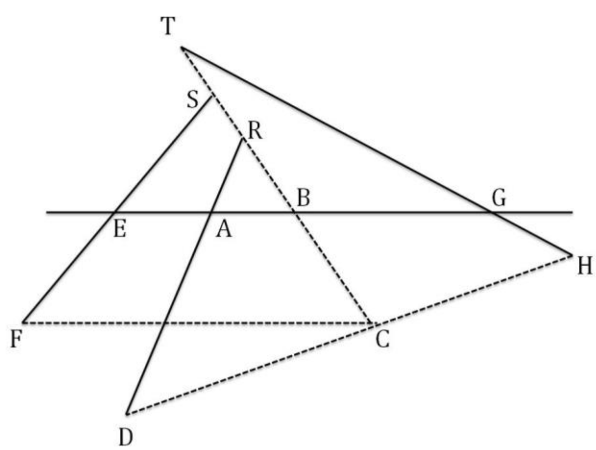


Figura 42

Con $AB,\ AD,\ EF,\ GH$ líneas (segmentos) dadas, debiendo hallar un punto como C, desde el que trazando varias líneas rectas sobre las líneas dadas, como $CB,\ CD,\ CF,\ yCH$, de modo que los $\measuredangle CBA,\ \measuredangle CDA,\ \measuredangle CFE,\ \measuredangle CHG$ sean dados, y de modo tal que el resultado de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al resultado obtenido por la multiplicación de las otras, o bien que guarden alguna otra proporción dada.

Descartes aplica aquí su *Método* considerando solamente una de las líneas dadas y una de las que precisaba calcular, en este caso $AB y BC$, como las principales y con las que relaciona las otras. Al ABlo llama xy al BC lo llama y. Haciendo uso de distintas operaciones llega a los resultados:

$$CR = \pm y \pm \frac{bx}{z} \qquad CF = \frac{ezy \pm dek \pm dek}{z}$$

$$CD = \pm \frac{cy}{z} \pm \frac{bcx}{zz} \qquad CT = \frac{zy \pm fl \pm fx}{z}$$

$$CS = \frac{zy \pm dk \pm dx}{z} \qquad CH = \frac{gzy \pm fgl \pm fgx}{zz}$$

Mostrando con esto que sea cualquiera el número de líneas dadas en posición, cuantas líneas sean trazadas desde el punto Cformando ángulos dados, siguiendo el enunciado del problema, pueden siempre ser expresadas por tres términos: uno estará compuesto por una cantidad desconocida $\boldsymbol{y}$, multiplicada o dividida por alguna otra cantidad conocida; el otro estará integrado por la cantidad desconocida $\boldsymbol{x}$, también multiplicada o dividida por alguna otra conocida; el tercero, por una cantidad conocida. Los signos $+$ y $-$ que se unen a estos términos pueden ser combinados de todos los modos imaginables.

Finalmente muestra que, tomando una de las cantidades desconocidas, por ejemplo $\boldsymbol{y}$, y buscando la otra por esta ecuación, se obtiene

$$x^2 = \pm ax \pm b^2$$

Por tanto se podrá encontrar la cantidad $\boldsymbol{x}$ mediante la regla y el compás.

Ahora, en este ejemplo, se vislumbra ya una luz acerca de la forma de uso de coordenadas por parte de Descartes en la forma en que relaciona estos segmentos y sus valores dados. No es muy concreta la relación existente entre los valores y en cuanto a un sistema de coordenadas organizado, pero se puede observar que la posición particular de los segmentos permite distinguir el origen de un sistema de coordenadas, que si bien aún no es rectangular, sí cuenta con los elementos de un nuevo sistema de referencia.

b. Libro II "Le Geometrie"

El Libro Segundo de La Geometría titulado «De la naturaleza de las líneas curvas» consta de cuatro partes bien diferenciadas:

b. 1 La naturaleza geométrica de las líneas curvas, vinculada sobre todo a dos cuestiones íntimamente ligadas: los compases cartesianos y la teoría de la proporción continúa. Mientras en el Libro I, sin olvidar los lugares geométricos, Descartes centra más la atención sobre puntos individualizados, en el Libro II se proyecta sobre el objeto geométrico Curva. Descartes mantiene la división clásica griega de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales (que se resuelven con ecuaciones de segundo, tercer y cuarto o mayor grado, respectivamente) y demuestra que los problemas planos se construyen con rectas y circunferencias, los sólidos con secciones cónicas y el resto con líneas más complejas, llamadas por los antiguos curvas mecánicas, aunque más correcto sería llamarlas curvas geométricas. Descartes tiene el propósito de poner un poco de orden en el estudio de las curvas de la Geometría de los griegos, que según él era un caos completo, secuela de la limitación platónica de la regla y el compás, al no ser capaces de distinguir las diversas clases de curvas por no poder dilucidar la naturaleza de las mismas. Esto es precisamente lo que se propone Descartes, a base de establecer qué curvas son las que se pueden admitir en Geometría.

b. 2 El Problema general de Pappus, ahora tratado con las herramientas precisas para poder clasificar las diversas soluciones de los diferentes planteamientos del mismo. Con el método cartesiano el clásico Problema de Pappus queda completamente resuelto.

b. 3 La construcción y propiedades de tangentes y normales a una curva geométrica. Una vez concebida y definida, de forma clara y distinta, la naturaleza geométrica de las líneas curvas, Descartes introduce uno de los principios básicos de su método: «para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, y establece cómo se puede utilizar la expresión algebraica " la ecuación de las curvas" para determinar los elementos geométricos más notables de las curvas (diámetros, ejes, centros, etc.) y, en particular, las normales, líneas cuya consideración y utilidad deriva de los problemas de la reflexión de la luz sobre las superficies curvas, y que literalmente es considerado por Descartes como el más importante problema geométrico que pueda ser concebido.

b. 4 Finalmente Descartes estudia los Óvalos como curvas especiales que responden a consideraciones fijadas de las tangentes o normales. Descartes introduce cuatro amplias familias de curvas nuevas, de las que las cónicas son casos particulares.

El Libro Tercero de La Geometría trata «De la construcción de los problemas que son sólidos o más que sólidos» mediante el estudio de la resolución de ecuaciones, discusión de sus raíces, y relaciones entre los coeficientes. Descartes pretende ofrecer un método de resolución de cualquier ecuación algebraica. Muestra que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado, existe «la posibilidad de imaginar tantas raíces como el grado del polinomio», da luego su famosa regla de los signos y adelanta el Teorema de Ruffini del factor. En este proyecto no haremos énfasis en este estudio de curvas.

c. Análisis y Síntesis: planteamiento y resolución de las ecuaciones

Con las nuevas notaciones y símbolos, Descartes realizó una importante simplificación en el lenguaje matemático. Ahora disponía de una Geometría que al poderse expresar de forma algebraica permitía desarrollar procedimientos para resolver problemas geométricos a base de traducirlos al lenguaje algebraico de las ecuaciones, simplificar éstas y finalmente resolverlas (lo que quiere decir construir las soluciones) mediante lo cual Descartes se propondrá rehacer la Geometría.

He aquí una aplicación directa de los procedimientos del Análisis y la Síntesis tal como los había descrito Pappus en El Tesoro del Análisis del Libro VII de la Colección Matemática y tal como lo había aplicado Vieta con la intervención del Álgebra en su Arte Analítica. Todo conduce a determinar la ecuación del problema geométrico, es decir, transitar de la Geometría al Álgebra mediante la metodología cartesiana, siguiendo unas pautas que Descartes ya había insinuado.

a) Suponer el problema resuelto.
b) Dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios

El propio Análisis nos ayudará a determinar quiénes son éstos, tanto los conocidos –datos– como los desconocidos "incógnitas" sin considerar ninguna diferencia entre ellos. Estos dos primeros pasos corresponden al Análisis en sentido de Pappus. Ahora examinando el problema, siguiendo un orden basado en la intuición o en el Análisis anterior, estableciendo las relaciones que existen entre los diversos segmentos "los conocidos y los desconocidos" hemos de conseguir expresar un mismo segmento por medio de dos expresiones algebraicas diferentes, lo que permite realizar la Síntesis, es decir:

c) Determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas. Finalmente, para resolver de forma definitiva el problema quedan dos pasos:
d) Resolver la ecuación resultante.
e) Construir geométricamente la solución. Al plantearse problemas geométricos en la Síntesis se han de obtener soluciones geométricas para cuya construcción el Álgebra será el instrumento analítico esencial.

Así pues, ante un problema geométrico se aplicará todo un protocolo de actuación el método cartesiano: se empieza suponiendo el problema resuelto y se consideran las relaciones entre las líneas, lo que lleva al establecimiento de las ecuaciones, es decir, el estudio analítico se complementa con la síntesis algebraica que lleva a la construcción de la solución. El Análisis y el Álgebra que están ordenados al estudio y conocimiento de la figura, permiten traducir los datos geométricos de forma que sean tratables por medio del cálculo algebraico; se concluye el problema de Álgebra planteando y resolviendo las ecuaciones y finalmente los resultados obtenidos deben ser traducidos de nuevo al lenguaje geométrico, operación que nos da por fin la construcción de la solución.

Si se tiene, por ejemplo $z^2 = az + bb$, construyo el triángulo rectángulo NLM, cuyo lado LM es igual a b, raíz cuadrada de la cantidad conocida bb, y el otro LN es $\left(\frac{1}{2}\right)a$, la mitad de la otra cantidad conocida, que está multiplicada por z, que supongo ser la línea desconocida. Luego, prolongando MN, base de ese triángulo, hasta O, de modo que NO sea igual a NL, la línea total OM es z, la línea buscada; ella se expresa:

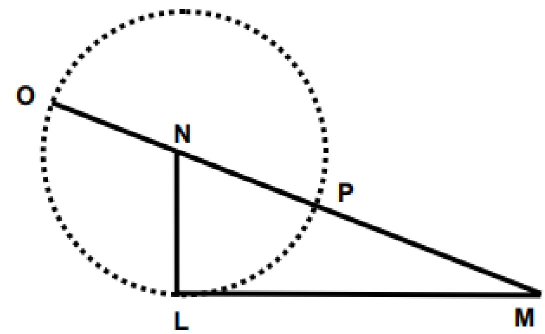


Figura 44

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

Si se tuviera,$yy = -ay + bb$, e y fuera la cantidad que debe encontrarse, se construye el mismo triángulo rectángulo NLM y de la base MN se quita NP, igual a NL; el resto PM es y, la raíz buscada. De modo que tengo: $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$

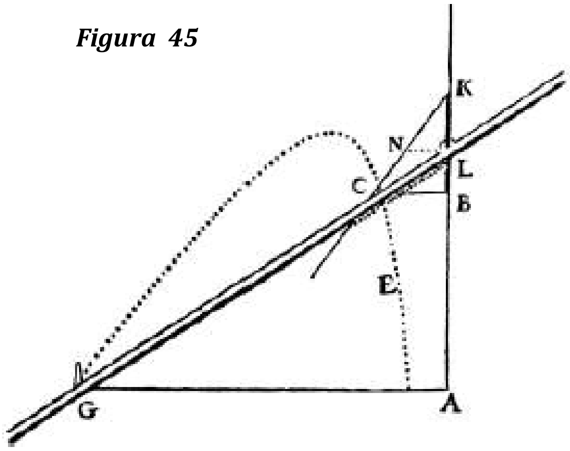
Y lo mismo, si tuviera $x^2 = -ax^2 + b^2$, PM seria x^2 y tendría:

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$ y así otros casos

El interés de ***Descartes*** estaba enfocado un poco más en la consecución de las ecuaciones que representaran estos puntos que en el lugar geométrico que estos generaran, por esta razón no se ve como tal un par de ejes que generen curvas como las conocemos actualmente, o un punto al que se le llame Origen y que sea el foco o un valor de referencia hacia la curva en la manera en que actualmente se observa. Puede ser que en la curva solución al problema de Pappus, como la veía Descartes, no se interpretara fácilmente, como en la actualidad un foco o un centro, pero la propuesta de Descartes se fundaba en decir cuál era la ecuación de dicha curva.

Ya en el segundo libro de la Geometría se pueden ver más elementos que distinguen las ideas de Descartes en cuanto a su sistema de coordenadas. Al dar una clasificación de las curvas que se pueden estudiar en el plano, Descartes presenta en particular una que se puede construir mediante un instrumento móvil.

Figura 45



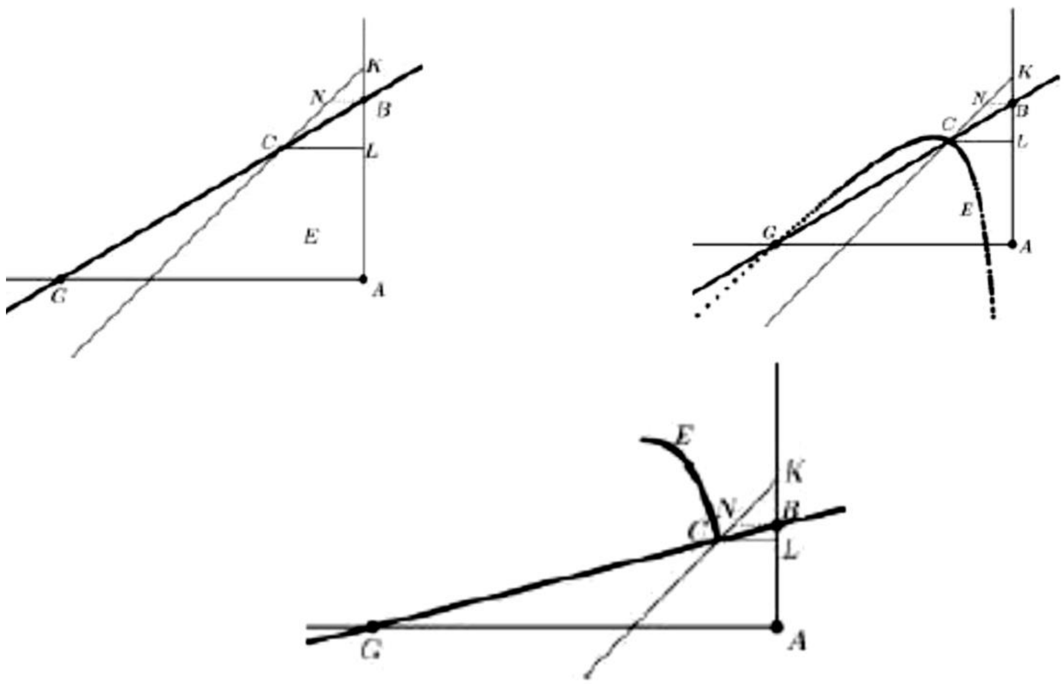


Figura 46

En la representación de Descartes, la curva CE se genera moviendo la regla *GL* respecto al punto G, en su intersección con el plano *CNK*L, en el cual el ángulo *CKL* y la distancia *KL* son fijos. Ahora, en la reconstrucción, las semirrectas $\overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AG}$ son fijas, *KB* y $\sphericalangle BKN$ son también fijos. El punto *B* se mueve a lo largo de $\overleftrightarrow{AB}$ y C resulta de la intersección de $\overleftrightarrow{GB} y \overleftrightarrow{KN}$. Al repasar el rastro que deja *C* al mover *B* se obtiene la parábola GB descrita por Descartes.

$\overleftrightarrow{AB}$ es la base sobre la cual estará $\overline{KL}$ y Descartes la escoge para relacionar los puntos de la curva GE, y sobre ella escoge al punto A para iniciar desde el cálculo. Luego, desde C, un punto de la curva, traza $\overline{CB}$ paralelo $\overrightarrow{AG}$ y expone que, como AB y CB son dos cantidades indeterminadas y desconocidas, las llamara $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, respectivamente.

Claramente está aquí la primera señal de la construcción por parte de Descartes de un plano de coordenadas más parecido al que se usa en la actualidad, con la diferencia que en ningún momento establece a los y como perpendiculares al eje x, o que formen ángulos rectos.

d. Las rectas normales a una curva. El método del círculo

Descartes desarrolla en el Libro II de La Geometría un método para el trazado de las tangentes a las líneas curvas el llamado «método del círculo», mediante la construcción previa de la recta normal. Es sin duda uno de los más significativos problemas de aplicación del método cartesiano, con el que, además, Descartes participa e interviene, a través de su célebre polémica con Fermat, en el ámbito matemático de la primera parte del siglo XVII, muy ocupado en la resolución del problema del trazado de las tangentes a las líneas curvas. Una vez concebida y definida en la primera parte del Libro II, de forma clara y distinta, la naturaleza geométrica de las líneas curvas, Descartes introduce uno de los principios básicos de su método ponderando su importancia en la resolución de los problemas sobre curvas.

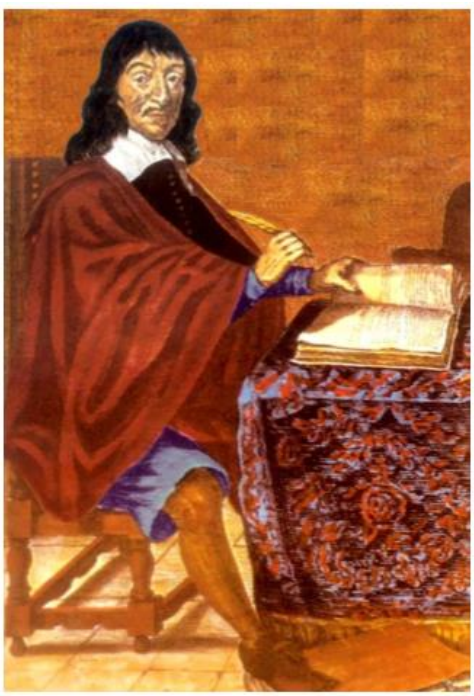
Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, y la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto.

> «*Luego con sólo saber la relación que tienen todos los puntos de una línea curva con todos los de una línea recta, en la forma que he explicado, es fácil también conocer la relación que ellos tienen con todos los otros puntos y líneas dadas; y, por lo tanto, conocer los diámetros, los ejes, los centros, y otras líneas o puntos que tengan con la línea curva alguna relación particular, o más simple que otros; y, de ahí imaginar diversos modos de describirlas, y elegir los más fáciles. Y también, con sólo esto, se puede aun, encontrar casi todo lo que puede ser determinado respecto a la medida del espacio que abarcan, sin que haya necesidad de que yo me extienda más. Y, por último, en lo que respecta a todas las otras propiedades que pueden atribuirse a las líneas curvas, ellas no dependen más que de la magnitud de los ángulos que ellas forman con otras líneas. Pero, cuando puedan trazarse líneas rectas que las cortan en ángulo recto* [normales], *en los puntos en que se encuentran con aquéllas con las que forman los ángulos que se quieren medir, o, lo que aquí tomo como igual, en que ellas cortan sus contingentes* [tangentes], *la magnitud de esos ángulos no es más difícil de encontrar que si ellos estuvieran comprendidos entre dos líneas rectas. Creo por esto haber dado aquí todo lo que se requiere para los elementos de las líneas curvas, cuando haya expuesto la manera general de trazar líneas rectas que las corten en ángulos rectos en los puntos* [de las curvas] *que de ellas se elijan. Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría.*»

René Descartes

Descartes determina que p*ara encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas,* descrita promedio de una expresión que es la ecuación de la curva, y establece cómo se puede utilizar esta expresión algebraica para encontrar los elementos geométricos más notables de las curvas diámetros, ejes, centros, etc. y, en particular, las normales y tangentes. Conello, Descartes enuncia uno de los principios fundamentales de la llamada Geometría Analítica: el conocimiento de la relación que liga las coordenadas de los puntos los segmentos o "*las líneas rectas*" a las que alude de una curva.

La ecuación de la curva realiza un tránsito de la Geometría al Álgebra, que, por su carácter operacional, permite, realizando cálculos y en particular resolviendo ecuaciones, regresar a la Geometría, para encontrar y solucionar cuestiones geométricas, de modo que se fija una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada. Como consecuencia, la tarea de probar un teorema en Geometría se traslada de forma muy eficiente a probarlo en Álgebra y, además, ésta se convierte en un poderoso instrumento de investigación geométrica. Pues bien, en este lugar, Descartes aplica toda esta filosofía geométrico-algebraica a encontrar las rectas normales de las líneas curvas.



Retrato caricaturesco de Descartes escribiendo un libro y con el pie apoyado en una obra de Aristóteles. Grabado de C.Hellemans. Biblioteca Nacional. París. Descartes subraya en la regla IV (Regulae ad directionem ingenii) que los antiguos geómetras utilizaban cierto Análisis para la resolución de todos los problemas geométricos (como se advierte en Pappus y Diofanto), pero privaron de él a la posteridad con la expresión sintética que oculta los métodos de descubrimiento, y merecen por ello (al impedir la divulgación de los métodos de trabajo) la más acerba de las críticas.

d. ***1. Líneas rectas que corten las curvas dadas o sus tangentes, formando ángulos rectos*, forma general:**

Sea CE la línea curva y que deba trazarse una recta por el punto C que forma con ella ángulos rectos.

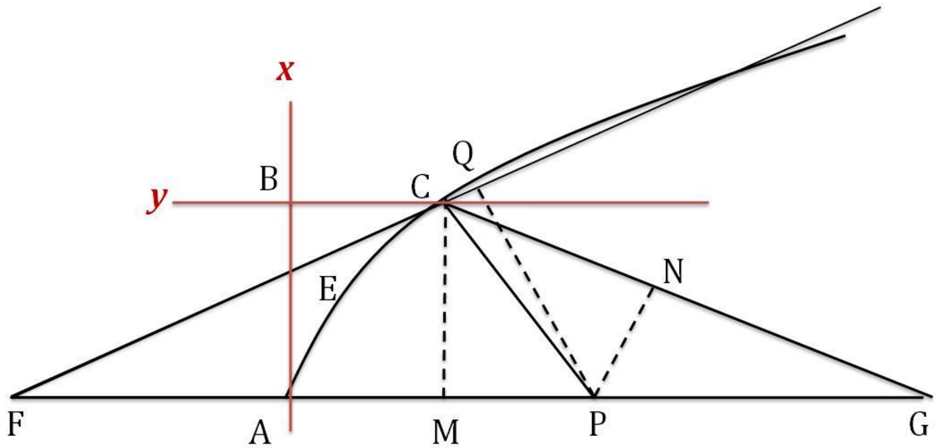


Figura 47

Supongamos que la cosa esta hecha y que la línea buscada es *CP*, que prolongo hasta el punto P en que encuentra a la línea recta *GA* que supongo ser aquella a cuyos puntos se refiere todos los de la línea *CE*; de manera que haciendo *MA* o $CB = y$, y CM o $BA = x$, hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y.

Luego haciendo $PC = s$, $PA = v$, o bien $PM = v - y$, por el triangulo rectángulo PMC obtenga s^2, que es el cuadrado de la base, igual a $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, que son los cuadrados de los lados; es decir que se tiene:

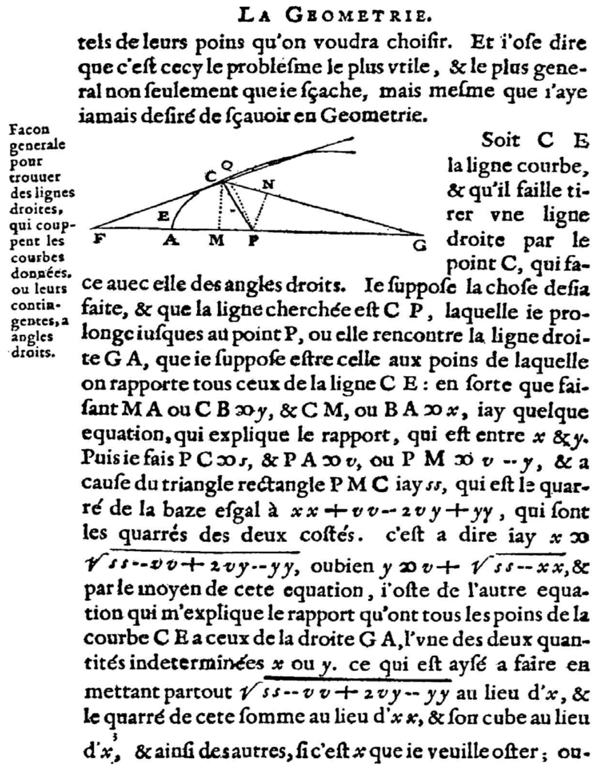
$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$

O bien

$$y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$$

Y por medio de esta ecuación, se determina la otra ecuación que da la relación que tienen todos los puntos de la curva *CE* con los de la recta *GA* (la ecuación de la curva), una de las dos cantidades indeterminadas x o y; lo que es fácil de hacer poniendo

$\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ en lugar de x, y el cuadrado de esta suma en lugar de x^2, y su cubo en lugar de x^3 ; y así los otros términos si es $\boldsymbol{x}$ que se desea determinar. De modo que quede siempre según esto, una ecuación en la cual no hay más que una sola cantidad indeterminada $\boldsymbol{x}$ o y.



