



UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y
TECNOLOGÍA
ESCUELA DE FÍSICA

Aplicación de los Símbolos de Christoffel en la Teoría Relativista

Tesis

Autor
Luis Afranchi

Profesor Asesor
Miguel Silvera

Segundo Semestre
2022

Índice general

1. Resumen	2
2. Introducción	3
2.1. Teoría Básica	3
2.2. Órbitas en la teoría clásica	4
2.2.1. Descripción de las Órbitas en 1D	7
2.3. Solución del Problema de Dos Cuerpos	12
3. Símbolos de Christoffel	14
3.1. Paralelismo y Métrica	14
3.1.1. Concepto de Paralelismo	14
3.1.2. Métrica	15
3.2. Vectores Covariantes y Contravariantes	17
3.3. Transformación de Bases	18
3.4. Conexión afín de una Variedad	19
3.5. Ejemplos de Símbolos de Christoffel	20
3.5.1. Espacio Plano	20
3.5.2. Superficie de una Esfera	21
4. Geodésicas	24
4.1. Longitud de una Curva en una variedad Riemanniana	24
4.2. Geodésicas por Principios de Mínima Longitud	26
4.2.1. Derivación de las geodésicas con un parámetro afín	27
5. Transporte paralelo	29
5.1. Cambio de base (Cartesiana-Esféricas)	29
5.2. Símbolos de Christoffel	31
5.2.1. Derivada Covariante	32
5.3. Derivada a través de una trayectoria	32
5.4. Transporte paralelo	33
5.5. Transporte Paralelo vs Geodésicas	34
5.5.1. Geodésicas en Términos de la Derivada Covariante	35
6. Órbitas en la Métrica de Schwarzschild	36
6.1. La Métrica de Schwarzschild	36
6.1.1. Paraboloide de Flamm	37
6.2. Ecuación de Movimiento para una Partícula Libre	39
6.2.1. Lagrangiano de una Partícula Libre	39

6.2.2.	Deducción de la Ecuación de Movimiento	40
6.2.3.	Límite Clásico	42
6.3.	Estudio de las Órbitas por medio del Potencial y la Energía	43
7.	Resultados	47
7.1.	Órbitas en la métrica de Schwarzschild	47
7.1.1.	Método Numérico	47
7.1.2.	Gráficas de los Diferentes Casos de acuerdo al Potencial	48
7.2.	Cálculo de los Símbolos de Christoffel	51
7.2.1.	Resultados	52
7.3.	Ecuación de las Geodésicas	53
7.3.1.	Método Numérico para las Geodésicas	54
7.3.2.	Resultados de las Geodésicas	55
8.	Conclusión y Recomendación	57
8.1.	Conclusión	57
8.2.	Recomendación	57

Índice de figuras

2.1.	Órbita (roja) recorrida por un cuerpo con masa m alrededor de una masa M (azul).	5
2.2.	Plano del movimiento del cuerpo m tal que \vec{L} sea paralelo al eje z .	6
2.3.	Gráfica del potencial $V(r)$ adimensionado. E toma el valor mínimo del potencial.	8
2.4.	Órbita circular para la energía E igual al mínimo del potencial $V(r)$ ($r = 1$, para magnitudes adimensionadas).	9
2.5.	Gráfica donde la energía E toma un valor mayor a la energía mínima, pero toca dos puntos (A y B) del potencial V .	10
2.6.	Movimiento del cuerpo m entre los puntos r_1 y r_2 .	10
2.7.	Movimiento orbital del cuerpo en el plano entre los puntos r_1 y r_2 formando una elipse.	11
2.8.	Movimiento orbital del cuerpo en el plano donde cumple $V(r \rightarrow \infty) = 0$, donde el cuerpo m toca el punto r una vez en su recorrido.	11
3.1.	Representación de un espacio tangente 2D a una superficie.[8]	15
3.2.	Esquema de dos vectores.	16
4.1.	Esquema de la curva en el espacio \mathbb{R}^2 .	25
4.2.	Solución mínima de la geodésica (curva negra) y una muy próxima (curva azul).	26
6.1.	Paraboloide de Flamm.	38
6.2.	Potencial V para $L^2 < 12$ donde se observa que toma la forma de una curva sin puntos críticos.	44
6.3.	Potencial V para $L^2 = 12$, y energía $\epsilon = V(r_f)$, donde solo existe el punto de inflexión.	45
6.4.	Potencial V para $L > 2\sqrt{3}$.	46
7.1.	Caso 1: $L < 2\sqrt{3}$, donde $L = 1$.	49
7.2.	Caso 2: $L = 2\sqrt{3}$	49
7.3.	Caso 3: $L > 2\sqrt{3}$, donde $L = 3,8$ para el potencial fuerte & $L = 10$ para el potencial débil.	50
7.4.	Diagrama de flujo para el ciclo <i>for</i> anidado.	51
7.5.	Resultado del programa que calcula los Símbolos de Christoffel para la métrica de Schwarzschild.	52
7.6.	Evolución en el tiempo del Caso 2.a.	55
7.7.	Evolución en el tiempo del caso 3.a para un $r_0 = 4,2522$.	56
7.8.	Evolución en el tiempo del caso 3.f.	56

Índice de tablas

6.1. Caso 1 - $L < 2\sqrt{3}$	45
6.2. Caso 2 - $L = 2\sqrt{3}$	45
6.3. Caso 3 - $L > 2\sqrt{3}$	46

Capítulo 1

Resumen

En este proyecto se va a estudiar el problema de dos cuerpos en la teoría de Newton y en la teoría de Relatividad General. Se va a aplicar los Símbolos de Christoffel para estudiar las Geodésicas, Paralelismos, Transporte Paralelo y aplicarlos en un programa computacional para resolver las EDO que describen las órbitas de un cuerpo en el espacio de Shwarzschild. Se logró estudiar la importancia y definiciones de los Símbolos de Christoffel, y las soluciones por métodos numéricos de las órbitas del cuerpo respecto a la energía y momento angular del mismo.

Capítulo 2

Introducción

La teoría de la Relatividad General de Einstein logró un cambio en el paradigma de la física, considerando que el espacio-tiempo es un ente activo en el universo. Este es afectado por los cuerpos que en se encuentran inmersos en el, y a su vez, los cuerpos son afectados por la geometría del espacio-tiempo.

Cómo el espacio-tiempo se ve modificado en presencia de materia y energía queda plasmado en las *Ecuaciones de Campo de Einstein*, y su primera solución exacta (que no sea la trivial en un espacio plano) fue dada por Karl Schwarzschild publicada un mes después de la publicación de la Teoría de la Relatividad General por Einstein.[1]

En este marco teórico, el movimiento de los cuerpos considera la curvatura del espacio-tiempo y busca minimizar la distancia entre puntos de la variedad (en un espacio cuatridimensional). Esta ecuación, como se verá en el trabajo, surge de principios variacionales y logrará ser simplificada gracias a herramientas matemáticas del cálculo variacional, dícese *Símbolos de Christoffel*, *Transporte Paralelo de un vector* y *Derivada Covariante*.

En este trabajo, se va a buscar entender conceptos claves de manera didáctica, pero sin perder formalidad, referentes a la teoría de la relatividad general; además, usaremos los modelos matemáticos de este sistema teórico para estudiar fenómenos físicos usando este *nuevo paradigma*. Se resaltarán la diferencia con respecto al marco clásico, su alcance y limitaciones.

2.1. Teoría Básica

Se darán conceptos claves de la geometría diferencial, centrándose en definiciones importantes para la teoría de la geometría Riemanniana que serán herramientas vitales para el proyecto[2].

Se tiene que entender qué es una variedad y qué significa construir una variedad diferenciable. Para esto, planteamos las siguientes definiciones

Definición 1 (Variedad). Una variedad es un objeto geométrico estándar en matemática que generaliza la noción intuitiva de curva y de superficie a cualquier dimensión y sobre cuerpos diversos.[3] De manera sencilla, una variedad es una colección de puntos, tal que

$$\{p = (x_1, x_2, \dots), x_n : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}$$

donde n es la dimensión de la variedad, y \mathbb{K} el cuerpo donde se construye la variedad.

Esta definición hace una diferencia entre un espacio vectorial y una variedad, donde un espacio vectorial es un conjunto de elementos denominados vectores, que cumplen ciertas características específicas. Hacer esta distinción es importante ya que de manera general, muchas variedades no tienen una estructura de espacio vectorial.[4]

Definición 2 (Variedad Diferenciable). Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones biunívoca $x_\alpha : U_\alpha \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abiertos U_α de \mathbb{R}^n en M tales que,

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$
2. Para todo par α, β , con $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ y $x_\beta^{-1}(W)$ son abiertos en \mathbb{R}^n y las aplicaciones x_α^{-1} y x_β^{-1} son diferenciables.
3. La familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ es máxima relativamente a las condiciones 1 y 2.

2.2. Órbitas en la teoría clásica

Se va a desarrollar cómo se estudia el movimiento orbital de un cuerpo alrededor de otro, desde el marco Newtoniano, para entender el alcance y limitaciones que tiene este modelo teórico en comparación con la teoría de la Relatividad de Einstein.

Las aplicaciones de los *Símbolos de Christoffell*, en física, son muy diversas. En la Teoría de la Relatividad de Einstein, como se verá a lo largo de este proyecto, es una herramienta, no solamente muy útil, sino necesaria para describir fenómenos y propiedades en sistemas reales.

Una de las aplicaciones fundamentales de la teoría de la relatividad general es describir el movimiento de los cuerpos, por ejemplo, alrededor de un astro masivo (estrella, agujero negro, planetas, etc.). Para entender cómo la Teoría de Relatividad logra explicar propiedades reales de las órbitas que en el marco clásico no logra describir, primero se desarrollará la descripción de las órbitas con la Teoría Clásica de Newton.

Consideremos el movimiento de un cuerpo alrededor de otro (figura 2.1) con las siguientes propiedades:

- Un cuerpo con masa M en equilibrio, esto es que está en reposo y momento angular nulo.
- El cuerpo que orbita tiene una masa m muy pequeña comparada con el cuerpo en equilibrio.

Aplicando la Ley de la Gravitación Universal de Newton para hallar la fuerza que ejerce un cuerpo sobre otro, junto con La Segunda Ley de Newton, verificamos que[5]



Figura 2.1: Órbita (roja) recorrida por un cuerpo con masa m alrededor de una masa M (azul).

$$\begin{aligned}
 F &= ma \\
 -G \frac{Mm}{r^2} &= m \frac{dv}{dt} \\
 - \int G \frac{Mm}{r^2} dr &= \int m v dv \\
 G \frac{Mm}{r} + E &= \frac{1}{2} m v^2
 \end{aligned}$$

Así, definimos la energía como:

$$E = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.2.1)$$

Ahora, consideremos el momento angular \vec{L} del cuerpo m , que se define como,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

Por la simetría del sistema, esta cantidad se conserva,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt} \vec{r} \times m \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt} m \vec{v} \\
 &= \vec{v} \times m \vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d}{dt} \vec{v}
 \end{aligned}$$

Aplicando la segunda ley de Newton para el último término, se obtiene que,

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{r} \times -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} = 0 \quad (2.2.2)$$

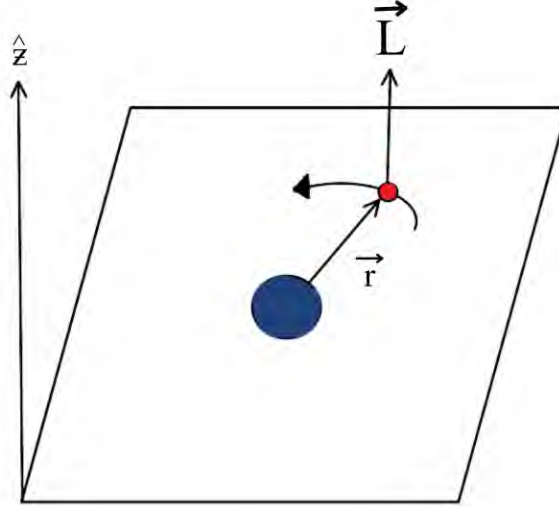


Figura 2.2: Plano del movimiento del cuerpo m tal que \vec{L} sea paralelo al eje z .

Así, \vec{L} es constante. Se opta agarrar un plano tal que $\hat{z} \parallel \vec{L}$ (figura 2.2), y por tanto,

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= (r_x, r_y, 0) \\
 \vec{v} &= (v_x, v_y, 0) \\
 \vec{L} &= (0, 0, L_z) \\
 L_z &= xp_y - yp_x
 \end{aligned}
 \tag{2.2.3}$$

Ahora, haciendo un cambio de coordenadas a polares (para aprovechar la simetría del sistema):

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \phi \\
 y &= r \sin \phi
 \end{aligned}$$

y, para encontrar la velocidad, derivamos con respecto al tiempo,

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{dx}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt} (r \cos \phi) \\
 &= \frac{dr}{dt} \cos \phi + r \frac{d}{dt} \cos \phi \\
 &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi
 \end{aligned}$$

Análogamente, para la componente en y :

$$v_y = \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi$$

Para el momento angular,

$$\begin{aligned}
 L &= xp_y - yp_x \\
 &= m \left[r \cos \phi \left(\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \right) - r \sin \phi \left(\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \right) \right] \\
 &= m \left(r^2 \dot{\phi} \cos^2 \phi + r^2 \dot{\phi} \sin^2 \phi \right)
 \end{aligned}$$

Así, la magnitud del momento angular es,

$$L = mr^2\dot{\phi} \quad (2.2.4)$$

La magnitud de la velocidad,

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = (\dot{r}c - r\dot{\phi}\sin\phi)^2 + (\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi)^2 \\ &= \dot{r}^2\cos^2\phi - 2\dot{r}r\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi \\ &\quad \dot{r}^2\sin^2\phi + 2\dot{r}r\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi + r^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Por tanto, la energía tiene la forma,

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - G\frac{Mm}{r} \quad (2.2.5)$$

2.2.1. Descripción de las Órbitas en 1D

Se suele usar un truco para poder estudiar los distintos tipos de órbitas de acuerdo a la energía E del cuerpo m , y la forma del potencial (ecuación 2.2.5). [6]

Aplicando la ecuación 2.2.4, se tiene que,

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L}{mr^2} \\ E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 - G\frac{Mm}{r} \end{aligned}$$

Y, por tanto, la energía tendrá la forma,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} \quad (2.2.6)$$

El truco que se logró realizar es reducir el problema a una dimensión (r).

Se observa que la energía (ecuación 2.2.6) es la suma de la energía cinética, más la potencial, donde

$$\begin{aligned} E &= E_c + V \\ V &= \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} \end{aligned}$$

Para estudiar la forma de la energía, y las propiedades de las órbitas de los cuerpos en este sistema, adimensionemos las magnitudes, como sigue,

$$L = m = G = 1$$

Así, el potencial es,

$$V = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r} \quad (2.2.7)$$

Se pasa a estudiar los distintos casos que describe la teoría de Newton.

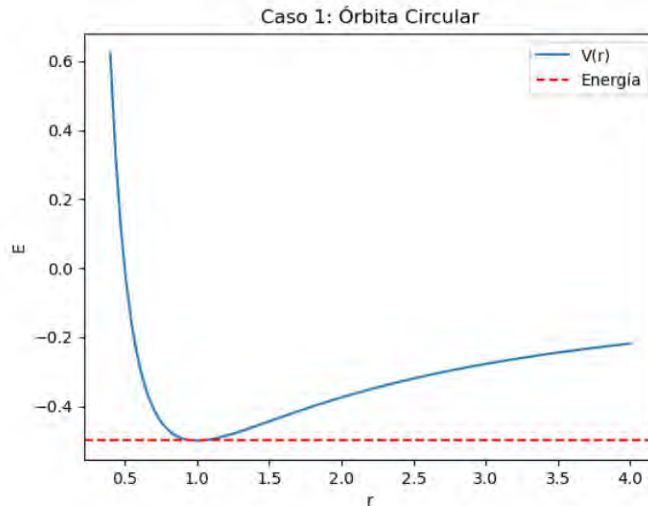


Figura 2.3: Gráfica del potencial $V(r)$ adimensionado. E toma el valor mínimo del potencial.

