UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

CONCEPTOS TOPOLÓGICOS GENERALIZADOS

ANA EDITH VARELA ACHURRA

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA PURA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2006

APROBADO POR:

Jaime Gutiérrez

Dr. JAIME GUTIERREZ
PRESIDENTE

Dr. ROGELIO ROSAS
MIEMBRO

MSc. JOSUE ORTIZ
MIEMBRO

Yolanda A. López

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 20 de abril de 2006

DEDICATORIA

Dedico este trabajo con amor a mis padres Leonardo y Agustina, a mi hermano y hermanas, quienes siempre me han brindado su apoyo incondicional en cada una de mis metas propuestas. A un amigo muy especial cuyas palabras me motivaron a la culminación de este trabajo..

AGRADECIMIENTO

Le agradezco primero que nada a Dios por el tiempo y sabiduría brindada para la realización de este trabajo.

De manera muy especial a mi amiga Darcellys Rodríguez que me brindó todo su apoyo, compresión y sobre todo me enseñó a no peder la fe en mi misma.

A la Licenciada Islián de Gutiérrez quien de manera desinteresada me brindó todo su apoyo.

A mis compañeros y compañeras de la maestría por todas las experiencias compartidas.

A mi asesor de tesis el Dr: Jaime Gutiérrez a quien le reitero mi más profundo agradecimiento y admiración por toda su dedicación y ayuda brindada.

A todas las personas que de una u otra manera ayudaron a la elaboración de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN 1

INTRODUCCIÓN 2

Capítulo I

CONCEPTOS BÁSICOS DE CONJUNTOS CERRADOS GENERALIZADOS

1.1 Conceptos básicos 4

1.2 La α-topologia 13

1.3 Conjuntos abiertos y cerrados generalizados 24

Capítulo II

UN ENFOQUE UNIFICADO: CONJUNTOS QR-CERRADOS

2.1 Conjuntos qr-cerrados 28

Capítulo III

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS CERRADOS GENERALIZADOS

3.1 Espacio Topológicos localmente indiscreto 46

3.2 Caracterización de los espacio T_{gs} 48

3.3 Relaciones entre los conjuntos gp-cerrados y sg-cerrados 55

CONCLUSIÓN 65

BIBLIOGRAFÍA 66

Resumen

En está investigación estudiamos en un espacio topológico los conceptos topológicos generalizados, en particular los conjuntos cerrados generalizados. Inicialmente definimos los conceptos de α-cerrado, pre-cerrado, semi-cerrado, β-cerrado, espacios T_{gs}, $T_{½}$, semi-$T_{½}$, etc. y demostramos las relaciones entre los varios tipos de conjuntos cerrados generalizados. Probamos que los conjuntos α-abiertos forman una topología y damos ejemplos que determinan que los otros conjuntos abiertos no forman una topología. Estudiamos de manera unificada la noción de conjuntos qr-cerrados, finalmente introducimos la descomposición de Hewitt , caracterizamos los espacios T_{gs} y las relaciones entre los conjuntos gp-cerrados y sg-cerrados.

Summary

In this investigation we study in a topologic space the concept of generalized spaces, in particular the generalized closed sets. Initially we define the concepts of α-closed, pre-closed, semi-closed, β-closed, T_{gs},$T_{½}$, semi- $T_{½}$ spaces, etc and we demostrated the relations between the several types of generalized closed sets. We prove that the α-open sets form a topology and give examples that determine that the other open sets do not form a topology. We study a unified way the notion of qr-closed sets. Finally we introduced the decomposition of Hewitt, we characterized the T_{gs} spaces and the relations between the gp-closed and sg-closed sets.

INTRODUCCIÓN

Los fundamentos en Topología general son básicos para estudios avanzados en Análisis Matemático, geometría y Topología algebraica, pero se tiene la creencia de que la Topología general es objeto de estudio exclusivo para matemáticos, lo cual no es cierto, la Topología general es aplicada en la actualidad a las Ciencias Computacionales y a la Topología Digital, además de que permite iniciar a los estudiantes temas de investigación que estimulan la curiosidad y el interés por temas avanzados.

En este trabajo, nos proponemos estudiar conceptos topológicos generalizados, en particular los conjuntos cerrados generalizados que pueden ser usados para caracterizar las clases de espacios totalmente disconexos, submaximales y los T_{gs} y sus variaciones.

La esta investigación la bibliográfica, hemos utilizado información registrada en textos y documentos especializados, principalmente el artículo de Jiling Cao, Sina Greenwood e Ivan Reilly; " Generalizad closed sets: a unified approach ".

Este proyecto se divide en tres capítulos los cuales se desarrollan en la siguiente forma:

En el primer capítulo definimos los conceptos de conjuntos α-cerrados, semi-cerrados, pre-cerrados, β-cerrados y a partir de estos conjuntos definimos los conjuntos α-abiertos, semi-abiertos, pre-abiertos, β-abiertos y los operadores clausura e interior asociados. Además enunciamos y demostramos algunos teoremas que relacionan dichos conjuntos. Demostramos que los conjuntos α-abiertos forman una topología, pero no así los otros. Definimos los conjuntos cerrados y abiertos generalizados y resumimos las relaciones existentes entre ellos en el diagrama # 1 que está en la página 24. Introducimos los conceptos de espacios T_{gs}, $T_{½}$, semi-$T_{½}$, submaximal, g-submaximal y sg-submaximal y los conjuntos nodec y nodeg.

El objetivo del segundo capítulo es estudiar nuevas clases de conjuntos cerrados generalizados considerando cada posible emparejamiento de las cinco operaciones de clausura con la noción de " abertura" de manera unificada.

En el tercer y ultimo capítulo introduciremos clase de espacios topológicos localmente indiscreto, extremadamente disconexo, resoluble, fuertemente resoluble, etc y las descomposiciones de Jankovic- Reilly y Hewitt está ultima de gran importancia para el desarrollo de está investigación. Demostramos una serie de resultados que nos permite completar el diagrama # 1.