LA GEOMETRIE.

tels de leurs poins qu'on voudra choiſir. Et i'oſe dire que c'eſt cecy le probleſme le plus vtile, & le plus general non ſeulement que ie ſçache, mais meſme que i'aye iamais deſiré de ſçauoir en Geometrie.

Facon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.

Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie ſuppoſe la choſe deſia faite, & que la ligne cherchée eſt C P, laquelle ie prolonge iuſques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie ſuppoſe eſtre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E: en ſorte que faiſant M A ou C B $\infty\, y$, & C M, ou B A $\infty\, x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui eſt entre x & y. Puis ie fais P C $\infty\, s$, & P A $\infty\, v$, ou P M $\infty\, v - y$, & a cauſe du triangle rectangle P M C iay ss, qui eſt le quarré de la baze eſgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui ſont les quarrés des deux coſtés. c'eſt a dire iay $x \infty \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \infty v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oſte de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui eſt ayſé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete ſomme au lieu d'xx, & ſon cube au lieu d'x^3, & ainſi des autres, ſi c'eſt x que ie veuille oſter; ou-

Figura 48

Página de la edición de 1637 de la Geometría de Descartes relativa al trazado de rectas normales a la curva (método del círculo), donde Descartes aplica uno de los principios fundamentales de la Geometría Analítica.

A continuación veremos cómo Descartes desarrolla la curva de la Elipse.

- ***Curva de la Elipse***

Si fuese *CE* una Elipse y *MA* el segmento de su diámetro, al cual corresponde *CM*, y siendo ***r*** su lado recto y que el transverso se tiene, por el teorema 13 del libro I de Apolonio:

$$x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$

(Ecuación de la elipse referida a ejes oblicuos, siendo uno de ellos el diámetro y el otro tangente en su extremo)

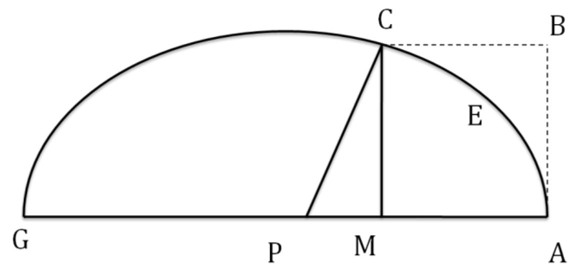


Figura 49

De donde sustituyendo x^2, queda:

$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$

$x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$

o

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qvv - qs^2}{q - r} = 0$$

MA o $CB = \boldsymbol{y}$,
CM o $BA = \boldsymbol{x}$,
$PC = \boldsymbol{s}$

Dada la curva *CE* de eje *AG* y vértice *A*, Descartes se plantea trazar la norma en el punto *C*, para lo cual debe encontrar un punto P sobre el eje *AG* que al trazar el segmento *PC* nos de la normal. De acuerdo con la metodología cartesiana, comienza el análisis del problema:

1. Se considera resuelto
2. Se da nombre a todos los segmentos que parecen necesarios: $MA = y$, $CM = x$, $PC = s$, $PA = v$.

En la síntesis ya mencionada por Descartes "… hay alguna ecuación que explica la relación que existe entre x e y", es decir, la ecuación de la curva.

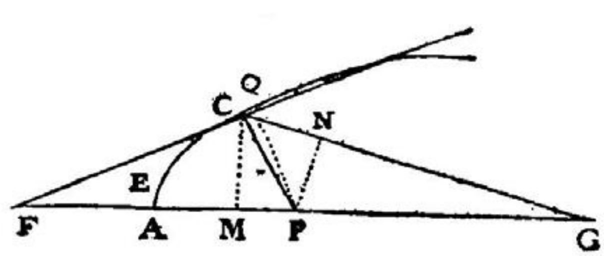


Figura 50

A continuación Descartes considera la circunferencia de centro el punto P y radio el segmento PC, que cortara a la curva en algunos puntos según la naturaleza de la curva. Todavía en el ámbito geométrico del problema. Descartes intuye que el segmento PC será la normal si la circunferencia es tangente a la curva en el punto C.

Descartes prosigue realizando para la parábola cálculos análogos a los de la elipse, tras lo cual vuelve al problema general en una forma que justifica que a su regla se le denomine "método del círculo"

> "ahora, después de encontrar una ecuación así, en lugar de utilizar para conocer las otras cantidades x o y, que son ya dadas, puesto que el punto C es dado, se la debe emplear para encontrar v e s que determinan el punto P pedido. Y, a este efecto se debe considerar que si ese punto *P* es el punto que deseamos encontrar, el círculo del cual es centro y que pasa por el punto *C*, tocara a la línea curva *CE* sin cortarla; pero si el punto P esta ya sea más próxima o más alejado del punto *A* de lo debido, ese círculo cortara a la curva no solo en el punto *C*, sino necesariamente en algún otro. Debe también considerarse que cuando este círculo corta la línea curva *CE*, la ecuación por la cual se busca la cantidad x o y, o alguna semejante, suponiendo *PA* y *PC* conocidas, contiene necesariamente dos raíces, que son desiguales.

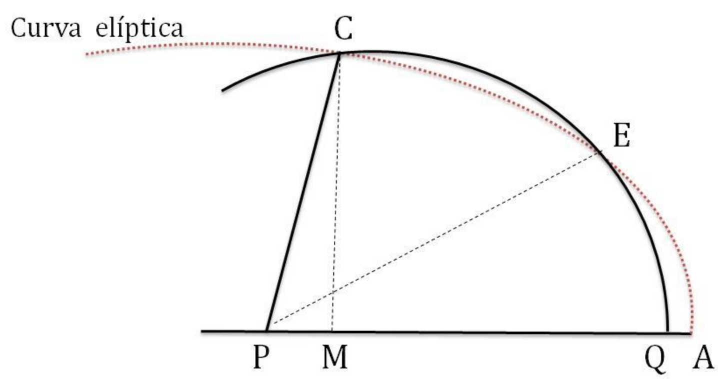


Figura 51

> Pues por ejemplo, si este círculo corta a la curva en los puntos *C* y *E*, trazando *EQ* paralela a *CM*, los nombres de las cantidades indeterminadas x e y convendrá igualmente a las líneas *EQ* y *QA* que a *CM* y *MA*, pues PE es igual a PC por ser del círculo; si bien, buscando las líneas *EQ* y *QA* por *PE* y *PA* que se suponen dadas, se tendrá la misma ecuación que si se buscara *CM* y *MA* por *PC* y *PA*, de lo que se deduce, evidentemente, que el valor de x o de y, o de cualquier otra cantidad que se suponga, será doble en esta ecuación, es decir que habrá dos raíces desiguales entre sí, de las que una será *CM* y la otra *EQ*, si es x que se busca; o bien una será *MA* y la otra *QA*, si es y; y así las otras.

Es cierto que si el punto E no se encuentra del mismo lado de la curva que el punto C, no habrá más que una de estas raíces que sea verdadera y la otra será opuesta o menor que cero; pero cuanto más próximos estén estos dos puntos el uno del otro, tanto menor diferencia habrá entre las dos raíces; y, ellas serán enteramente iguales, si ellos están juntos en uno, es decir si el círculo que pasa por C toca la curva CE sin llegar a cortarla. Además, debe considerarse que cuando hay dos raíces iguales en una ecuación, ella tiene necesariamente la misma forma que si se multiplica por sí misma la cantidad que se supone ser desconocida menos la cantidad conocida que le es igual; después de lo cual si esta última expresión tiene dimensión inferior a la de la ecuación precedente, se la multiplica por otra suma que tenga tanta dimensión como la que le falta, de modo que pueda haber ecuación separadamente entre cada uno de los términos de la una y cada uno de los de la otra"

Para cada punto C de la curva hay que determinar el punto P (problema geométrico) que permite trazar el segmento PC, normal a la curva en C, es decir, hay que poner v y s en función de x e y (problema algebraico). Suponer el problema resuelto permite determinar en un terreno algebraico la ecuación de un círculo. Regresando a la Geometría, si la recta trazada por P es la normal (*el círculo del cual es centro y que pasa por el punto C, tocará a la línea curva CE sin cortarla*), es decir, será tangente, cortará a la curva en un solo punto, un punto doble (en sentido actual). Ahora, volviendo al Álgebra, para que el círculo *toque* a la curva (sea la tangente) es preciso que la ecuación resultante tenga una raíz doble. Esta ecuación resultante proviene del sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la curva y la ecuación del círculo.

Aquí aparece otro principio fundamental de la Geometría Analítica:

"la intersección de curvas" (que es un problema geométrico) se reconduce a la resolución de sistemas de ecuaciones (que es un problema algebraico).

Descartes resolverá el problema algebraico final que se plantea mediante *el método de coeficientes indeterminados*, y en este tema, así como en el asunto paralelo de las raíces dobles, también es un pionero.

Continúa Descartes aplicando el método a la elipse.

d. 2 Método a la elipse

Así, por ejemplo, digo que la primera ecuación encontrada más arriba (la de la elipse), a saber

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qvv - qs^2}{q - r} = 0$$

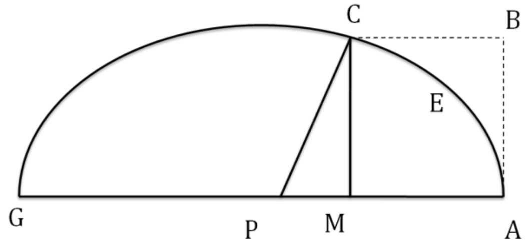


Figura 52

debe tener la misma forma que la que se obtiene haciendo e igual a y, y multiplicando (y) por sí misma, de lo que resulta $y^2 - 2ey + e^2$

de manera que se pueden comparar separadamente cada uno de sus términos y decir que, puesto que el primero, que es y2 es el mismo en la una y en la otra; el segundo que en una expresión es:

$$\frac{qry - 2qvy}{q - r}$$

Es igual al segundo de la otra que es $-2ey$

De donde, buscando la cantidad v que es la línea PA, se tiene

$$v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$$

O bien, por haber nosotros supuesto $e = y$, se tiene

$$v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$$

Y también podría encontrarse s por el tercer término

$$e^2 = \frac{qv^2 - qs^2}{q - r}$$

Puesto que la cantidad v determina bien el punto P, que es el único que buscamos, no hay necesidad de proseguir.

De forma análoga Descartes realiza la argumentación y el cálculo para la parábola y la Concoide de Nicomedes.

Veamos ahora de forma detallada el método del círculo planteada por el mismo Descartes:

d. 3 Aplicación del método cartesiano del círculo al cálculo de tangentes a las curvas

Para mayor comprensión del método del círculo de Descartes, interpretemos la técnica cartesiana para una función algebraica general, de forma deliberadamente anacrónica en términos del lenguaje moderno. Tendríamos lo siguiente:

Sea la curva $y = f(x)$, y un punto cualquiera de ella de abscisa x, donde queremos trazar la normal. Descartes supone como siempre el problema resuelto y la solución dada por la recta *CP*, siendo $C(v, 0)$ la intersección de la normal con el eje de abscisas.

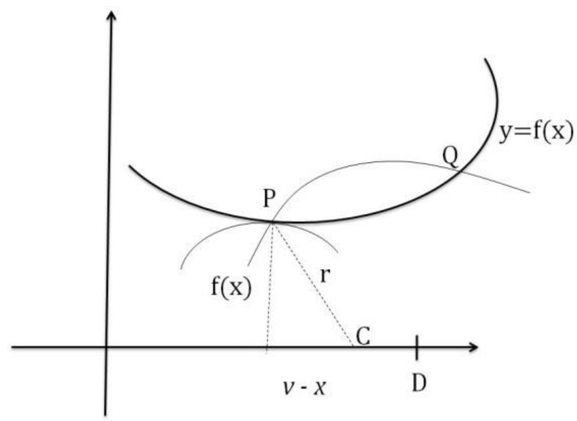


Figura 53

En general un circulo con centro en un punto ***D*** próximo a ***C*** y que pase por ***P***, cortara a la curva $y = f(x)$, no solo en ***P***, sino en otro punto ***Q***, cercano a ***P***, pero si ***CP*** es la normal a la curva en el punto ***P***, este punto será un punto doble de la intersección de la curva $y = f(x)$ y el circulo $(x - v)^2 + y^2 = r^2$.

Eliminando la y de ambas ecuaciones resulta la ecuación

$$[f(x)]^2 + (v - x)^2 = r^2 \qquad (1)$$

Donde v, r , son fijos, debe tener la abscisa x de P como raíz doble.

Pero una función algebraica con una raíz doble $x = e$, debe ser de la forma: $(x - e)^2 \cdot \sum b_n x^n$, de modo que se puede imponer la condición de raíz doble anterior en la forma:

$$[f(x)]^2 + (v - x)^2 - r^2 = (x - e)^2 \cdot \sum b_n x^n \qquad (2)$$

Identificando coeficientes se encuentra el valor de v, en términos de la raíz doble e.

En general mediante el método de Descartes lo que se halla es la "subnormal" $v - x$, que permite hallar la pendiente de la normal:

$$\frac{f(x)}{v-x}$$

y de esta la pendiente de la tangente es decir, nuestra derivada:

$$\frac{v-x}{f(x)}$$

La condición de raíz doble sobre (1) hoy la impondríamos (utilizando las derivadas formales de una curva algebraica), aplicando que "toda raíz doble de una función es raíz de su derivada", por tanto de (1) se deduce:

$$2f(x)\cdot f'(x)-2(v-x)=0$$

Y de aquí:

$$f'(x)=\frac{v-x}{f(x)}$$

Obteniéndose el mismo valor que antes para la pendiente de la tangente.

Apliquemos la técnica de Descartes, con lenguaje actual, a diversos casos sencillos.

d. 3. 1. La parábola $y=x^2$

La ecuación (2) $[f(x)]^2+(v-x)^2-r^2=(x-e)^2\cdot\sum b_n x^n$ ahora se escribe:

$$x^4+(v-x)^2-r^2=(x-e)^2\cdot(x^2+bx+c)$$

Identificando coeficientes se obtiene:

$$v=2e^3+e,$$

sustituyendo $e=x$ la subnormal vendrá dada por:

$$v-x=2e^3,$$

y la pendiente de la tangente en el punto (x,x^2) de la curva será:

$$\frac{v-x}{f(x)}=\frac{2x^3}{x^2}=2x$$

d. 3. 2 La parábola $y^2 = 2px$

La ecuación (2) $[f(x)]^2 + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot \sum b_n x^n$ ahora se escribe:

$$2px + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2$$

Identificando coeficientes se obtiene:

$$v = e + p,$$

sustituyendo $e = x$, la subnormal vendrá dada por:

$$v - x = p,$$

Y la pendiente de la tangente en el punto $\left(x, \sqrt{2px}\right)$ de la curva sera:

$$\frac{v-x}{f(x)} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$$

La ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 2px$ en el punto (x_0, y_0) sera:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0),$$

De donde haciendo operaciones resulta:

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

Expresión habitual de la tangente a la parábola.

d. 3. 3 La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

La ecuación (2) $[f(x)]^2 + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot \sum b_n x^n$ ahora se escribe:

$$b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + (v-x)^2 - r^2 = (x-e)^2 \cdot c$$

Identificando coeficientes resulta:

$$-\left(\frac{b^2}{a^2}\right) + 1 = c, \quad -2v = -2ec$$

Despejando v se tiene:

$$v = e \cdot \left[1 - -\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\right]$$

Sustituyendo $e = x$, la ecuación subnormal vendrá dada por:

$$v - x = \frac{(-b^2 x)}{a^2},$$

De modo que la pendiente de la recta tangente en el punto (x, y) será:

$$\frac{v - x}{f(x)} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

De aquí resulta que la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto (x_0, y_0) se expresara: $y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$, de donde haciendo operaciones resulta: $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$, expresión habitual de la tangente a la elipse.

Hemos visto cómo la técnica cartesiana mediante el *Método del círculo*, bajo un punto de vista de Geometría Algebraica diríamos hoy, encuentra las tangentes a las curvas vía la normal, mediante la técnica de considerar el doble contacto del círculo osculador como una característica de la normal. De este modo, Descartes obtiene un método de tratar el problema, que al intuir que será el germen de una ciencia futura, le concede una importancia capital, al reconocer que las tangentes y normales a las curvas son rectas que, de alguna forma, imponen sus leyes a las curvas.

El problema del trazado de las normales a una curva en un punto, es considerado el mayor éxito del método cartesiano, marcando una impronta en la génesis de la Geometría Analítica por la capacidad que desarrolla **Descartes** de establecer puentes de ida y vuelta entre el Álgebra y la Geometría: análisis geométrico de los problemas, síntesis del análisis en el Álgebra de ecuaciones y traducción geométrica de los resultados algebraicos, un magnífico y poderoso diccionario reversible entre dos lenguajes, el geométrico y el algebraico, con la posibilidad de traducir no sólo en el ámbito gramatical puntos por coordenadas, curvas por ecuaciones, sino también en el dominio sintáctico las relaciones entre los elementos geométricos, por ejemplo intersecciones de curvas, se traducen en relaciones entre los correspondientes elementos algebraicos.

Con estos antecedentes, se comprende la sorprendente acritud con que se desarrolló su polémica con Fermat, a partir de la difusión de los métodos de máximos y mínimos ideados por este «*aficionado*» ya que se aplicaban también al trazado de tangentes. El desarrollo de la controversia, en el que participaron casi todos los matemáticos del círculo de Mersenne, tuvo la feliz virtualidad de ir obligando progresivamente a Fermat a aclarar la naturaleza de sus procedimientos, en el curso de lo cual nuevas curvas nacieron para la Geometría Analítica y para el Cálculo Infinitesimal, que simultáneamente estaba eclosionando gracias a toda la parafernalia analítica que ofrecían los métodos de Fermat y Descartes.

B. La geometría Analítica de Fermat

A principios de 1637, ***Pierre de Fermat*** envió a sus amigos matemáticos de Paris, copias manuscritas de un trabajo terminado probablemente en 1635, intitulado Ad locos planos et sólidos isagoge (Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos, donde se muestra que todos los lugares geométricos estudiados en la antigüedad por Apolonio, pueden ser descritos, caracterizados y analizados mediante ecuaciones algebraicas indeterminadas con dos variables. Casi al mismo tiempo, René Descartes revisaba las pruebas de galera de el *"Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Plus la dioptrique, les météores et la géométrie, qui sont des esseis de cete méthode "*Discurso del método para dirigir adecuadamente la razón y buscar la verdad en las ciencias. Mas la dióptrica los meteóros y la geometría, que son ensayos de éste método. En La geometría uno de los tres apéndices científicos del Discurso del método, se utilizan técnicas muy similares a las de Fermat para estudiar problemas geométricos con el auxilio del ´algebra, si bien este tratado difiere enormemente de la Introducción en propósito, notación y contenido. No deja, sin embargo, de ser una notable coincidencia, que Descartes y Fermat dieran a conocer el mismo año, invenciones totalmente independientes de la geometría analítica.

a. Geometría Cartesiana o Geometría Fermatiana

El que se llame geometría Cartesiana y no geometría Fermatiana a la geometría analítica, no obedece a razones de prioridad u originalidad, sino a la desigual difusión alcanzada en su época por la Introducción y La Geometría. Por razones que son un enigma para sus biógrafos, ***Fermat*** era reacio a publicar, aún cuando no desdeñaba la fama que merecidamente gozaba entre los matemáticos europeos. Su muerte en 1665, dejó la mayoría de sus trabajos dispersos en cartas, notas y manuscritos breves, muchos de los cuales eran copias únicas. Parte de su trabajo en teoría de números, por ejemplo, fue publicado póstumamente por su hijo Samuel, con el título de Observaciones sobre ***Diofanto*** en base a las notas escritas en los márgenes de un ejemplar de la edición de Bachet de la Aritmética, donde no sólo figura su famosa conjetura, sino también verdaderos teoremas y pruebas que sí encontraron en un margen espacio suficiente para ser bosquejados. Personajes como Mersenne, H´erigone y Clerselier recopilaron y llevaron a la imprenta algunos trabajos de Fermat, e incluso ***Wallis***, quien frustrado por su impotencia para resolver problemas de apariencia simple que Fermat le planteaba en sus cartas, solía referirse a él como "ese maldito francés".

La Geometría Analítica fue un descubrimiento independiente de dos ilustres personajes, ninguno de los cuales era matemático profesional. Fermat era un jurista con un inusitado interés y conocimiento sobre las obras matemáticas de Grecia clásica. Descartes era militar aficionado y filósofo que encontró en la Matemática la base racional de su pensamiento.

Ambos iniciaron sus estudios y descubrimientos matemáticos allí donde ***Vieta*** había llegado, pero ambos continuaron la labor de Vieta por caminos diferentes. Bajo la inspiración de Vieta, la gran visión que tuvieron ***Descartes*** y ***Fermat*** fue la de apreciar que la aplicación del Álgebra como instrumento algorítmico por excelencia incrementaría aún más la capacidad heurística del Análisis. La exposición de Fermat en la *Isagoge* es muy concisa, y como en casi todas sus memorias, Fermat hace gala de una gran capacidad de síntesis. En general es más didáctica, sistemática y rigurosa que la de Descartes en *La Geometría* y su enfoque está más próximo al actual, salvo en lo que se refiere a la notación y a la homogeneidad. La presentación de Descartes en *La Geometría* es muy extensa, más general que la de Fermat, menos clara en algunos pasajes y aborda cuestiones y problemas más difíciles.

Fermat se mantuvo fiel a la notación de Vieta en cuanto nombrar incógnitas y parámetros y aplicó la doctrina de éste a nuevos problemas de lugares geométricos. Descartes estuvo más próximo a los objetivos y propósitos de Vieta (la construcción geométrica de las raíces de las ecuaciones algebraicas). Al asignar a cada segmento una longitud, después de fijar una unidad, Descartes facilita la asociación implícita del sistema de números reales con los puntos de una línea recta, proporciona con esta base un substrato geométrico a las operaciones aritméticas y muestra cómo se pueden construir con instrumentos euclidianos pero con el concurso del Álgebra las soluciones de las ecuaciones algebraicas. Con ello soslaya la necesidad que había en el Álgebra Geométrica griega de conservar la homogeneidad y elimina la barrera dimensional.

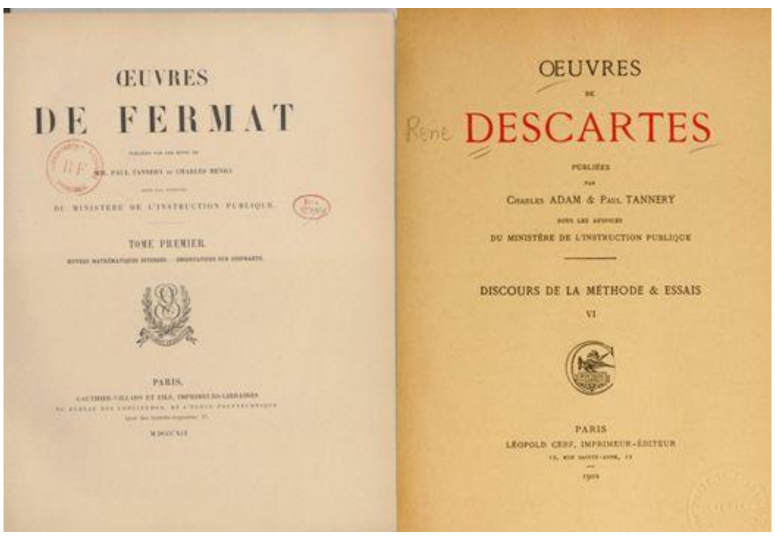


Figura 54

[Paul Tannery: fue un matemático, historiador y escritor de ciencia francesa. Fue contratado por Charles Leveque, profesor de filosofía griega y latina en el Collège de France , entre 1892 y 1897. creó la edición nacional de obras de Fermat.]

b. Introducción "Obra de Fermat"

En su obra *Introducción* Fermat se apegó a las convenciones de notación, así como a las técnicas y resultados del álgebra de Viéte, utilizando las vocales para designar las incógnitas y las consonantes para los parámetros. Luego de cumplir su propósito de reconstruir el trabajo perdido de Apolonio, lo cual era una tarea muy de moda por la época, Viéte, entre otros, también había puesto de su parte en esta restauración, Fermat se propuso presentar una teoría de los lugares geométricos para un análisis adecuado a problemas como los propuestos por ***Apolonio*** y ***Pappus***, y afirmó abrir el camino para un estudio general de los problemas de lugares geométricos. La *Introducción* es una obra de alrededor de una veintena de páginas dedicadas a la línea, al círculo, y a las secciones cónicas, en la cual muestra gran interés por el problema de Apolonio de circunferencias tangentes a tres circunferencias, y generalizó el problema a esferas tangentes a cuatro esferas.