Caso 1 (Órbita Circular). Supongamos que la energía E es la mínima del potencial, para hallar este valor, usemos la derivada del potencial,

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{2} [r^{-2}]' - [r^{-1}]' \\ &= \frac{1-2}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} \end{aligned}$$

Buscando el extremo de la función, el mínimo valor que toma (ver figura 2.3),

$$\begin{aligned} V'(r_{min}) &= \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} = 0 \\ \frac{1-r}{r^3} &= 0 \\ r_{min} &= 1 \end{aligned}$$

Así, la energía es,

$$\begin{aligned} E(r_{min}) &= \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{2} - 1 \\ E(1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $r = 1$, entonces,

$$\dot{r} = 0$$

Y, de la ecuación de la energía E en 2D (2.2.5),

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - G\frac{Mm}{r}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - 1$$

$$\dot{\phi}^2 = 1$$

$$\dot{\phi} = 1$$

Se optó por la velocidad angular positiva. Ahora resolviendo la ecuación diferencial para $\dot{\phi}$,

$$\frac{d\phi}{dt} = 1$$

$$d\phi = dt$$

$$\phi = \int dt$$

$$\phi(t) = t + \phi_0$$

Así, para $r = 1$, evidentemente se tiene que la órbita es circular (figura 2.4).

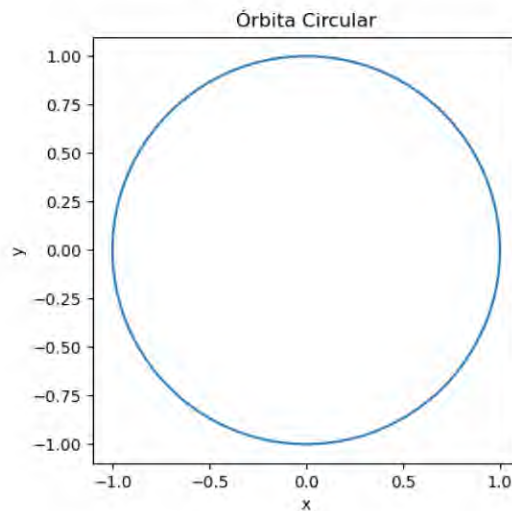


Figura 2.4: Órbita circular para la energía E igual al mínimo del potencial $V(r)$ ($r = 1$, para magnitudes adimensionadas).

Caso 2. Si se toma una energía mayor al mínimo, por ejemplo $E = -3/8$ (ver figura 2.6, entonces la energía toca dos puntos al potencial. Usando la ecuación 2.2.7, se encuentra que,

$$r_1 = \frac{2}{3}, \quad \& \quad r_2 = 2$$

Como la energía no llega a ser mayor que el potencial en estos dos puntos, el movimiento orbital se lleva a cabo en la región comprendida por estos. En la siguiente imagen, tenemos una representación esquemática de cómo se realiza el movimiento.

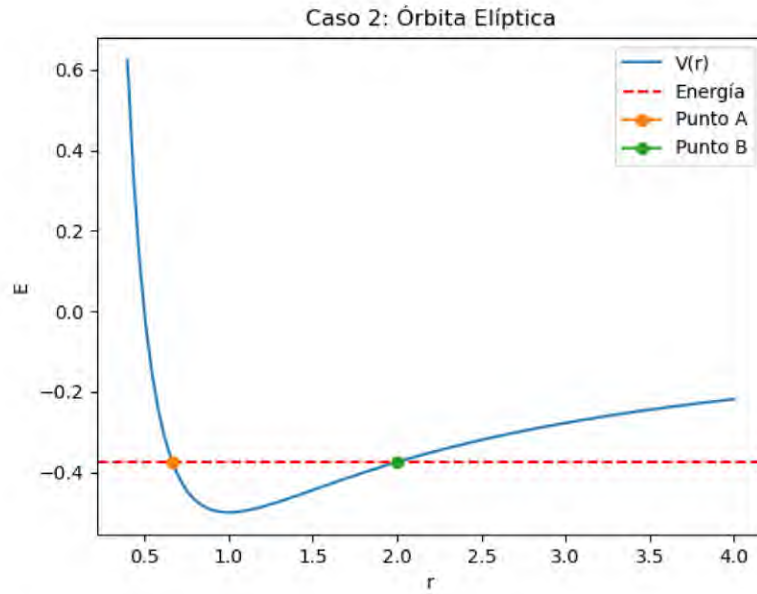


Figura 2.5: Gráfica donde la energía E toma un valor mayor a la energía mínima, pero toca dos puntos (A y B) del potencial V .

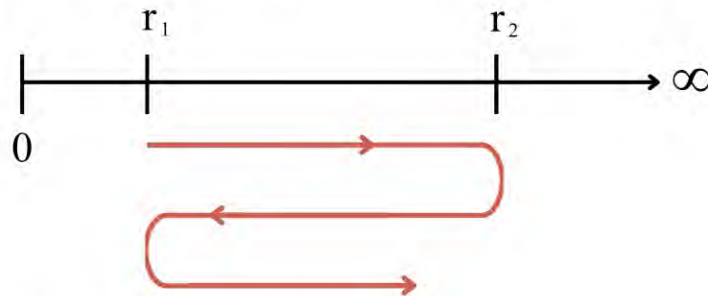


Figura 2.6: Movimiento del cuerpo m entre los puntos r_1 y r_2 .

Usando la ecuación 2.2.6 para la energía,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$$

Vemos que para estos dos puntos, la energía E es totalmente energía potencial, por tanto la velocidad radial es nula, $v_r = 0$, pero para otro punto, por ejemplo $r = 1$, donde $V(1) = -1/2$, se obtiene que,

$$\dot{r} = \frac{1}{2}$$

Evidentemente, el movimiento que toma el cuerpo en el plano es una elipse (figura 2.8).

Caso 3. Por último, si el potencia del cuerpo cumple que,

$$V(r \rightarrow \infty) = 0 \tag{2.2.8}$$

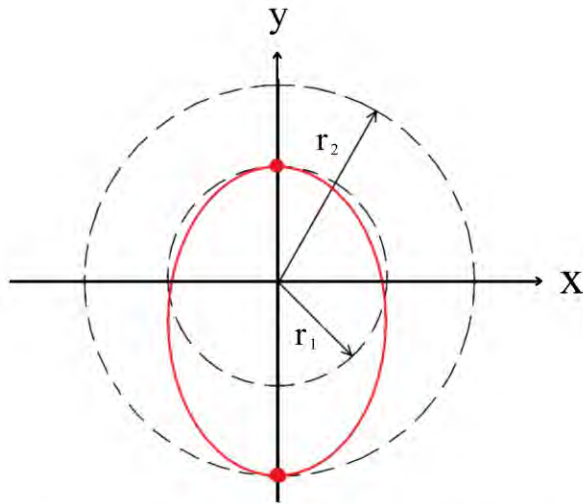


Figura 2.7: Movimiento orbital del cuerpo en el plano entre los puntos r_1 y r_2 formando una elipse.

Las trayectorias evidentemente son parabólicas o hiperbólicas. Verbigracia, para un $E = 1/4$, aplicando la ecuación 2.2.7, se obtiene,

$$r = 3 + \sqrt{6}$$

Así, el cuerpo m toca el punto r una vez en su trayectoria y se aleja de la masa M , y como $\dot{\phi}$ es proporcional a r^{-2} , en ese punto la rapidez angular toma el mayor valor.

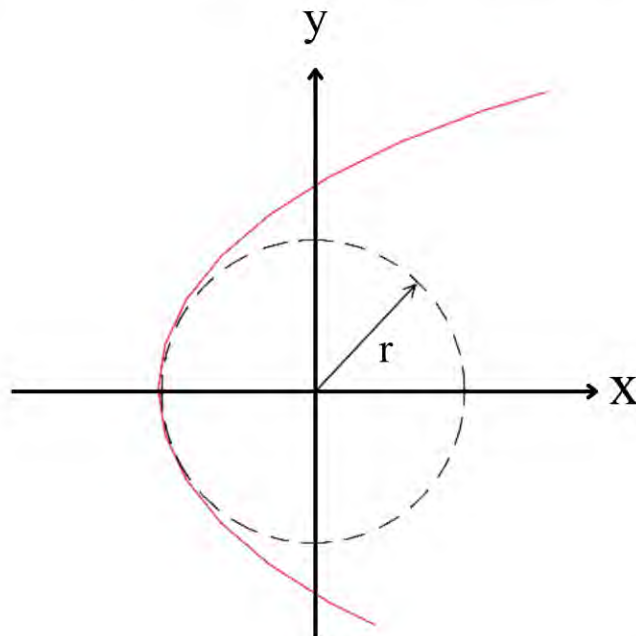


Figura 2.8: Movimiento orbital del cuerpo en el plano donde cumple $V(r \rightarrow \infty) = 0$, donde el cuerpo m toca el punto r una vez en su recorrido.

2.3. Solución del Problema de Dos Cuerpos

En la teoría clásica, el movimiento orbital de un cuerpo presenta una solución analítica, como se verá a continuación.

Se toma la ecuación 2.2.6 y el momento angular,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$$
$$L = mr^2\frac{d\phi}{dt}$$

Ahora, se busca $r(\phi)$,

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\phi} = \dot{r} \frac{1}{\frac{d\phi}{dt}}$$
$$= \dot{r} \frac{mr^2}{L}$$

Se despeja \dot{r} , y se reemplaza en la energía E donde se obtiene,

$$E = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{L^2}{2m} u^2 - GMmu$$

Como la energía es una constante, se va a tomar la derivada respecto a ϕ ,

$$0 = \frac{du}{d\phi} \left[\frac{L^2}{m} \frac{d^2u}{d\phi^2} + \frac{L^2}{m} u - GMm \right]$$

Evidentemente, el primer factor no es nulo, por tanto lo que esta entre paréntesis cuadrados debe ser cero, obteniendo así,

$$\frac{L^2}{m} \frac{d^2u}{d\phi^2} + \frac{L^2}{m} u = GMm$$

Reordenando la ecuación obtenida,

$$\ddot{u} + u = G\frac{Mm^2}{L^2} \tag{2.3.1}$$

Siendo análoga a la ecuación diferencial ordinaria no homogénea,

$$Y'' + Y = \text{cte}$$

La solución de esta ecuación diferencial se puede encontrar por métodos analíticos de la siguiente manera:

Solución homogénea:

$$m^2 + 1 = 0$$
$$m = \pm i$$

por tanto, la solución homogénea es,

$$u_h(\phi) = C_1 \sin \phi + C_2 \cos \phi$$

Mediante el uso de identidades trigonométricas, esta solución puede reducirse a la siguiente expresión

$$u_h(\phi) = A \cos (B\phi + C)$$

Para que cumpla con la ecuación homogénea,

$$\ddot{u}_h = -u_h$$
$$-B^2 u_h = -u_h$$
$$B = \pm 1$$

donde B es positivo si el cuerpo gira en sentido anti-horario y negativo si gira en sentido horario. Así, se obtiene la ecuación para la solución homogénea como,

$$u_h(\phi) = A \cos (\phi + \phi_0) \quad (2.3.2)$$

Solución particular:

La solución particular viene dada por,

$$u_p(\phi) = \text{cte} = G \frac{Mm^2}{L^2} \quad (2.3.3)$$

Así, la solución de la ecuación 2.3.1 es,

$$u(\phi) = A \cos (\phi + \phi_0) + G \frac{Mm^2}{L^2}$$

se asigna la constante,

$$\epsilon = \frac{A}{\frac{GMm^2}{L^2}}$$

además, como $r = u^{-1}$, se obtiene,

$$r(\phi) = \frac{L^2}{GMm^2 (1 + \epsilon \cos (\phi + \phi_0))} \quad (2.3.4)$$

donde la constante ϵ es llamada excentricidad, y dependiendo del valor que toma, el tipo de movimiento orbital cambia.

$$\begin{aligned} \epsilon = 0 & \longrightarrow \text{circunferencia} \\ 0 < \epsilon < 1 & \longrightarrow \text{elipse} \\ \epsilon = 1 & \longrightarrow \text{parábola} \\ \epsilon > 1 & \longrightarrow \text{hipérbola} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Capítulo 3

Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel son expresiones tensoriales que dependen de las coordenadas. Las mismas son usadas para la conexión de Levi-Cevita derivada del tensor métrico, nombradas por Elwin Bruno Christoffel (1829-1900). Es oportuno trabajar con los símbolos de Christoffel siempre que se deba realizar cálculos teóricos que impliquen geometría, pues permiten efectuar cálculos muy complejos sin confusión.

3.1. Paralelismo y Métrica

Se tiene que hacer un cambio en lo que se concibe como espacio, las ideas que creemos y damos por sentadas dentro de él. Esto es debido a que tenemos una idea arraigada al espacio Euclideo (espacio plano), que se pierden al generalizar la idea de un espacio y se le da la propiedad de curvatura.

Para esto comenzaremos con una idea muy fundamental: **Paralelismo**. Este primer concepto permitirá construir herramientas que nos ayude a estudiar propiedades físicas dentro de un espacio curvo. Luego continuaremos con **la métrica de un espacio**, que será concepto fundamental para la descripción geométrica del espacio-tiempo.

3.1.1. Concepto de Paralelismo

El concepto de paralelismo suele estar arraigado a un espacio Euclideo; se dice que dos rectas (o planos, o hiperplanos) son paralelas si ellas nunca se intersecan. Esto se denota como $\vec{v} \parallel \vec{w}$, y esto ocurre si y solo si $\vec{v} \propto \vec{w}$. [7]

Es necesario generalizar qué es paralelismo para cualquier hipersuperficie, ya sea plana o no. Así, tomemos el ejemplo de una superficie esférica S_2 inmerso un espacio euclideo \mathbb{R}^3 . En S_2 , y a lo largo de un meridiano, tomemos dos puntos diferentes en los cuales se quiere dibujar un vector; como los vectores no pueden ser curvos, solo queda dibujar un vector que sea paralelo a S_2 (figura 3.1). Estos dos vectores que pertenecen a S_2 visto por un observador que trabaje en \mathbb{R}^3 de manera general no serán paralelos. Pero para un observador situado en S_2 , al moverse por dicho meridiano va a ver que ambos vectores coinciden en la misma línea (el meridiano); así él observa que ambos vectores son paralelos.

Con esto se puede concluir que el concepto de paralelismo depende de la variedad con que se trabaje.

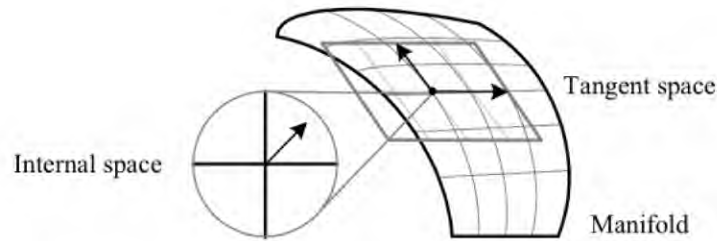


Figura 3.1: Representación de un espacio tangente 2D a una superficie.[8]

En cada punto de una hipersuperficie podemos construir infinitos vectores tangentes. Para esto introducimos el concepto de *Variedad Tangente a un Punto P* (figura 3.1) que se denota comúnmente como T_pM (Tangent Manifold on P). Así en el T_pM podemos construir todos los vectores asignándole una base: siguiendo con el ejemplo de S_2 sería necesario una base de dos vectores como $\{e_1, e_2\}$. Pero obviamente dos T_pM diferente no tendrán las mismas bases, por lo tanto los vectores bases dependerán del punto P , por esto las bases se denotan como: $\{e_{1(p)}, e_{2(p)}\}$. Siguiendo álgebra lineal, cualquier vector que pertenezca al T_pM es combinación lineal de la base.