CAPÍTULO I

CONCEPTOS BÁSICOS DE CONJUNTOS CERRADOS Y ABIERTOS

En topología general, las nociones de conjunto cerrado y de clausura son fundamentales. En este capitulo definiremos algunos conceptos que generalizan tales nociones y que son de utilidad para la caracterización de propiedades topológicas. Enunciaremos y demostraremos algunos resultados que nos servirán en los siguientes capítulos, en particular demostrar que los conjuntos α-abiertos forman una topología, denotada por ($\mathscr{T}^{\alpha}$), y estudiaremos detenidamente las propiedades de está topología.

1.1 Conceptos básicos:

A continuación presentamos algunas definiciones y resultados que son de importancia para la presentación de este trabajo.

Definición 1.1: Una topología sobre un conjunto X es una colección $\mathscr{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades.

i) $\emptyset$ y X están en $\mathscr{T}$.

ii) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathscr{T}$ está en $\mathscr{T}$.

iii) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathscr{T}$ está en $\mathscr{T}$

Un **espacio topológico** es un par ordenado (X, $\mathscr{T}$), formado por un conjunto X y una topología $\mathscr{T}$ sobre X.

Definición 1.2: Sea (X , $\mathscr{T}$) un espacio topológico ; $A \subset X$;

i) A es un conjunto abierto de X si A pertenece a la colección $\mathscr{T}$.

ii) A es un conjunto cerrado de X si el conjunto $X - A = A^c$ es abierto.

iii) El interior de A, se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A y lo denotamos por int(A).

iv) La clausura de A, se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A y la denotamos por cl(A).

Observación 1.1: Sea (X , $\mathscr{T}$) un espacio topológico , $A \subseteq X$. Es obvio que int(A) es el mayor abierto contenido en A y cl(A) es el menor cerrado que contiene a A.

Teorema 1.1: Sea (X , $\mathscr{T}$) un espacio topológico, $A \subseteq X$, $x \in X$.

i) $x \in \text{int}(A)$ si y sólo si existe un O abierto: $x \in O \subseteq A$

ii) $x \in \text{cl}(A)$ si y sólo si para todo O abierto $x \in O \Longrightarrow O \cap A \neq \emptyset$.

La demostración de este teorema es fácil de realizar.

El siguiente lema nos presenta unas propiedades de los operadores de interiores y clausura que nos serán de gran utilidad más adelante.

Lema 1.1: Sean (X , $\mathscr{T}$) un espacio topológico, $A \subseteq X$. Entonces

i) $\text{int}\,(A^c) = (\text{cl}(A))^c$

ii) $\text{cl}(A^c) = (\,\text{int}(A))^c$

Demostración: Aplicando el teorema anterior, se justifican las siguiente equivalencias lógicas.

i) $\text{int}(A^c) = (\text{cl}(A))^c$

Sea $x \in \text{int}(A^c) \Leftrightarrow \exists$ O abierto: $x \in O \subseteq A^c$

$\Leftrightarrow \exists$ O abierto: $x \in O \wedge O \cap A = \emptyset$

$\Leftrightarrow x \notin \text{cl}(A)$

$\Leftrightarrow x \in [\text{cl}(A)]^c$

$\Leftrightarrow x \in [\text{cl}(A)]^c$

ii) $\text{cl}(A^c) = (\text{int}(A))^c$

Sea $x \in [\text{int}(A)]^c \Leftrightarrow x \notin \text{int}(A)$

$\Leftrightarrow \forall$ O abierto, tal que $x \in O$, $O \not\subset A$

$\Leftrightarrow \forall$ O abierto, tal que $O \in O$, $O \cap A^c \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \text{cl}(A^c)$

Ahora que ya hemos visto la definición de los operadores de interiores y de clausura con algunas propiedades, introduciremos la siguiente definición.

Definición 1.3: Sea X un espacio topológico. A subconjunto de X es llamado:

i) α- cerrado si $\text{cl}(\text{int}(\text{cl}(A))) \subseteq A$;

ii) semi-cerrado si $\text{int}(\text{cl}(A)) \subseteq A$;

iii) pre-cerrado si $\text{cl}(\text{int}(A)) \subseteq A$;

iv) β-cerrado si $\text{int}(\text{cl}(\text{int}(A))) \subseteq A$.

A partir de está definición podemos definir nuevos conjuntos como lo podemos ver en la siguiente definición.

Definición 1.4: Sea X un espacio topológico. A subconjunto de X llamamos:

i) α- abierto si $X - A$ es α- cerrado

ii) semi-abierto si $X - A$ es semi-cerrado

iii) pre-abierto si $X - A$ es pre-cerrado

iv) β- abierto si $X - A$ es β-cerrado

A continuación daremos una proposición, que nos ayudara a comprender mejor la definición antes expuesta y cuyas demostraciones se obtendrán a partir del lema 1.1.

Proposición 1.1: Sea X un espacio topológico y A subconjunto de X.

i) $cl[int(cl(A^c))] \subseteq A^c \iff A \subseteq int[cl(int(A))]$

ii) $int(cl(A^c)) \subseteq A^c \iff A \subseteq cl(int(A))$

iii) $cl(int(A^c)) \subseteq A^c \iff A \subseteq int(cl(A))$

iv) $int[cl(int(A^c))] \subseteq A^c \iff A \subseteq cl[int(cl(A))]$

Demostración:

i) Supongamos que,

$$cl(int(clA^c) \subseteq A^c$$

Aplicando las relaciones establecidas en el lema 1.1, se tiene que

$$cl(int(clA^c) = [\ int(cl(int(A))]^c$$

por lo tanto

$$[\ int(cl(int(A))]^c \subseteq A^c$$

y así

$$A \subseteq int\ (cl(int(A)))$$

Recíprocamente, supongamos que,

$$A \subseteq int\ (cl(int(A)))$$

se tiene que

$$[\ int(cl(int(A))]^c \subseteq A^c$$

por lo tanto

$$[\ int(cl(int(A))]^c = cl(int(clA^c)$$

luego

$$cl(int(clA^c)) \subseteq A^c$$

ii) Supongamos que,

$$int(clA^c) \subseteq A^c$$

Aplicando las relaciones establecidas en lema 1.1, se tiene que

$$int(clA^c) = [cl(int(A))]^c \subseteq A^c$$

por lo tanto

$$[cl(int(A))]^c \subseteq A^c$$

y así

$$A \subsetneq cl(int(A))$$

Recíprocamente, supongamos que

$$A \subseteq cl(int(A))$$

Se tiene que

$$[cl(int(A))]^c = int(clA^c)$$

por lo tanto

$$int(clA^c) \subseteq A^c$$

iii) Supongamos que

$$cl(int(A^c)) \subseteq A^c$$

Por las relaciones establecidas en el lema 1.1 se tiene que,

$$cl(int(A^c)) = int(cl(A))$$

por lo tanto

$$int(cl(A)) \subseteq A^c$$

y así

$$A \subseteq int(cl(A))$$

Recíprocamente, supongamos que

$$A \subseteq int(cl(A))$$

Aplicando las relaciones establecidas en el lema 1.1 se tiene que

$$[\, int(cl(A))]^c = cl(int(A)^c)$$

por lo tanto

$$cl(int(A)^c) \subseteq A^c$$

iv) Supongamos que

$$int(cl(intA^c)) \subseteq A^c$$

Aplicando las relaciones establecidas en el lema 1.1 se tiene que

$$int(cl(intA^c)) = [cl(int(cl(A)))]^c$$

por lo tanto

$$[cl(int(cl(A)))]^c \subseteq A^c$$

y así

$$A \subseteq cl(int(clA))$$

Recíprocamente, supongamos que

$$A \subseteq cl(int(clA))$$

Aplicando las relaciones establecidas en el lema 1.1, se tiene que

$$[cl(int(cl(A)))]^c = int(cl(intA^c))$$

por lo tanto

$$int(cl(intA^c)) \subseteq A^c$$

Con esto finalizamos nuestra demostración.

Lema 1.2: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i) A es α-abierto

ii) A es semi-abierto y pre-abierto.

Demostración:

(i)$\Longrightarrow$ (ii)

Supongamos que A es α-abierto y demostraremos entonces que A es semi-abierto y pre-abierto.

Por hipótesis, A es α-abierto. Luego,

$$A \subseteq \operatorname{int}[\operatorname{cl}(\operatorname{int}(A))]$$

Además ya que $\operatorname{int}(A) \subseteq A$ se tiene que

$$\operatorname{cl}(\operatorname{int}(A)) \subseteq \operatorname{cl}(A)$$

por lo tanto

$$\operatorname{int}[\operatorname{cl}(\operatorname{int}(A))] \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))$$

Así

$$A \subseteq \operatorname{int}[\operatorname{cl}(\operatorname{int}(A))] \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))$$

y luego

$$A \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))$$

Por lo tanto, A es pre-abierto.

Como

$$A \subseteq \operatorname{int}[\operatorname{cl}(\operatorname{int}(A))] \subseteq \operatorname{cl}(\operatorname{int}(A))$$

Se tiene que A es semi-abierto. Por consiguiente A es pre-abierto y semi-abierto.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

Supongamos que A es semi-abierto y pre-abierto, demostraremos entonces que A es α-abierto.

Por hipótesis:

$$A \subseteq \text{int}(\text{cl}(A)) \quad \textbf{(1)}$$

Y

$$A \subseteq \text{cl}(\text{int}(A)) \quad \textbf{(2)}$$

Si $A = \emptyset$, entonces A es α- abierto

Supongamos que $A \neq \emptyset$ y sea $x \in A$, por **(1)**, existe O abierto tal que

$$x \in O \quad y \quad O \subseteq \text{cl}(A)$$

Por **(2)** se tiene que

$$x \in O \subseteq \text{cl}(\text{int}(A))$$

entonces

$$x \in \text{int}(\text{cl}(\text{int}(A)))$$

Así

$$A \subseteq \text{int}(\text{cl}(\text{int}(A)))$$

Por lo tanto A es α-abierto y así finaliza nuestra demostración.

Con el siguiente ejemplo, podemos observar que los subconjuntos semi-abiertos, pre-abiertos y β-abiertos no forman una topología.

Ejemplos 1.1:

1) Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales dotado de la topología usual;

$A = [a,b]$ y $B = [b,c]$ con $a<b<c$ intervalos de $\mathbb{R}$. Es claro que A y B son semi-abiertos y β-abiertos

En efecto,

$$cl(int(A)) = A$$

entonces

$$int[cl(int(A))] = A$$

por lo tanto

$$cl(int(B)) = B$$

Así

$$int[cl(int(B))] = B$$

Se tiene que $A \cap B = \{b\}$, de donde

$$cl(int(A \cap B)) = \emptyset$$

y por lo tanto $A \cap B$ no es semi-abierto.

Por otro lado

$$int(cl(int(A \cap B))) = \emptyset,$$

y por lo tanto $A \cap B$ tampoco es β-abierto.

2) Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales dotado de la topología usual, $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, $\mathbb{I}$ el conjunto de los números irracionales y $B = \mathbb{I} \cup \{ 0 \}$.

Tenemos que:

$$cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \quad y \quad int(cl(\mathbb{Q})) = \mathbb{R}$$

Así

$$\mathbb{Q} \subseteq int(cl(\mathbb{Q})$$

Luego $\mathbb{Q}$ es pre-abierto.

De igual forma se verifica que B es pre-abierto. Pero $A \cap B = \{0\}$, no es pre-abierto, puesto que;

$$cl(A \cap B) =\{0\} \qquad y \qquad int(cl(A \cap B)) = \emptyset.$$

En efecto,

$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) = A$$

entonces

$$\mathrm{int}[\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))] = A$$

por lo tanto

$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}(B)) = B$$

Así

$$\mathrm{int}[\mathrm{cl}(\mathrm{int}(B))] = B$$

Se tiene que $A \cap B = \{b\}$, de donde

$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A \cap B)) = \emptyset$$

y por lo tanto $A \cap B$ no es semi-abierto.

Por otro lado

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A \cap B))) = \emptyset,$$

y por lo tanto $A \cap B$ tampoco es β-abierto.

2) Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales dotado de la topología usual, $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, $\mathbb{I}$ el conjunto de los números irracionales y $B = \mathbb{I} \cup \{0\}$.

Tenemos que:

$$\mathrm{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathbb{Q})) = \mathbb{R}$$

Así

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathbb{Q})$$

Luego $\mathbb{Q}$ es pre-abierto.