Sin avanzar mucho, La *Introducción* comienza por indicar en forma completamente explícita, el principio fundamental de la geometría analítica:

> *"Quoties in ultima aequalitate duae quantitates ignotae reperiuntur, fit locus loco et terminus alterius ex illis describit lineam rectam aut curvam".*
>
> **Collège de France , entre 1892 y 1897 (Tannery, 1891)**

Cuando dos cantidades desconocidas se encuentran en una ecuación final, resulta un lugar geométrico fijo y el punto final de una de ellas describe una línea recta o curva.

Esta sencilla afirmación representa una de las declaraciones más importantes en la historia de las matemáticas y es el principio fundamental de la naciente Geometría Analítica. Aunque en la terminología de Viéte las vocales representan cantidades desconocidas, pero fijas o determinadas, Fermat da un significado a una ecuación algebraica en dos incógnitas permitiendo que las vocales tomen un valor sobre una línea recta concebidas como segmentos, la primera se mide, a partir de un punto inicial, a lo largo de un eje dado, mientras los segmentos correspondientes que representan la otra incógnita, siendo determinados por la ecuación dada, se levantan como ordenadas formando un determinado ángulo con el eje. La idea clave del trabajo de Fermat consiste en poder, a partir de una ecuación algebraica en dos incógnitas, definir, con respecto a un sistema de coordenadas dado, un lugar geométrico de puntos, es decir una curva.

Algo para tener en cuenta es que ni Fermat ni Descartes utilizan el término

"sistema de coordenadas" o la idea de los dos ejes: el de abscisas y el de ordenadas. Fermat por su parte, escoge a conveniencia una línea recta, o una semirrecta, que juega el papel del eje , cuyo origen es un punto fijo que hace las veces del actualmente llamado origen de coordenadas. La manera en que Fermat construye los lugares geométricos dada la ecuación es la siguiente: Sobre la línea de referencia dada, se mide un segmento cuya longitud corresponde al valor de una de las variables, generalmente , y después con un ángulo fijo dado, se toma un segmento de longitud igual a la otra variable, generalmente llamada , de manera que se satisfaga la ecuación dada, y el extremo "libre" de dicho segmento, describe, al tomar la "variable independiente" todos sus valores, un lugar geométrico.

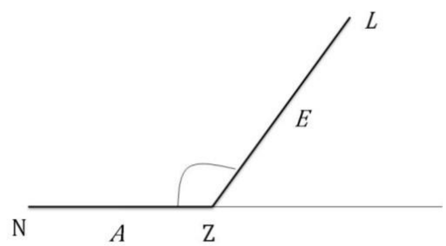


Figura 55

En el esquema de Fermat, el eje de ordenadas no existe explícitamente, pero aunque en algún caso aparezca una línea equivalente a lo que sería el eje , la abscisa, es decir, la cantidad , no es interpretada como una línea trazada desde el punto en que se considere hasta tal supuesto eje de ordenadas. Así pues, la Geometría desarrollada bajo estos presupuestos será una «Geometría de ordenadas» más que una «Geometría de coordenadas». Además, al considerar las coordenadas como segmentos, Fermat restringe las operaciones a lo que ahora se llama el primer cuadrante.

En el momento en que Fermat realiza la división de los lugares en tres tipos: planos, sólidos y lineales, él afirma que si las potencias de los términos en una ecuación dada no supera el cuadrado, entonces el lugar es plano o sólido.

> *Commode autem instituí possunt aequationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus (quem ut plurimum rectum sumemus), et alterius ex illis poritione datae terminus unus sit datus; modo neutral quantitatum ignotarum quadratum praetergrediatur, locus erit planus aut solidus.*
>
> **Collège de France , entre 1892 y 1897 (Tannery, 1891)**

Es cómodo, para establecer las ecuaciones, tomar las dos cantidades desconocidas bajo un ángulo dado (que de ordinario supondremos recto) y dar la posición y un extremo de una de ellas; siempre que ninguna de la dos cantidades desconocidas sobrepase el cuadrado, el lugar será plano o sólido…

Un elemento importante en esta idea es la suposición del ángulo recto, pareciendo así que Fermat, como Descartes intuían alguna importancia en esto para un manejo más cómodo de las ecuaciones relacionadas cuando el ángulo de referencia es recto.

b. 1. Lugar geométrico de semirrectas por Fermat

Fermat empieza trabajando con la ecuación de primer grado que según la terminología de Viéte expresa en la forma *(D in A aequetur B in E)* o en lenguaje cartesiano $(dx = by)$

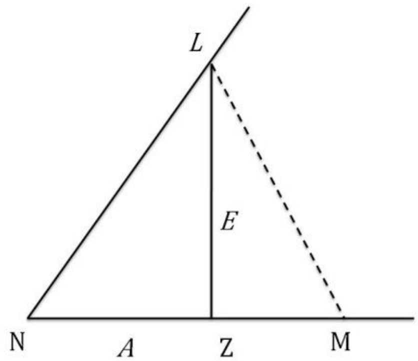


Figura 56

En este caso el lugar geométrico resulta ser la semirrecta NL (figura 46).

> *Recta data positione sit NZM, cujus punctum datum N; NZ aequetur quantitati ignotae A, et ad angulum datum NZI elevate recta ZI sit aequalis alteri quantitati ignotae E. D in A aequetur B in E: Punctum I erit ad lineam rectam positione datam. Erit enim Ut B ad D, ita A ad E. Ergo ratio A ad E data est, et datur angulus ad Z, triangulum igitur NIZ specie, et angulus INZ; datur autem punctum N et recta NZ positione: ergo dabitur NI positione, et est facilis compositio.*
>
> **Collège de France , entre 1892 y 1897 (Tannery, 1891)**

Sea NZM una recta de posición dada, en la que se da el punto N. NZ se iguala a la cantidad desconocida A , y bajo el ángulo dado NZL se levanta la recta igual a la otra cantidad desconocida E . Sea $DA = BE$. El punto L estará sobre una recta dada de posición.

En efecto, se tendrá $\frac{B}{D} = \frac{A}{E}$

Por tanto la razón $\frac{A}{E}$ es dada, así como el ángulo en Z.

Por consiguiente el triángulo NLZ es dado de especie, así como el ángulo LNZ. Pero el punto N es dado, así como la posición de la recta NZ . Por tanto, NL está determinado. La síntesis es fácil.

b. 2. Lugar geométrico de la hipérbola por Fermat

Fermat sigue con las ecuaciones de segundo grado, mostrando en primer lugar que «*A in E aeq. Z pl.*», es decir $xy = c^2$, es una hipérbola.

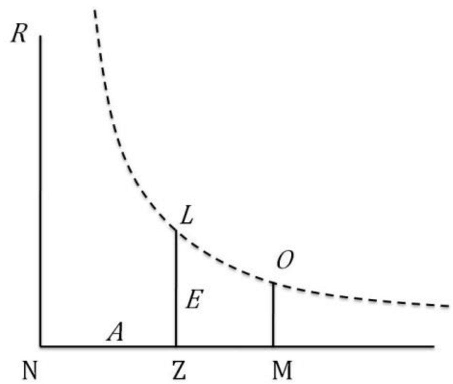


Figura 57

Fiat NR parallela ZI; sumatur in NZ quodlibet punctum, ut M, a quo ducatur MO parallela ZI; et fiat rectangulum NMO aequale Z pl.

Per punctum O, circa asymptotes NR, NM, describatur hyperbole: dabitur positione et transibit per punctum I, quum ponatur rectangulum A in E, sive NZI, aequale NMO.

Collège de France , entre 1892 y 1897 (Tannery, 1891)

Trácese NR paralela a ZL; tómese sobre NZ un punto cualquiera, sea M , por el cual se traza MO paralela a ZL . Constrúyase el rectángulo NMO igual al área c^2.

Por el punto O, entre las asíntotas NR, NM, descríbase una hipérbola: ella queda determinada y pasará por el punto L, puesto que se supone AE, es decir, el rectángulo NZL, equivalente al rectángulo NMO.

Aquí Fermat aplica la propiedad asintótica de la curva hiperbólica que probablemente era conocida desde el descubrimiento de la curva.

b. 3. Lugar geométrico de una parábola, un circulo y una elipse por Fermat

De la misma forma, Fermat continúa demostrando que (*Aq aeq. D in E*) y (*Eq aeq.D in A*) que sería el equivalente a $x^2 = dy$, y $y^2 = dx$, así como la forma general (*Bq* ± *Aq aeq. D in E*) o $b^2 \pm x^2 = dy$, son parábolas, de la forma que se muestra en la figura.

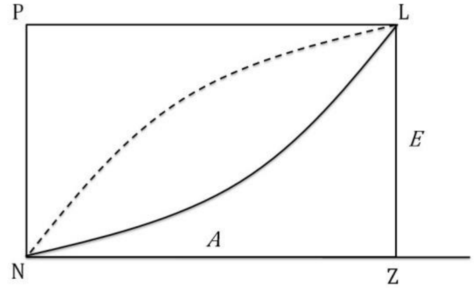


Figura 58

Y más adelante comprueba que «*Bq. - Aq. aeq. Eq.*», es decir, $b^2 - x^2 = y^2$es un círculo.

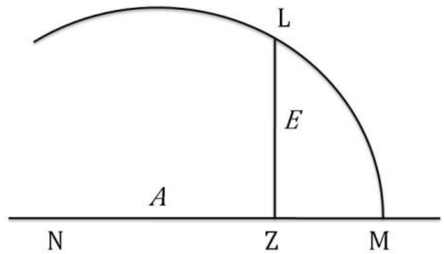


Figura 59

Lugar geométrico de un círculo por Fermat

Y prosigue explicando que (*Bq. - Aq. ad. Eq. Habeat rationem datam*), $b^2 - x^2 = ky^2$es una elipse y que (*Bq. + Aq. est ad. Eq. in data ratione*), $b^2 + x^2 = ky^2$es una hipérbola de la cual da las dos ramas.

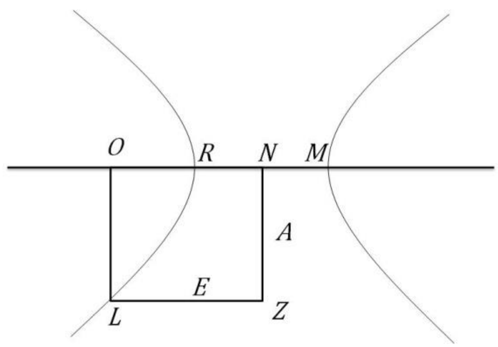


Figura 60

Lugar geométrico de la hipérbola de dos ramas por Fermat

En todas sus construcciones se observa la presencia claramente de un eje horizontal, del cual hemos dicho que hace las veces de nuestro eje $\boldsymbol{x}$, pero normalmente tomado desde su origen solamente en el sentido positivo, exceptuando esta última representación de la hipérbola de dos ramas, donde parecen cambiar los ejes $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, además de tomar la parte "negativa" del eje de las abscisas. Se pueden observar también vagos indicios de la presencia del eje $\boldsymbol{y}$ en las semirrectas que se erigen desde el punto N, paralelas al segmento ZL , pero sin ninguna mención por parte de Fermat, de que estas semirrectas harán las veces de ejes. Finalmente, como ya se mencionaba, la continua recurrencia a tomar ángulos rectos no parece ser casualidad, Fermat parece proponer este hecho como una forma de obtener resultados más "cómodos".

b. 4. Las diferenciaciones de Fermat

Es muy posible que Fermat estuviera ya en posesión de su geometría analítica en una fecha tan temprana como el año 1629, puesto que por esta época hizo dos importantes descubrimientos que están estrechamente relacionados con sus trabajos sobre lugares geométricos. El más importante de ellos los expuso unos años más tarde en un tratado, que tampoco se publicó durante su vida, titulado *Methodus ad disquirendam maximan et minimam* (Método para hallar máximos y mínimos) Fermat había estado estudiando lugares geométricos dados (en notación moderna) por ecuaciones de la forma $y = x^n$, por lo que se les conoce hoy como (Parábolas de Fermat) si n es positivo, o (HIiperbolas de Fermat) si n es negativa. Aquí tenemos y una geometría Analítica de curvas de orden superior, pero Fermat fue aun más lejos. Para curvas polinómicas de la forma $y = f(x)$ descubrio un método muy ingenioso para hallar los puntos en los que la función toma un valor máximo o minimo. Fermat comparaba el valor de $f(x)$ en un cierto punto con el valor $f(x + E)$ en un punto próximo; en general estos dos valores serian claramente distintos, pero en una “cumbre” o en el fondo de un “valle” de una curva “Lisa”, la diferencia será casi imperceptible, por tanto, para hallar los puntos que corresponden a valores máximos o mínimos de la función, Fermat iguala $f(x)$ a $f(x + E)$, teniendo en cuenta que estos valores, aunque no son exactamente iguales, son (casi iguales). Cuanto más pequeño sea el intervalo E entre los puntos, más cerca estará dicha seudo-igualdad de ser una verdadera ecuación; asi pues, Fermat, después de dividir todo por E, hace $E = 0.$ El resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y minimos de la función polinómica. Aquí podemos ver ya en esencia el proceso que ahora llamamos de diferenciación, pues el método de Fermat es equivalente a calcular

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x + E) - f(x)}{E}$$

E igualar este limite a cero. Resulta completamente justo, por lo tanto, reconocer la razón que asistía a Laplace al aclamar a Fermat como el verdadero descubridor del cálculo diferencial, así como co-descubridor de la geometría analítica. Obviamente Fermat no disponía del concepto de limite, pero salvo a esto, su método para determinar máximos y mínimos sigue un camino completamente paralelo al que podemos ver hoy en los libros del cálculo, excepto en la mínima diferencia de hoy se suele utilizar el símbolo h o Δx en vez de la E de Fermat para el incremento de la variable.

CAPÍTULO III

La Enseñanza De Las Secciones Cónicas

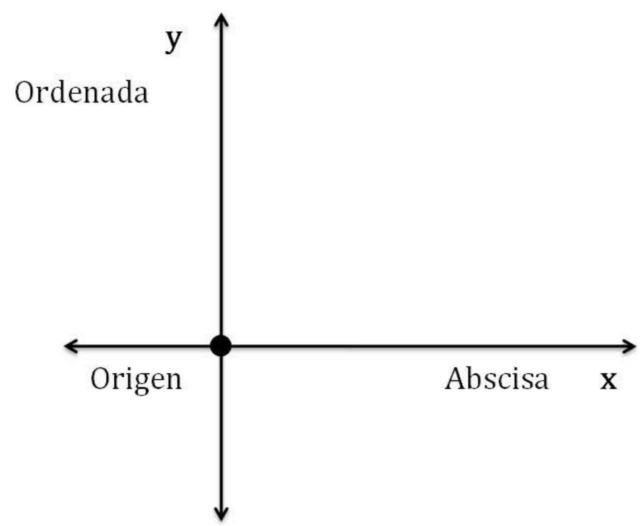
II. La enseñanza de las secciones cónicas

En este capítulo del trabajo se desarrollara de manera constructiva, la metodología propuesta para el aprendizajes de estas figuras planas (Las cónicas), con el fin de establecer una herramienta útil para la enseñanza de las mismas, se iniciara de lo básico a lo más complejo, de manera que se avanzara paso a paso, como llegar al conocimiento de la parábola, la elipse, la circunferencia y la hipérbola, como lugares geométricos, para esto se necesitara las nociones básicas para el desarrollo de la misma, ya que no basta con el conocimiento del algebra de nivel básico, hace falta conectar el concepto de plano cartesiano.

A. Puntos en el plano cartesiano

El plano cartesiano es un sistema de rectas perpendiculares formando ángulos de noventa grados de manera que a cada eje se le asignara un nombre en especial, de acuerdo a su posición. A la eje horizontal se le llamara abscisa y al eje vertical se le llamara ordenada. El punto de intersección de estas rectas perpendiculares se le llama punto de origen.

Figura 61



Para una notación algebraica, se le asigna al eje de la abscisa la letra "x" y al eje de la ordenada la letra "y". De acuerdo a la notación de $x \; e \; y$ para los dos ejes, un punto en el plano está determinado por el par ordenado (x, y); como en el plano existen infinitos puntos, se le asignara una letra mayúscula (A, B, C, D…) para distinguirla del resto de los punto.

Un punto en el plano está representado por el símbolo $P(x, y)$, a este símbolo se le llama coordenadas rectangulares.

La intersección de estas rectas perpendiculares, forma cuatro cuadrantes. Para cada uno de estos cuadrantes los puntos son diferentes de acuerdo a los signos.

- Los puntos de la forma $P(x, y)$ se encuentran en el primer cuadrante.
- Los puntos de la forma $P(-x, y)$ se encuentran en el segundo cuadrante.
- Los puntos de la forma $P(-x, -y)$ se encuentran en el tercer cuadrante.
- Los puntos de la forma $P(x, -y)$ se encuentran en el cuarto cuadrante.

Ejemplo:

1. Localice los siguientes puntos en el plano cartesiano.

Sea: $A(3,5)$, $C(-4,3)$, $D(0,4)$, $F(-2,-5)$, $I(-3,0)$, $K(0,-2)$, $M(2,-4)$

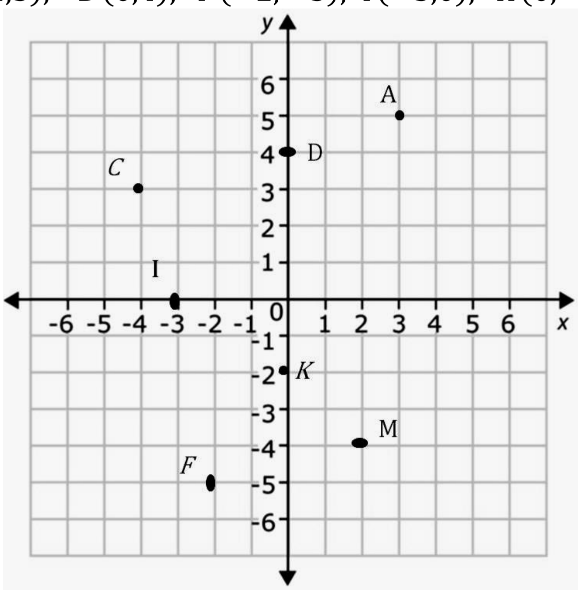


Figura 62

2. Escriba las coordenadas de los siguientes puntos.

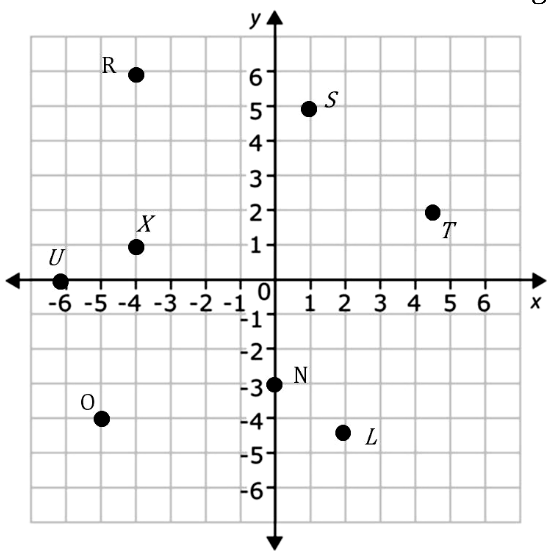


Figura 63

$R($______, ______$)$ $U($______, ______$)$

$X($______, ______$)$ $N($______, ______$)$

$O($______, ______$)$ $T($______, ______$)$

$L($______, ______$)$ $S($______, ______$)$

B. Distancia entre dos puntos

Para determinar la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ del plano, basta con tener sus coordenadas y sustituirla en la siguiente fórmula que se deduce a partir del teorema de Pitágoras.

Dado los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ del plano cartesiano.

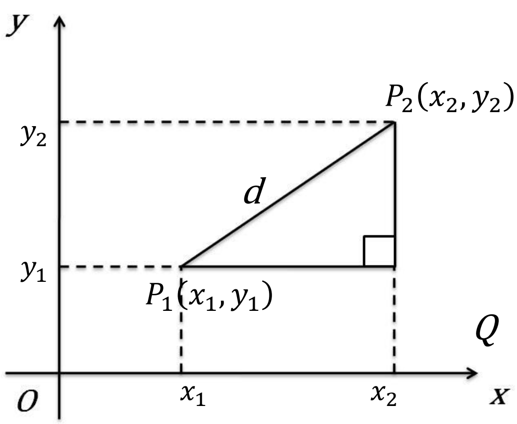


Figura 64

En el triangulo P_1QP_2, por el teorema de Pitágoras

$$(\overline{P_1P_2})^2 = (\overline{P_1Q})^2 + (\overline{QP_2})^2$$

Pero, $\overline{P_1P_2} = d$, $\overline{P_1Q} = x_2 - x_1$, $\overline{QP_2} = y_2 - y_1$, entonces:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dado que $d = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_1}$

Conocida la fórmula de distancia entre dos puntos, podemos determinar la distancia entre dos puntos.

Ejemplo:

- Determine la distancia entre los puntos $A(3{,}5)$, $B(5{,}9)$

Se toma el punto A como $\boldsymbol{P_1}$, tal que $x_1 = 3$, $y_1 = 5$ y a B como $\boldsymbol{P_2}$, tal que $x_2 = 5$, $y_2 = 9$

Remplazando las variables en la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(5-3)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{(2)^2 + (4)^2}$$

$$d = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

- Determine la distancia entre los puntos $C\left(-3, 4\sqrt{3}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{3}\right)$

Tomando al punto C como $\boldsymbol{P_1}$ y al punto D como $\boldsymbol{P_2}$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+3\right)^2 + \left(2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{49}{4}+12} = \sqrt{\frac{97}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{97}$$

C. Lugares geométricos

El lugar geométrico o gráfica, de una ecuación de dos variables es una línea (recta o curva) que contiene todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

En este punto del capítulo es importante mencionarlo ya que las secciones cónicas se describen a partir de lugares geométricos en el plano, esto se debe gracias a los problemas fundamentales de la geometría analítica.

Problemas fundamentales de la geometría analítica:

- Dada una ecuación, hallar el lugar geométrico que representa.
- Dada un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

a. ***1. Primer problema***

Dada la ecuación de un lugar geométrico se determina las intersecciones y su simetría con los ejes, la extensión, sus asíntotas y, por último, la gráfica.

a. ***1. 2 Simetría***

- ✓ Simetría respecto al eje x

  Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable y es remplazada por $-y$, entonces la curva es simetrica respecto al eje x

  Ejemplo: Se sustituye y por $-y$ en la ecuación:

  $$xy - 3x - 5y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x(-y) - 3x - 5(-y) + 2 = 0$$
  $$-xy - 3x + 5y + 2 = 0$$

  La ecuación se altera, por tanto, no hay simetría respecto al eje x.

- ✓ Simetría respecto al eje y

  Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable x es remplazada por $-x$, entonces la curva es simétrica respecto al eje y.

  Ejemplo: Se sustituye x por $-x$ en la ecuación:

  $$xy - 3x - 5y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (-x)y - 3(-x) - 5y + 2 = 0$$

  $$-xy + 3x - 5y + 2 = 0$$

  La ecuación se altera, por consiguiente, no hay simetría respecto al eje y.

- ✓ Simetría respecto al origen

Si la ecuación de la curva no se altera al sustituirla x por $-x$ e y por $-y$.
Ejemplo: Se sustituye x por $-x$, y por $-y$

$xy - 3x - 5y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (-x)(-y) - 3(-x) - 5(-y) + 2 = 0$

$xy + 3x + 5y + 2 = 0$

La ecuación se altera, por tanto, no hay simetría respecto al origen.

a. ***1. 3. Extensión de la curva***

Determina los intervalos de variación para los cuales x e y están definidas.

- ✓ Extensión respecto al eje x:

Ejemplo: sea la ecuación $xy - 3x - 5y + 2 = 0$

A partir de la ecuación $xy - 3x - 5y + 2 = 0$ se despeja la y

$$xy - 5y = 3x - 2$$
$$y(x-5) = 3x - 2$$
$$y = \frac{3x-2}{x-5}$$

Para $x = 5$ la ecuacion no esta definida, por lo tanto se tiene: $x \epsilon \mathbb{R} - \{5\}$

- ✓ Extensión respecto al eje y:

Ejemplo: se la ecuación $xy - 3x - 5y + 2 = 0$ se despeja la x

$$xy - 3x = 5y - 2$$
$$x(y-3) = 5y - 2$$
$$x = \frac{5y-2}{y-3}$$

Para $y = 3$ la ecuación no está definida, por lo tanto, tenemos: $y \epsilon \mathbb{R} - \{3\}$

a. ***1. 4. Asíntotas***

Son las rectas tales que si un punto se aleja del origen, la distancia de este punto a dicha recta va decreciendo, de tal manera que tiende a cero.