Como existen infinitos puntos en una hipersuperficie, también existirán infinitos T_pM . El conjunto $\{T_pM\}$, que es de cardinal infinito, se le denomina *Fibrado del Espacio Tangente*. [9]

3.1.2. Métrica

En un espacio vectorial dado, es necesario establecer cómo medir la longitud de un vector. Para esto se define un *producto escalar*, como:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 \quad (3.1.1)$$

Sea el vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, y θ el ángulo entre los vectores \vec{a} y \vec{b} , aplicando el teorema de coseno, se obtiene que:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2ab \cos \theta$$

que, con la definición de \vec{c} , se va a obtener que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \quad (3.1.2)$$

Con esta expresión, hemos definido el producto escalar; sin embargo, podemos darle una definición más práctica.

Podemos definir el producto escalar de la siguiente manera, guiándonos de la figura 3.2 y aplicando identidades trigonométricas:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\beta - \alpha) = a_x b_x + a_y b_y \quad (3.1.3)$$

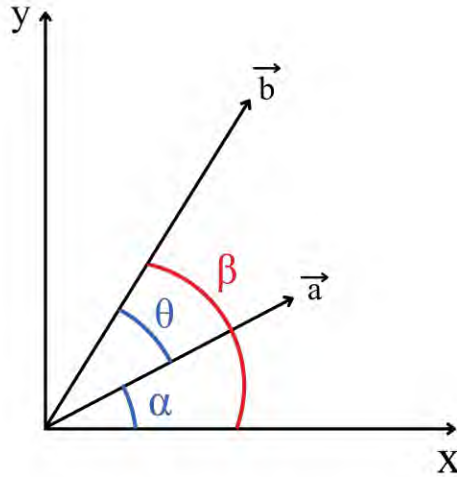


Figura 3.2: Esquema de dos vectores.

Para la base cartesiana, en un espacio \mathbb{R}^n , de forma general se tiene¹:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i \quad (3.1.4)$$

Esta expresión también se puede obtener definiendo los vectores a en términos de la bases cartesianas, y con el producto de entre los vectores bases, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ ²:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + a_1 b_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + a_2 b_1 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + a_2 b_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2)$$

Donde,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} \quad (3.1.5)$$

es la métrica de \mathbb{R}^n inducida (por la base).

El producto escalar para cualquier base y/o espacio vectorial se puede definir como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_i b_j g_{ij} \quad (3.1.6)$$

Con esta noción de cómo medir la distancia de un vector, podemos definir la métrica Riemanniana.

Definición 3 (Métrica Riemanniana). Una métrica Riemanniana, en una variedad diferenciable M , es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto interno (\cdot, \cdot) en el $T_p M$. Esta se denota con un tensor $(0, 2)$ g ; donde para cualesquiera campos vectoriales $X, Y \in \text{Tp}M$, $g(X, Y) = g(Y, X)$, $g(X, X) \geq 0$, donde se da la igualdad si y solo si $X = 0$.

¹Se aplica el criterio de sumación de Einstein de aquí en adelante

² δ_{ij} es el delta de Kronecker.

En términos de coordenadas locales, g puede expresarse como,

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

donde la matriz g es definida positiva en toda la variedad.[10]

Una matriz definida positiva es una matriz hermitiana que en muchos aspectos es similar a un número real positivo. Esta cumple con la siguiente propiedad: Para todos los vectores no nulos $z \in \mathbb{C}^n$, se tiene que,

$$z^* M z > 0$$

donde z^* es el transpuesto conjugado de z ³.

Definición 4 (Variedad Riemanniana). Una variedad diferenciable M con una métrica Riemanniana recibe el nombre de variedad Riemanniana.

3.2. Vectores Covariantes y Contravariantes

En \mathbb{R}^n , se puede agarrar la misma base vectorial en cada punto del espacio debido a que existe una manera trivial de *conectar* un punto con su vecindad. Sin embargo, esto cambia si la métrica o el espacio es diferente.

La base dual se denota con un superíndice como $\{e^i\}$. Esta cumplen con la siguiente condición independiente del tensor métrico del espacio:

$$e^i \cdot e_j = \delta_j^i \tag{3.2.1}$$

Esto permite hacer un cambio de base de un vector como $\vec{v} = v_i e^i$, que al ser un cambio de base, el vector no cambia. Esto significa que,

$$\vec{v} = v^i e_i = v_i e^i \tag{3.2.2}$$

De manera general $v_i \neq v^i$. Las componentes v_i reciben el nombre de componentes covariantes; las componentes v^i , contravariantes. Así, un vector escrito en términos de la base es llamado vector contravariante y uno escrito en términos de la base dual es un vector covariante.

Para pasar de componentes contravariantes a covariantes tenemos que,

$$\begin{aligned} (v^i e_i = v_j e^j) \cdot e_k \\ v^i g_{ik} = v_j \delta_k^j \end{aligned}$$

Entonces la regla es,

$$v_j = g_{ij} v^i \tag{3.2.3}$$

A esto usualmente se le llama *bajar índices*. Para pasar de una base covariante a contravariante (subir índices), de manera similar, se obtiene,

$$v^j = g^{ij} v_i \tag{3.2.4}$$

³Que cumpla con esta propiedad, involucra que cumpla con otras propiedades listadas en [11]

Donde g^{ij} es el inverso del tensor métrico (g_{ij}) ; esto es, $(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$.

Existe una relación entre una base vectorial, su base dual, con el tensor métrico del espacio. Es fácil de demostrar, usando la ecuación 3.2.2, y con las reglas de subir y bajar índices,

$$\begin{aligned} v^i e_i &= v_j e^j \\ v^i e_i &= g_{kj} v^k e^j \end{aligned}$$

Como k es un índice mudo del lado derecho de la ecuación, podemos renombrarlo como i . De manera que,

$$\begin{aligned} v^i e_i &= g_{ij} v^i e^j \\ e_i &= g_{ij} e^j \end{aligned}$$

Y, por álgebra lineal tenemos que,

$$e^i = g^{ij} e_j \quad (3.2.5)$$

3.3. Transformación de Bases

Supongamos que tenemos un conjunto de coordenadas $\{x^i\}$ y un segundo conjunto de coordenadas $\{x^\mu\}$. Además, supongamos que podemos establecer una función para escribir un sistema de coordenadas en el otro de la siguiente manera:

$$x^\mu = f_i(x^i) \quad (3.3.1)$$

Para hallar la derivada parcial $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^i}$, se puede aplicar el siguiente truco,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^\nu} = \delta_{\mu\nu} \\ J J^{-1} &= \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

En donde la matriz $J = J_{\mu i} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^i}$ es el Jacobiano. Por lo tanto, para hallar la derivada parcial $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^i}$, se tiene que hallar la inversa del Jacobiano. Ahora, asignemos la base $\{e_i\}$ a las coordenadas $\{x^i\}$, y la base coordenada $\{e_\mu\}$ a las coordenadas $\{x^\mu\}$. La segunda base se puede escribir como combinación lineal de la primera,

$$e_\mu = C^{\mu i} e_i$$

donde, si derivamos por la base e_i se obtiene,

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial e_i} = C^{\mu i}$$

Así, reescribiendo el vector base e_μ ,

$$e_\mu = \frac{\partial e_\mu}{\partial e_i} e_i \quad (3.3.3)$$

Análogamente para los vectores bases e_i ,

$$e_i = \frac{\partial e_i}{\partial e_\mu} e_\mu \quad (3.3.4)$$

De forma similar que se obtuvo la ecuación 3.3.2, se obtiene,

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial e_i} \frac{\partial e_\nu}{\partial e_i} = \delta_{\mu\nu} \quad (3.3.5)$$

Que tiene la misma forma que la ecuación 3.3.2. Ahora si multiplicamos esta última ecuación por e_μ donde tomamos aquellas donde $\delta_{\mu\nu} = 1$, así $\mu = \nu$,

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial e_i} \frac{\partial e_\mu}{\partial e_i} e_\mu = e_\mu$$

que con la ecuación 3.3.4,

$$e_\mu = \frac{\partial e_\mu}{\partial e_i} e_i \quad (3.3.6)$$

Ahora, el mismo procedimiento se hace con la ecuación del Jacobiano y se compara con la última ecuación para obtener la regla de transformación de bases,

$$e_\mu = J^{-1} e_i = \frac{\partial x^i}{\partial x^\mu} e_i \quad (3.3.7)$$

3.4. Conexión afín de una Variedad

Sea una variedad S de dimensión $\dim(S) \leq n$, inmersa en un espacio Euclidiano \mathbb{R}^n . [9] Es bien conocido que una base cartesiana $\{e_i\}$ no varía de punto a punto, dicho de otro modo, las bases cartesianas son constantes. Esto matemáticamente se expresa como,

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = 0$$

Pero, si estamos con coordenadas que describen una variedad curva, ¿Los vectores bases de la variedad serán constantes? La respuesta general obviamente es no. Para observar cómo cambian las bases de una variedad de punto a punto, primero denotemos al conjunto de vectores bases de la variedad en un $T_p M$ como $\{e_\alpha\}_p$, que en términos de la base cartesiana tendrían la forma,

$$e_\alpha = c^i e_i$$

Para ver el cambio de punto a punto de las bases de la variedad, busquemos la derivada parcial con respecto a las coordenadas de dichas bases. Así,

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^i_{\beta\alpha} e_i \quad (3.4.1)$$

Se hizo uso que la derivada de un vector resultará en un vector, así será combinación lineal de las bases cartesianas. Los coeficientes $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ son los denominados *Símbolos de*

*Christoffel*⁴. Y el conjunto de ellos proporcionan la conexión afín de las bases de una variedad, esto es, cómo varían las bases de una variedad de punto. Formalicemos este concepto de conexión afín.

Definición 5. Una conexión afín (o lineal) es un mapa $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$, donde $\Gamma(TM)$ es el espacio de los campos vectoriales de la variedad M , esto es, la sección continua del fibrado de la variedad tangente. Esta transformación se satisface para toda $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ y $f \in C^\infty(M)$,

1. Lineal en la primera variable: $\nabla_{X+fY}Z = \nabla_XZ + f\nabla_YZ$,
2. Lineal en la segunda variable: $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$,
3. Regla de Leibniz para la segunda variable: $\nabla_X(fY) = \partial_X fY + f\nabla_XY$

Estas propiedades nos dicen que la conexión afín es un mapa bilineal tal que $(X, Y) \longrightarrow \nabla_XY$.

En la teoría de la relatividad general de Einstein, se tiende a trabajar con variedades libres de torsión, esto es, que cumple la conexión de Levi-Cevita, preservando la métrica de la variedad. Así, cumple con las propiedades,

1. Preserva la métrica: $\nabla g = 0$, donde g es el tensor métrico.
2. Libre de Torsión: $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ se cumple que, $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$

donde $[X, Y] = A^\beta \partial_\beta B^\alpha - B^\beta \partial_\beta A^\alpha$, los cuales son denominados corchetes de Lie.

Lo importante de definir una conexión afín en una variedad diferenciable M es que nos permite *derivar* objetos situados en espacios distintos o más generales al espacio Euclidiano. [2]

Definiendo una base en un T_pM de la variedad M como $\{e_\alpha\}$ con coordenadas $\{x^\beta\}$, entonces la conexión afín de los puntos de la variedad está dada por los Símbolos de Christoffel.[12]

Al trabajar con una conexión de Levi-Civita, los símbolos de Christoffel cumplen con ser simétricos en los subíndices, esto es,

$$\Gamma^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\beta\alpha} \quad (3.4.2)$$

3.5. Ejemplos de Símbolos de Christoffel

3.5.1. Espacio Plano

En un espacio plano, para el estudio de de ciertas propiedades y fenómenos físicos, comúnmente se usa la métrica de Minkowski. Esta métrica viene definida por

$$g = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.1)$$

⁴Estos no tienen estructura Tensorial, son funciones que dependen de los puntos en el T_pM y toman sus valores en el cuerpo en que se construye la variedad.

Para calcular los Símbolos de Christoffel, primero con la ecuación 3.1.5,

$$e_i \cdot e_j = g_{ij}$$

Sea $i = j = 0$, y derivando por la coordenada x_0 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} (e_0 \cdot e_0) &= \frac{\partial(g_{00})}{\partial x_0} \\ \frac{\partial e_0}{\partial x_0} \cdot e_0 + e_0 \cdot \frac{\partial e_0}{\partial x_0} &= \frac{\partial(-1)}{\partial x_0} \\ 2 \frac{\partial e_0}{\partial x_0} \cdot e_0 &= 0 \\ \frac{\partial e_0}{\partial x_0} \cdot e_0 &= 0 \end{aligned}$$

y con la ecuación 3.4.1,

$$\Gamma_{00}^i e_i \cdot e_0 = 0$$

Como en este espacio se cumple que $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, el único factor no nulo para la multiplicación de las bases es para $i = 0$. Así,

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 e_0 \cdot e_0 &= 0 \\ \Gamma_{00}^0 \cdot (-1) &= 0 \\ \Gamma_{00}^0 &= 0 \end{aligned}$$

De forma similar, se pueden calcular las otras componentes de los símbolos de Christoffel que para este espacio, tomarán valores nulos.

3.5.2. Superficie de una Esfera

En un espacio Euclideo, la métrica en coordenadas esféricas está dada por,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Si tomamos un r constante R , la parte angular de la métrica que describe la superficie de la esfera es,

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.5.2)$$

Así, el tensor métrico toma la forma,

$$g = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

Primero, definimos las coordenadas con índices:

$$\begin{aligned}\theta &\longrightarrow x_0 \\ \phi &\longrightarrow x_1\end{aligned}$$

De forma similar, se calculará los Símbolos de Christoffel para este espacio.

$$\begin{aligned}e_0 \cdot e_0 &= R^2 \\ \frac{\partial}{\partial x_0} (e_0 \cdot e_0) &= \frac{\partial R^2}{\partial x_0} \\ 2 \frac{\partial^0 e_0}{\partial x_0^0} \cdot e_0 &= 0 \\ \Gamma_{00}^i e_i \cdot e_0 &= 0 \\ \Gamma_{00}^0 e_0 \cdot e_0 &= 0 \\ \Gamma_{00}^0 R^2 &= 0\end{aligned}$$

Así, se tiene que,

$$\boxed{\Gamma_{00}^0 = 0}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} (e_0 \cdot e_0) &= \frac{\partial R^2}{\partial x_1} \\ 2 \frac{\partial^0 e_0}{\partial x_1^0} \cdot e_0 &= 0 \\ \Gamma_{10}^i e_i \cdot e_0 &= 0 \\ \Gamma_{10}^0 e_0 \cdot e_0 &= 0 \\ \Gamma_{10}^0 R^2 &= 0\end{aligned}$$

Y, como los Símbolos de Christoffel en espacios libres de torsión son simétricos en los sub-índices,

$$\boxed{\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = 0}$$

Continuando,

$$\begin{aligned}e_1 \cdot e_1 &= R^2 \sin^2 \theta \\ \frac{\partial}{\partial x_0} e_1 \cdot e_1 &= \frac{\partial}{\partial x_0} R^2 \sin^2 \theta \\ 2 \frac{\partial e_1}{\partial x_0} \cdot e_1 &= 2R^2 \sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{10}^1 e_1 \cdot e_1 &= R^2 \sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{10}^1 R^2 \sin^2 \theta &= R^2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \cot \theta$$

De forma similar, se obtiene,

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{00} = 0$$

$$\Gamma^0_{11} = -\sin \theta \cos \theta$$

Capítulo 4

Geodésicas

En geometría, la línea geodésica se define como la línea de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada, y está contenida en esta superficie. Las geodésicas en una superficie son las líneas más “rectas” posibles (con menor curvatura) fijado un punto y una dirección dada sobre dicha superficie.[13]

De forma más general, se puede hablar sobre geodésicas en “espacios curvados” de dimensión superior llamadas variedades riemannianas en donde, si el espacio contiene una métrica natural, entonces las geodésicas son (localmente) la distancia más corta entre dos puntos en el espacio. Un ejemplo físico donde se presenta la necesidad de usar variedades riemannianas son los que aparecen en la teoría de la relatividad general. En esta, se establece que las partículas materiales se mueven a lo largo de geodésicas temporales del espacio-tiempo curvo.[14]

En este capítulo, se discutirá cómo hallar las ecuaciones de las geodésicas aplicando el método de parametrización, minimizando un funcional, y la analogía con la derivación de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

4.1. Longitud de una Curva en una variedad Riemanniana

Supongamos que se tiene una curva finita en un espacio. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que trabajamos en el espacio \mathbb{R}^2 . Para esto, segmentemos la curva en varias particiones de longitud Δs ; y asignemos un vector que va del inicio del segmento, y otro al final del segmento, como se muestra en la figura 4.1:

Así, el segmento de la curva es:

$$\vec{R}_f - \vec{R}_i = (x_f - x_i)e_1 + (y_f - y_i)e_2 \quad (4.1.1)$$

Para un espacio con métrica arbitraria (salvo que la métrica sea simétrica), se puede observar que el segmento es (usando el producto escalar):

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 g_{11} + 2g_{12}\Delta x\Delta y + g_{22}(\Delta y)^2$$

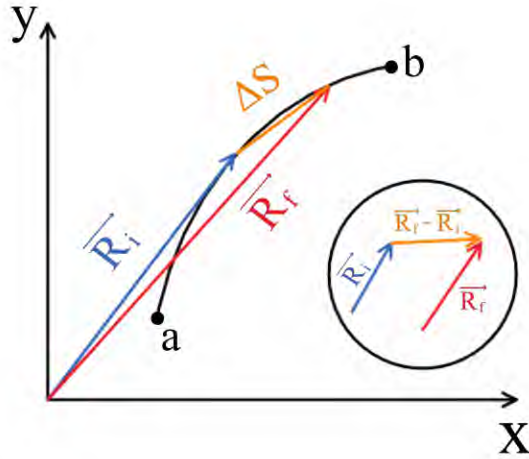


Figura 4.1: Esquema de la curva en el espacio \mathbb{R}^2 .