De igual forma se verifica que B es pre-abierto. Pero $A \cap B = \{0\}$, no es pre-abierto, puesto que;

$$\mathrm{cl}(A \cap B) = \{0\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cap B)) = \emptyset.$$

Hemos podido observar que los subconjuntos semi-abierto, pre-abierto y β-abierto no forman una topología, sin embargo, no hemos dicho nada acerca de los α-abierto. A continuación enunciaremos algunos teoremas que nos servirán para demostrar que los α-abiertos forman una topología. Denotaremos $\mathscr{T}^{\alpha}$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{P}$, $\mathscr{B}$ a la familia de α- abiertos, semi-abiertos, pre-abiertos y β-abiertos respectivamente.

1.2 La α-topología

Como lo mencionamos anteriormente, en esta parte del trabajo demostraremos que los α-abiertos forman una topología utilizando algunos resultados que enunciaremos a continuación.

Proposición 1.2: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}^{\alpha} \subset \mathscr{S}$

Demostración: Sea A $\in \mathscr{T}$, entonces

$$A \subseteq int[cl(int(A))]$$

Por lo tanto A $\in \mathscr{T}^{\alpha}$. Aplicando el lema 1.2 se tiene que A es semi-abierto.

Por consiguiente A $\in \mathscr{S}$.Así $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}^{\alpha} \subset \mathscr{S}$.

Observación 1.2: Cada conjunto semi-abierto distinto del vacío tiene interior no vacío.

A hora caracterizaremos a $\mathscr{T}^{\alpha}$ en términos de $\mathscr{S}$

Proposición 1.3: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico . Los siguientes enunciados son equivalentes:

i) A es α - abierto

ii) Para todo $B \in \mathcal{S}$, $A \cap B \in \mathcal{S}$.

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$(ii)

Sea $A \in \mathcal{T}^{\alpha}$, $B \in \mathcal{S}$, $x \in A \cap B$ y U una vecindad abierta de x.

Probaremos que $A \cap B$ es semi –abierto, es decir, $A \cap B \subseteq cl(int(A \cap B))$

Claramente

$$U \cap int(cl(int(A)))$$

también es una vecindad abierta de x,

Por lo tanto

$$V = (U \cap int(cl(int(A)))) \cap int(B)$$

es no vacía. Como

$$V = cl(int(A)),$$

implica que

$$U \cap (int(A) \cap int(B)) = V \cap int(A) \neq \emptyset$$

Se tiene que

$$A \cap B \subseteq cl[(int(A) \cap int(B))] = cl(int(A \cap B))$$

Es decir,

$$A \cap B \text{ es semi-abierto.}$$

(ii) $\Longrightarrow$(i)

Sea $A \cap B \in \mathcal{S}$ para todo $B \in \mathcal{S}$.En particular $A \in \mathcal{S}$.

Asumamos

$$x \in A \cap [int(cl(int(A)))]^c$$

Entonces

$$x \in int(B),$$

donde

$$B = [cl(int(A))]^c$$

Claramente

$$\{x\} \cup B \in \mathscr{O}$$

y consecuentemente

$$A \cap (\{x\} \cup B) \in \mathscr{O}$$

Pero,

$$A \cap (\{x\} \cup B) = \{x\},$$

Por lo tanto $\{x\}$ es abierto.

Como

$$x \in cl(int(A),$$

Esto implica que

$$x \in int(cl(int(A)))$$

contrario a lo asumido.

Así

$$x \in A \Longrightarrow x \in int(cl(int(A))) \text{ y } A \in \mathscr{T}^{\alpha}$$

Esto completa la demostración.

Así encontramos que $\mathscr{T}^{\alpha}$ está completamente determinado por $\mathscr{O}$ .Por lo tanto toda familia de semi-abiertos también determinan la familia de α-abiertos, explícitamente dada por la proposición 1.2.

Recíprocamente toda familia de α-abiertos determinan la misma familia de semi-abiertos, así que $\mathscr{S}$ está completamente determinada por $\mathscr{T}^{\alpha}$.

Teorema 1.2: Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, entonces $\mathscr{T}^{\alpha}$ es una topología sobre X.

Demostración: Obviamente $\emptyset$, X son conjuntos α-abierto, además notemos que cada conjuntos α-abierto distinto del vacío tiene su interior no vacío. Sea $\{ B_i\}_{i\in I}$ un familia de conjuntos α-abiertos, entonces

$$\bigcup_{i\in I} B_i \subset \bigcup_{i\in I} \mathrm{int}[(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(B_i)))]$$

por lo tanto

$$\mathrm{int}[\mathrm{cl}(\bigcup_{i\in I}(\mathrm{int}(B_i)))] \subset \mathrm{int}[\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\bigcup_{i\in I} B_i))],$$

Así la familia de α-abiertos es cerrada con respecto a uniones arbitrarias.

Sean A, B α-abiertos y C semi-abierto. Como A y B son α-abiertos, entonces $A \cap C$ y $B \cap C$ son semi-abiertos. Por lo tanto $(A \cap B) \cap C$ es semi-abiertos. Luego por la proposición 1.3 se tiene que $A \cap B$ es α- abiertos.

Hemos demostrado que $\mathscr{T}^{\alpha}$ es una topología sobre X.

De aquí en adelante usaremos el término α-topología para la familia de α-abiertos. Dos topologías determinando la misma familia de α-abiertos, la llamaremos α-equivalente, y a las clases de equivalencias la llamaremos α-clases.

En la siguiente proposición caracterizaremos $\mathscr{S}$ en términos de $\mathscr{T}^{\alpha}$.

Proposición 1.4: Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y denotemos por $(\mathscr{T}^{\alpha})^{s}$ a la familia de semi-abiertos con respecto a la topología $\mathscr{T}^{\alpha}$. Entonces $\mathscr{S} = (\mathscr{T}^{\alpha})^{s}$ y por lo tanto las topología α-equivalente determinan la misma familia de semi-abiertos.

Demostración: Denotamos por cl_α y int_α la clausura e interior respecto $\mathscr{T}^\alpha$, respectivamente. Si

$$x \in B \in \mathscr{S} \;\; y \;\; x \in A \in \mathscr{T}^\alpha$$

entonces

$$int[cl(int(A))] \neq \emptyset$$

ya que int(cl(int(A))) es una vecindad de x.