- Asíntotas horizontales

Se obtiene al despejar la variable x y resolver la ecuación que resulta de igualar con cero el denominador:

Ejemplo: Sea la ecuación $xy - 3x - 5y + 2 = 0$

$$x = \frac{5y-2}{y-3}$$

Luego $y - 3 = 0$, por tanto la asíntota horizontal es la recta $y = 3$

- Asíntotas verticales

Se obtiene al despejar y y luego igualando a cero el denominador.

Ejemplo: Sea la ecuación $xy - 3x - 5y + 2 = 0$

$$y = \frac{3x - 2}{x - 5}$$

Luego $x - 5 = 0$, por lo tanto la asíntota vertical seria la recta $x = 5$.

a. ***1. 5 Gráfica***

Conjunto de puntos del plano que satisfacen las condiciones establecidas por una ecuación.

Para conocer las coordenadas de algunos puntos de debe tabular la variable y en función de la variable x, donde x toma valores de la extensión en x.

Ejemplo: Grafique la siguiente ecuación $xy - 3x - 5y + 2 = 0$

$$y = \frac{3x - 2}{x - 5}$$

Donde x toma valores de $x \epsilon \mathbb{R} - \{5\}$

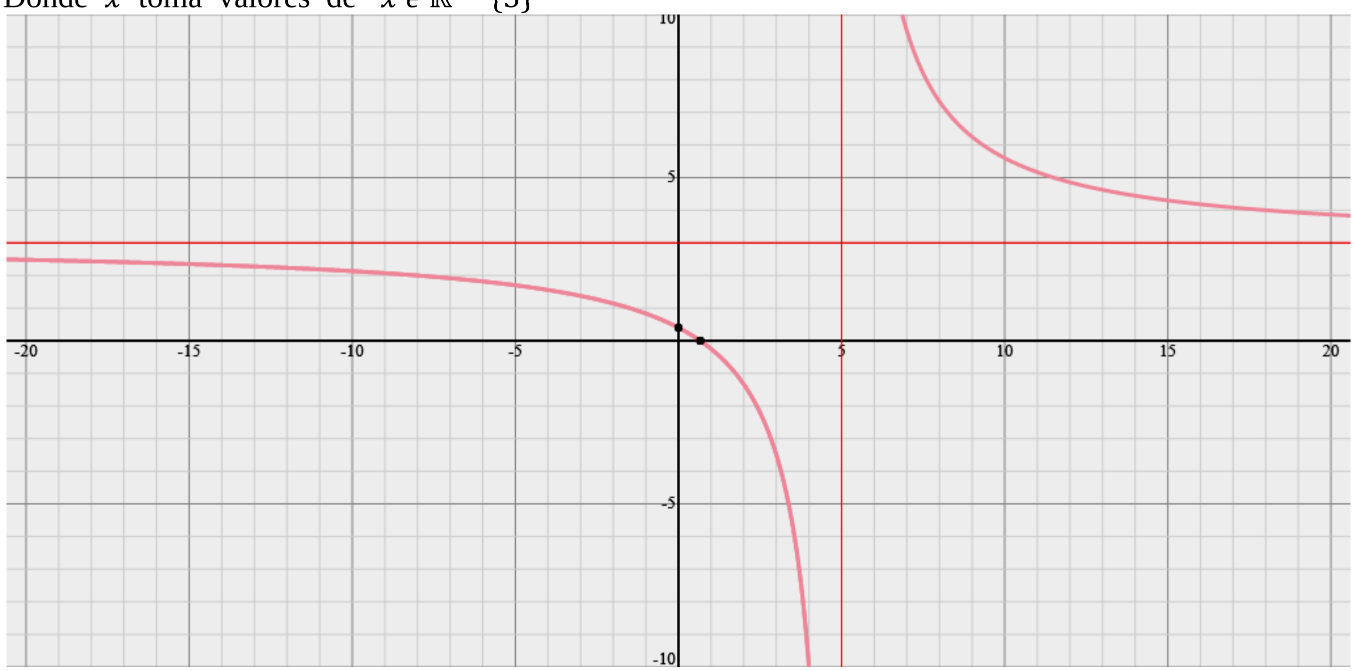


Figura 65

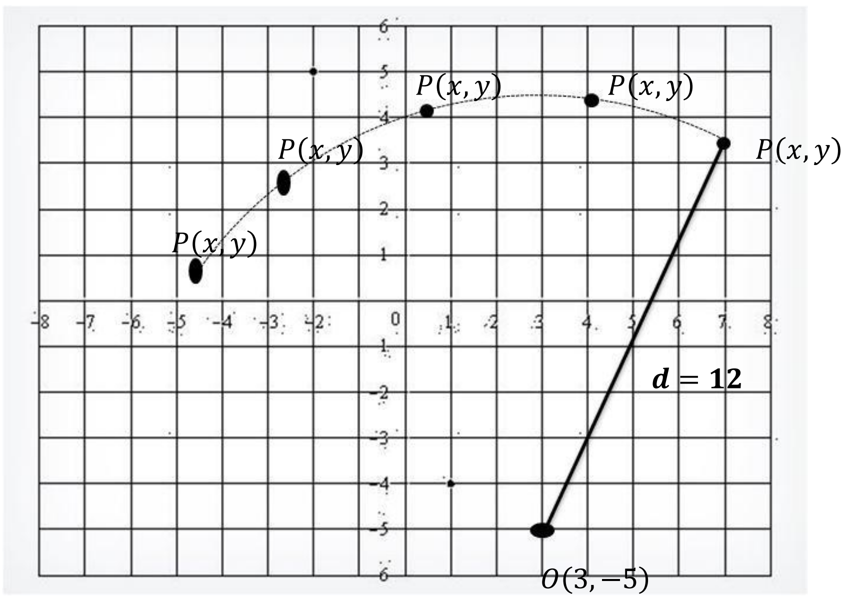
a. 2. Segundo problema

Para determinar la ecuación de un lugar geométrico se necesita las condiciones que deben cumplir los puntos que lo forman o la figura misma. Analicemos a través de los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

1. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve tal que su distancia es igual a 12 unidades desde el punto $O(3,-5)$

Figura 66



Para determinar la ecuación, aplicamos la fórmula de distancia, sea:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se toma al punto P como segundo punto (P_2) y a O como primer punto (P_1)

$$12 = \sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2}$$

$$(12)^2 = \left(\sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2}\right)^2$$

$$144 = (x-3)^2 + (y+5)^2$$

$$144 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 10y - 110$$

2. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los puntos $A(1,-2)$ y $B(5,4)$.

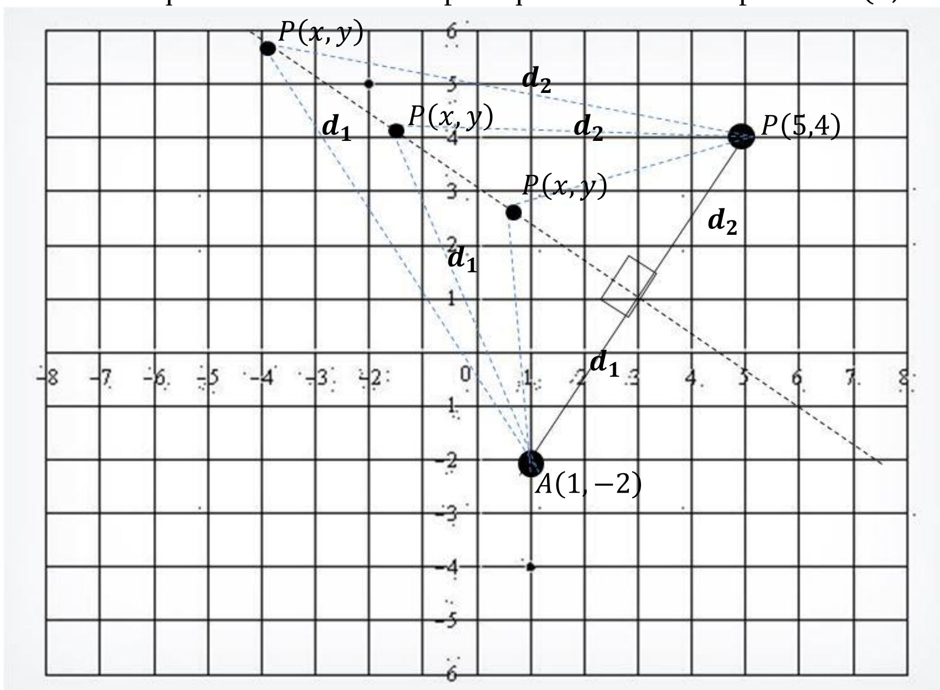


Figura 67

La condición nos señala que la distancia entre $P(x,y)$ a los puntos A y B es la misma, por lo tanto, utilizando la fórmula de distancia:

$$d_1 = d_2$$

$$\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}\right)^2$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2 = (x-5)^2+(y-4)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4 = x^2-10x+25+y^2-8y+16$$

$$-2x+10x+4y+8y+5-41 = 0$$

$$8x+12y-36 = 0$$

$$2x+3y-9 = 0$$

3. Encuentre la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(5,0)$ y $F(-5,0)$, es igual a 16.

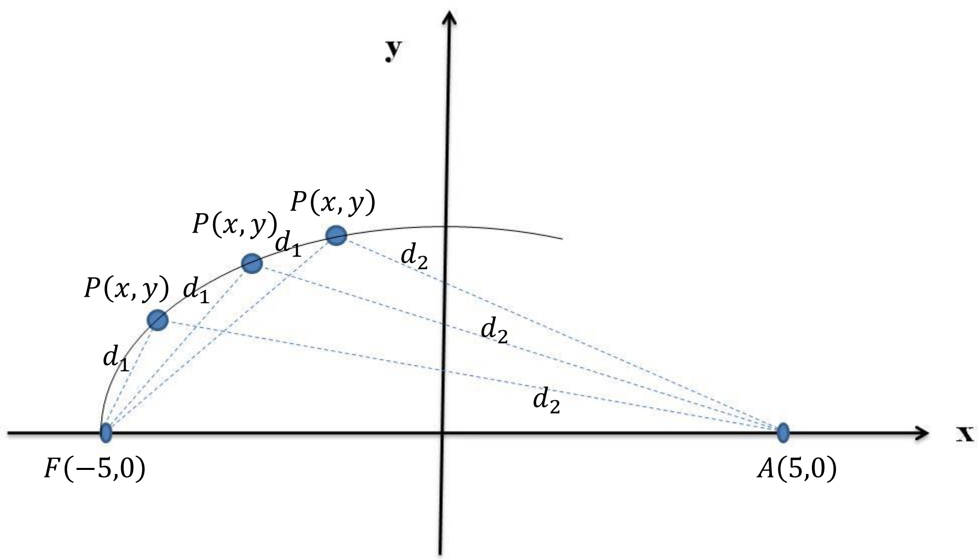


Figura 68

1. De acuerdo a las condiciones del problema, el punto en movimiento $P(x,y)$, se cumple la siguiente condición.

$$\overline{AP} + \overline{PF} = 16$$

Utilizando la fórmula de distancia para ambos segmento del plano:

$\overline{AP} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}\overline{PF} = \sqrt{(x+5)^2 + (y-0)^2}$, sustituyendo la condición,

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} + \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 16$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 16 - \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$\left[\sqrt{(x-5)^2 + y^2}\right]^2 = \left(16 - \sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x-5)^2 + y^2 = 256 - 32\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + (x+5)^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2} - 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} = 256 - 32\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2}$$

$$32\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 256 + 10x + 10x$$

$$32\sqrt{(x+5)^2+y^2} = 256+20x$$

$$\left(8\sqrt{(x+5)^2+y^2}\right)^2 = (64+5x)^2$$

$$64(x^2+10x+25+y^2) = 4096+640x+25x^2$$

$$64x^2+640x+1600+64y^2 = 4096+640x+25x^2$$

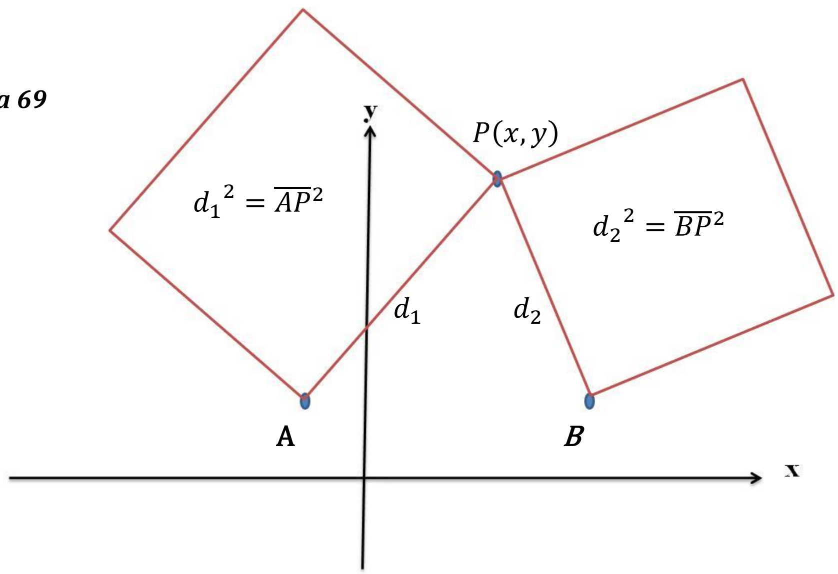
$$64x^2-25x^2+640x-640x+64y^2 = 4096-1600$$

$$\frac{39x^2}{2496}+\frac{64y^2}{2496} = \frac{2496}{2496}$$

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39} = 1$$

4. Encuentre la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(-1,3)$ y $B(7,3)$ es igual a 50.

Figura 69



Siguiendo las condiciones del problema, se cumple. $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 50$

$$\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\right)^2 = 50$$

$$\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-7)^2+(y-3)^2}\right)^2 = 50$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (x-7)^2 + (y-3)^2 = 50$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 14x + 49 + y^2 - 6y + 9 = 50$$

$$2x^2 - 12x + 2y^2 - 12y + 68 = 50$$

$$2x^2 - 12x + 2y^2 - 12y + 18 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 6y + 9 = 0$$

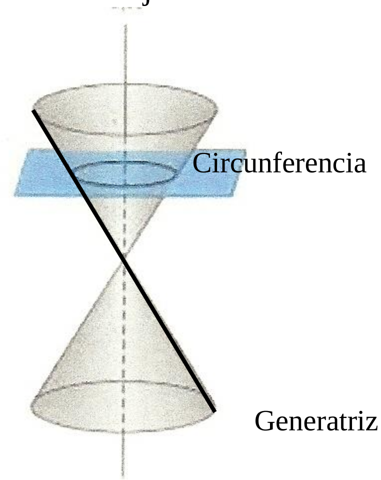
Conocido el concepto de lugares geométricos podemos comprender fácilmente como se define el lugar geométrico de cada figura cónica, llámese circunferencia, parábola, elipse, hipérbola. También se determinara la ecuación de cada una y sus características.

Ya hemos dicho que las secciones cónicas proviene de la intersección entre un cono un plano, el paso siguiente es poder visualizar este hecho, y para ello se pude recurrir el uso de software, que nos permitirá realizar gráficos en 3 dimensiones de una manera sencilla. Así podremos generar la intersección mencionadas para tener una mejor percepción de la misma. De esta manera saltar a una manera didáctica de cada una de las secciones cónicas.

D. La circunferencia.

Si el plano es perpendicular al eje del Cono la sección cónica resultante es una circunferencia.

Figura 70



Definición:

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que sus distancias a un punto fijo llamado centro, siempre es constante.

a. Método didáctico

Una manera didáctica de aplicar esto en el plano es con una cuerda y un lápiz, ubicando el centro de la circunferencia y una longitud igual para todos los puntos de la circunferencia.

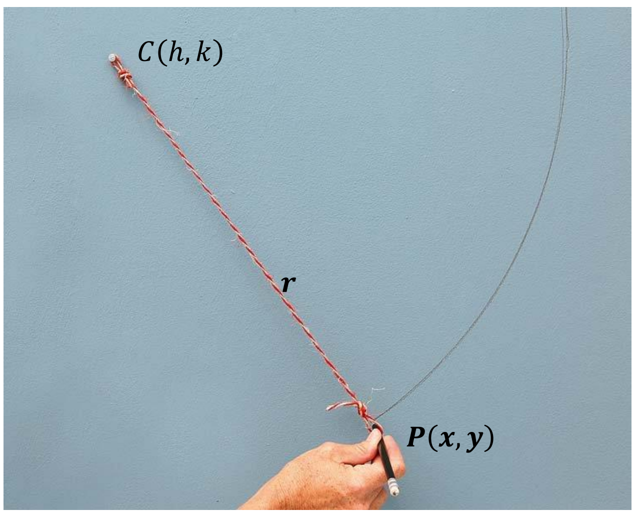
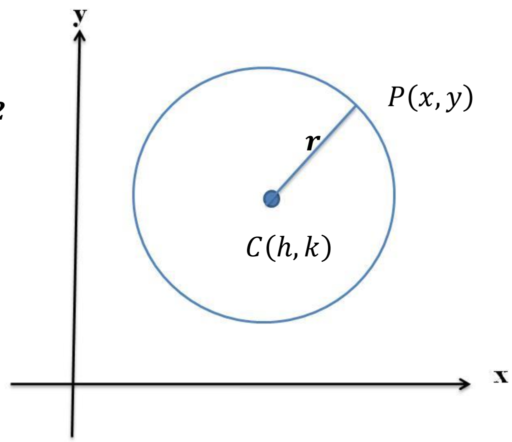


Figura 71

Figura 72



Elementos de la circunferencia.

C: centro

r: radio

$P(x,y)$: un punto de la circunferencia

$\overline{PC} = r$: distancia del centro a un punto de la circunferencia o radio.

Ejemplo:

1. Encuentre la ecuación general de la circunferencia con centro en $C(2,-3)$ y radio 5.

Figura 73

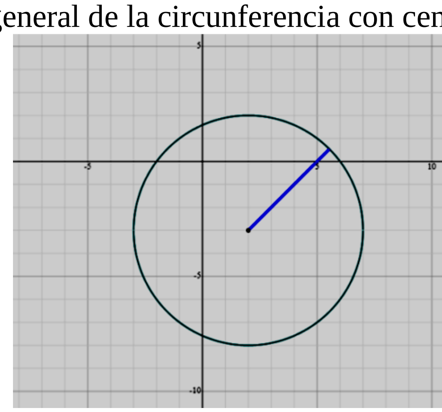


Figura 74 (método didáctico)

b. *Método algebraico*

Sea la ecuación de distancia $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$\left[\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}\right]^2 = (5)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 = 0 \qquad E.Genaral$$

Ejemplo 1: Determine la ecuación general de la circunferencia con centro en $C(7,-4)$ y que pasa por el punto $P(-5,1)$

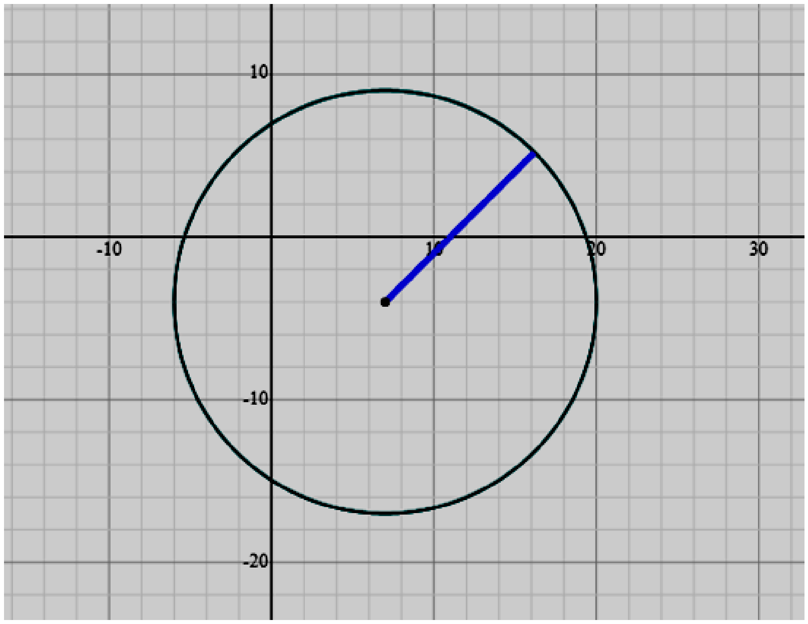


Figura 75 (método analítico)

De acuerdo a la fórmula de distancia, $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
Luego:

$$d=\sqrt{(-5-7)^2+(1+4)^2}$$

$$d=\sqrt{(-12)^2+(5)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}$$

$$d=13$$

Luego: $$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

$$\left[\sqrt{(x-7)^2+(y+4)^2}\right]^2=(13)^2$$

$$x^2-14x+49+y^2+8y+16-169=0$$

$$x^2-14x+y^2+8y-104=0$$

Ejemplo 2: Obtén la ecuación general de la circunferencia con centro en $C(-4,-1)$ y que es tangente a la recta $3x+4y-12=0$

Este y otros problemas tendrán que recurrir al método algebraico para determinar su solución.

De acuerdo a la fórmula de distancia entre un punto y una recta: $d=\frac{|Ax_1+By+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Sustituyendo los valores correspondiente a la formula.

$$d=\frac{|Ax_1+By+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3x+4y-12|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\frac{|3(-4)+4(-1)-12|}{\sqrt{9+16}}$$

$$\frac{|-12-4-12|}{\sqrt{25}}=\frac{|-28|}{5}=\frac{28}{5}$$

$d=r=\frac{28}{5}$ Sustituyendo r en la ecuación de circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$(x+4)^2+(y+1)^2=\left(\frac{28}{5}\right)^2$$

$$x^2+8x+16+y^2+2y+1-\frac{784}{25}$$

$$25x^2+200x+25y^2+50y-359=0$$

E. La Parábola

Dado un cono circular recto, si el plano es oblicuo al eje, y es paralelo a la generatriz, entonces es una parábola.

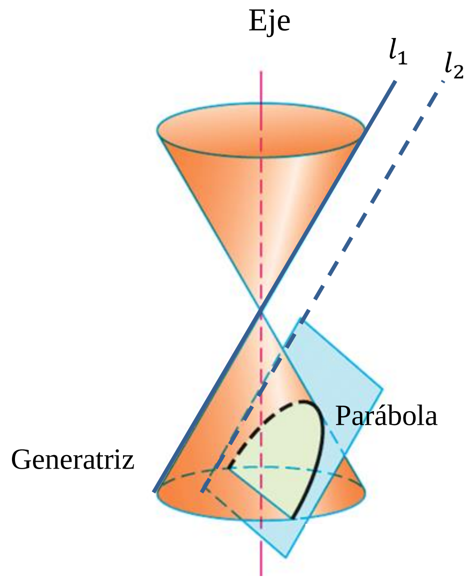


Figura 76

Definición:

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidistan de un punto fijo, llamado foco y una recta fija, llamada directriz.

La manera didáctica de plasmar este concepto, es utilizando una escuadra y una cuerda de mediana extensión, no muy larga y la dejamos fija en uno de sus vértice, de manera que al trazar cada punto, tengan la equidistancia entre el foco y la directriz.