Donde $g_{ij} = e_i \cdot e_j$. Ahora, hagamos dicho segmento infinitamente pequeño y sumemos esos segmentos a lo largo de esa curva, así la longitud de la curva es:

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2} \quad (4.1.2)$$

Nota. Si la métrica es no simétrica, entonces la longitud se define, para cualquier espacio n -dimensional como:

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij}dx_i dx_j} \quad (4.1.3)$$

Sin embargo, resolver la ecuación 4.1.2 definida como esta no es posible (o fácil de realizar). Para esto se usa el método de parametrización.

Método 1. Parametrización

Se toma que las coordenadas dependen de un parámetro λ , de manera que:

$$\begin{aligned} x &= x(\lambda) \\ y &= y(\lambda) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Así, aplicando esto en para la longitud (ecuación 4.1.2):

$$s = \int_{\lambda=0}^{\lambda_f} \sqrt{g_{11} \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + 2g_{12} \left(\frac{dx}{d\lambda}\right) \left(\frac{dy}{d\lambda}\right) + g_{22} \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2} d\lambda \quad (4.1.5)$$

Además, como el parámetro es arbitrario, se escogió uno tal que en el punto a de la curva, se verifique que $\lambda = 0$.

4.2. Geodésicas por Principios de Mínima Longitud

Se tiene que la longitud de una curva parametrizada, como se hizo en la sección anterior, viene dada por:

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda \quad (4.2.1)$$

Como se trabaja en un espacio general, con una métrica cualquiera; se puede afirmar que: $g_{ij} = f(x, y)$. Ahora, llamemos a la raíz de la ecuación 4.2.1 como: $f(x, y, \frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda})$, entonces,¹

$$s = \int f\left(x, y, \frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}\right) d\lambda$$

Esta última expresión nos muestra que el integrando depende de una función de dos variables, llamémosla: $I[x(\lambda), y(\lambda)]$.

Para $I[x(\lambda)] = \int f(x, \frac{dx}{d\lambda})$, supongamos que la solución es: $x_0(\lambda)$. Entonces, $I[x_0(\lambda)]$ es el mínimo.

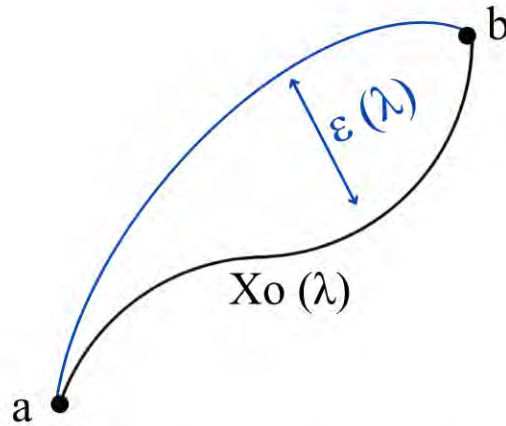


Figura 4.2: Solución mínima de la geodésica (curva negra) y una muy próxima (curva azul).

Ahora, tomando una solución arbitrariamente cercana a $x_0(\lambda)$ (figura 4.2), tal que:

$$\begin{aligned} x_1(\lambda) &= x_0(\lambda) + \epsilon(\lambda) \\ \epsilon(a) = \epsilon(b) &= 0, \quad \epsilon(\lambda) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Considerando el variacional de I , y buscando su mínimo:

$$\begin{aligned} \delta I &= I[x_0(\lambda) + \epsilon(\lambda)] - I[x_0(\lambda)] \\ &= \int \left[f\left(x_0 + \epsilon, \frac{dx_0}{d\lambda} + \frac{d\epsilon}{d\lambda}\right) - f\left(x_0, \frac{dx_0}{d\lambda}\right) \right] d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

¹Se omitirá los límites de la integral por el momento.

Puesto que estamos trabajando en un entorno arbitrariamente pequeño, usamos una expansión de Taylor:

$$f\left(x_0 + \epsilon, \frac{dx_0}{d\lambda} + \frac{d\epsilon}{d\lambda}\right) \simeq f\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\epsilon + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)}\frac{d\epsilon}{d\lambda} + \dots$$

Así, el variacional δI será:

$$\delta I = \int \frac{\partial f}{\partial x}\epsilon d\lambda + \int \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)}\frac{d\epsilon}{d\lambda}d\lambda = 0 \quad (4.2.4)$$

Tomando la segunda integral de la expresión anterior, y resolviéndolo por integración por partes, con $u = \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)}$ y $dv = \frac{d\epsilon}{d\lambda}$, resultará que

$$\delta I_2 = \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)}\epsilon\Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} - \int \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)}\right)d\lambda$$

Se puede ver que el primer término es nulo por las condiciones de $\epsilon(\lambda)$, entonces reemplacemos este resultado en el variacional de δI (ecuación 4.2.4):

$$\delta I = \int \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)}\right) \right] \epsilon d\lambda = 0$$

Como la función $\epsilon(\lambda)$ es arbitraria, se tendrá entonces que el otro factor debe anularse. Esto resulta en las ecuaciones de Euler-Lagrange, pero para las geodesicas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)}\right) = 0 \quad (4.2.5)$$

y, para n dimensiones, donde $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)}\right) = 0 \quad (4.2.6)$$

El procedimiento bajo el cual se obtuvo el presente resultado es semejante al usado para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange. Esto se debe a que se está buscando extremar una función (que se toma el extremo como un mínimo).

4.2.1. Derivación de las geodésicas con un parámetro afin

En esta sección, se busca definir las ecuaciones de las geodésicas a través de un parámetro afin que nos permita simplificarlas. Usualmente, se busca que este parámetro sea un invariante escalar; esto, más adelante, será útil para definir el Lagrangiano, y así poder determinar las constantes del movimiento las cuales se usarán en el estudio de las órbitas en la métrica de Schwarzschild.

Se expresará la ecuación 4.2.6 en todos sus términos. Para eso, se tomará en cuenta que,

$$u^i = \frac{dx^i}{d\lambda} \quad (4.2.7)$$

Además, como se hizo en la sección anterior, $f = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}}$, entonces se va a obtener:

$$\frac{du^m}{d\lambda} + \frac{1}{2}g^{mi} [\partial_k g_{ip} + \partial_p g_{ik} - \partial_i g_{kp}] u^k u^p = -f^{1/2} \frac{d}{d\lambda} [f^{-1/2}] u^m \quad (4.2.8)$$

Como se puede parametrizar la curva de forma arbitraria, se puede elegir la parametrización tal que λ tome el valor de la longitud de la curva. Imponiendo esto, entonces $\lambda \rightarrow s$, y s es un parámetro afín. Entonces, para que esto ocurra se tendrá que:

$$s = \int f d\lambda = \int 1 ds \quad (4.2.9)$$

Así, $f = 1$, entonces la parte derecha de la ecuación 4.2.8 se hace nula; resultando que

$$\frac{du^m}{ds} + \frac{1}{2}g^{mi} [\partial_k g_{ip} + \partial_p g_{ik} - \partial_i g_{kp}] u^k u^p = 0 \quad (4.2.10)$$

Capítulo 5

Transporte paralelo

Se presenta el concepto de transporte paralelo de un vector a través de una trayectoria. Durante el desarrollo surgen los Símbolos de Christoffel. Finalmente, se estudia la relación entre el transporte paralelo y las geodésicas.

En matemáticas, un transporte paralelo en una variedad M con conexión especificada es un modo de transportar vectores sobre curvas diferenciables de manera que permanezcan “paralelos” respecto a la conexión dada.[15]

Dos vectores paralelos en un espacio Euclidiano son aquellos que sus componentes cartesianas son múltiplos entre sí. Pero, en una variedad con una curvatura distinta de cero (no desarrollables) solo se puede definir dos vectores paralelos si y solo si los puntos de aplicación son infinitamente cercanos.[16]

5.1. Cambio de base (Cartesiana-Esféricas)

Primero hagamos un cambio de las coordenadas cartesianas a esféricas.

$$\begin{aligned}x &= R \cos \theta \cos \phi \\y &= R \sin \theta \cos \phi \\z &= R \cos \theta\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Con la ecuación 3.3.7 encontramos los vectores en la base coordenada.

$$\begin{aligned}e_r &= \frac{\partial x}{\partial r} e_x + \frac{\partial y}{\partial r} e_y + \frac{\partial z}{\partial r} e_z \\e_r &= \sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z \\e_\theta &= R(\cos \theta \cos \phi e_x + \cos \theta \sin \phi e_y + \sin \theta e_z) \\e_\phi &= R(-\sin \theta \sin \phi e_x + \sin \theta \cos \phi e_y)\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

En una esfera el vector e_r es perpendicular a la superficie de la esfera, para el vector e_θ es tangente a la esta y e_ϕ también es tangente. La diferencia de estos dos últimos es que e_θ recorre los meridianos y e_ϕ los paralelos.

Ahora evaluemos como cambian los vectores base de punto a punto. Los vectores de la base cartesiana no dependen del punto, esto quiere decir que son constantes.

Cálculos de las derivadas de los vectores base:

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_r}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial e_r}{\partial \theta} &= \frac{R}{R}(\cos \theta \cos \phi e_x + \cos \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z) = \frac{e_\theta}{R} \\ \frac{\partial e_r}{\partial \phi} &= \frac{R}{R}(-\sin \theta \sin \phi e_x + \sin \theta \cos \phi e_y) = \frac{e_\phi}{R}\end{aligned}\quad (5.1.3)$$

Podemos observar que las derivadas se pueden escribir en función de los vectores de la misma base (esférica). Ahora se calcula la derivada del vector e_θ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_\theta}{\partial r} &= \frac{R}{R}(\cos \theta \cos \phi e_x + \cos \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z) = \frac{e_\theta}{R} \\ \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} &= -R(\sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z) = -R e_r \\ \frac{\partial e_\theta}{\partial \phi} &= R(-\cos \theta \sin \phi e_x + \cos \theta \cos \phi e_y) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} e_\phi\end{aligned}\quad (5.1.4)$$

Seguido las derivadas del vector e_ϕ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_\phi}{\partial r} &= \frac{R}{R}(-\sin \theta \sin \phi e_x + \sin \theta \cos \phi e_y) = \frac{e_\phi}{R} \\ \frac{\partial e_\phi}{\partial \theta} &= R(-\cos \theta \sin \phi e_x + \cos \theta \cos \phi e_y) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} e_\phi \\ \frac{\partial e_\phi}{\partial \phi} &= -R(\sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y) = -R \sin^2 \theta e_r - \sin \theta \cos \theta e_\theta\end{aligned}\quad (5.1.5)$$

Para escribir el ultimo termino en función de los vectores de la misma base, primero se calcula la métrica de la nueva base (ecuación 3.1.5) y se hace uso de la ecuación 3.2.5.

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}; \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

Los vectores de la base dual son los siguientes:

$$\begin{aligned}e^r &= g^{rr} e_r + g^{r\theta} e_\theta + g^{r\phi} e_\phi = e_r \\ e^\theta &= \frac{1}{R^2} e_\theta \\ e^\phi &= \frac{1}{(R \sin \theta)^2} e_\phi\end{aligned}\quad (5.1.6)$$

Ahora se hace el calculo para cada vector de la base dual.

$$\begin{aligned}
e^r \cdot \frac{\partial e_\phi}{\partial \phi} &= -R \sin^2 \theta \\
e^\theta \cdot \frac{\partial e_\phi}{\partial \phi} &= -\sin \theta \cos \theta \\
e^\phi \cdot \frac{\partial e_\phi}{\partial \phi} &= 0
\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

5.2. Símbolos de Christoffel

Como se puede observar las derivadas de los vectores base se pueden escribir en función de los vectores base. Esto sugiere que podemos escribir estas derivadas como una combinación lineal de los vectores base, de la forma:

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma \tag{5.2.1}$$

Para este caso (coordenadas esféricas) algunos coeficientes son 0, pero vamos a dar una definición general que nos funciones en cualquier situación (base diferente).

Para e_r :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_r}{\partial r} &= \Gamma^r_{rr} e_r + \Gamma^\theta_{rr} e_\theta + \Gamma^\phi_{rr} e_\phi \\
\frac{\partial e_r}{\partial \theta} &= \Gamma^r_{r\theta} e_r + \Gamma^\theta_{r\theta} e_\theta + \Gamma^\phi_{r\theta} e_\phi \\
\frac{\partial e_r}{\partial \phi} &= \Gamma^r_{r\phi} e_r + \Gamma^\theta_{r\phi} e_\theta + \Gamma^\phi_{r\phi} e_\phi
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Para e_θ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_\theta}{\partial r} &= \Gamma^r_{\theta r} e_r + \Gamma^\theta_{\theta r} e_\theta + \Gamma^\phi_{\theta r} e_\phi \\
\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} &= \Gamma^r_{\theta\theta} e_r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} e_\theta + \Gamma^\phi_{\theta\theta} e_\phi \\
\frac{\partial e_\theta}{\partial \phi} &= \Gamma^r_{\theta\phi} e_r + \Gamma^\theta_{\theta\phi} e_\theta + \Gamma^\phi_{\theta\phi} e_\phi
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Para e_ϕ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_\phi}{\partial r} &= \Gamma^r_{\phi r} e_r + \Gamma^\theta_{\phi r} e_\theta + \Gamma^\phi_{\phi r} e_\phi \\
\frac{\partial e_\phi}{\partial \theta} &= \Gamma^r_{\phi\theta} e_r + \Gamma^\theta_{\phi\theta} e_\theta + \Gamma^\phi_{\phi\theta} e_\phi \\
\frac{\partial e_\phi}{\partial \phi} &= \Gamma^r_{\phi\phi} e_r + \Gamma^\theta_{\phi\phi} e_\theta + \Gamma^\phi_{\phi\phi} e_\phi
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

5.2.1. Derivada Covariante

Se define un vector arbitrario en un espacio cualquiera, esto es para definir su derivada:

$$\vec{A} = A^i e_i$$

Calculando la derivada del vector sobre el espacio (esto es para observar como el vector varía de punto a punto en una variedad):

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(A^i e_i) = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} e_j + A^j \frac{\partial e_j}{\partial x^i}$$

La derivada parcial del segundo termino tiene la forma de las derivadas calculadas en la sección anterior. Cambiando los índices mudos a k se puede escribir.