Es claro que

$$int(B) \subseteq cl(int(A)) \subseteq int(A),$$

Resultando

$$A \cap int(B) \neq \emptyset,$$

y obviamente

$$A \cap int_\alpha(B) \neq \emptyset .$$

En otras palabras $B \subset cl_\alpha(int_\alpha B)$. Es decir $B \in \mathscr{T}^{\alpha s}$.

Por otro lado sea

$$A \in \mathscr{T}^{\alpha s}, x \in A \;\; y \;\; x \in V \in \mathscr{T}$$

Como $V \in \mathscr{T}^\alpha$ y $x \in cl_\alpha int_\alpha A$,

entonces

$$V \cap int_\alpha A \neq \emptyset,$$

y además existe un conjunto no vacío $W \in \mathscr{T}$ tal que

$$W \subset V \cap int_\alpha A \subset A.$$

En otros términos

$$V \cap int(A) \neq \emptyset \;\; y \;\; x \in cl(int(A))$$

Así se verifica que

$$\mathscr{T}^{\alpha s} \subset \mathscr{T}^{\alpha}$$

con esto completamos la prueba.

Proposición 1.5: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces $\mathscr{T}^{\alpha\alpha} = \mathscr{T}^{\alpha}$.

Demostración: Consideremos $\mathscr{T}^{\alpha} = \mathscr{T}_1$

1) Es obvio que

$$\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_1^{\ \alpha}$$

2) Demostraremos que

$$\mathscr{T}_1^{\ \alpha} \subseteq \mathscr{T}_1$$

Sea $A \in \mathscr{T}_1^{\ \alpha}$ y C semi-abierto con respecto a la topología $\mathscr{T}_1$.

Aplicando la proposición 1.2 se tiene que, $A \cap C$ es semi-abierto con respecto a $\mathscr{T}_1$

Por lo tanto $A \in \mathscr{T}_1$. Así

$$\mathscr{T}_1^{\ \alpha} \subseteq \mathscr{T}_1$$

Luego por (1) y (2) se tiene que

$$\mathscr{T}^{\alpha\alpha} = \mathscr{T}^{\alpha}.$$

Corolario 1.1: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $\mathscr{O}$ es una topología sobre X.

ii) $\mathscr{T}^{\alpha} = \mathscr{O}$.

Demostración:

(ii) $\Longrightarrow$ (i) es obvio, pues $\mathscr{T}^{\alpha}$ es una topología.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sabemos que $\mathscr{T}^{\alpha} \subseteq \mathscr{O}$, por lo tanto ahora probemos que $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{T}^{\alpha}$.

Sea $A \in \mathscr{O}$ y B un semi-abierto arbitrario. Como $\mathscr{O}$ es una topología sobre X.

Entonces $A \cap B$ es semi abierto. Por la proposición 1.3 se tiene que A es α- abierto, por lo tanto $A \in \mathscr{T}^{\alpha}$. Así $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{T}^{\alpha}$.

Observación 1.2: Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Entonces $\mathscr{O} = \mathscr{T}^{\alpha s} = \mathscr{O}$.

Proposición 1.6: Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $A \in \mathscr{T}^{\alpha}$

ii) Existen $B \in \mathscr{T}$ y N nunca denso en $(X, \mathscr{T})$ tal que $A = B - N$

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$(ii)

Como $A \in \mathscr{T}^{\alpha}$ tenemos que

$$A = int(cl(int(A))) - [\ int(cl(int(A))) - A\ ],$$

Donde

$$int(cl(int(A))) - A$$

es claramente nunca denso.

(ii) $\Longrightarrow$(i)

Se tiene que

$$A = B - N \text{, con } B \in \mathscr{T} \text{ y } N \text{ un conjunto nunca denso.}$$

Claramente podemos ver que

$$B \subset cl(int(A)$$

Por lo tanto

$$A \subset B \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))).$$

Entonces

$$A \text{ es un } \alpha\text{- abierto.}$$

Así completamos la demostración.

Corolario 1.3: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces $\mathscr{T} = \mathscr{T}^{\alpha}$ si y sólo si todo subconjunto nunca denso es cerrado.

Demostración: Supongamos que $\mathscr{T} = \mathscr{T}^{\alpha}$ y sea N un conjunto nunca denso. Se tiene que

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(N)) = \emptyset \ \text{ y } \ \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(N))) = \emptyset$$

Por lo tanto

$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(N))) \subseteq N$$

Luego N es α-cerrado entonces N es cerrado.

Recíprocamente, se obtiene utilizando la proposición 1.6

Ejemplo 1.2: Sea $\mathcal{R}$ la topología usual sobre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. y

$$A = \left\{ \frac{1}{n} / n \in N \right\} \text{ un subconjunto de } \mathbb{R}..$$

Como

$$\mathrm{cl}(A) = A \cup \{ 0 \} \text{ y } \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \emptyset,$$

entonces A es nunca denso y no es cerrado.

Por lo tanto $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}^{\alpha}$ son intervalos semi-abiertos, así $\mathcal{R}^{\alpha} \neq \mathcal{R}^{s}$, y $\mathcal{R}^{s}$ no es una topología.

A continuación presentaremos nuevos conceptos del operador clausura, que serán de gran utilidad en la realización de este trabajo.

Definición 1.5: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico, y $A \subseteq X$,

i) La α-clausura de A, denotado por $cl_\alpha A$, es el menor α-cerrado que contiene a A.

ii) La semi-clausura de A, denotada por $cl_s A$, es el menor semi-cerrado que contiene a A.

iii) La pre-clausura de A, denotada por $cl_p A$, es el menor pre-cerrado que contiene a A.

iv) La β-clausura de A, denotada por $cl_\beta A$, es el menor β-cerrado que contiene a A.

Está definición da origen al siguiente teorema.

Teorema 1.3: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces.

i) $cl_\alpha A = A \cup cl[int(cl(A))]$

ii) $cl_s A = A \cup int(cl(A))$

iii) $cl_p A = A \cup cl(int(A))$

iv) $cl_\beta A = A \cup int[cl(int(A))]$

Demostración:

i) Consideremos $B = A \cup cl(int(cl(A)))$. Es obvio que $A \subseteq B$

Demostraremos que B es α-cerrado, es decir que

$$cl(int(cl(B))) \subseteq B$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} cl(B) &= cl[\, A \cup cl(int(cl(A)))] \\ &= cl(A) \cup cl(int(cl(A))) \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} cl(int(cl(B))) &= cl[int(\, cl(A) \cup cl(int(cl(A))))] \\ &= cl(int(cl(A))) \\ &\subseteq B \end{aligned}$$

Así B es α-cerrado.