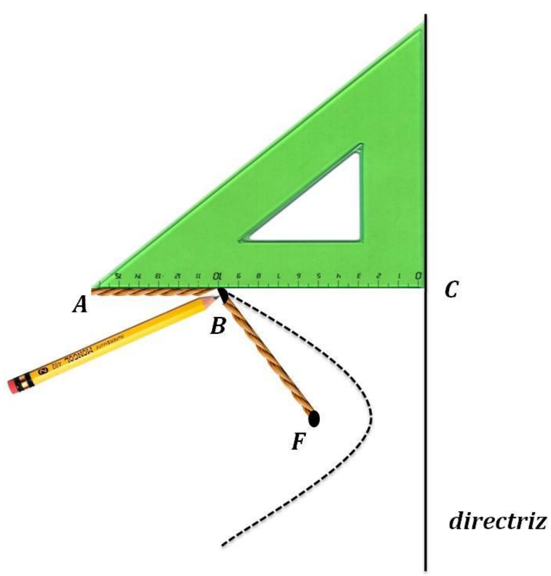


Figura 77

Elementos de la parábola:

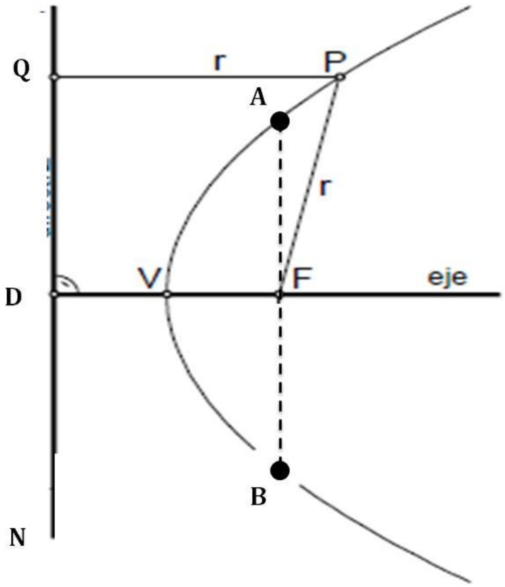


Figura 78

$$\overline{QP} = \overline{PF}$$

Elementos de la parábola

V: vértice

F: foco

P: un punto de la parábola

$\overline{QN}$: directriz

$\overline{AB}$: lado recto

$\overline{DF}$: parámetro

Siguiendo la definición de la parábola, como un lugar geométrico

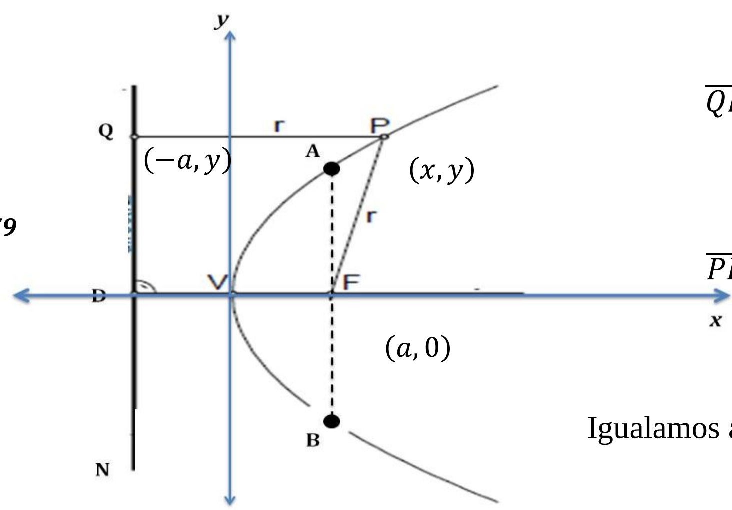


Figura 79

$$\overline{QP} = \overline{PF}$$

$$\overline{QP} = \sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2}$$

$$\overline{QP} = \sqrt{(x+a)^2}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

Igualamos ambas distancia

$$\overline{QP} = \overline{PF}$$

$$\overline{QP} = \overline{PF}$$

$$\sqrt{(x+a)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$(x+a)^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2} + 2ax + \cancel{a^2} = \cancel{x^2} - 2ax + \cancel{a^2} + y^2$$

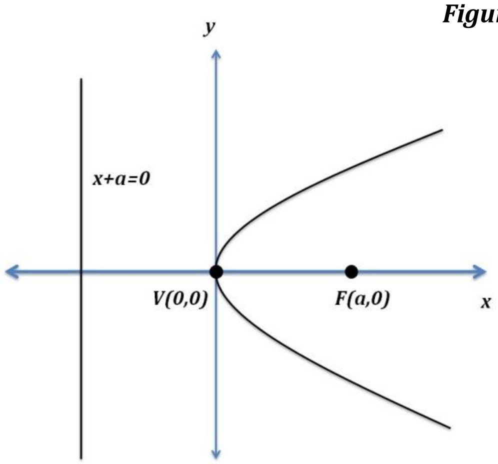
$$2ax + 2ax = y^2$$

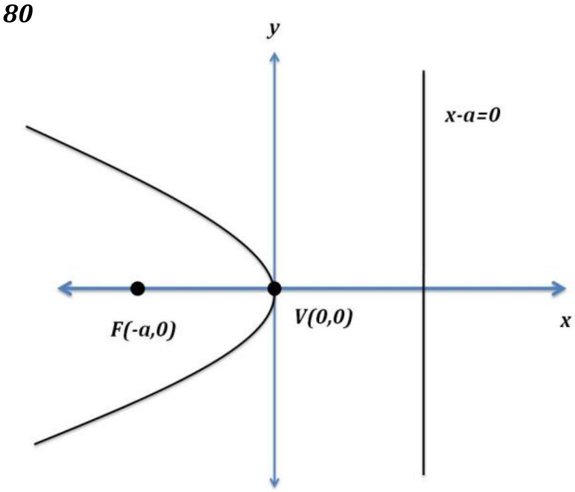
$$y^2 = 4ax$$

Esta ecuación de la parábola es simétrica con el eje x y este eje es perpendicular con la recta de la directriz y el lado recto

- De acuerdo a la posición de la parábola se puede determinar las cuatro ecuaciones canoníca de la parábola.

Figura 80





- ✓ Abre hacia la derecha
- ✓ Es simétrica con el eje x
- ✓ Tiene vértice en el origen
- ✓ Ecuación de la parábola con vértice en el origen y que abre a la derecha:

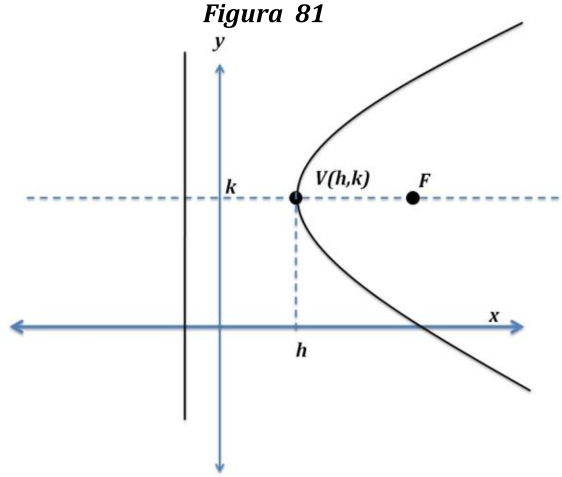
$$y^2 = 4ax$$

- ✓ Abre hacia la izquierda
- ✓ Es simétrica con el eje x
- ✓ Tiene vértice en el origen
- ✓ Ecuación de la parábola con vértice en el origen y que abre a la izquierda:

$$y^2 = -4ax$$

Cuando el vértice se traslada en el punto$V(h,k)$ se introduce este punto en la ecuación para ambas ecuaciones de la parábola simétricas con el eje x.

Figura 81

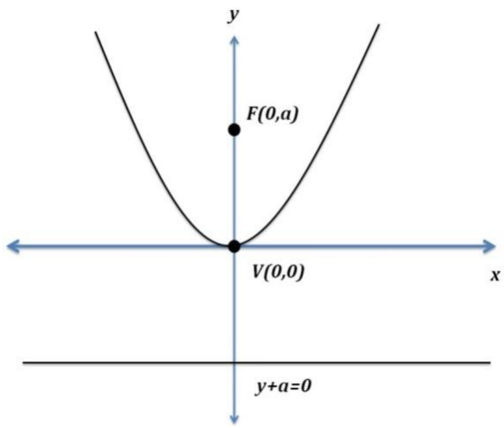


- ✓ Ecuación de la parábola con vértice en el vértice $V(h,k)$y que abre a la derecha:

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

- ✓ Ecuación de la parábola con vértice en el vértice $V(h,k)$y que abre a la izquierda:

$$(y-k)^2 = -4a(x-h)$$



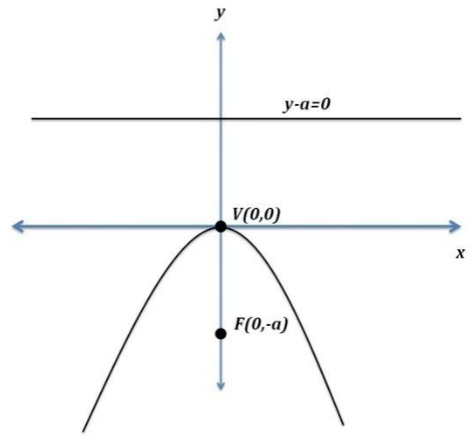


Figura 82

- ✓ Es simétrica con el eje y
- ✓ Abre hacia arriba
- ✓ Tiene vértice en el origen
- ✓ Ecuación de la parábola con vértice en el origen y abre hacia arriba:

$$x^2 = 4ay$$

- ✓ Es simétrica con el eje y
- ✓ Abre hacia abajo.
- ✓ Tiene vértice en el origen
- ✓ Ecuación de la parábola con vértice en el origen y abre hacia abajo:

$$x^2 = -4ay$$

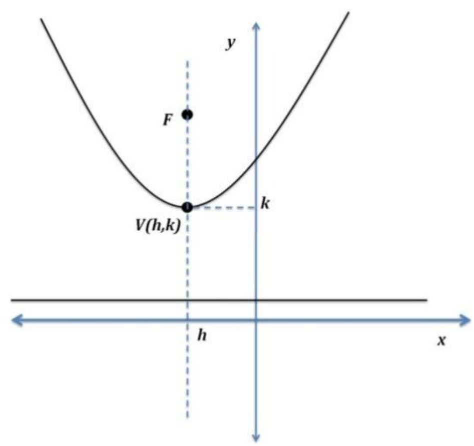
Para las parábolas que abre hacia arriba y hacia abajo también está la situación de trasladar su vértice en el punto $V(h, K)$.

- ✓ Ecuación de la parábola con vértice $V(h, k)$ y abre hacia arriba:

$$(x - h)^2 = 4a(y - k)$$

- ✓ Ecuación de la parábola con vértice $V(h, k)$ y abre hacia abajo:

$$(x - h)^2 = -4a(y - k)$$



Las parábolas son muy útiles en las aplicaciones de las matemáticas al mundo físico. Las propiedades de la parábola se usan a menudo en el diseño de espejos, para telescopios y reflectores. También se emplean en la construcción de micrófonos de largo alcance que se usan en las transmisiones televisivas de futbol y las antenas parabólicas. Estas son algunas de sus aplicaciones físicas de las parábolas.

❖ **Objetivos de aprendizajes en la enseñanza de la Parábola.**

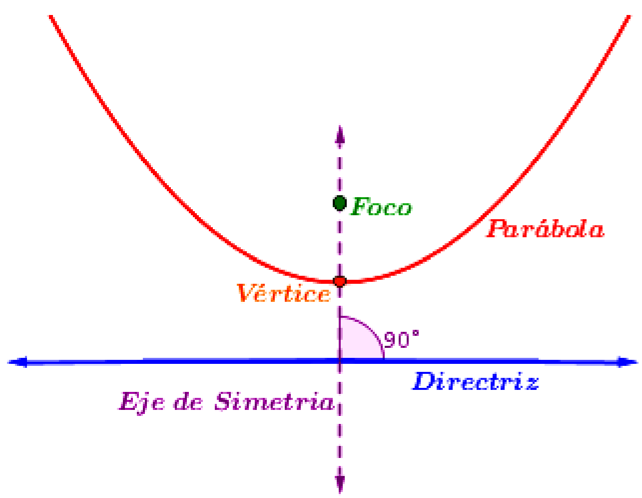
1. Identificar los elementos de la parábola a partir de su gráfica.
2. Encontrar la ecuación de una parábola cuando se conocen algunos elementos.
3. Dada la ecuación de la forma $x^2 = 4ay$ o $y^2 = 4ax$, encontrar los elementos fundamentales y dibujar su gráfica.
4. Dada la ecuación de la forma $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ o $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, determinar los elementos y hacer su grafica.

Una de las metodologías empleada en la matemática para la enseñanza de las figuras cónicas es el método deductivo inductivo, este método se presenta por medio de casos particulares, sugiriéndose que se descubra el principio general que los rige.

Para llegar a los principios generales de la parábola esta metodología estará acompañada del método constructivista donde los estudiantes emplearan sus principios básicos de razonamiento lógico para determinar los elementos de la parábola para luego continuar con la ecuación canoníca y general para determinar los elementos de esta.

Una vez completado los cuatro puntos antes mencionados, se logra el aprendizaje de la parábola como un lugar geométrico del plano y una figura cónica.

Figura 83



1. Elementos de la parábola a partir de su gráfica.

- Ejemplo # 1:

Escriba los elementos de la siguiente parábola:
Coordenadas del vértice, coordenadas del foco, ecuación de la directriz, longitud del lado recto, ecuación canoníca.

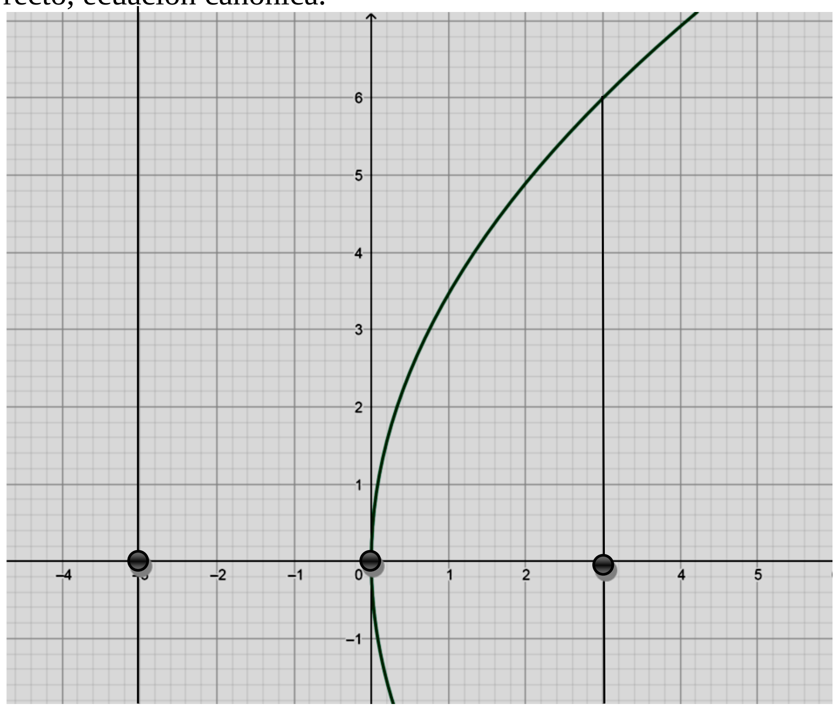


Figura 84

Para determinar estos elementos, lo primero que veremos es la gráfica de la parábola y por lo que podemos ver en esta gráfica, la parábola abre hacia la derecha y es simétrica con el eje x, por lo tanto su ecuación es de la forma:

$$y^2 = 4ax$$

a es una constante que se encuentra en la parábola y significa la distancia entre el vértice y el foco, y también la distancia entre el vértice y la directriz, tomando en cuenta la dirección en el eje de simetría, dicho de otra manera.

Si va de derecha a izquierda será $-a$ en caso contrario, de izquierda a derecha será a

Luego: $a = 3$,a partir de esta constante determinamos sus elementos.

- ✓ Coordenadas del vértice $V(0,0)$
- ✓ Coordenadas del foco $F(3,0)$
- ✓ Ecuación de la directriz $x = -a$, o sea $x = -3$
- ✓ Longitud del lado recto $\overline{LR} = |4a|$=$|4(3)| = 12$
- ✓ Ecuación canoníca $y^2 = 4ax$, sea: $y^2 = 12x$

- Ejemplo # 2:

Determine los elementos de la parábola.

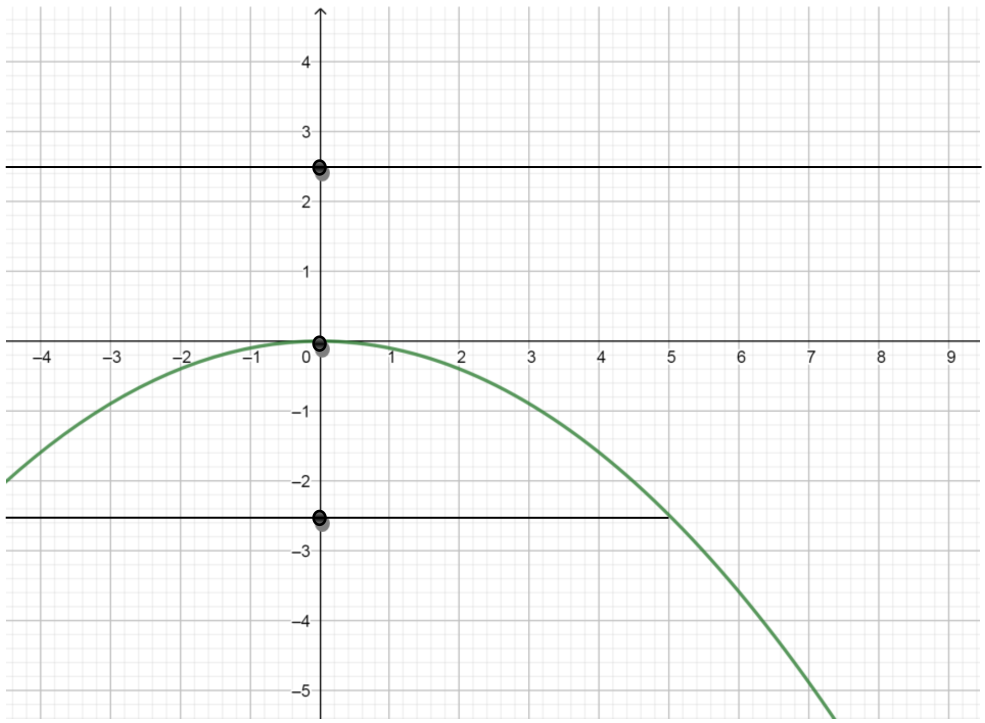


Figura 85

De acuerdo a la figura $a = 2{,}5$

Vértice $V(0{,}0)$

Es una parábola con vértice en el origen.

Foco $F(0{,}2.5)$

El lado recto pasa por el punto focal.

Directriz $y = a$, $y = 2{,}5$

$$y - 2{,}5 = 0$$

Se encuentra a la misma distancia del foco.

Lado recto $\overline{LR} = |4a|$=$|4(2{,}5)|$ =10

Conociendo la constante a, podemos determinar el lado recto.

Ecuación canoníca $x^2 = 4ay$

$$x^2 = -10y$$

Sustituyendo a, en la ecuación que cumple esta posición en el plano.

Ejemplo # 3:

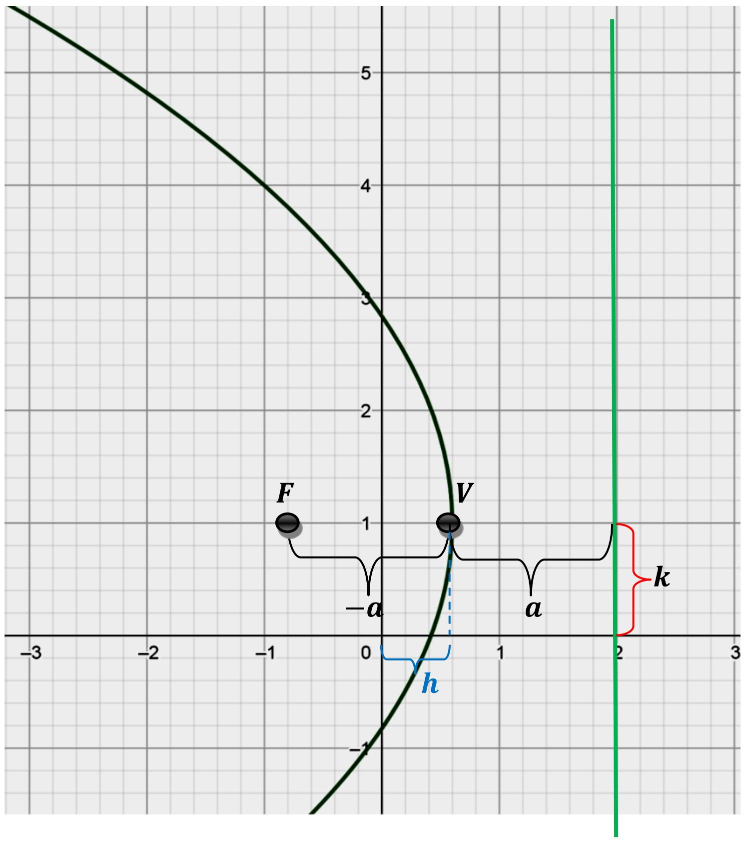


Figura 86

De acuerdo a la figura, esta es una parábola con vértice $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$, ya que esta no corta en el origen, identificando las coordenadas de esta parábola, se tiene:

Vértice $V\left(\frac{3}{5}, 1\right)$ $h = \frac{3}{5}$, $\quad k = 1$

Conociendo que la longitud entre la directriz y el vértice de la parábola es la misma que hay entre el vértice y el punto focal, podemos identificar las coordenadas del foco.

Foco $F(-\frac{4}{5}, 1) F(h-a, k)$

Teniendo las coordenadas del vértice y el foco podemos encontrar el valor de $\boldsymbol{a}$.

Luego $h - a = -\frac{4}{5}$, $\quad h + \frac{4}{5} = a$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = a, \qquad \frac{7}{5} = a$$

La ecuación de la directriz está determinada por los valores de $\boldsymbol{h}$ y $\boldsymbol{a}$positivo, ya que se encuentra a la derecha del vértice.

Directriz $x = h + a$, $\quad x = \frac{3}{5} + \frac{7}{5}$

$$y - 2 = 0$$

Una vez determinado el valor de $\boldsymbol{a}$**,** podemos encontrar el valor de la longitud de lado recto remplazándolo en su fórmula.

$$\overline{LR} = |4a| = \left|4\left(\frac{7}{5}\right)\right| = \frac{28}{5}$$

Para escribir la ecuación cónica de la parábola, primero se identificara su eje de simetría y luego la dirección donde abre. Luego teniendo esta figura, la parábola es simétrica con el eje $\boldsymbol{x}$ y como abre hacia la izquierda, esta ecuación será negativa. La ecuación que cumple esta característica será:

$$(y-k)^2 = -4a(x-h)$$

Remplazando los valores:

$$(y-1)^2 = -\frac{28}{5}\left(x - \frac{3}{5}\right)$$

2. Ecuación de la parábola a partir de sus elementos.

Ejemplo # 1:

Determine la ecuación de la parábola a partir de los siguientes elementos.