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(A^i e_i) = \left[\frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ji}^k A^j \right] e_k = (\nabla_i A^k) e_k$$

El termino entre corchetes es la derivada covariante de un vector, así pasamos a dar su definición ,

Definición 6. Derivada Covariante de un Vector Contravariante

Sea un vector $\vec{A} = A^\mu e_\mu$, la derivada covariante de un vector contravariante se define como:

$$\nabla_\mu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\gamma\mu} A^\gamma \quad (5.2.5)$$

En el caso que la derivada covariante sea 0 se dice que el vector es constante en el espacio.

5.3. Derivada a través de una trayectoria

Ahora trabajemos la idea de un vector paralelo a lo largo de una trayectoria. Una forma de ver esto es con la función $\vec{A} = (x^2 + y^2)e_z$, como sabemos este vector en el plano xy es una circunferencia y para un radio R su valor no cambia. Transformando el vector \vec{A} a coordenadas polares tenemos:

$$\vec{A} = \sin^2 \theta \cos \theta e_R - \frac{\sin^3 \theta}{R} e_\theta = A^R e_R + A^\theta e_\theta \quad (5.3.1)$$

La curva se puede parametrizar en el plano xy con $\phi = \lambda$; $R = 1$; $\theta = \pi/2$. La derivada del vector \vec{A} respecto al parámetro λ es:

$$\frac{d}{d\lambda}(\vec{A}) = \frac{dR}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial R} \vec{A} + \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{A} + \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{A} \quad (5.3.2)$$

En este caso solo tenemos la componente ϕ . Examinemos la derivada parcial respecto a ϕ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\phi}(A^i e_i) &= \frac{\partial}{\partial\phi} A^i e_i + A^i \frac{\partial e_i}{\partial\phi} \\
\frac{\partial}{\partial\phi}(A^i e_i) &= A^R \frac{\partial e_R}{\partial\phi} + A^\phi \frac{\partial e_\phi}{\partial\phi} + A^\theta \frac{\partial e_\theta}{\partial\phi} \\
\frac{\partial}{\partial\phi}(A^i e_i) &= \sin^2 \theta \cos \theta \frac{1}{R} e_\phi - \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{R \sin \theta} e_\phi \\
\frac{\partial}{\partial\phi}(A^i e_i) &= \sin^2 \theta \left(\frac{\cos \theta}{R} - \frac{\cos \theta}{R} \right) e_\theta \\
\frac{\partial}{\partial\phi}(A^i e_i) &= 0
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

La derivada $\frac{\partial}{\partial\phi} A^i e_i$ es 0, puesto que A no depende de ϕ . En los siguientes pasos, se sustituyeron los coeficientes de A 5.3.1 y los símbolos de Christoffel diferentes de cero 5.2. Se puede observar que la derivada del vector en la trayectoria propuesta es 0, con esta idea podemos definir lo que es un vector constante a través de la trayectoria. Finalmente, la derivada de un vector a través de una trayectoria es:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} \vec{A} &= \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} (A^j e_j) \\
\frac{d}{d\lambda} \vec{A} &= (u^i \nabla_i A^k) e_k
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

5.4. Transporte paralelo

Podemos encontrar un campo \vec{A} que sea constante a través de una trayectoria. Si esta ultima condición de cumple se dice que el campo es transportado paralelamente en una trayectoria. La ecuación que define esto es 5.3.4.

Un vector en la superficie de la esfera solamente tiene dos componentes ϕ y θ , así consideramos la trayectoria con $\theta = \pi/3$ y $\phi(\lambda) = \lambda$, los valores de u^i son $u^\theta = 0$ y $u^\phi = 1$. Según la ecuación 5.3.4 para el vector $\vec{A} = A^\theta e_\theta + A^\phi e_\phi$ tenemos:

$$\begin{aligned}
u^\theta \nabla_\theta A^\theta + u^\phi \nabla_\phi A^\theta &= 0; \quad \nabla_\phi A^\theta = 0 \\
u^\theta \nabla_\theta A^\phi + u^\phi \nabla_\phi A^\phi &= 0; \quad \nabla_\phi A^\phi = 0
\end{aligned} \tag{5.4.1}$$

La derivada covariante 6 de los vectores de la ecuación anterior son:

$$\begin{aligned}
\partial_\phi A^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\theta A^\phi &= 0; & \partial_\phi A^\phi + \Gamma_{\phi\theta}^\phi A^\theta &= 0 \\
\partial_\phi A^\theta - \sin\theta \cos\theta A^\phi &= 0; & \partial_\phi A^\phi + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} A^\theta &= 0 \\
\partial_\phi A^\theta - \frac{\sqrt{3}}{4} A^\phi &= 0; & \partial_\phi A^\phi + \frac{1}{\sqrt{3}} A^\theta &= 0 \\
\partial_\phi^2 A^\theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \partial_\phi A^\phi &= 0; & \partial_\phi A^\phi &= -\frac{1}{\sqrt{3}} A^\theta \\
\partial_\phi^2 A^\theta + \frac{1}{4} A^\theta &= 0
\end{aligned} \tag{5.4.2}$$

La condición inicial de la ecuación diferencial es $\vec{A}_{(\theta=\pi/3, \phi=0)} = -e_\theta$ y su solución es:

$$\vec{A}_{(\phi)} = -\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) e_\theta + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) e_\phi \tag{5.4.3}$$

5.5. Transporte Paralelo vs Geodésicas

A continuación, estableceremos cómo se relaciona el transporte paralelo con las geodésicas. Para llegar a ello, primero caracterizaremos lo que significa transportar paralelamente un vector \vec{A} y su proyección en el espacio tangente asociado a cada punto.[17]

Consideremos las condiciones del ejemplo anterior la cuales son $\phi = 0$; $\theta = \pi/3$. Los vectores base en coordenadas esféricas son 5.1.2. Recordando que en la superficie esférica la componente radial se ignora. Finalmente, los vectores base del punto inicial y para un valor de ϕ pequeño son:

$$\begin{aligned}
e_\theta(0) &= \frac{1}{2} e_x - \frac{\sqrt{3}}{2} e_z; & e_\theta(\phi) &= \frac{1}{2} \cos\phi e_x + \frac{1}{2} \sin\phi e_y - \frac{\sqrt{3}}{2} e_z \\
e_\phi(0) &= \frac{\sqrt{3}}{2} e_y; & e_\phi(\phi) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\phi e_y - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\phi e_x
\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Inicialmente, $\vec{A} = -e_\theta(0)$, así igualándolo al de la ecuación anterior se tiene $\vec{A} = -\frac{1}{2}e_x + \frac{\sqrt{3}}{2}e_z$. Si proyectamos el vector A con los vectores base, se puede ver si el mismo tiene componente en dicha base, o sea que $\vec{A} \cdot e_\phi \neq 0$ o $\vec{A} \cdot e_\phi = 0$.

$$\vec{A} \cdot e_\phi = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\phi e_y - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\phi e_x \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} e_x + \frac{\sqrt{3}}{2} e_z \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\phi \tag{5.5.2}$$

Podemos ver que a medida que el vector A se desplaza por ϕ su “tamaño” respecto a la base e_ϕ va cambiando.

5.5.1. Geodésicas en Términos de la Derivada Covariante

Recordando la ecuación de una geodésica con el parámetro longitud de arco se tiene:

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\partial_\gamma g_{\beta\delta} + \partial_\delta g_{\beta\gamma} - \partial_\beta g_{\gamma\delta}] u^\gamma u^\delta = 0 \quad (5.5.3)$$

Si transportamos paralelamente a u^β tendríamos:

$$u^\alpha \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\gamma \right) = 0 \quad (5.5.4)$$

Desarrollando la derivada de u^α sería:

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\alpha u^\gamma = 0 \quad (5.5.5)$$

El primer término de la ecuación anterior, la ecuación 5.5.5, es la derivada de u^β respecto a λ o s . Si consideramos a λ como la longitud de arco. Si intercambiamos los índices $\beta \rightarrow \alpha$ y $\alpha \rightarrow \delta$:

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\delta\gamma}^\alpha u^\delta u^\gamma = 0 \quad (5.5.6)$$

La ecuación 5.5.6 y 5.5.3 son iguales si intercambiamos los índices de gamma, con esto se tendría que el símbolo de Christoffel es:

$$\Gamma_{\gamma\delta}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\partial_\gamma g_{\beta\delta} + \partial_\delta g_{\beta\gamma} - \partial_\beta g_{\gamma\delta}] \quad (5.5.7)$$

Esto es lo que se denomina conexión métrica y los símbolos de Christoffel se puede calcular también de esta forma. Sabemos que los símbolos de Christoffel aparecen al ver cómo varían los vectores base, con esto y la idea de transporte paralelo vemos que tiene una relación con los planos tangentes de cada punto de la variedad.

Capítulo 6

Órbitas en la Métrica de Schwarzschild

Uno de los resultados más interesantes de las Relatividad General de Einstein es la Solución de Schwarzschild. Esta solución de las ecuaciones de campo está dada en coordenadas esféricas (debido a su simetría), con características muy interesantes que diferencian los resultados de Newton (clásico) con respecto a los de Einstein. En la métrica de Schwarzschild, la solución a las ecuaciones de campo encontrada por Karl Schwarzschild, se encuentra una diferencia en las órbitas de los cuerpos alrededor de un astro, verbigracia: la precesión del perihelio de una órbita elíptica, inestabilidad de las órbitas y la implicación matemática de la existencia de singularidades espacio-temporales.[18]

La solución de Shwarszchild fue la primera solución que indica que dentro del marco de la teoría de la Relatividad General, existen regiones del espacio-tiempo con singularidades. En esta solución, la singularidad es temporal, donde la partícula deja de existir por cierto instante de tiempo.

Sir Roger Penrose, ganador del premio Nobel de Física en el 2020, obtuvo su galardón por “El descubrimiento que la formación de los agujeros negros son una consecuencia directa de la Teoría de la Relatividad General”. En 1964, él mostró, por medio de herramientas matemáticas, que la formación de agujeros negros es un proceso natural en el desarrollo del universo.[19]

6.1. La Métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild es una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, descubierta por Karl Schwarzschild en 1916. La misma describe el campo gravitacional dada las siguientes suposiciones:[17]

- Existe un cuerpo perfectamente esférico con masa M , sin momento angular ni carga eléctrica.
- El espacio es vacío.
- La constante cosmológica es nula.

Esta solución es una aproximación útil para describir las órbitas de objetos astronómicos alrededor de un astro masivo, por ejemplo la Tierra y el Sol.

Esta métrica se suele presentar como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6.1.1)$$

Debido a su simetría esférica, existen grados de libertad que permiten escoger un sistema de coordenadas que sea fácil de manejar.[20] Una partícula se va a mover alrededor de un cuerpo masivo en un plano tal que se conserve el momento angular. Así, podemos escoger un plano tal que

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} \longrightarrow \sin \theta = 1 \\ d\theta &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

También, se suele denominar el radio de Schwarzschild a,

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Así, la métrica en el plano se describe como,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (6.1.3)$$

6.1.1. Paraboloide de Flamm

Una variedad curva, verbigracia, el espacio de Schwarzschild, tiene una representación en el espacio Euclideo \mathcal{R}^3 . Esto se logrará induciendo la métrica en el espacio \mathcal{R}^3 . Tener aquella representación permite observar las peculiaridades de la variedad de manera visual; por ejemplo, qué representa moverse en una dirección considerada recta en la variedad respecto al espacio Euclideo.

La métrica expresada en forma matricial,

$$g = \begin{bmatrix} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad (6.1.4)$$

Y, al ser diagonal, permite separar el espacio del tiempo. Usando esta característica, se puede notar cómo se mide las longitudes entre dos puntos en la métrica.

Al tomar t constante, y el ds da la distancia entre dos puntos r_1 y r_2 . Para ilustrar, sea $\phi_1 = \phi_2 \longrightarrow d\phi = 0$,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 \\
\int ds &= \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}} dr \\
s &= \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}} dr
\end{aligned}$$

Esto es evidentemente diferente a cómo se mide la distancia entre dos puntos en un espacio plano.

Surge la pregunta, ¿es posible visualizar la métrica de Schwarzschild en un espacio Euclideo \mathbb{R}^3 ? El objetivo de responder esta interrogante es así poder observar cómo es la curvatura del espacio-tiempo, cuál es la distancia medida entre dos puntos. Pues la respuesta es sí, donde se aplica el concepto de métrica inducida en \mathbb{R}^3 .

Esta se le conoce como *Paraboloide de Flamm*, este se describe por la ecuación,

$$x^2 + y^2 = \left(r_s + \frac{z^2}{4r_s} \right)^2 = r^2 \quad (6.1.5)$$

que resulta en una figura muy bien conocida:

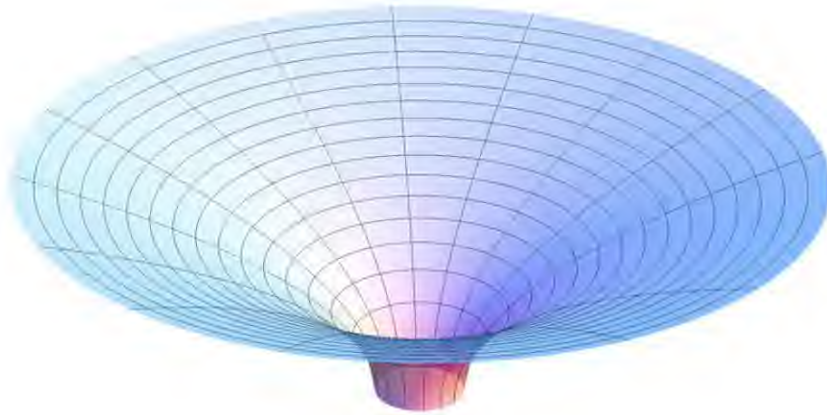


Figura 6.1: Paraboloide de Flamm.

Tomemos la métrica en \mathbb{R}^3 en forma cilíndrica:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
r &= r_s + \frac{z^2}{4r_s} \\
dr &= \frac{z}{2r_s} dz \\
dz^2 &= \frac{r_s}{r - r_s} dr^2
\end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en la métrica de \mathbb{R}^3 cilíndricas,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Con $r_1 \neq r_2$, y $\phi_1 = \phi_2$, se obtiene el resultado esperado.

6.2. Ecuación de Movimiento para una Partícula Libre

Se va a deducir la ecuación del movimiento para una partícula libre en el espacio de Schwarzschild; sin embargo, para lograr esto, definamos primero cómo es el Lagrangiano de una partícula libre.

6.2.1. Lagrangiano de una Partícula Libre

Hallar el Lagrangiano del sistema permitirá obtener las cantidades físicas que se conservan en la evolución temporal del sistema; además, nos conducirá a la obtención de la ecuación de movimiento del sistema.

Recordando la ecuación 4.2.6 que tiene la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right)} \right) = 0$$

donde f es,

$$f = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} \quad (6.2.1)$$

Pero, se puede definir el Lagrangiano \mathcal{L} de una manera más simple: con la elección de un parámetro afín (sección 4.2.1). Se tiene que aplicar un parámetro, tal que cumpla la ecuación 4.2.9,

$$\begin{aligned} s &= \int f d\lambda = \int 1 ds \\ \implies f &= 1 \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

El parámetro que usaremos permite cumplir esta condición, es uno que se va a definir con la métrica de manera que,

$$ds^2 = -c^2 d\lambda^2$$

Esto logra cumplir la condición para el parámetro afín donde tiene que ser igual a la longitud de la curva.