Probaremos que B es el menor α-cerrado que contiene a A. Si C es α-cerrado tal que $A \subseteq C$ entonces se tiene que:

$$cl(int(cl(A))) \subseteq cl(int(cl(C))) \subseteq C,$$

Por lo tanto

$$A \cup cl(int(cl(A))) \subseteq A \cup C = C$$

Luego $B \subseteq C$

ii) Consideremos $B = A \cup int(cl(A))$. Es obvio que $A \subseteq B$

Demostraremos que B es semi-cerrado, es decir $int(cl(B) \subseteq B$.

Se tiene que

$$int(cl(B) = int[cl(A) \cup int(cl(A))]$$

por lo tanto

$$= int[\, cl(A) \cup cl(int(cl(A)))]$$

entonces

$$int[\, cl(A)\,] \subseteq B.$$

Por lo tanto B es semi-cerrado.

A hora probaremos que B es el menor semi-cerrado que contiene a A.

Sea C semi-cerrado tal que $A \subseteq C$ .Entonces

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(C))$$

Por lo tanto

$$A \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(C)) \subseteq C$$

Luego

$$B \subseteq C.$$

Por consiguiente, B es el menor semi-cerrado que contiene a A.

iii) Consideremos

$$B = A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))$$

Demostraremos que

$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}(B)) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))$$

Supongamos que

$$x \notin \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)),$$

entonces existe un abierto O, tal que

$$x \in O \quad y \quad O \cap \mathrm{int}(A) = \emptyset$$

Esto implica que

$$O \cap \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) = \emptyset$$

Por lo tanto

$$\mathrm{int}[A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))] \cap O = \mathrm{int}[A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))] \cap \mathrm{int}(O)$$

entonces

$$\mathrm{int}(\,[A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))] \cap O\,) = \mathrm{int}(A \cap O)$$

Así

$$\mathrm{int}(A) \cap O = \emptyset$$

Lo que implica que

$$x \notin \mathrm{cl}(\mathrm{int}(B))$$

En consecuencia

$$cl(int(B)) \subseteq cl(int(A)) \subseteq B$$

y hemos probado que B es pre-cerrado.

Si C es pre-cerrado y $A \subseteq C$ se tiene que

$$B = A \cup cl(int(A)) \subseteq A \cup cl(int(C)) \subseteq A \cup C = C$$

Así, B es el menor pre-cerrado que contiene a A.

iv) Consideremos

$$B = A \cup int(cl(int(A)))$$

Es obvio que $A \subseteq B$. Demostraremos que B es β-cerrado. Como en el caso anterior se prueba que

$$cl(int(B)) \subseteq cl(int(A))$$

y de aquí se tiene que

$$int(cl(int(B))) \subseteq int(cl(int(A))) \subseteq B$$

Lo que prueba que B es β-cerrado.

Si C es β-cerrado y $A \subseteq C$ se tiene que

$$B = A \cup int(cl(int(A))) \subseteq A \cup int(cl(int(C))) = A \cup C = C$$

Así, B es el menor β-cerrado que contiene a A.

1.3 Conjuntos abiertos y cerrados generalizados.

En esta sección del capitulo definiremos los conjuntos abiertos y cerrados generalizados y la relaciones que existen entre ellos.

Definición 1.6: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Un subconjunto A de X lo llamamos:

i) generalizado cerrado (g-cerrado) si $clA \subseteq U$, siempre que $A \subseteq U$ y U es abierto;

ii) semi-generalizados cerrado(sg- cerrado), si $cl_s A \subseteq U$ siempre que $A \subseteq U$ y U es semi-cerrado;

iii) generalizado semi-cerrado(gs-cerrado) , si $cl_s A \subseteq U$ siempre que $A \subseteq U$ y U es abierto;

iv) generalizado α-cerrado(gα-cerrado) , si $cl_\alpha A \subseteq U$ siempre que $A \subseteq U$ y U es α-abierto, equivalente, si A es g-cerrado con respecto a α-Topológia;

v) α-generalizado cerrado(αg-cerrado) , si $cl_\alpha A \subseteq U$ siempre que $A \subseteq U$ y U es abierto;

vi) gp-cerrado si $cl_p A \subseteq U$ siempre que $A \subseteq U$ y U es abierto;

vii) gsp-cerrado si $cl_\beta A \subseteq U$ siempre que $A \subseteq U$ y U es abierto.

A partir de la definición anterior, podemos definir los conjuntos abiertos generalizados.

Definición 1.7: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico: Un subconjunto A de X lo llamamos:

i) generalizado abierto, si $X \setminus A$ es g-cerrado;

ii) semi-generalizado, si $X \setminus A$ es semi-generalizado cerrado;

iii) generalizado semi-cerrado, si $X \setminus A$ es gs-cerrado;

iv) generalizado α-abierto, si $X \setminus A$ es gα-cerrado;

v) α-generalizado abierto, si $X \setminus A$ es αg-cerrado;

vi) gp-abierto, si X \ A es gp-cerrado;

vii) gsp-abierto, si X \ A es gsp-cerrado.

Las relaciones conocidas entre los tipos de conjuntos cerrados generalizados enumerados en las definiciones del 1 al 5 se resumen en la siguiente diagrama # 1.