- Vértice: $(0,0)$ directriz: $y-4=0$
  De acuerdo a este dato, la parábola tiene vértice en el origen y su directriz es una recta que corta al eje y en el punto $y=4$

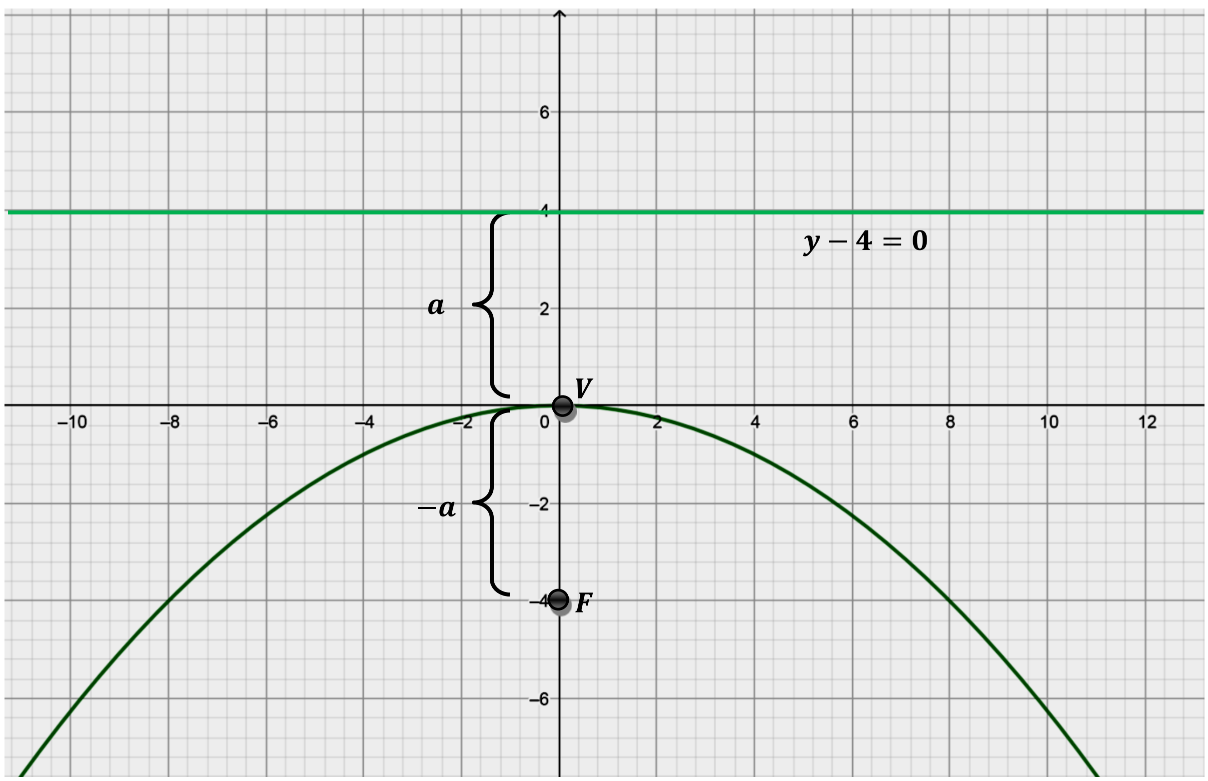


Figura 87

La distancia entre el vértice y la directriz es la misma entre el vértice y el foco; por lo tanto el valor de la constante $\boldsymbol{a}$es igual a 4**.**
Identificando las coordenadas del foco, se tiene: $F(0,-4)$
Lado recto $\overline{LR}=|4a|$=$|4(4)|=16$

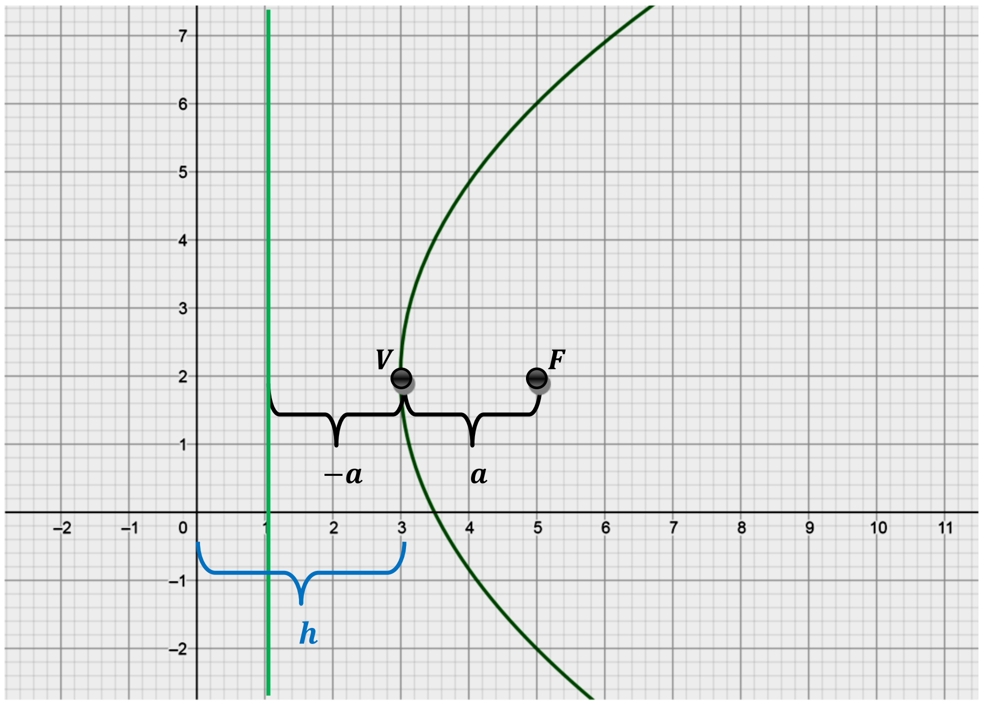
De acuerdo a la figura, la parábola es simétrica con el eje $\boldsymbol{y}$ y abre hacia abajo, por lo tanto su ecuación seria: $x^2=-4ay$

$$x^2=-16y$$

Ejemplo # 2:

- $V(3,2)$, $F(5,2)$
  De acuerdo a los datos del problema, esta es una parábola con vértice $V(h,K)$, por lo que se suele localizar este punto en el plano cartesiano primero y luego localizar el foco y así determinar en qué dirección, abre la parábola.

Figura 88



Una vez localizado el foco y el vértice, podemos observar que la parábola abre hacia la derecha y es simétrica con el eje $\boldsymbol{x}$.
Teniendo las coordenadas del foco y el vértice, se puede determinar el valor de ***a***utilizando la notación algebraica de ambas coordenadas, luego:
$V(h,K)$, $\boldsymbol{V(3,2)}$

$$h = 3, \quad k = 2$$

$F(h+a,k)$, $\boldsymbol{F(5,2)}$

$$h + a = 5,$$

Remplazando el valor de ***h***en esta igualdad**.**

$$3 + a = 5, \qquad a = 5 - 3, \qquad \boldsymbol{a = 2}$$

La directriz al estar a la izquierda del vértice, utilizará ***a***negativo

$$x = h - a$$
$$x = 3 - 2$$
$$\boldsymbol{x = 1}$$

Lado recto $\overline{LR} = |4a| = |4(2)| = 8$

La ecuación de la parábola simétrica al eje $\boldsymbol{x}$y que abre a la derecha**,** seria:
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$

Sustituyendo los valores ya conocido, tenemos: $(\boldsymbol{y}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}} = \mathbf{8}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})$

3. Dada la ecuación con vértice en el origen, encontrar los elementos fundamentales y dibujar su gráfica.

A partir de la ecuación canónica determine su vértice, foco, directriz, lado recto y su gráfica.

Ejemplo # 1:

- Sea la ecuación $y^2 = 24x$
  Sustituyendo y por $-y$: $(-y)^2 = 24x \longrightarrow y^2 = 24x$
  A partir de esta ecuación conocemos que es una parábola simétrica con el eje x y que abre a la derecha por tener constante positiva en $4a$.

  Calculando la constante $\boldsymbol{a}$:

Dada la ecuación	$y^2 = 24x$
Su ecuación es de la forma	$y^2 = 4ax$
Utilizando el método de igualación	$24x = 4ax$
Reduciendo, se tiene:	$\frac{24}{4} = a$
	$\boldsymbol{a} = \mathbf{6}$

Su gráfica.

Vértice $(0,0)$

Foco $(a,0) \longrightarrow F(6,0)$

Directriz: $x = -a$

$\longrightarrow \boldsymbol{x} + \mathbf{6} = 0$

Lado recto$\overline{LR} = |4a|$
$= |4(6)| = 12$

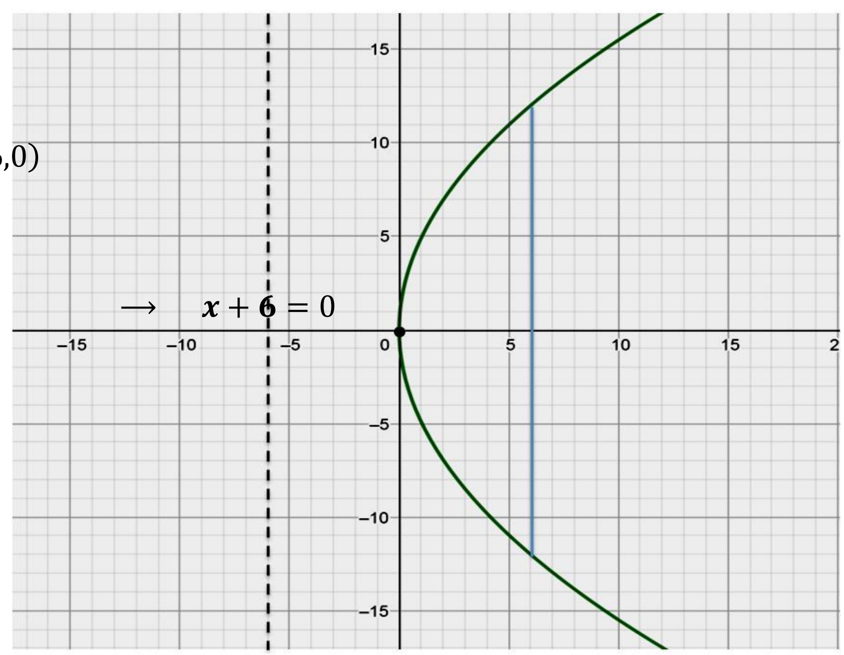


Figura 89

4. Dada la ecuación con vértice $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ determinar los elementos y hacer su grafica.

Ejemplo # 1:

- Sea la ecuación $(x-3)^2 = 10(y+4)$

  A partir de la ecuación, se determinara la constante $\boldsymbol{a}$**,** para encontrar los demás elementos de la circunferencia.

  Utilizando el método de igualación con la ecuación simétrica con el eje $\boldsymbol{y}$, con la ecuación dada, se tiene:

$$(x-3)^2 = 10(y+4)(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

$$10(y+4) = 4a(y-k)$$

$$a = \frac{10}{4}, \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

Dada la ecuación canónica, se determina las coordenadas del vértice. $V(3,-4)$

A partir de las coordenadas del vértice y el valor de $\boldsymbol{a}$**,** se determina el punto focal de la siguiente manera.

$V(h,K)$, $\boldsymbol{V(3,-4)}$

$h = 3, \quad k = -4$

$F(h,k+a), \quad \boldsymbol{F(3,-4+\frac{5}{2})}$

$F\left(3,-1\frac{1}{2}\right)$

De acuerdo a las condiciones de la ecuación canónica de la parábola, su simetría se encuentra en el eje $\boldsymbol{y}$,por lo que la variante de $\boldsymbol{a}$ se encuentra en este eje y. Para el punto focal se utilizo $\boldsymbol{a}$positivo, en cambio para la ecuación de la directriz se utilizara $\boldsymbol{a}$negativo.

$$y = k - a$$

$$y = -4 - \frac{5}{2}, \qquad y = -6\frac{1}{2}\ , \qquad \boldsymbol{y + 6\frac{1}{2} = 0}$$

$$h + a = 5,$$

Su grafica

Lado recto$\overline{LR} = |4a|$

$= |4(6)|$

$= 12$

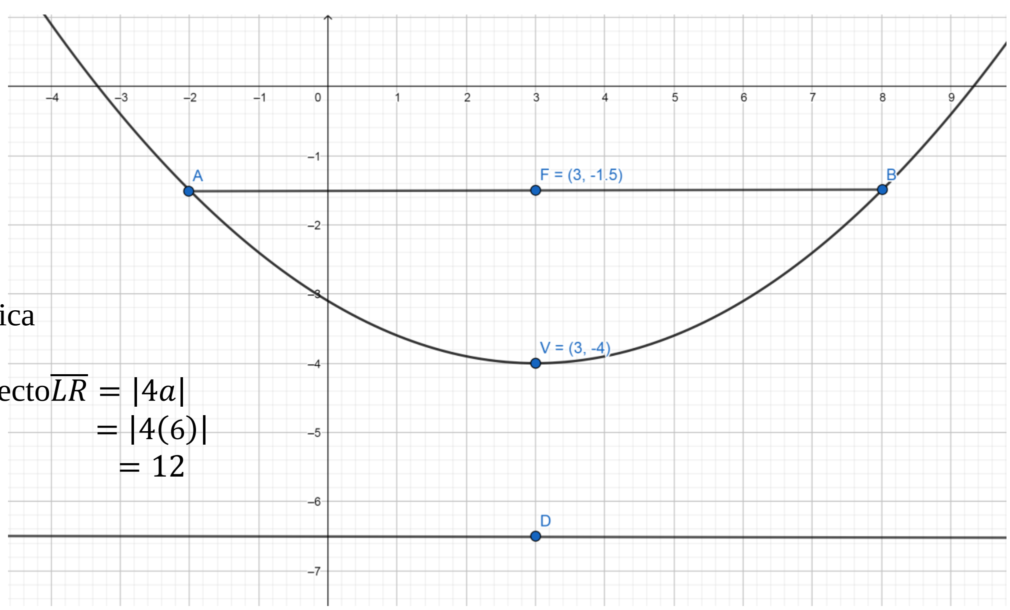


Figura 90

F. La Elipse

Dado un cono circular recto, si el plano es oblicuo al eje, y está a la vez no es paralelo a la generatriz, entonces es una elipse.

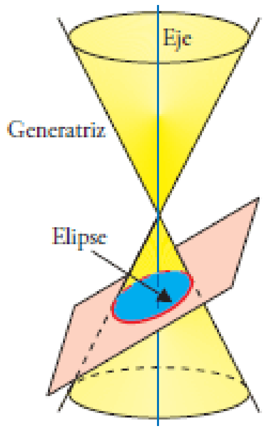


Figura 91

Definición:

Es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante.

Una manera de demostrar esta situación, es utilizando una cuerda de longitud considerable y luego localizar dos puntos fijos en el plano como puntos focales, una vez localizado los puntos, se amarra los extremos de la cuerda en los puntos focales. Una vez hecho esto, trazaremos el conjunto de puntos que se forman al estar en movimiento, de esta manera, obtendremos una figura elíptica.

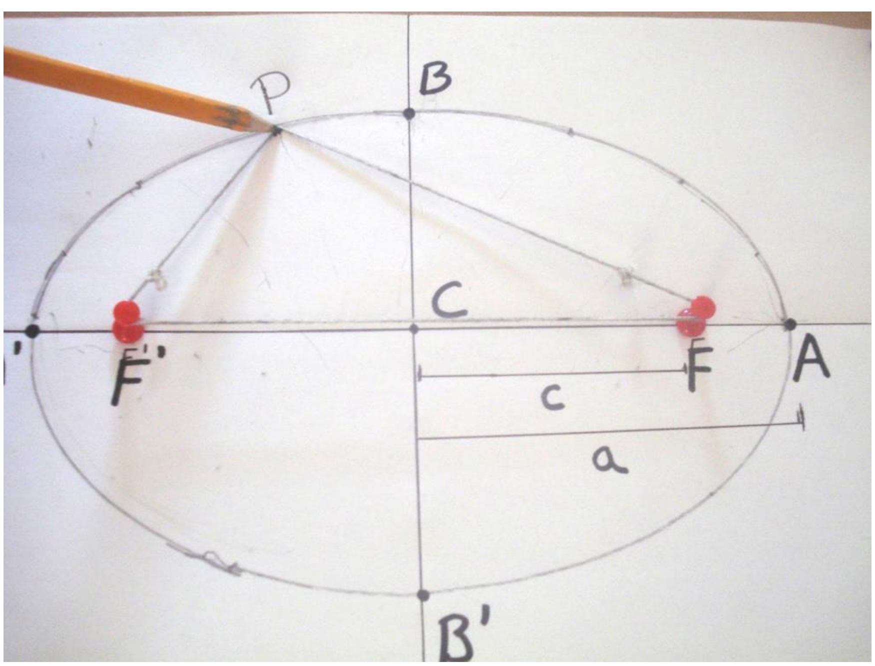


Figura 92

Elementos de la elipse:

- Centro: es el punto medio entre los dos focos F_1F_2y de los vértices V_1V_2.
- Vértices: son los puntos de intersección de los ejes con la curva, V_1 y V_2
- Focos: son los puntos fijos.F_1 y F_2
- Eje mayor: es el segmento $2a$ cuyos extremos son V_1 y V_2
- Eje menor: es el segmentos$2b$, perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro, sus extremos son B_1 y B_1
- Longitud del lado recto: son las cuerdas que pasan por los focos y son perpendiculares al eje mayor.
- Cuerda: es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la elipse.
- Excentricidad: es la razón de la semidistancia focal al semieje mayor y se representa por **e** y mide el achatamiento de la elipse.

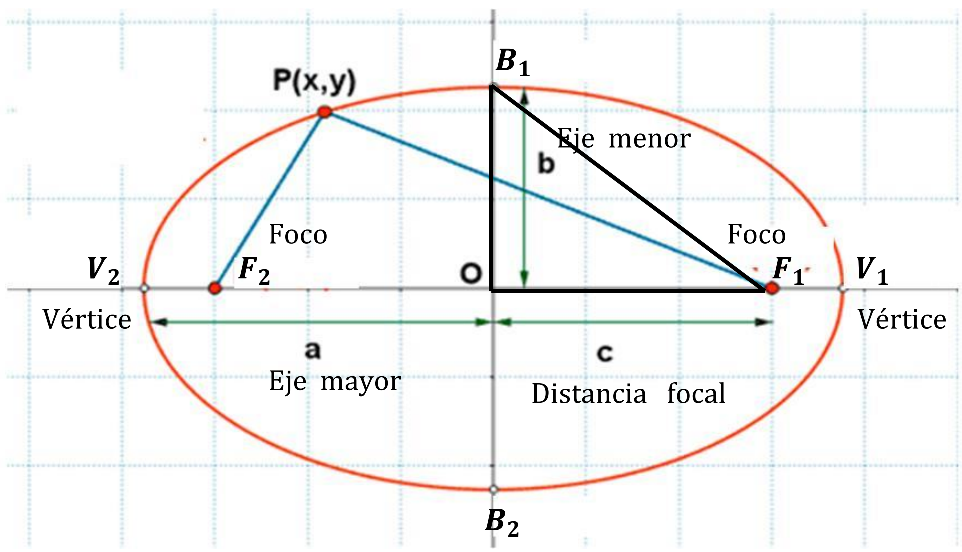


Figura 93

Relación de la constante a, b, c:

Para todas las elipses con centro $C(0,0)$ o $C(h,k)$ se cumple:

- La longitud del eje mayo es $2a$.
- La longitud del eje menor es $2b$.
- Las distancias de a, b y c se relacionan mediante el teorema de Pitágoras, al formarse un triángulo rectángulo con las longitudes del eje mayor y el eje menor sea:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- La longitud de cada lado recto se determinaría como $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$.
- La excentricidad se define como $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $e < 1$.
- La e se aproxima a 0, la elipse tiende a adquirir la forma de una circunferencia. Si e se aproxima a 1, la elipse tiende a ser cada vez mas achatada.

De acuerdo a la definición de elipse "es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 denominados focos es constante".

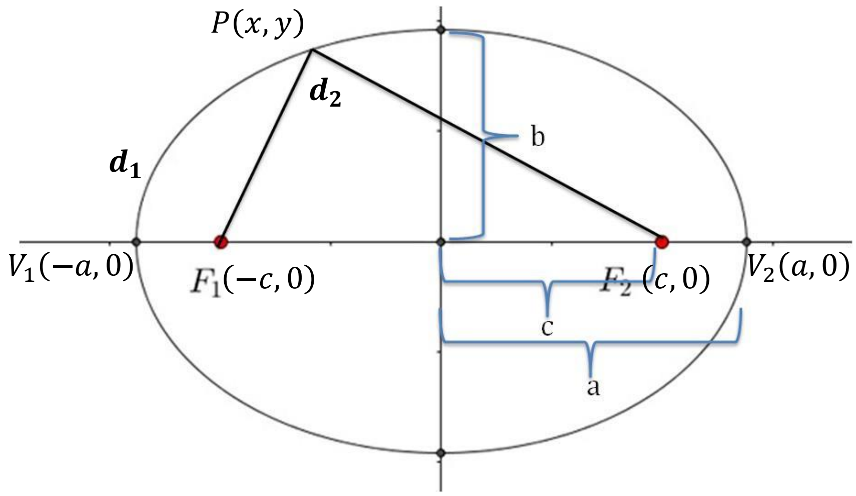


Figura 94

Sean los puntos fijos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$ y $2a$ la suma constante donde $a > c$. Considerando el punto genérico $P(x,y)$ que pertenece al lugar. Por definición:

$$d_1 + d_2 = 2a$$
$$F_1P + F_2P = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\left[\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2 = \left[2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$$
$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$
$$2xc + 2xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$(xc-a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$
$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$
$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$
$$x^2c^2 - x^2a^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$
$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$
$$-1 \qquad x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Remplazando $a^2 - c^2$ por el teorema de Pitágoras.

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Este sería la ecuación de la elipse con eje mayor en $\boldsymbol{x}$. En el estudio de la elipse existen cuatro casos de la elipse, los dos primeros casos es para la elipse con centro en el origen y con eje mayor $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$; los otros dos casos es para las elipse con centro (h,k) y eje mayor sobre los ejes $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

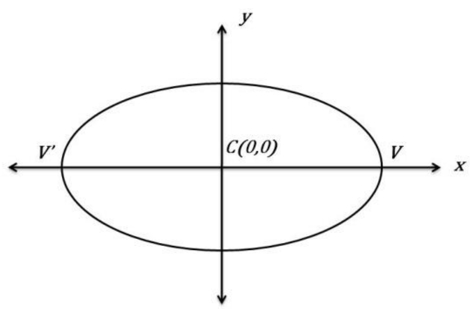
Figura 95

Eje mayor enx

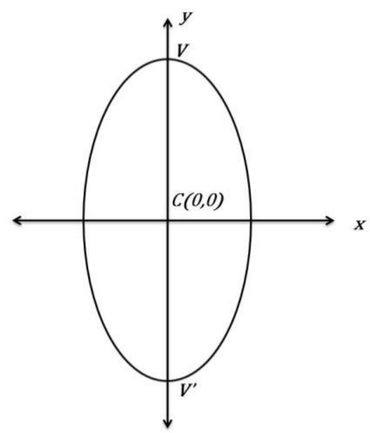
Figura 96

Eje mayor eny

$C(0,0)$

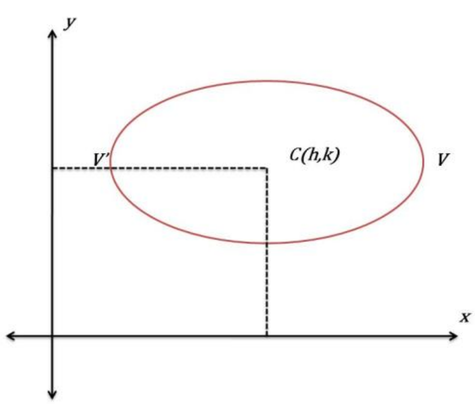


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



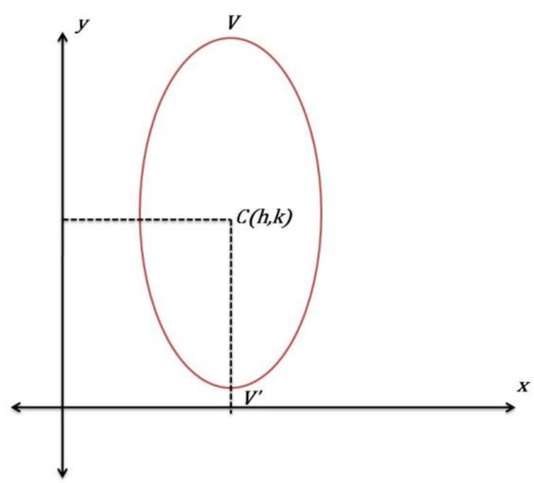
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$C(h,k)$



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Figura 97



$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Figura 98

En la ecuación canoníca, la constante a estará presente sobre el eje mayor, veamos algunos ejemplos.

Ejemplos	Constante a	Constante b
$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$	$a^2=36$ $a=6$	$b^2=25$ $b=5$
$\frac{(x-7)^2}{10}+\frac{(y+6)^2}{14}=1$	$a^2=14$ $a=\sqrt{14}$	$b^2=10$ $b=\sqrt{10}$

- **Objetivo de aprendizajes en la enseñanza de la elipse**
  - Identificar los elementos de la elipse a partir de su gráfica.
  - Determinar la ecuación de la elipse cuando se conocen algunos de sus elementos.
  - Dada una ecuación general o canoníca, encontrar sus elementos.

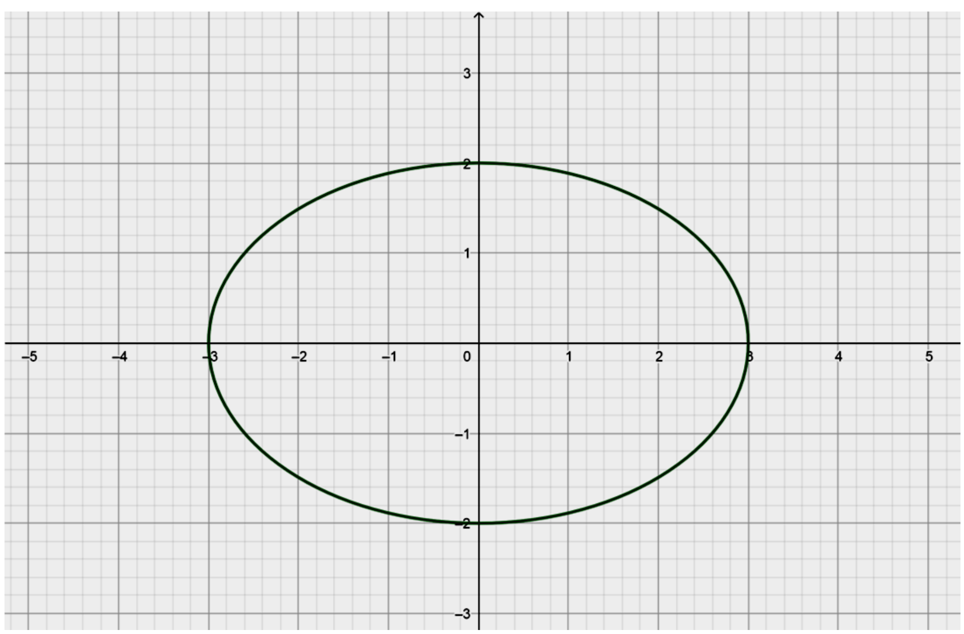
Siguiendo la metodología empleada en la enseñanza de la parábola (constructivismo), a partir de la observación, se identificara los elementos de la elipse y continuamente, la determinación de la ecuación canoníca y en otros casos la gráfica de la misma.