El parámetro λ , definido de esta manera, se le conoce como *tiempo propio* τ , y $d\tau$ es el *intervalo del tiempo propio*. Se suele entender por tiempo propio como el tiempo medido

por un reloj que sigue la línea de tiempo ds . [21] Cumple con ser un invariante escalar de Lorentz, esto es que es invariante bajo transformaciones de coordenadas. [20]

Ahora, por cuestión de nomenclatura, una cantidad que se derive por el tiempo propio se acentuará con un punto, esto es,

$$\begin{aligned}\frac{dx^\mu}{d\tau} &= \dot{x}^\mu \\ \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} &= \ddot{x}^\mu\end{aligned}$$

Así, se aplican las ecuaciones 6.2.1 y 6.2.2, de manera que,

$$\begin{aligned}f &= \sqrt{-g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^j} = 1 \\ &= g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^j = -1\end{aligned}$$

Esta última expresión denotará nuestro Lagrangiano para una partícula libre en Relatividad General¹. Este Lagrangiano insertado en la ecuación de Euler-Lagrange resulta en las ecuaciones de las Geodésicas, como era de esperarse. [22]

$$\mathcal{L} = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = -1 \tag{6.2.3}$$

6.2.2. Deducción de la Ecuación de Movimiento

Para estudiar la forma de la ecuación de movimiento para una partícula libre, primero adimensionemos la métrica (ec. 6.1.1), de manera que $G = 1$, $c = 1$ y $M = 1$. Así, toma la forma,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2}{r}} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Se aplica el tiempo propio, ya definido como,

$$ds^2 = -d\tau^2$$

Así, aplicando la métrica (ec. 6.1.3), el Lagrangiano (ec. 6.2.3) toma la forma,

$$\mathcal{L} = -\left(1 - \frac{1}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2}{r}} \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = -1 \tag{6.2.4}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtienen 4 ecuaciones, donde se van a aplicar las siguientes 3 ecuaciones:

¹También conocida como Formulación Covariante. Esta ecuación puede ser aplicada para partículas libres con o sin masa.

Asociada a t :

$$\frac{d}{d\tau} \left[\dot{t} \left(1 - \frac{2}{r} \right) \right] = 0$$

Donde se observa que lo que esta entre paréntesis cuadrados se conserva. Al estar asociado al tiempo, podemos inferir que se trata de la energía E del sistema.

$$\dot{t} = \frac{E}{1 - \frac{2}{r}} \quad (6.2.5)$$

Asociada a θ :

$$\begin{aligned} 2r^2\dot{\theta} - 2r^2\dot{\theta} \cos\theta\dot{\phi}^2 &= 0 \\ \dot{\theta} \left(1 - \cos\theta\dot{\phi}^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Asociada a ϕ :

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin^2\theta\dot{\phi} \right) = 0$$

Al estar asociado al ángulo ϕ , se puede inferir que esta constante es el momento angular L .

Como la simetría del sistema es esférica, podemos aplicar una ligadura tal que: $\dot{\theta}$ sea nulo. Por lo tanto, se tiene que,

$$\dot{\theta} = 0 \quad (6.2.6)$$

Y, sin pérdida de generalidad, podemos escoger $\theta = \pi/2$. Así se obtiene que,

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \quad (6.2.7)$$

Ahora, se puede proceder a derivar la ecuación, aplicando los resultados de las ecuaciones 6.2.6, 6.2.5 y 6.2.7, en la ecuación 6.2.4, donde se obtiene,

$$\begin{aligned} - \left(1 - \frac{2}{r} \right)^{-1} \frac{E^2}{\left(1 - \frac{2}{r} \right)^2} + \left(1 - \frac{2}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \frac{L^2}{r^4} &= -1 \\ - \frac{E^2}{\left(1 - \frac{2}{r} \right)} + \left(1 - \frac{2}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} &= -1 \end{aligned}$$

Arreglando este resultado, obtenemos que

$$\frac{E^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \left[\frac{-1}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2}{r^3} \right]$$

El lado izquierdo de la ecuación se puede interpretar como la energía del sistema, el mismo se denotará como ϵ . Así se obtiene,

$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \left[\frac{-1}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2}{r^3} \right] \quad (6.2.8)$$

El resultado obtenido muestra la importancia de las consideraciones relativistas que se han hecho a lo largo del trabajo. Para esto, se muestra el resultado ya obtenido de la energía para el marco Newtoniano (ec. 2.2.6),

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{Mm}{r}$$

Se observa que en la ecuación 6.2.8 surge un término extra proporcional a r^{-3} . Ahora, se prosigue de manera muy similar a la sección 2.2.1 para hallar la ecuación diferencial que describe el movimiento en una dimensión.

Realizando el cambio de variable,

$$u = \frac{1}{r}$$

$$du = -\frac{1}{r^2} dr$$

Luego, se deriva por ϕ , para obtener,

$$0 = \frac{du}{d\phi} \left[L^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} + L^2u - 1 - 3L^2u^2 \right]$$

Evidentemente, el primer factor es no nulo, por tanto lo que está entre paréntesis es igual a 0. Donde se logra obtener así la ecuación de movimiento adimensionada como,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3u^2 = \frac{1}{L^2} \quad (6.2.9)$$

6.2.3. Límite Clásico

Ahora, para poder comparar con la ecuación del movimiento en el marco clásico 2.3.1, se procede a colocar las dimensiones en el resultado obtenido, donde,

$$u = \frac{1}{2} r_s u$$

$$L = \frac{2L}{mcr_s}$$

$$r_s = \frac{GM}{c^2}$$

Así,

$$\left[\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = G \frac{Mm^2}{L^2} \right] + 3 \frac{GM}{c^2} u^2$$

La expresión matemática señalada con los corchetes es igual a la ecuación obtenida en la sección 2.3, ec. 2.3.1. Esta ecuación sirve en el marco clásico, ya que para masas M pequeñas y r suficientemente grandes², se tiene que,

$$GMu^2 = GM \frac{1}{r^2} \lll c^2 \quad (6.2.10)$$

6.3. Estudio de las Órbitas por medio del Potencial y la Energía

Se procede a estudiar la forma que tendría el movimiento orbital de acuerdo a la energía ϵ y el potencial V , de manera similar a como se realizó en el marco clásico (sección 2.2.1).

Se tiene que la energía en la solución de Schwarzschild es,

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{1}{r} - \frac{L^2}{r^3}$$

El potencial V es,

$$V(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{1}{r} - \frac{L^2}{r^3} \quad (6.3.1)$$

Para estudiar cómo se comporta el potencial, resulta útil hallar los puntos críticos. Para esto, se toma la derivada del potencial igual a cero, para hallar los siguientes puntos,

$$\begin{aligned} r_{c1} &= \frac{L^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12}{L^2}} \right) \\ r_{c2} &= \frac{L^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12}{L^2}} \right) \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

y, con la segunda derivada del potencial, se reemplaza estos puntos para hallar que puntos son mínimos o máximos, en donde se obtiene que,

$$\begin{aligned} V''(r_{c1}) &> 0 \longrightarrow \text{Mínimo} \\ V''(r_{c2}) &< 0 \longrightarrow \text{Máximo} \end{aligned}$$

²Para la masa del Sol, esa distancia es de unos pocos kilómetros, mientras que el radio del Sol es 696 000 km. Por tanto, estas distancias no son alcanzables para notar la perturbación provocada por ese término, por eso es que la teoría de Newton funciona de manera aceptable.

Aquí se usó el hecho que $L^2 \geq 3\sqrt{2}$ para que la raíz sea real, y así ver el signo de la segunda derivada del potencial.

Evidentemente, la forma del potencial va a estar dictada por el valor que toma L , recordando que es una constante, se puede hallar distintas peculiaridades de V de acuerdo a que valor toma L .

Primero, se observa que los puntos críticos 6.3.2 toman el mismo valor si $L = 3\sqrt{2}$. En este caso, este punto es un punto crítico,

$$\begin{aligned} r_f &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ V'(r_f) &= 0 \\ V''(r_f) &= 0 \longrightarrow \text{inflexión} \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Se obtiene 3 tipos diferentes de comportamientos para el potencial de acuerdo al valor de L ,

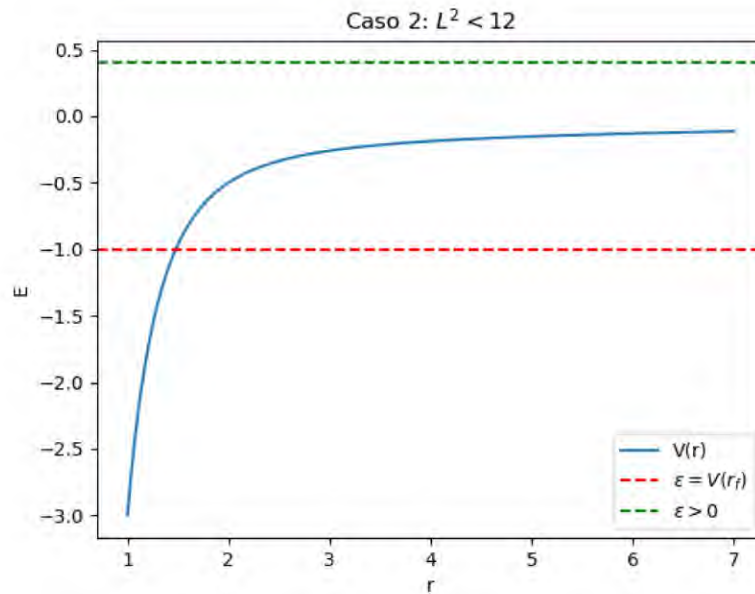


Figura 6.2: Potencial V para $L^2 < 12$ donde se observa que toma la forma de una curva sin puntos críticos.

Caso 1 ($L < 2\sqrt{3}$): Los puntos críticos no tienen solución real, ni existirá un punto de inflexión. La curva se muestra en la figura 6.2.

La forma de la órbita va a depender de la energía ϵ , donde si es negativa la masa m va a caer hacia adentro al centro del cuerpo M . Si es positiva, y la dirección de la velocidad es positiva, se va a alejar del centro, mientras que si es negativa, se va a dirigir al centro.

Así, denotamos las órbitas, según estas condiciones, como se muestra en la siguiente tabla,

Caso 2 ($L = 2\sqrt{3}$): Como se describió previamente, para este caso los puntos críticos son iguales, y se forma es un punto de inflexión.

Tabla 6.1: Caso 1 - $L < 2\sqrt{3}$

Caso	Condiciones	Resultado
1.a	$\epsilon < 0$ & $L \neq 0$	Órbita radial dirigida al centro
1.b	$\epsilon > 0$, $L \neq 0$ & $\dot{r} > 0$	Órbita radial alejándose para después caer

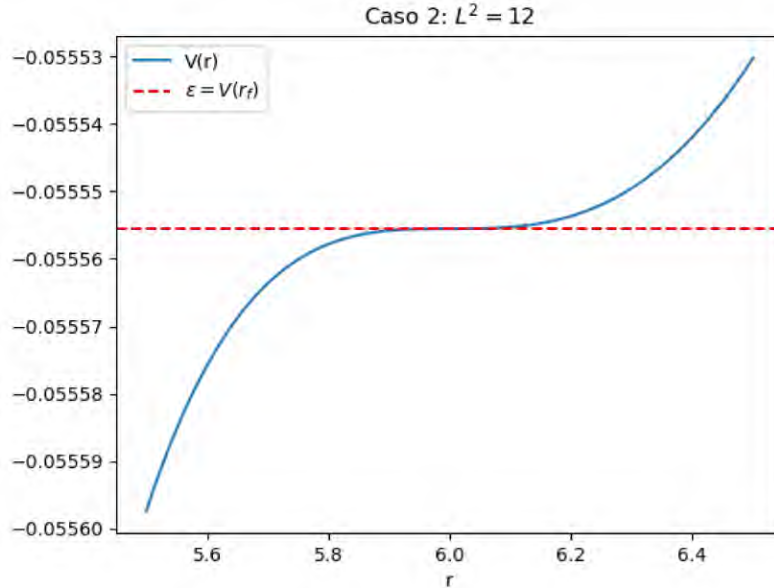


Figura 6.3: Potencial V para $L^2 = 12$, y energía $\epsilon = V(r_f)$, donde solo existe el punto de inflexión.

La órbita interesante a estudiar es cuando la energía ϵ es igual al potencial en el punto de inflexión (figura 6.4). En este particular caso, se espera que el cuerpo orbitante forme un movimiento circular; sin embargo, por la forma del potencial, debido a que en para $r < r_f$ el potencial disminuye, entonces la órbita es inestable. Se tendrá, pues, que el sistema es susceptible a cualquier perturbación. Para observar esto, se estudiara el movimiento para $\dot{r} = 0$.

Tabla 6.2: Caso 2 - $L = 2\sqrt{3}$

Caso	Condiciones	Resultado
a	$\epsilon = V(r_f)$ & $\dot{r} = 0$	Órbita circular inestable

Caso 3 ($L^2 > 2\sqrt{3}$): Los puntos críticos toman valores reales y diferentes, donde se van a presentar diferentes tipos de órbitas de acuerdo a L , r_0 y la energía ϵ .

El potencial tendrá dos peculiaridades: que su máximo $V(r_{c1}) \geq 0$, o que $V(r_{c1}) < 0$.; al primero se denotara con V_1 , y al segundo V_2 Los distintos casos se detallan en la siguiente tabla con las condiciones necesarias,

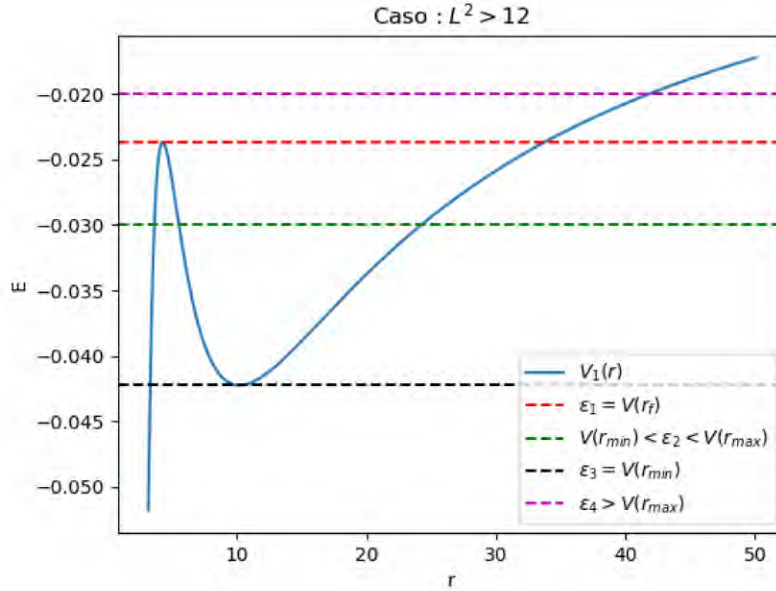


Figura 6.4: Potencial V para $L > 2\sqrt{3}$.

Tabla 6.3: Caso 3 - $L > 2\sqrt{3}$

Caso	Condiciones	Resultado
3.a	$\epsilon = \epsilon_1$ & $r = r_{c1}$	Órbita circular inestable
3.b	$\epsilon = \epsilon_2$ & $r_{c1} < r < r_{c2}$	Si L es pequeño, campo gravitatorio fuerte
3.c	$\epsilon = \epsilon_2$ & $r < r_{c1}$	Órbita dirigida al origen
3.d	$\epsilon = \epsilon_3$ & $r = r_{c2}$	Órbita circular estable
3.e	$\epsilon > \epsilon_4$ & $r > r_{c2}$	Órbita en espiral
3.f	$\epsilon = \epsilon_2$ & $r_{c1} < r < r_{c2}$	Si L es suficientemente grande, campo gravitatoria débil

Capítulo 7

Resultados

Los resultados del proyecto se categorizarán considerando los siguientes aspectos:

1. **Órbitas en la métrica de Schwarzschild:** resolver la EDO en 2D y graficar las diferentes órbitas dependiendo del potencial V ;
2. **Símbolos de Christoffel:** obtención de los Símbolos de Christoffel a partir del tensor métrico;
3. **Solución de la ecuación de las geodésicas:** Aplicando los símbolos de Christoffel, obtener el sistema de ecuaciones diferenciales para resolverlas por métodos numéricos.