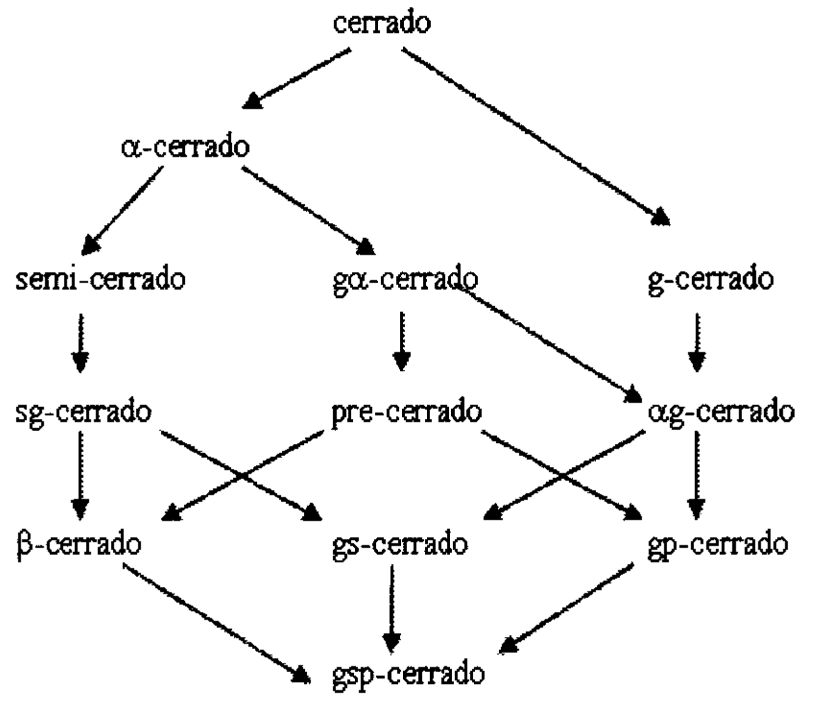

Diagrama # 1

En este diagrama # 1 se resumen las relaciones conocidas entre las clases de conjuntos cerrados generalizados. En general, ninguna de las implicaciones representadas en el diagrama # 1 es reversible, como lo podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3: Un conjunto A semi-precerrado no necesariamente es sg-cerrado. Sea $X = \{a,b,c\}$ con $T = \{\varnothing, \{a,b\}, X\}$ y un conjunto $A = \{a\}$. Claramente A es

β-cerrado, pero $X = cl_s A \not\subset \{a,b\} \in T$. Luego A es no sg-cerrado, no siempre gs-cerrado. Note que A es no $g\alpha$-cerrado y luego el conjunto pre-cerrado no necesariamente es $g\alpha$-cerrado.

Consideramos diversas clases de espacios topológicos las cuales definiremos a continuación.

Definición 1.8: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico llamaremos:

i) Un espacio T_{gs} si cada conjunto gs-cerrado de X es sg-cerrado;

ii) Un espacio $T_{½}$ si para cada $x \in X$, $\{x\}$ es abierto o cerrado.

iii) Un espacio semi- $T_{½}$ si para cada $x \in X$, $\{x\}$ es semi-abierto o semi- cerrado.

iv) X es nodec si todo conjunto nunca denso de X es cerrado.

v) X es nodeg si todo conjunto nunca denso de X es g-cerrado.

vi) X es extremadamente disconexo si la clausura de cada conjunto abierto X es abierto.

vii) X es submaximal si cada subconjunto denso de X es abierto.

viii) X es g-submaximal si cada subconjunto denso de X es g-abierto.

ix) X es sg- submaximal si cada subconjunto denso de X es sg-abierto.

CAPÍTULO II

UN ENFOQUE UNIFICADO: CONJUNTOS QR-CERRADOS

Cada generalización en la definición 1.6 envuelve un operador de clausura y una noción de "abertura".Especificamente cada definición envuelve cualquier cl, cl_α, cl_s, cl_p o cl_β de A junto con U siendo cualquier abierto α-abierto, o semi-abierto. En este capítulo estudiaremos nuevas clases de conjunto cerrado generalizado considerando cada posible emparejamiento de las 5 operaciones de clausura mencionadas arribas con la noción de "abertura" de manera unificada. Introduciremos el siguiente término **qr-cerrado**, donde **q** representa la operación clausura, y **r** representa una noción generalizada de apertura.

Observación 2.1: En lo siguiente usaremos las siguientes notaciones:

(1) Cerrado, semi-cerrado, pre-cerrado, por τ-cerrado, s-cerrado y p-cerrado, respectivamente.(similar para los conjuntos abiertos)

(2) clA por $cl_\tau A$ con $A \subseteq X$

(3) Consideremos a $P = \{\tau, \alpha, s, p, \beta\}$

2.1 Conjuntos qr-cerrados

Definición 2.1: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico y q, r $\in P$. $A \subseteq X$ es llamado qr-cerrado si $cl_q A \subseteq U$ siempre que $A \subseteq U$ y U es r-abierto.

Teorema 2.1: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces

i) A es g-cerrado si este es $\tau\tau$-cerrado,

ii) αg-cerrado si este es $\alpha\tau$-cerrado,

iii) gs-cerrado si este es $s\tau$-cerrado,

iv) gp-cerrado si este es pτ-cerrado,

v) gsp-cerrado si este es $\beta\tau$-cerrado,

vi) gα-cerrado si este es $\alpha\alpha$-cerrado,

vii) sg-cerrado si este es ss-cerrado.

La prueba se omite, pues es inmediata .

Lema 2.1: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $q \in P$, entonces $x \in cl_q A$ si y solo si para cada conjunto H q-abierto, con $x \in H$, $H \cap A \neq \emptyset$.

Demostración: Supongamos que $x \in cl_q(A)$ y que H es q-abierto, tal que

$$x \in H \quad y \quad H \cap A = \emptyset$$

entonces

$$A \subseteq H^c \quad y \quad H^c \text{ es q-cerrado,}$$

por lo tanto

$$Cl_q(A) \subseteq H^c.$$

Como $x \in cl_q(A)$, resulta que $x \in H^c$ y esto es contradictorio.

Así

$$H \text{ es q-abierto y } x \in H$$

Entonces

$$H \cap A \neq \emptyset.$$

Recíprocamente, supongamos que $x \notin cl_q(A)$, entonces

$$x \in [\, cl_q(A)\,]^c \text{ que es q-abierto.}$$

De la hipótesis se tiene que

$$[\, cl_q(A)\,]^c \cap A \neq \emptyset$$

que es absurdo, pues

$$A \subseteq cl_q(A)$$

Así hemos terminado nuestra demostración.

Los siguientes lemas serán de gran utilidad para la demostración de teoremas que veremos más adelante.

Lema 2.2: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. $A \subseteq X$, A no es nunca denso si y sólo si existe G abierto no vacío tal que $G \subseteq cl(A)$.