1. ***Identificar los elementos de la elipse a partir de su gráfica:***

A continuación se mostrara algunas gráficas para identificar los elementos de la gráfica para cuando su centro está sobre el origen.

Ejemplo #1:

Figura 99



A partir de esta gráfica, podemos notar que su eje mayor se encuentra sobre el eje x, por lo tanto determinaremos las constantes a y b.

Habiendo mencionado anteriormente, de que la constante a estará presente sobre el mayor, podemos identificar de la gráfica.

$a = 3 \quad \rightarrow \quad a^2 = 9$
$b = 2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 4$
$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{5}$

Una vez determinado las constantes $a, b \;\; y \;\; c$ podemos determinar los elementos ausentes en la grafica.
La ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es la cumple las condiciones de la grafica, con eje mayor en x.

Por lo tanto la ecuación de esta elipse será:

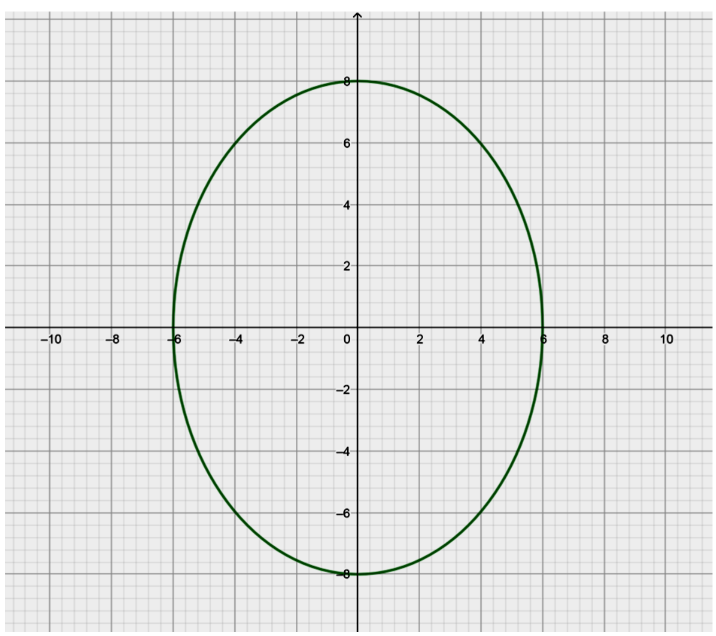
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Longitud del eje mayor $2a = 2(3) = 6$
Longitud del eje menor $2b = 2(2) = 4$
La longitud de cada lado recto se determinaría como $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}67.$
La excentricidad se define como $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Coordenadas del vértice	Coordenadas del foco	Coordenadas eje menor
$V_1(3,0)$	$F_1(\sqrt{5},0)$	$B_1(0,2)$
$V_1(-3,0)$	$F_1(-\sqrt{5},0)$	$B_2(0,-2)$

Ejemplo # 2:

Figura 100



Identificando las constantes $a, b \;\; y \;\; c$ a partir de esta gráfica, podemos identificar:

$a = 8 \quad \rightarrow \quad a^2 = 64$
$b = 6 \quad \rightarrow \quad b^2 = 36$
$c^2 = a^2 - b^2 = 64 - 36 = 28 \quad \rightarrow \quad c = 2\sqrt{7}$

Coordenadas del vértice	Coordenadas del foco	Coordenadas eje menor
$V_1(0{,}8)$	$F_1(0{,}2\sqrt{7})$	$B_1(6{,}0)$
$V_1(0,-8)$	$F_1(0,-2\sqrt{7})$	$B_2(6{,}0)$

Longitud del eje mayor $2a = 2(8) = 16$
Longitud del eje menor $2b = 2(6) = 12$
La longitud de cada lado recto se determinaría como $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(6)^2}{8} = \frac{72}{8} = 9.$
La excentricidad se define como $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{7}}{8}$
La ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, es la cumple las condiciones de la gráfica, con eje mayor en y.

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$$

2. *Determinar la ecuación de la elipse cuando se conocen algunos de sus elementos*

Los elementos de la elipse pueden ser calculados a partir de dos o tres condiciones que la caracteriza. Una vez se tiene estos datos, se ubicara en el plano las condiciones mencionadas en cada problema, de esta manera, se puede deducir su eje mayor y la ecuación que cumple estas condiciones, para luego calcular sus demás elementos.

Ejemplo # 1:
Hallar la ecuación de la elipse de centro en el origen, uno de sus focos en $(0{,}4)$ y semieje mayor igual a 5.

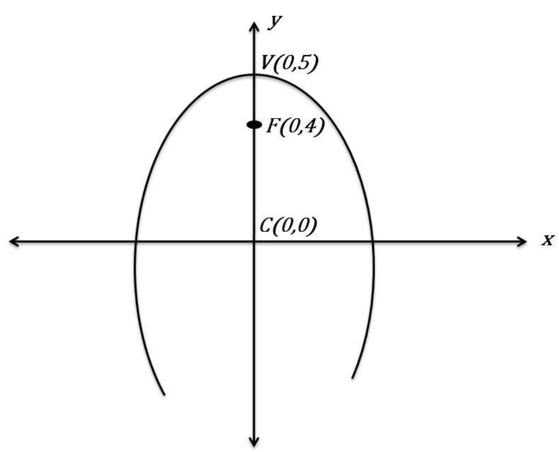


Figura 101

Se localiza el foco en $(0{,}4)$, de esta manera, se deduce que el eje focal se encuentra en $\boldsymbol{y}$, también su eje mayor estaría en $\boldsymbol{y}$**,** con coordenadas $V(0{,}5)$.
Separando las constantes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$**:**
$a = 5 \quad \rightarrow \quad a^2 = 25$
$c = 4 \quad \rightarrow \quad b^2 = 16$
$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$
$b^2 = 9 \quad \rightarrow \quad b = 3$
Si su eje mayor es y, su ecuación seria:
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Ejemplo # 2:

Encuentre la ecuación de la elipse si sus focos están en $(\pm 8{,}0)$ y sus vértices en $(\pm 17{,}0)$.

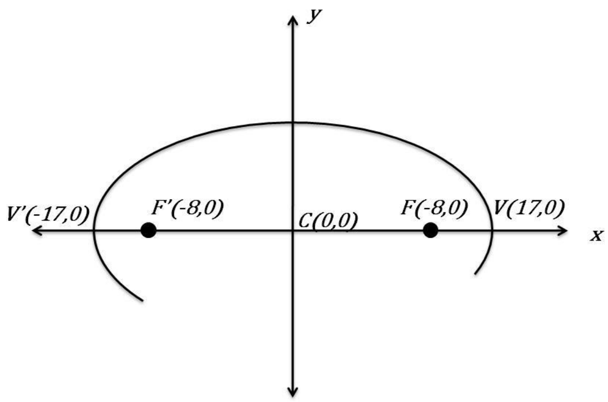


Figura 102

Localizando las coordenadas de sus focos y sus vértice, se deduce que su eje mayor está en x, luego determinando $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

$a = 17 \quad \rightarrow \quad a^2 = 289$

$c = 8 \quad \rightarrow \quad b^2 = 64$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 289 - 64$$
$$= 225$$

$b^2 = 225 \quad \rightarrow \quad b = 15$

Si su eje mayor es y, su ecuación seria:

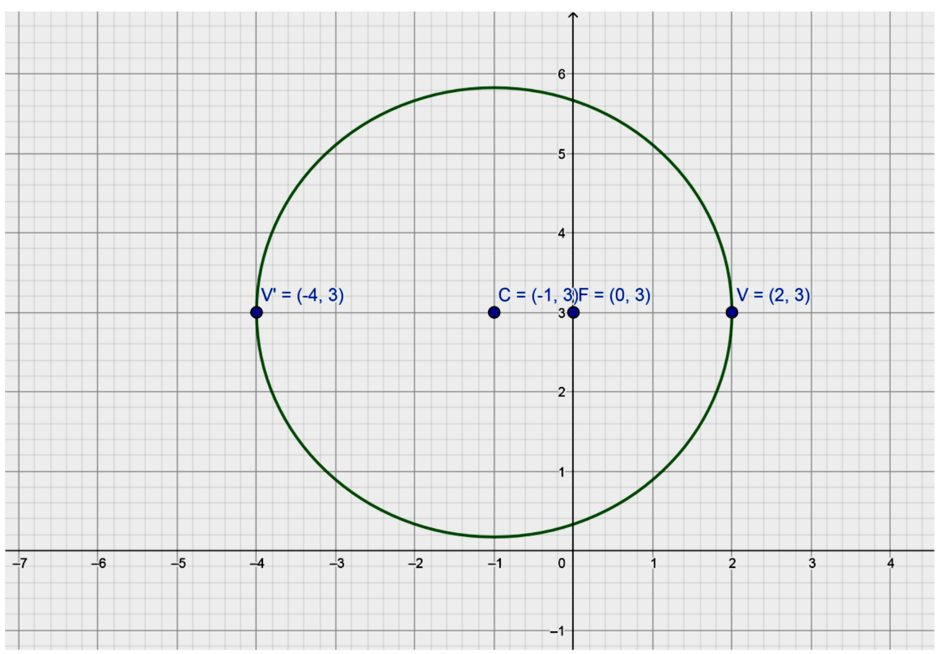
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1$$

Ejemplo # 3:

Encuentre la ecuación de la elipse con vértices en $(-4{,}3)$ y $(2{,}3)$ y que tiene un foco en 0,3

Localizando las coordenadas del problemas, se tendrá una elipse con eje mayo sobre $\boldsymbol{x}$.

Figura 103



Una vez localizado los vértices de la elipse, se tiene los extremos de la elipse, con vértices en el eje $\boldsymbol{x}$, donde podemos concluir que su centro estaría en el punto medio de estas coordenadas. Utilizando la definición de punto medio, se puede calcular su centro.

$$P_m = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$
$$P_m\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3+3}{2}\right) P_m\left(\frac{-2}{2}, \frac{6}{2}\right) P_m(-1,3)$$
Una vez calculado el punto medio entre los vértices de la elipse, podemos escribir:
$$C(-1,3)$$
Si el centro de la elipse no se encuentra en el origen, se escribirá como $C(h,k)$ al moverse en cualquier punto del plano, sea:

$C(h,k)$ $\quad y \quad$ $C(-1,3)$

Entonces: $\quad h = -1$, $\quad k = 3$

Con estas variables h y k, se calculara, las constantes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ y\ \boldsymbol{c},$ utilizando las coordenadas del foco y el vértice.

Foco
Utilizaremos las coordenadas del foco a la derecha , que se encuentra sobre el eje x.
$$F(h+c,k) F(0,3)$$
$$h + c = 0$$
$$c = -h$$
$$c = -(-1) = 1$$
$$c = 1$$

Vértice
Utilizando las coordenadas del vértice a la derecha para el eje mayor sobre x
$$V(h+a,k) V(2,3)$$
$$h + a = 2$$
$$a = 2 - h$$
$$a = 2 - (-1) = 2 + 1$$
$$a = 3$$

Luego:
$a = 3 \quad \rightarrow \quad a^2 = 9$
$c = 1 \quad \rightarrow \quad b^2 = 1$
$$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$$
$b^2 = 8 \quad \rightarrow \quad b = 2\sqrt{2}$

Sustituyendo los valores para la ecuación de la elipse con eje mayor sobre el eje x y con centro (h,k).
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{8} = 1$$

3. ***Dada una ecuación general o ecuación canonica, encontrar sus elementos:***

Con la ecuación canónica de la elipse nos facilita identificar con mayor facilidad las constantes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ y\ \boldsymbol{c},$ una vez reconocido estos valores los elementos restantes podrán ser calculados también con facilidad.
La ecuación canónica de la elipse se puede considerar como la fuente de información, que nos facilita la ubicación del eje mayor, eje menor, la ubicación de su centro, las coordenadas del vértice, su foco y eje menor y por su puesto la longitud de su lado recto

y su excentricidad, de otra manera si no se tiene la ecuación canónica, en caso de tener la ecuación general, se puede expresarla de esta forma con técnicas algebraicas, de manera de facilitar siempre las condiciones en que se encuentra la elipse en el plano, veamos unos ejemplo.

Ejemplo # 1 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$

Centro (0,0)

Eje mayor en x, $a^2 = 12 \quad \rightarrow \quad a = 2\sqrt{3}$

Eje menor en y, $b^2 = 9 \quad \rightarrow \quad b = 3$

Coordenadas del vértice $V(\pm 2\sqrt{3}, 0)$

Coordenadas del eje menor $B(0, \pm 3)$

Coordenadas de sus focos:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 12 - 9 = 3$$

$$c = \sqrt{3} F(\pm\sqrt{3}, 0)$$

Su lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{2\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{2(3)} = 3\sqrt{3}$

Su excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

Ejemplo # 2 $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$

Centro (0,0)

Eje mayor en x, $a^2 = 144 \quad \rightarrow \quad a = 12$

Eje menor en y, $b^2 = 36 \quad \rightarrow \quad b = 6$

Coordenadas del vértice $V(\pm 12{,}0)$

Coordenadas del eje menor $B(0, \pm 6)$

Coordenadas de sus focos:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 144 - 36 = 108$$

$$c = 6\sqrt{3} F(\pm 6\sqrt{3}, 0)$$

Su lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(6)^2}{12} = \frac{72}{12} = 6$

Su excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejemplo # 3 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$

Centro (0,0)

Eje mayor en x, $a^2 = 49 \quad \rightarrow \quad a = 7$

Eje menor en y, $b^2 = 36 \quad \rightarrow \quad b = 6$

Coordenadas del vértice $V(0, \pm 7)$

Coordenadas del eje menor $B(\pm 6{,}0)$

Coordenadas de sus focos:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 36 = 13$$

$$c = \sqrt{13} F(0, \pm\sqrt{13})$$

Su lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(49)}{7} = \frac{98}{7} = 14$

Su excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{7}$

Ejemplo # 4 $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

Centro $(-2,1) h=-2 \quad k=1$

Eje mayor en x, $a^2=36 \quad \rightarrow \quad a=6$

Eje menor en y, $b^2=4 \quad \rightarrow \quad b=2$

Coordenadas del vértice

$$V_1(h+a,k) V_2(h-a,k)$$
$$V_1(-2+6,1) V_2(-2-6,1)$$
$$V_1(4,1) V_2(-8,1)$$

Coordenadas del eje menor

$$B_1(h,k+b) B_2(h,k-b)$$
$$B_1(-2,1+2) B_2(-2,1-2)$$
$$B_1(-2,3) B_2(-2,-1)$$

Coordenadas de sus focos:

$$c^2=a^2-b^2=36-4=32 \quad \rightarrow \quad c=4\sqrt{2}$$
$$F_1(h+c,k) F_2(h-c,k)$$
$$F_1\left(-2+4\sqrt{2},1\right) F_2\left(-2-4\sqrt{2},1\right)$$

Su lado recto: $\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(4)}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

Su excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Su gráfica:

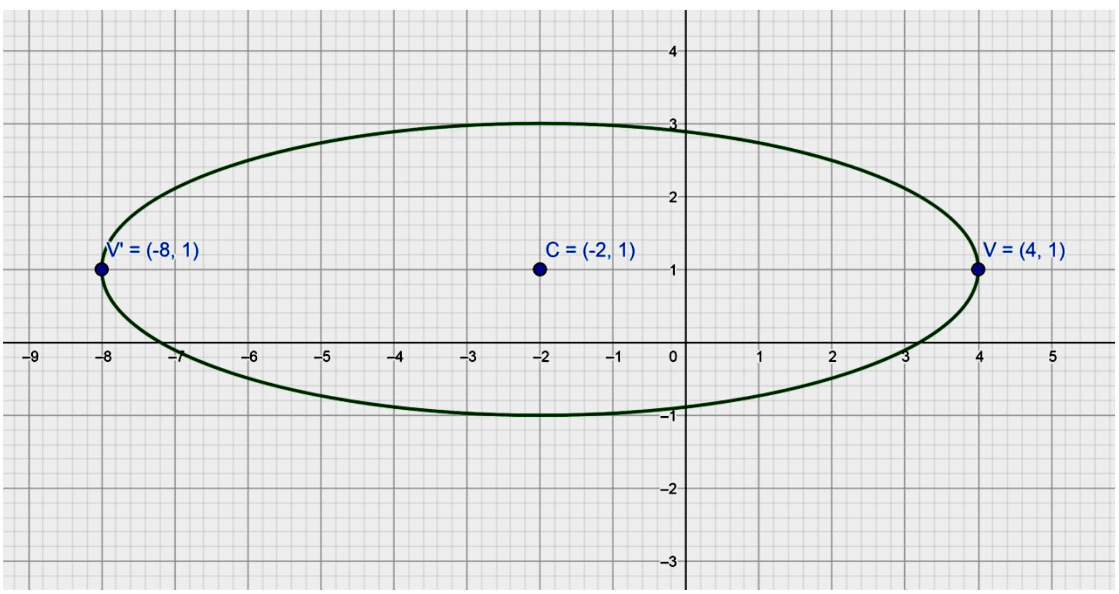


Figura 104

De acuerdo a los datos del problema, la gráfica de $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$, tendría centro $(-2,1)$ y eje mayor sobre x.

La condición de iniciar por la ecuación canónica, facilita el aprendizaje de obtener con mayor facilidad los elementos de la elipse, con el uso de las herramientas algebraicas. Una vez calculado todos su características podemos concluir haciendo la gráfica de la ecuación.
En tal caso de no tener la ecuación canónica de la elipse, como lo es la ecuación general, se opta por completar cuadrados para expresar la ecuación de esta manera:

Ejemplo # 5
Sea la ecuación general $2x^2 + 3y^2 - 8x - 18y + 29 = 0$.

$$2x^2 - 8x + 3y^2 - 18y = -29$$

Asociando las x e y, termino libre al otro lado.

$$2(x^2 - 4x) + 3(y^2 - 6x) = -29$$

Factor izando por agrupación de término.

$$2\left[x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 3\left[y^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] = -29 + 8 + 27$$

Completando cuadrados, sin alterar la ecuación.

$$2(x-2)^2 + 3(y-3)^2 = 6$$

Factorizando trinomio.

$$\frac{2(x-2)^2}{6} + \frac{3(y-3)^2}{6} = \frac{6}{6}$$

Simplificando por 6

$$\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1$$

Obtenemos la ecuación canónica.

Una vez obtenemos la ecuación canónica, podemos volver a determinar todos sus elementos.

G. La hipérbola

A partir de un cono circular recto, si el plano es paralelo al eje, se obtienen dos curvas llamada hipérbola.

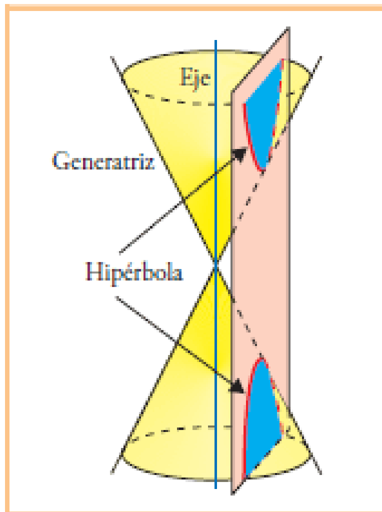


Figura 105

Definición:
La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos fijos llamados focos es constante e igual 2a.

Por ahora podemos optar por dibujar la hipérbola con una cuerda y una regla para mostrar la diferencia de distancia como lo dice la definición, sobre el plano.

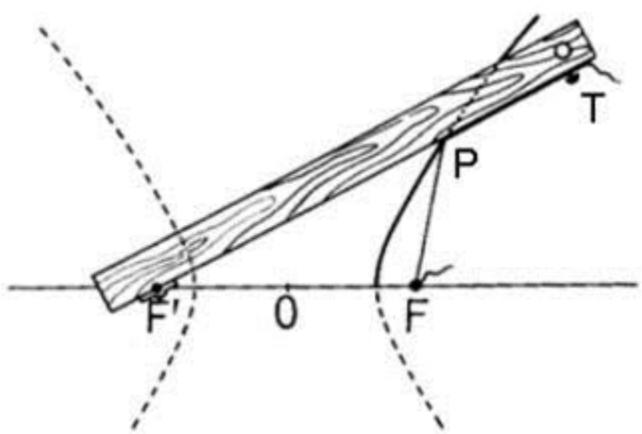


Figura 106

A partir de dos focos sobre el eje x, podemos trazar la hipérbola que describe el punto en movimiento cumpliendo la definición de diferencia de distancia entre estos dos puntos.

Otra manera de trazar la hipérbola es con ayuda de un software avanzado, que pude dibujar a partir de dos elementos de la hipérbola, un foco y un vértice. En la siguiente figura el software utilizado para el trazo de hipérbolas es el ***GeoGebra*** en línea, que además de hacer figuras cónicas, también es una herramienta de graficas de 3D.

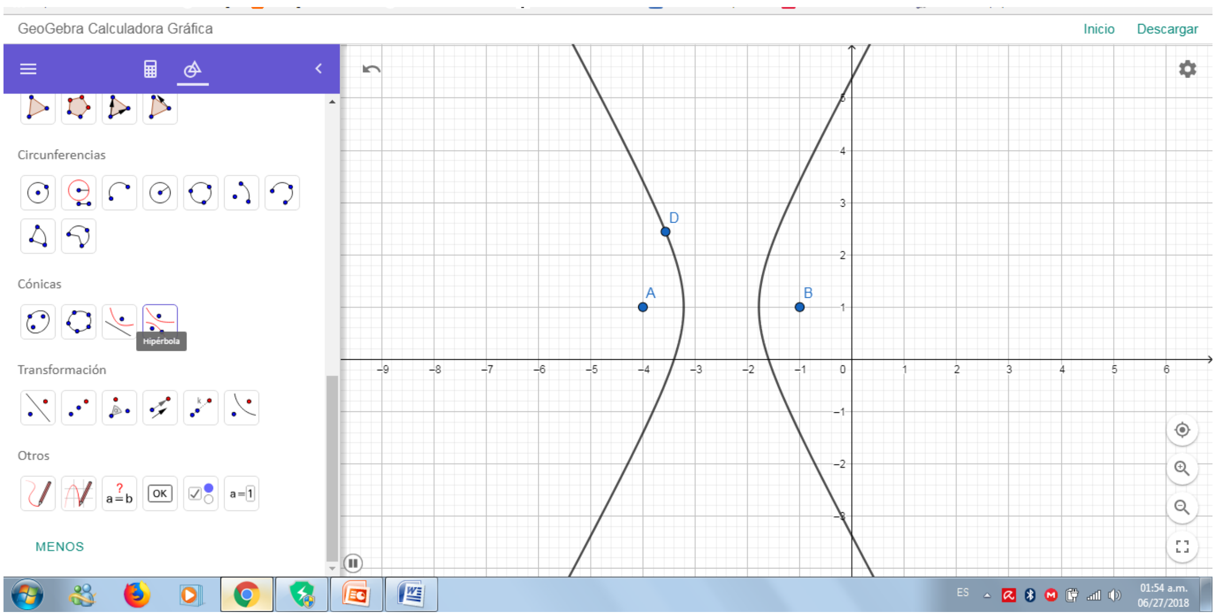


Figura 107

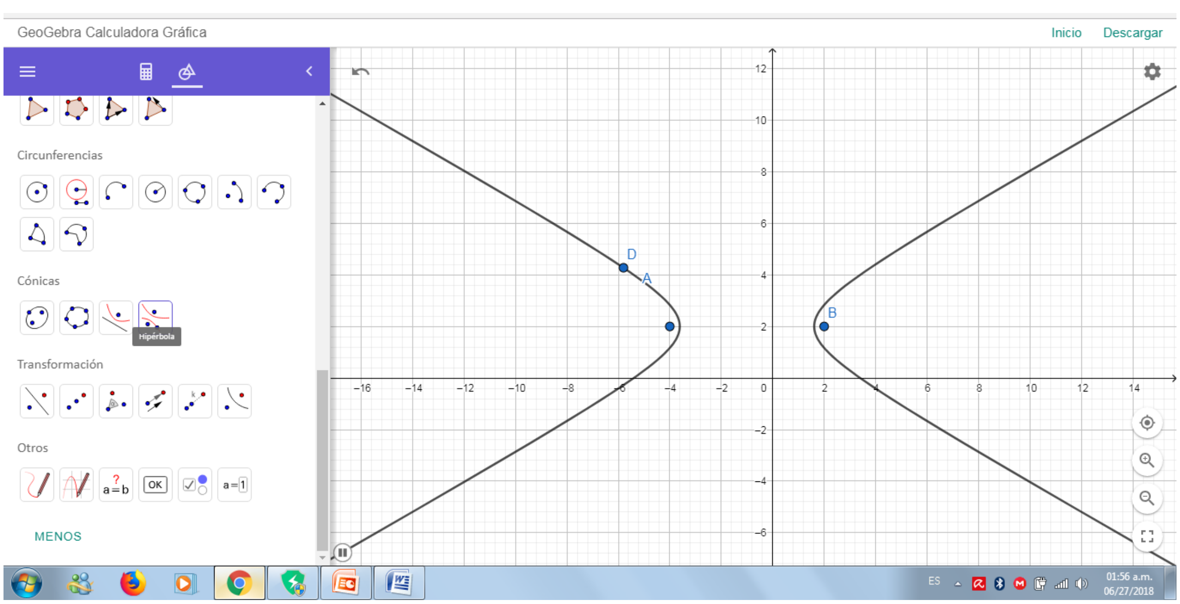


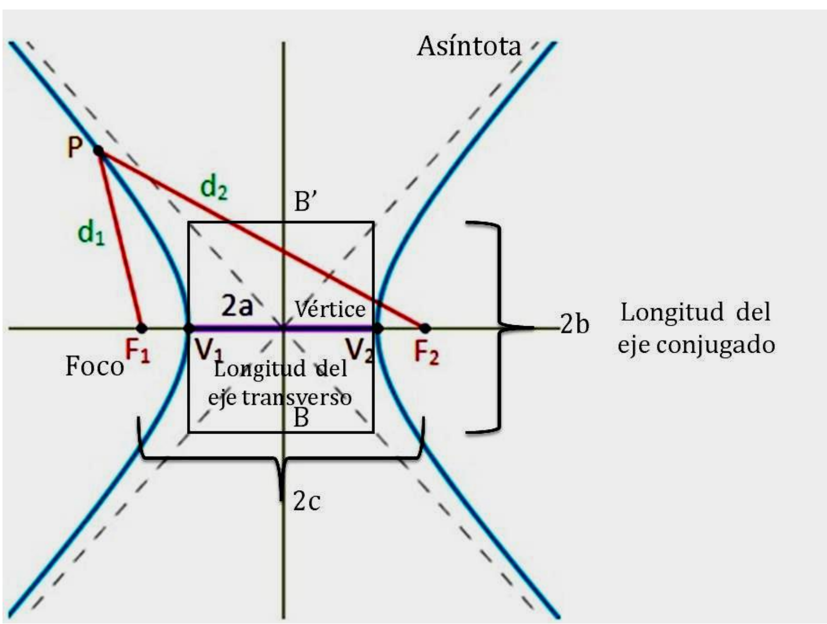
Figura 108

Con uso de este software, también es útil realizar las representaciones graficas de cualquier hipérbola, ya que de las secciones cónicas, esta podría mencionarse como una de las más complejas por el número de elementos que asocia en la gráfica. A continuación veamos los elementos que conforma la hipérbola.