7.1. Órbitas en la métrica de Schwarzschild

Como la ecuación de las órbitas en la métrica Schwarzschild es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, se procederá a usar el método de diferencias finitas para hallar una solución numérica. El motivo de buscar una solución numérica para la ecuación diferencial es debido a que no existe una solución analítica para la misma¹,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3Mu^2 = \frac{M}{L^2} \quad (7.1.1)$$

donde se toma $G = c = 1$.

7.1.1. Método Numérico

El método consiste en considerar una Δx pequeño, y expandir la función en serie de Taylor como sigue: [23]

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \dots \\ f(x - \Delta x) &= f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \dots \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

¹La ecuación tiene una solución con integrales hiperbólicas

Se restan las ecuaciones de 7.1.2, para obtener una aproximación con exactitud de segundo orden de la derivada de la función, que tiene la forma:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (7.1.3)$$

Se sigue el mismo procedimiento para obtener una aproximación de misma exactitud para la segunda derivada de la función, esta tiene la forma:

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (7.1.4)$$

Se opta por usar la notación $u_i = u(\phi)$, y $u_{i+1} = u(\phi + \Delta\phi)$. Aplicando la segunda derivada 7.1.4, a la ecuación de las órbitas 7.1.1, se obtiene,

$$u_{i+1} = \frac{M}{L^2} + 2u_i - \Delta\phi^2 u_i - 3M\Delta\phi^2 u_i^2 - u_{i-1} \quad (7.1.5)$$

Que se puede resolver con la condición inicial $u_0 = 1/r_0$. Excepto para $u_1 \rightarrow i = 0$, donde el último término toma el valor u_{-1} . Para resolver esto, tomemos la aproximación de la primera derivada 7.1.3, con $i = 0$ que resulta en,

$$u_{-1} = u_1 - 2\Delta\phi\dot{u}_0$$

Donde se tiene la condición inicial para la rapidez $\dot{u}_0 = -\dot{r}_0/r_0^2$. Reemplazando en 7.1.5,

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{L^2} + 2u_i - \Delta\phi^2 u_i - 3M\Delta\phi^2 \right) + 2\Delta\phi\dot{u}_0 \quad (7.1.6)$$

7.1.2. Gráficas de los Diferentes Casos de acuerdo al Potencial

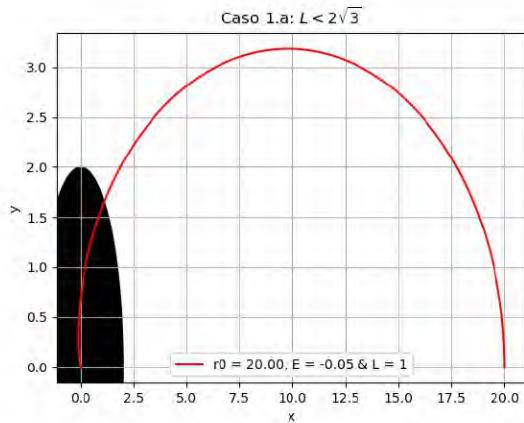
Se presentan las gráficas de acuerdo a los diferentes casos estudiados en el capítulo anterior.

Caso 1.a (fig. 7.1a) se observa que el cuerpo cae al centro de forma radial precipitadamente.

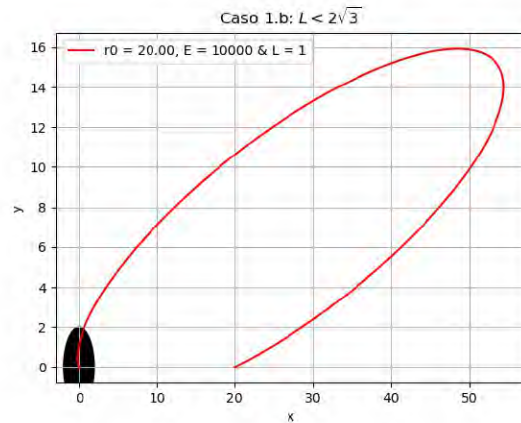
Caso 1.b (fig. 7.1b) el cuerpo al tener energía mayor a 0, la rapidez se toma positiva, él intenta escaparse; pero su energía se va agotando (ergo, su velocidad disminuye) al punto que retorna al centro.

Caso 2.a (fig. 7.2a) la inestabilidad de la órbita no es fácilmente notable. Es por esto, que en la fig. 7.2b, se hace un pequeño desplazamiento a r_0 (en el cuarto decimal) para observar como cae el cuerpo debido a la forma del potencial.

Caso 3.a (fig. 7.3a & 7.3b) la energía ϵ toma el valor igual al punto máximo del potencial, donde una pequeña perturbación afecta la órbita del cuerpo. Si existe un pequeño desplazamiento a la izquierda, el cuerpo caerá al centro (fig. 7.3b); mientras que si el desplazamiento es a la derecha, el cuerpo caerá en un pozo del potencial tomando órbitas radiales (fig. 7.3a).

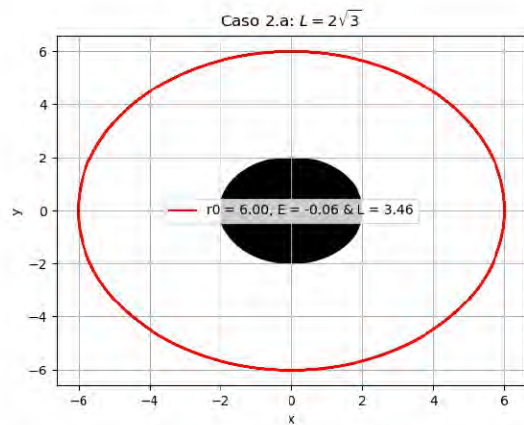


(a) Caso 1.a: Energía $\epsilon < 0$

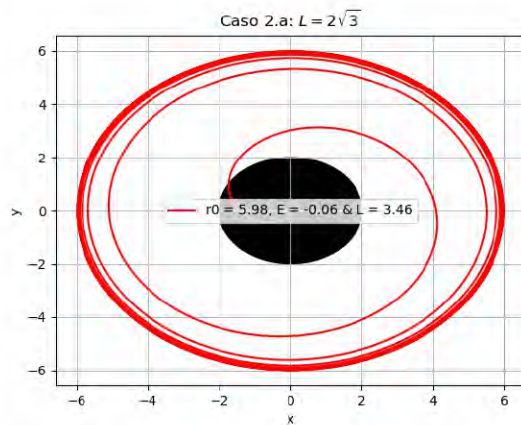


(b) Caso 1.b: Energía $\epsilon > 0$

Figura 7.1: Caso 1: $L < 2\sqrt{3}$, donde $L = 1$.



(a) Caso 2.a: Energía ϵ toca el punto de inflexión



(b) Caso 2.a: r_0 con un pequeño desplazamiento (en el cuarto decimal).

Figura 7.2: Caso 2: $L = 2\sqrt{3}$

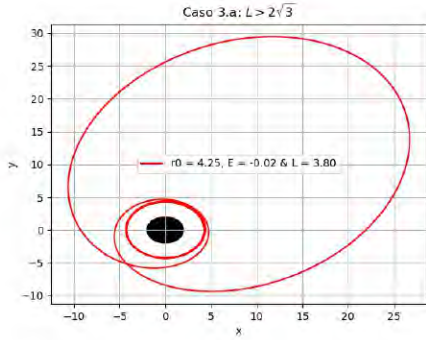
Caso 3.b (fig. 7.3c) la energía toma un valor mayor al máximo del potencial, quedando en un pozo de potencial. Debido a lo fuerte que es el potencial, no toma ninguna forma parecida al marco clásico, creando así una órbita excéntrica.

Caso 3.c (fig. 7.3d) la energía se encuentra entre los puntos críticos del potencial, pero la posición inicial r_0 se encuentra a la derecha del máximo del potencial. Así el cuerpo se precipita al centro.

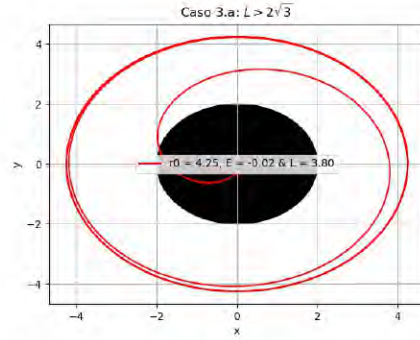
Caso 3.d (fig. 7.3e) la energía es igual al punto mínimo del potencial, y por tanto se forma una órbita circular estable.

Caso 3.e (fig. 7.3f) la energía es mayor al punto máximo del potencial, y debido a eso escapa del pozo de potencial, precipitándose al centro con una forma parecida a la curva logarítmica.

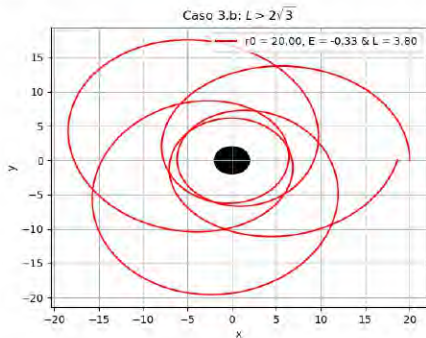
Caso 3.f (fig. 7.3g) la energía se encuentra entre el punto máximo y mínimo del potencial, donde r_0 es tal que el cuerpo se encuentra en un pozo de potencial. Como el potencial



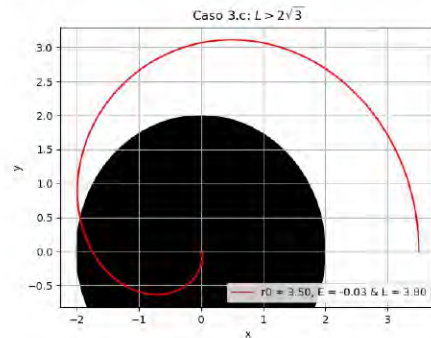
(a) Caso 3.a: Energía ϵ en el punto máximo del potencial



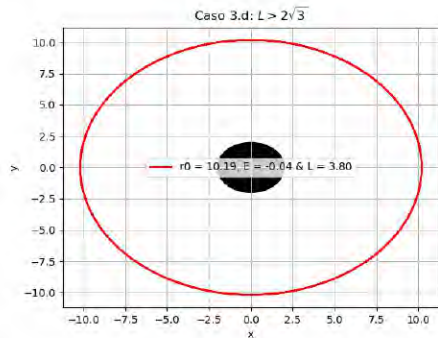
(b) Caso 3.a: Energía ϵ en el punto máximo del potencial.



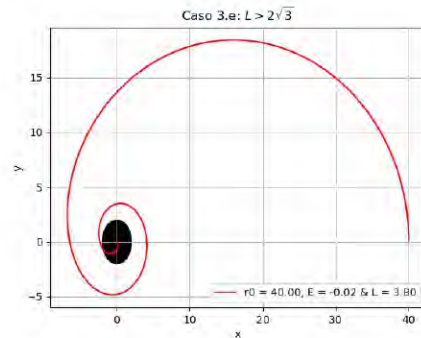
(c) Caso 3.b: Energía ϵ entre los puntos críticos con un potencial fuerte.



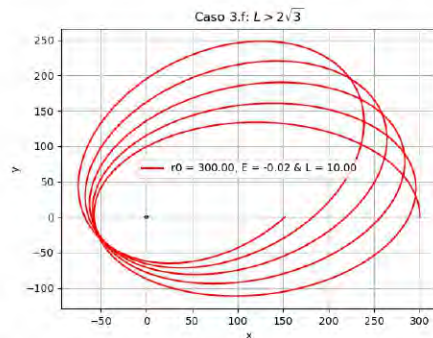
(d) Caso 3.c: Energía ϵ menor al punto máximo del potencial.



(e) Caso 3.d: Energía ϵ igual al punto mínimo del potencial.



(f) Caso 3.e: Energía ϵ mayor al punto máximo del potencial.



(g) Caso 3.f: Energía ϵ entre los puntos críticos del potencial, donde el potencial es débil.

Figura 7.3: Caso 3: $L > 2\sqrt{3}$, donde $L = 3,8$ para el potencial fuerte & $L = 10$ para el potencial débil.

es débil, la órbita es similar a una órbita elíptica en el marco clásico; sin embargo, por el término perturbativo extra por las consideraciones relativas, existe una precesión en el perihelio.

7.2. Cálculo de los Símbolos de Christoffel

La ecuación principal que se optó para hallar los símbolos de Christoffel es la ecuación 5.5.7,

$$\Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\partial_{\gamma}g_{\beta\delta} + \partial_{\delta}g_{\beta\gamma} - \partial_{\beta}g_{\gamma\delta}]$$

En donde vemos que el programa tiene que cumplir las siguientes operaciones:

- Realizar derivadas parciales
- Calcular la matriz inversa
- Hacer una suma cíclica

El último punto es sencillo de realizar, usando cualquiera de los ciclos que nos permita el lenguaje de programación. Debido a la suma que se debe hacer contando el índice mudo (β), en donde los demás son índices libres (α , γ y δ) indicarán cual símbolo de Christoffel se está calculando.

Así, se optó por un ciclo de *for* los cuales comienzan por los índices libres para terminar sumando en el último *for* el índice mudo, y así calcular el Símbolo de Christoffel que corresponde (figura 7.4).

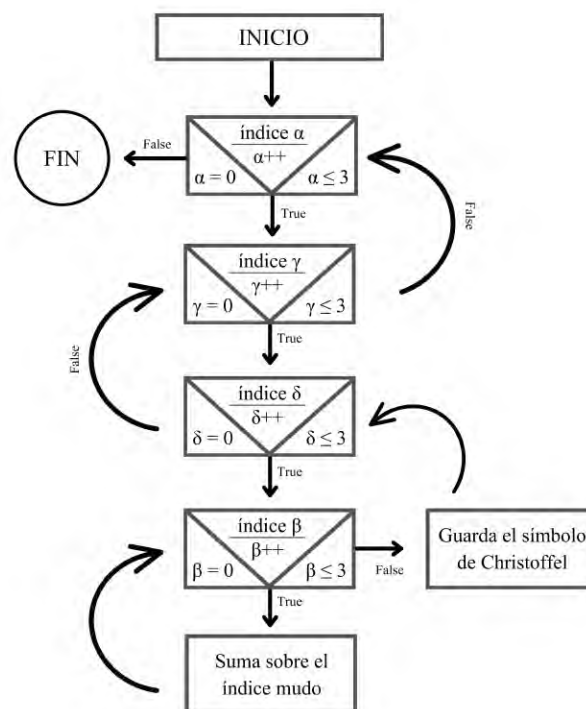


Figura 7.4: Diagrama de flujo para el ciclo *for* anidado.

Para el cálculo de la matriz inversa, se va a usar las facilidades que permite el lenguaje de programación *python*, que con la librería *sympy* podemos calcular la inversa de una matriz si tenemos un objeto *Matrix* (en donde se van a guardar los elementos de la métrica y una función *inv*, aplicando el método de *descomposición LU* (LU del inglés *Lower-Upper*). Este método es frecuentemente aplicado para obtener la matriz inversa con una computadora. [24]

Y, por último, para poder realizar los cálculos de la ecuación 5.5.7, que incluye multiplicación, suma y derivadas parciales, se seguirá sacando provecho de la librería *sympy* la cual permite hacer esos cálculos con símbolos y las derivadas.

7.2.1. Resultados

Se presenta una figura de lo que arroja el programa aplicando lo descrito en la sección anterior.

```
(base) C:\Users\Admin\OneDrive\Documentos\Tesis>python Calc_Chr.py
Los elementos no nulos son:
[ 0 0 1 ] 1.0/(r*(r - 2))
[ 0 1 0 ] 1.0/(r*(r - 2))
[ 1 0 0 ] (r - 2.0)/r**3
[ 1 1 1 ] -1.0/(r*(1.0*r - 2.0))
[ 1 2 2 ] 2.0 - 1.0*r
[ 1 3 3 ] (2.0 - 1.0*r)*sin(theta)**2
[ 2 1 2 ] 1.0/r
[ 2 2 1 ] 1.0/r
[ 2 3 3 ] -0.5*sin(2*theta)
[ 3 1 3 ] 1.0/r
[ 3 2 3 ] 1.0/tan(theta)
[ 3 3 1 ] 1.0/r
[ 3 3 2 ] 1.0/tan(theta)
```

Figura 7.5: Resultado del programa que calcula los Símbolos de Christoffel para la métrica de Schwarzschild.

En donde, los números que están entre corchetes representan los índices de los Símbolos de Christoffel,

$$[i, j, k] \longrightarrow \Gamma_{jk}^i \quad (7.2.1)$$

Por lo tanto, el conjunto de Símbolos de Christoffel (no nulos) tiene como elementos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{r(r-2)} \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{r-2}{r^3} \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{-1}{r(r-2)} \\
\Gamma_{22}^1 &= 2-r \\
\Gamma_{33}^1 &= (2-r)\sin^2\theta \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}\sin(2\theta) \\
\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned} \tag{7.2.2}$$

7.3. Ecuación de las Geodésicas

Con los resultados de la sección anterior, fácilmente se pueden obtener las ecuaciones que describen la geodésica para la partícula libre en la métrica de Schwarzschild. Esto se realiza aplicando la ecuación 5.5.6,

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\delta\gamma}^\alpha u^\delta u^\gamma = 0$$

Primero, se tiene que tomar en cuenta la ligadura:

$$\begin{aligned}
d\theta &= 0 \\
\theta &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

que ayuda a reducir los cálculos a realizar de la siguiente manera:

- Si algún índice es igual a 2, se omite la ecuación ya que se tendrá un $d\theta$, que es nulo.
- Al ser $\theta = \pi/2$, no se tendrá esa variable a trabajar, sino una constante; y, además, $\sin\theta = 1$.

Así, se logran obtener las dos ecuaciones espaciales para las geodésicas:

$$\ddot{r} = \frac{2-r}{r^3}\dot{t}^2 + \frac{1}{r(r-2)}\dot{r}^2 + (r-2)\dot{\phi}^2 \tag{7.3.1}$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} \tag{7.3.2}$$

Y, t se definió en la ecuación 6.2.5,

$$\dot{t} = \frac{E}{1 - \frac{2}{r}}$$

o, en términos de la energía ϵ ,

$$\dot{t} = \frac{\sqrt{2\epsilon + 1}}{1 - \frac{2}{r}} \quad (7.3.3)$$

por último, también se definió $\dot{\phi}$ como,

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \quad (7.3.4)$$

7.3.1. Método Numérico para las Geodésicas

Con los resultados presentados en las ecuaciones 7.3.1, 7.3.2, 7.3.3 y 7.3.4; se procede a definir un método numérico que permita aproximar la solución de este conjunto de ecuaciones.

Se optó por un método sencillo de implementar y comprender, el cual consiste en que una función se recorre en pasos finitos muy pequeños. Esto se puede entender en que se hace un “zoom” a la función de manera que se vea la función de un punto a otro como una recta. Así, la función (recorriendo pasos muy pequeños) se puede definir como,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x)$$

Así, se aplica esto para la velocidad y posición de x^μ con la nomenclatura de la sección 7.1.1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1}^\mu &= \dot{x}_i^\mu + \Delta\tau \ddot{x}_i^\mu \\ x_{i+1}^\mu &= x_i^\mu + \Delta\tau \dot{x}_i^\mu \end{aligned}$$

Sin embargo, se puede hacer el método más preciso y de manera muy sencilla. Sí la velocidad se esta considerando como una función lineal, esto es que la aceleración es constante, entonces se puede hacer uso de las ecuaciones de MRUA (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado), de manera que,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1}^\mu &= \dot{x}_i^\mu + \Delta\tau \ddot{x}_i^\mu \\ x_{i+1}^\mu &= x_i^\mu + \Delta\tau \dot{x}_i^\mu + \frac{1}{2} \ddot{x}_i^\mu \Delta\tau^2 \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Se puede observar de las ecuaciones 7.3.1 y 7.3.2, que las aceleraciones son funciones de varias variables:

$$\ddot{x}^\mu = \ddot{x}^\mu(x^\alpha, \dot{x}^\gamma)$$

Esto no presenta ningún impedimento para el método descrito, ya que se está definiendo el salto x_{i+1} en términos del punto anterior. Esto es decir, que conociendo las condiciones iniciales, el método se puede aplicar sin ningún problema.

Para poder aplicar el método se necesitan condiciones iniciales, y como es de esperarse, al ser una ecuación diferencial de segundo orden, se necesitan posiciones iniciales y velocidades iniciales.

Para el radio: el radio inicial se escoge de acuerdo al caso que se quiera estudiar (ver sección 6.3), y la velocidad radial, se aplica la ecuación 6.2.5,

$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \left[\frac{-1}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2}{r^3} \right]$$

Así,

$$\dot{r} = \sqrt{2(\epsilon - V)} \quad (7.3.6)$$

y, para el ángulo ϕ , se escogió que la posición inicial sea 0, mientras que para la velocidad, se aplica la ecuación 7.3.4.

7.3.2. Resultados de las Geodésicas

Aplicar las geodésicas permite estudiar como el sistema evoluciona en el tiempo. En este trabajo se usó el tiempo τ , pero es posible estudiarlo para un tiempo relativo t , donde se puede usar el truco,

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{dQ}{dt} \dot{t}$$

Se procede a presentar algunos de los casos, y como va evolucionando el tiempo τ :

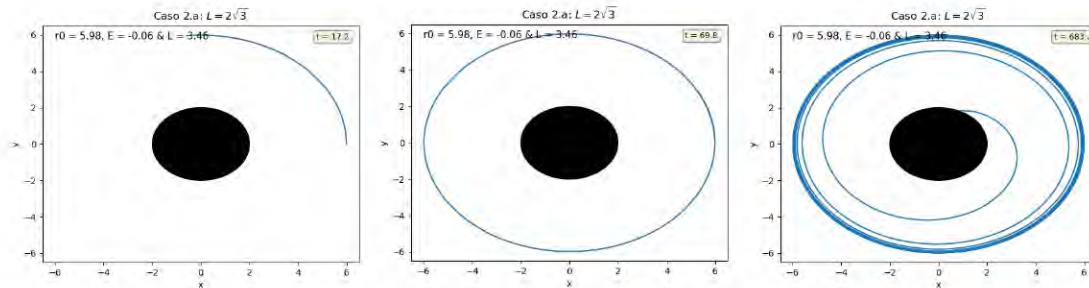


Figura 7.6: Evolución en el tiempo del Caso 2.a.

Para las órbitas que tienen un movimiento elíptico como los casos: 3a, 3b y 3f, el recorrido que se da en los puntos más alejados del centro son más lentos que los que están cerca del centro. Evidentemente, esto se da debido a que la curvatura del espacio-tiempo es mayor a medida que nos acercamos al centro (Paraboloide de Flamm, fig. 6.1).

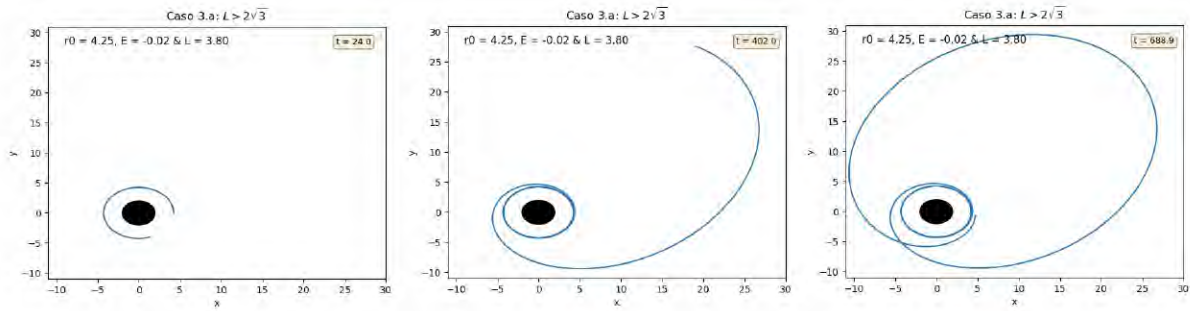


Figura 7.7: Evolución en el tiempo del caso 3.a para un $r_0 = 4,2522$.

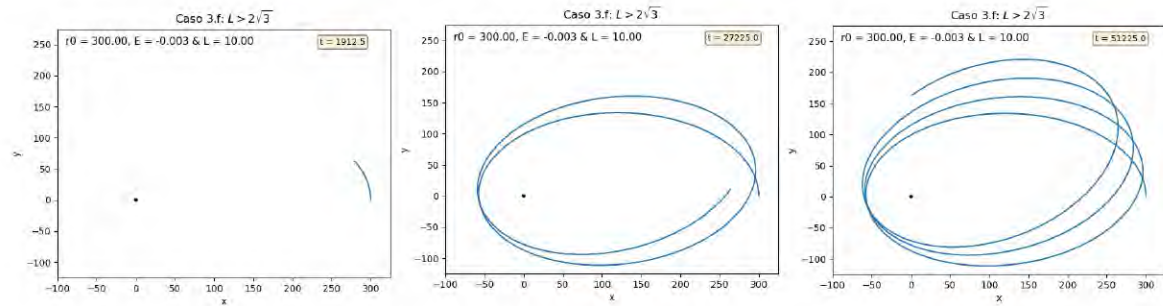


Figura 7.8: Evolución en el tiempo del caso 3.f.

Para las órbitas que caen al centro, como las órbitas: 1a, 1b, 2a, 3a, 3c, 3e; si el cuerpo primero se aleja del centro, lo hace disminuyendo su velocidad, hasta que sea nula; este movimiento lo hace lentamente comparado al movimiento de caer al centro. De ahí, el cuerpo empieza a caer, aumentando su velocidad rápidamente debido a la curvatura del espacio-tiempo. Pero, su rapidez angular no es suficiente como para orbitar el cuerpo M , causando que este caiga al centro, y lo realiza rápidamente.

Capítulo 8

Conclusión y Recomendación

8.1. Conclusión

Se logró obtener tres definiciones de los Símbolos de Christoffel que nos permite entender su significado e importancia. Además, de poder aplicarlos para estudiar conceptos que nos ayudan en física, como lo son las Geodésicas.

Se estudió las Geodésicas como la longitud mínima entre dos puntos para cualquier variedad, además de conectarlo con el concepto de Transporte Paralelo, donde se aplican los Símbolos de Christoffel.

Se examinó el concepto de Paralelismo, y se estudió que significa ser paralelo en variedades curvas, que permitió definir una derivada para cualquier variedad: Derivada Covariante; y, además, ver se puede transportar un vector a través de una variedad para mantenerlo paralelo. Este concepto se usó para definir las Geodésicas aplicando los Símbolos de Christoffel.

Se estudio el problema de dos cuerpos con una de las soluciones de las ecuaciones de las Ecuaciones de Campo de Einstein: Solución de Shwarzschild. Se comparó con la teoría de Newton y se observó las limitaciones que tiene la teoría de Newton vs. la teoría de Relatividad General.

Se logró estudiar diferentes órbitas con respecto al momento angular y la energía del cuerpo que órbita. Observando distintas situaciones que no se logran explicar con la teoría de Newton.

Se creo un programa con el lenguaje de programación Python que permitió hacer el estudio de las órbitas aplicando métodos numéricos. Estudiándolas respecto a la energía y momento angular, y su evolución respecto al tiempo propio del cuerpo que orbita.

8.2. Recomendación

Se recomienda usar otro método numérico para resolver las ecuaciones diferenciales que disminuya el error.

También, se recomienda aplicar otra solución de las Ecuaciones de Campo de Einstein para estudiar otras situaciones que se logran explicar sólo con la Teoría de la Relatividad

General.

Bibliografía

- [1] K. Shwarzschild. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1916. ISBN: 1916AbhKP.....189S. URL: <http://archive.org/details/sitzungsberichte1916deutsch/page/188/mode/2up?view=theater> (vid. pág. 3).
- [2] J. R. Limascca R. & Prado. «Teoría de Superficies de Variedades Riemannianas de Dimensión Tres». Tesis doct. Perú: Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, 2018 (vid. págs. 3, 20).
- [3] V. Guillemin y A. Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974. ISBN: 0-13-212605-2 (vid. pág. 3).
- [4] J. P. Fortney. *A Visual Introduction to Differential Forms and Calculos on Manifolds*. ebook. Birkhäuser, 2018. ISBN: 978-3-319-96992-3. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-96992-3> (vid. pág. 4).
- [5] Fowles Cassiday. *Analytical Mechanics*. David Harris, 2005. ISBN: 0-534-49492-7 (vid. pág. 4).
- [6] L. D. Landau. *Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 1976. ISBN: 0-7506-2896-0 (vid. pág. 7).
- [7] Moise E. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Butterworth-Heinemann, 1990. ISBN: 0-201-50867-2 (vid. pág. 14).
- [8] Adam Marsh. *Mathematics for Physics. An illustrated Handbook*. URL: www.mathphysicsbook.com. (accesado: 05.01.2021) (vid. pág. 15).
- [9] Lee John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2012. ISBN: 978-1-441-99981-8 (vid. págs. 15, 19).
- [10] Min Ru. *Riemannian Geometry, Metric, Connections, Curvature Tensors etc*. University of Houston, 2011 (vid. pág. 17).
- [11] A. Ramírez MAnzanares. *Propiedades de matrices definidas positivas*. 2016. URL: https://www.cimat.mx/~alram/met_num/clases/clase09.pdf (visitado 01-08-2021) (vid. pág. 17).
- [12] D. F. Lawden. *Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*. Dover Publication, INC., 2002 (vid. pág. 20).
- [13] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 3rd Edition*. Perish, Inc., 1999. ISBN: 978-0-914-09870-6 (vid. pág. 24).
- [14] Wikipedia. *Geodésica*. 2021. URL: <https://es.wikipedia.org/wiki/Geod%C3%5C%A9sica> (visitado 13-05-2021) (vid. pág. 24).
- [15] Wikipedia. *Transporte Paralelo*. 2022. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Transporte_paralelo (visitado 22-10-2019) (vid. pág. 29).
- [16] V. Fock. *The Theory of Space, Time and Gravitation*. Great Britain: Pergamon Press, 1964 (vid. pág. 29).

- [17] Sean Carroll. *Space And Geometry*. Addison Wesley, 2004. ISBN: 0-8053-8732-3 (vid. págs. 34, 36).
- [18] Sean Carroll. *Lectures Notes on General Relativity*. 1997. URL: <http://itp.ucsb.edu/~carroll/notes/> (vid. pág. 36).
- [19] Wikipedia. *Roger Penrose*. 2022. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Roger_Penrose (vid. pág. 36).
- [20] C. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler. *Gravitation*. San Francisco. W. H. Freeman, 1973. ISBN: 0-7167-0344-0 (vid. págs. 37, 40).
- [21] R. J. Cook. «Physical time and physical space in general relativity». En: *Am J. Phys.* 72.2 (2003), págs. 214-219. DOI: 10.1119/1.1607338. URL: <https://zenodo.org/record/1236110#.Y2hGKmnMLIU> (vid. pág. 40).
- [22] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou y A. N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicist*. Cambridge University Press, 2006. ISBN: 9780521829519 (vid. pág. 40).
- [23] Michael R. Dennis Zill Cullen. *Differential Equations; With Boundary-Value Problems*. BrooksCole, Cengage Learning, 2009. ISBN: 0-495-10836-7 (vid. pág. 47).
- [24] G. H. Golub y C. F. Van Loan. *Matrix Computations (3rd ed.* Baltimore: Johns Hopkins, 1996. ISBN: 978-0-8018-5414-9 (vid. pág. 52).