Elementos de la hipérbola:

- Focos: Son los puntos fijos F y F'.
- Distancia focal: Es la longitud entre los focos $\overline{FF'}$ y se designa por $2c$.
- Centro: Es el punto medio entre los dos focos y los dos vértices.
- Vértices: Son las intersecciones de las curvas sobre el eje focal, puede ser x e y.
- Eje focal: Recta que pasa por los dos focos.
- Eje transverso: Segmento con extremos en los vértices de la hipérbola.
- Lado recto: Segmento perpendicular al eje focal que pasa por un foco y que une a dos puntos de la hipérbola.
- Eje normal: Recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la hipérbola.
- Eje conjugado: Segmento perpendicular al eje transverso que pasa por el centro de la hipérbola; sus puntos extremos son B y B'.
- Asíntotas: Son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola, las cuales se aproximan a las ramas de la hipérbola sin tocarla y se extiende indefinidamente.

Figura 109



Relación de las constantes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

Para todas las asíntotas simétricas con eje $\boldsymbol{x}$ o el eje $\boldsymbol{y}$, se cumplirá la siguiente relación.

- La longitud del eje transverso es igual a $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$.
- La longitud del eje conjugado será $\mathbf{2}\boldsymbol{b}$.

- Las distancias de a, b y $c$también sigue teorema de Pitágoras, al formarse un triángulo rectángulo con las longitudes del eje transverso y conjugado:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

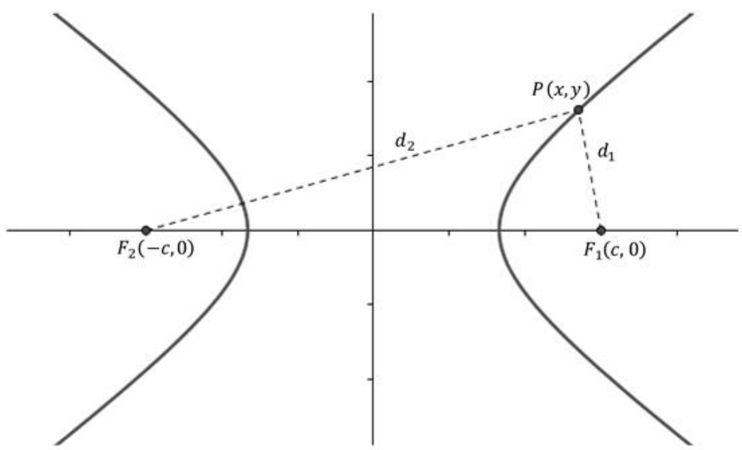
- La longitud de cada lado recto esta dad por $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$.
- La excentricidad se define como $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, $e > 1$.

Volviendo a la definición de excentricidad, es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia.
Este es un parámetro importante en la definición de elipse, hipérbola y parábola.
Veamos la descripción de este parámetro para cada sección cónica:

✓ La excentricidad de una circunferencia es 0 $(e = 0)$.
✓ La excentricidad de una elipse es mayor que cero y menor que 1 $(0 < e < 1)$.
✓ La excentricidad de una parábola es 1 $(e = 1)$.
✓ La excentricidad de una hipérbola es mayor que 1 $(e > 1)$.

Siguiendo la definición "La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos fijos llamados focos es constante e igual 2a", vamos a determinar la ecuación de la hipérbola con eje transverso sobre el eje x.

Figura 110



$$d_2 - d_1 = 2a$$
$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$\left[\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right]^2 = \left[2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2$$
$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$
$$2xc + 2xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$
$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$
$$x^2c^2 - x^2a^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$
$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$
$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Remplazando $c^2 - a^2$ por el teorema de Pitágoras.

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

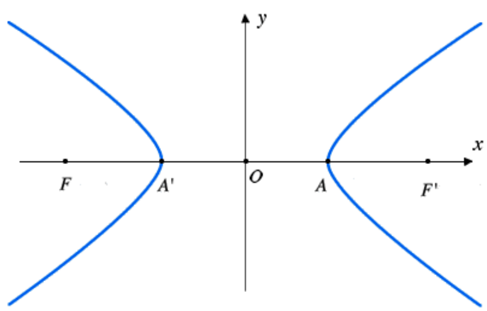
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

En la ecuación dela hipérbola, vista en la demostración , es para la condición de centro en el origen y con eje transverso sobre el eje x, a continuación veamos los otros casos de la hipérbola, para cuando su eje transverso se encuentra sobre el eje y, y las otras dos para centro (h, k) y ejes transversos sobre el eje x e y.

Figura 111

Eje transverso x

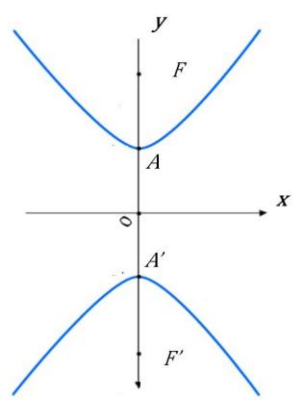
Centro (0,0)



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

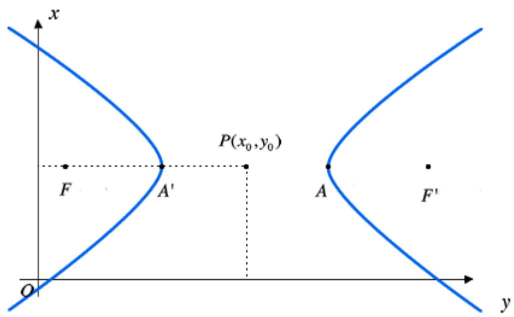
Figura 112

Eje transverso y



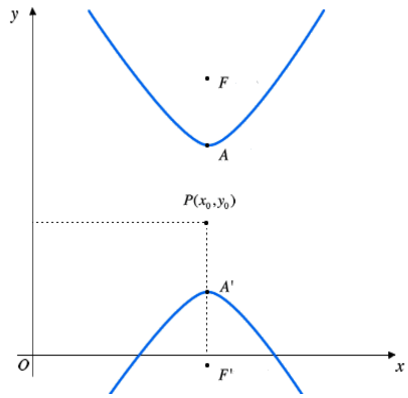
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Centro
(h, k)



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Figura 113



$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Figura 114

❖ ***Objetivos para la enseñanza de la hipérbola***

- Identificar los elementos de la hipérbola.
- Hallar la ecuación de la hipérbola cuando se conoce algunos elementos.
- Graficar la hipérbola a partir de su ecuación.
- Determinar los elementos de la hipérbola con centro en el origen o centro en (h, k).

El aprendizaje de la hipérbola y de las otras demás secciones cónicas requieren primeramente de la observación e identificación de los elementos de la hipérbola, una vez se conoce la ubicación, la dirección donde abre la hipérbola (Hacia la derecha e izquierda o de arriba hacia abajo), su centro y el trazo de las asíntotas, se logra manipular las variables que requieren el cálculo de la ecuación de la hipérbola.

Identificar los elementos de la hipérbola

A partir de las siguientes graficas identifiquemos los elementos de la hipérbola, visibles en la figura.

Ejemplo # 1:

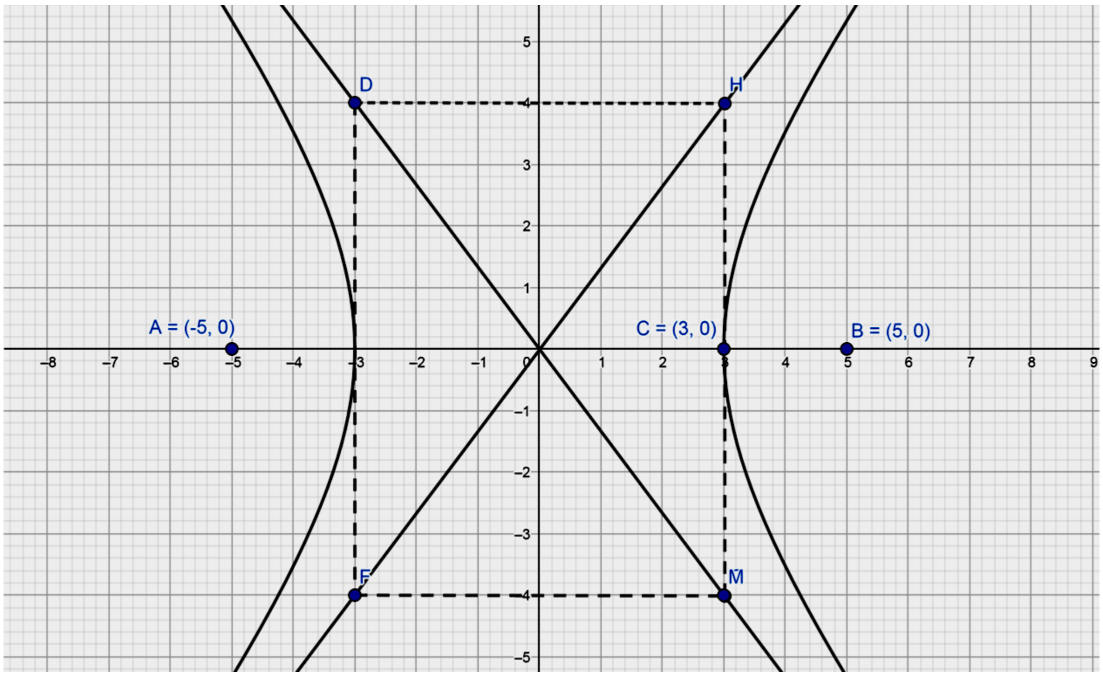


Figura 115

De acuerdo a la gráfica:
Tiene centro (0,0)
Eje transverso en x, $a = 3 \quad \rightarrow \quad a^2 = 9$
Eje conjugado en y, $b = 4 \quad \rightarrow \quad b^2 = 16$
Coordenadas del vértice $V(\pm 3{,}0)$
Coordenadas del eje conjugado $B(0, \pm 4)$
Coordenadas de sus focos:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25, \qquad c = \sqrt{25} \qquad F(\pm 5{,}0)$$

La ecuación que describe esta hipérbola es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por lo tanto sustituyendo los valores de las constantes a y b en la ecuación se tiene:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Ejemplo # 2:

Veamos un ejemplo para cuando la hipérbola tiene centro en (h,k).

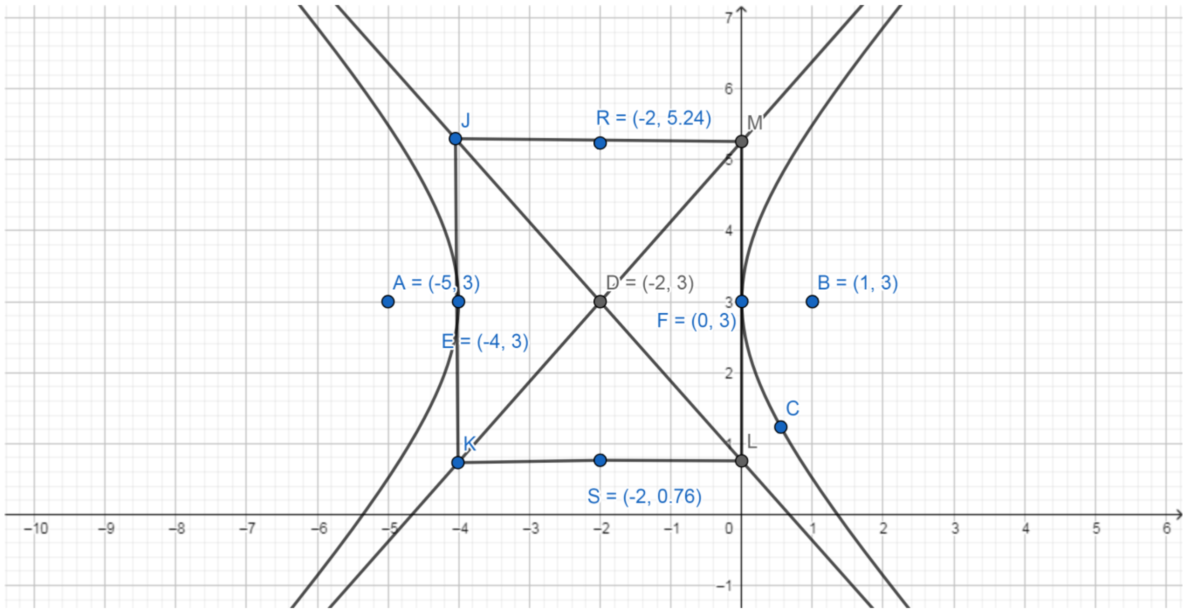


Figura 116

De acuerdo a las condiciones del problema podemos comenzar reconociendo su centro (h,k) con valores de $(-2,3)$, luego podemos identificar su eje transverso donde se pronuncia la hipérbola, en este ejemplo, su eje transverso se encuentra sobre el eje x y su eje normal sobre el eje y. Luego:

De acuerdo a la gráfica:
Tiene centro $(-2,3)$ $\quad h = -2 \quad y \quad k = 3$

Eje transverso en x, para determinar $a =?$ utilizaremos las coordenadas del vértice de una hipérbola cuando su eje transverso esta sobre x.

$$\boldsymbol{V(h + a, k)}$$

$V(0,3)$ luego $h + a = 0$ y ahora sustituyendo h, $-2 + a = 0$

$$\boldsymbol{a = 2}$$

Utilizando el mismo razonamiento, podemos determinar la constante **c** con las coordenadas del foco.

$$\boldsymbol{F(h + c, k)}$$

$F(1,3)$ luego $h + c = 1$ y luego sustituyendo h, $-2 + c = 1$

$$\boldsymbol{c = 3}$$

Una vez determinado los valores de a y de c, calcularemos el valor de b, para las coordenadas de eje conjugado.

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b^2 = (3)^2 - (2)^2$$
$$b^2 = 5 \quad \rightarrow \quad b = \pm\sqrt{5}$$

Una vez se tiene las constantes correspondiente podemos buscar la ecuación de la hipérbola.

Coordenadas del vértice $V(\pm 3{,}0)$
Coordenadas del eje conjugado $B(0, \pm 4)$
Coordenadas de sus focos:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25, \qquad c = \sqrt{25} \qquad F(\pm 5{,}0)$$

La ecuación que describe esta hipérbola es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Por lo tanto sustituyendo los valores de las constantes a y b en la ecuación se tiene:

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$$

Una vez encontrado la ecuación de la hipérbola se finaliza, calculando las ecuaciones del as asíntotas.

E. 1

$$\frac{x+2}{2} - \frac{y-3}{\sqrt{5}} = 0$$
$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5} = 2y - 6$$
$$\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{5}}{4}x + \frac{\sqrt{5}+6}{2}}$$

E. 2

$$\frac{x+2}{2} + \frac{y-3}{\sqrt{5}} = 0$$
$$\frac{x+2}{2} = -\frac{y-3}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5} = -2y + 6$$
$$\mathbf{y = -\frac{\sqrt{5}}{4}x + \frac{6-\sqrt{5}}{2}}$$

Conclusiones

El objetivo de este proyecto es mostrarle una pequeña parte de la geometría Analítica, enfocado en las secciones cónicas, desde la historia que dio origen al desarrollo de las secciones cónicas como la conocemos, entre ellas la parábola, la circunferencia, la elipse y la hipérbola. De manera que se muestra un recorrido histórico de grandes pensadores, buscando una solución a uno de los tres problemas clásicos y luego interpretando la geometría espacial (secciones cónicas) en pequeñas ecuaciones que describirían una solución, gracias a Menecmo, Apolonio entre otros matemáticos buscaron arduamente una solución a la cuadratura del círculo.

Gracias a recursos bibliográficos se logra recopilar el desarrollo de las secciones cónicas. De aquí se menciona a cada uno de los matemáticos que dio avance al estudio de las secciones cónicas hasta uno de los grandes pensadores que logra conectar la geometría plana y espacial con el álgebra, dando así un salto gigantesco que logra cautivar a mas matemáticos a continuar el trabajo de René Descartes en el campo del cálculo.

Con este trabajo de Descartes de conectar el álgebra con la geometría y viceversa nos lanzamos a estudiar detalladamente la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola logrando éxitos en conocer todas sus características desde plano. Gracias a esto también se logra estudiar cualquier curva en el plano, pero este trabajo no hace énfasis en las demás curvas pero si se puede realizar proyectos posteriores que enriquezca las fuentes bibliográficas académicas que mejoren la investigación y la enseñanza.

A fin de conocer el desarrollo de las secciones cónicas desde sus inicios, también se muestra la enseñanza de las secciones cónicas con recursos ilustrativos y metodológicos, para el aprendizaje de la parábola, la circunferencia, la elipse y la hipérbola, con demostración y técnica de enseñanzas que logre el fácil aprendizajes de las mismas. De esta manera puedo decir que este trabajo será uno de los más completos en cuanto a las secciones cónicas desde su evolución histórica hasta la parte académica en lograr un método de enseñanza de las secciones cónicas.

Recomendaciones

De acuerdo a la magnitud del trabajo de realizar un estudio del desarrollo de las secciones cónicas como una pequeña parte de las secciones cónicas, es recomendable continuar con el estudio de las demás curvas en el plano, comenzando desde las ecuaciones cubicas.

Entre otras de las recomendaciones más importantes, es suplir de recursos didácticos las aulas de clases de todas las escuelas de Panamá desde una regla y un compás, hasta plataformas digitales y multimedia, para de esta manera darle motivación a los estudiantes de decimo, undécimo y duodécimo grado y por supuesto a los docentes que dictan estas clases de geometría. De esta manera se estaría mejorando la calidad de enseñanza de las matemáticas en las aulas de clases y no continuar como una de las materias abstractas que afligen a algunos estudiantes.

Bibliografía

Libros

Carl B. Boyer. (1969). Historia de la matemática. Sao Paulo, Brasil. Universidad de Sao Paulo.

Jean Paul Collette. (1993). Historia de la matemática Volumen I . España. Editores S.A siglo XXI.

Jean Paul Collette. (1993). Historia de la matemática Volumen II. España. Editores S.A siglo XXI.

Levi S. Shively. (1984). Introducción a la Geometría Moderna. De C.V México. Editorial Continental.

Edwin Emoise, Floyd Dow. (1972). Serie IV Matemática Moderna. Cali, Colombia: Norma.

Ángel Ruiz, Hugo Barrantes. (1997). Elementos de cálculo Diferencial. San José, Costa Rica: Universidad de Costa Rica.

Juan Antonio Cuéllar. (2005). Matemática III para bachillerato. Punta Santa Fe, México. McGraw-Hill Interamericana.

Barnett Rich. (1991). Geometría. México. McGraw-Hill Interamericana.

G Fuller y D Tarwater. (1995). Geometría Analítica. México: Eddison Wesley.

Diana L.De Lajòn, Ricardo Lajòn. (2005). Álgebra y Trigonométrica con Geometría Analítica. Panamá: Scintech, S.A.

Joseph H. Kindle. (2007). Geometría Analítica. México: McGraw-Hill Interamericana.

Arturo Aguilar M., Fabián Bravo V., Herman Gallegos R. Miguel Cerón V., Ricardo Reyes F.. (2016). Geometría, Trigonométrica y Geometría Analítica. México: PEARSON EDUCACIÒN

Ángel Ruiz, Hugo Barrantes. (1997). Elementos de Calculo Diferencial, Historia y ejercicios resueltos. Costa Rica: Universidad de Costa Rica.

Dr. Roberto Hernández Sampieri, Dr. Carlos Fernández Collado, Dra. María del pilar baptista lucio. (2010). Metodología de la investigación. Mexico: McGraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. DE C.V

Artículos de páginas web

Miguel Martín Suarez. (2008). orígenes del Calculo Diferencial e Integral. 2017, de universidad de Granada Sitio web: http://www.ugr.es/~mmartins/material/historia_matematica_origenes_calculo.pdf

Pedro Miguel Gonzales Urbaneja. (2007). orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. 2017, de fundación Canarias Sitio web: http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pd

Raúl Ibáñez Torres. (2002). Secciones Cónicas. 2017, de Universidad del País Vasco Sitio web: https://www.researchgate.net/publication/28067212_Secciones_conicas

Javier Ignacio Lugo. (2014). Secciones cónicas: un estudio epistemológico y el análisis de su tratamiento en libros de texto. 2017, de Universidad Nacional General Sarmiento Sitio web: http://www.ungs.edu.ar/ms_idh/wp-content/uploads/2014/10/SECCIONES-C%C3%93NICAS.-Un-estudio-epistemol%C3%B3gico-y-el-an%C3%A1lisis-de-su-tratamiento-en-los-libros-de-textos.pd

Ada Caneva. (2014). Curvas Cónicas . 2017, de Universidad Tecnológica Nacional, Argentina Sitio web: http://www.fra.utn.edu.ar/catedras/algebra/lecturas/CONICAS.pdf

José M. Gonzales. (2015). Apolonio de Perga. Secciones Cónicas. 2017, de Universidad de la Laguna Sitio web: http://fundacionorotava.org/media/uploads/files/83/cap13_web.pdf

Pedro Alegría. (2016). las Secciones cónicas y sus aplicaciones. 2017, de Universidad del País Vasco Sitio web: https://www.google.com/search?rlz=1C2VSNC_enPA600PA600&biw=688&bih=332&ei=WDUBWsWNAsGMmQGrwb_IBw&q=las+conicas+y+sus+aplicaciones+por+pedro+alegria&oq=las+conicas+y+sus+aplicaciones+por+pedro+alegria&gs_l=psy-ab.3...94817.114283.0.114781.0.0.0.0.0.0.0.0..0.0....0...1.1.64.psy-ab..0.0.0....0.0ghthSn4yzk.

René Descartes. (2008). La géométrie. 1886, de Internet Archive Sitio web: https://archive.org/details/lagomtrie00descuoft

William Eduardo Calderón Gualdrón. (2014). Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas en el grado décimo de la institución educativa villas de san Ignacio de Bucaramanga.. 2013, de Universidad Nacional de Colombia facultad de Ciencias Medellín, Colombia Sitio web: http://www.bdigital.unal.edu.co/9463/1/91495767.2013.pdf

Sánchez Carlessi, H. y Reyes, C. (2012). Metodología de la investigación Científica. 1986, de blogspot Sitio web: http://tesis-investigacion-cientifica.blogspot.com/2013/08/justificacion-e-importancia-de.html