Demostración: Supongamos que A no es nunca denso, entonces

$$G = int(cl(A)) \text{ es abierto no vacío}$$

Y

$$G \subseteq cl(A).$$

Recíprocamente, si G es abierto no vacío y $G \subseteq cl(A)$. Entonces

$$G \subseteq int(cl(A)),$$

por lo tanto

$$int(cl(A) \neq \emptyset,$$

y así

A no es nunca denso.

Lema 2.3: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico, $A \subseteq X$. Entonces $A \setminus cl(int(cl(A)))$ es nunca denso.

Demostración: Supongamos que

$$A \setminus cl(int(cl(A))) \text{ no es nunca denso,}$$

por el lema 2.2, existe G abierto no vacío tal que

$$G \subseteq cl[\, A \setminus cl(int(cl(A)))\,]$$

Por lo tanto,

$$G \subseteq cl(A)$$

y como G es abierto, se tiene que

$$G \subseteq int(cl(A))$$

y en consecuencia

$$G \subseteq cl(int(\, cl(A)))$$

De aquí tenemos que

$$A \setminus cl(int(cl(A))) \subseteq A \setminus G$$

y

$$cl[A \setminus cl(int(cl(A)))] \subseteq cl[A \setminus G]$$

por lo tanto

$$G \subseteq cl(A \setminus G)$$

Y esto contradice el hecho de que G es abierto, no vacío. Por consiguiente

$A \setminus cl(int(cl(A)))$ es nunca denso.

El siguiente teorema da dos descomposiciones útiles de un espacio topológico.

Teorema 2.2: Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico .

i) Todo conjunto unitario es p-abierto o nunca denso

ii) Todo conjunto unitario de X es abierto o p-cerrado.

Demostración:

(i) Supongamos que $\{x\}$ no es nunca denso. Entonces

$$int(cl(\{x\})) \neq \emptyset$$

Sea $y \in int(cl(\{x\}))$, entonces existe O abierto tal que

$$y \in O \subseteq cl(\{x\})$$

entonces

$$O \cap \{x\} \neq \emptyset$$

Por lo tanto $x \in O$. Así

$$x \in O \subseteq int(\{x\})$$

entonces

$$x \in O \subseteq int(cl(\{x\}))$$

(ii) Si $\{x\}$ no es abierto, entonces el $int\{x\} = \emptyset$. Así

$$cl(int\{x\} = \emptyset,$$

Por lo tanto

$$\{x\} \text{ es p-cerrado.}$$

Teorema 2.3: Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Si $q,r \in P$, entonces cada subconjunto qr-cerrado de X es q-cerrado si y solo si cada $\{x\} \in X$ es q-abierto o r-cerrado.

Demostración: Supongamos que cada conjunto qr-cerrado de X es q-cerrado. Si $x \in X$ y $\{x\}$ no es r-cerrado, entonces

$$X \setminus \{x\} \text{ no es r-abierto.}$$

Así, el único conjunto r-abierto que contiene

$$X \setminus \{x\} \text{ es } X,$$

lo cual implica que

$$X \setminus \{x\} \text{ es qr-cerrado.}$$

Por hipótesis,

$$X \setminus \{x\} \text{ es q-cerrado.}$$

Por lo tanto

$$\{x\} \text{ es q-abierto.}$$

Recíprocamente, Supongamos que $\{x\} \in X$ es q-abierto o r-cerrado.

Sea A qr-cerrado y $x \in cl_g(A)$. Si $\{x\}$ es q-abierto, entonces por lema 2.1, $x \in A$.

Así

$$\{x\} \text{ es r-cerrado} \quad y \quad x \notin A,$$

entonces

$$A \subseteq X \setminus \{x\}.$$

Como A es qr-cerrado, tenemos que

$$x \in cl_g A \subseteq X \setminus \{x\}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A = cl_g A$ y así A es q-cerrado.

Teorema 2.4: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. $A \subseteq X$, $r \in \{p, \beta\}$ y $q \in P$. Entonces A es: qr-cerrado si y sólo si es q-cerrado.

Demostración: La condición suficiente es inmediata. Supongamos que A es qr-cerrado y probemos que

$$cl_q(A) \subseteq A. \text{Sea } x \in cl_q(A)$$

Sabemos que

$$\text{int}(\{x\}) = \{x\} \text{ ó } \text{int}(\{x\}) = \emptyset.$$

Si $\text{int}(\{x\}) = \{x\}$, entonces $\{x\}$ es r-abierto. Por lo tanto

$$A \cap \{x\} \neq \emptyset \text{ y así } x \in A.$$

Ahora si $\text{int}(\{x\}) = \emptyset$, entonces $\{x\}$ es r-cerrado. Por lo tanto

$$X \setminus \{x\} \text{ es r-abierto.}$$

Si suponemos que $x \notin A$, tenemos que

$$A \subseteq X \setminus \{x\}.$$

Por lo tanto

$$cl_q\,(A) \subseteq X \setminus \{x\},$$

lo que es contradictorio. Así $x \in A$

Hemos, probado que en cualquier caso $x \in A$ .Así, $cl_q\,(A) \subseteq A$ y A es q-cerrado.

Teorema 2.5: Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. $A \subseteq X$, $q \in \{ p,\beta \}$ y $r \in \{ \alpha,s \}$. Entonces A es qr-cerrado si y sólo si A es q-cerrado.

Demostración: La condición suficiente es inmediata. Supongamos que A es qr-cerrado y probemos que

$$cl_q\,(A) \subseteq A.$$

Sea $x \in cl_q\,(A)$. Sabemos que

$\{x\}$ es abierto o nunca denso.

Si $\{x\}$ es abierto, entonces

$$A \cap \{x\} \neq \emptyset$$

y por lo tanto

$$x \in A$$

supongamos que $\{x\}$ es nunca denso, entonces

$\{x\}$ es r-cerrado

y por lo tanto

$X \setminus \{x\}$ es r-abierto

Si suponemos que $x \notin A$, tenemos que

$$x \in cl(int(A)) \text{ y } A \subseteq X \setminus \{x\}$$

por lo tanto

$$x \in cl(int(A)) \subseteq cl(int(\{x\})) = X \setminus int(cl(\{x\}))$$

y esto es contradictorio, pues

$$x \in int(cl(A)).$$

Así $x \in A$.

Hemos probado que en ambos casos $x \in A$ y con esto que A es q-cerrado.

Teorema 2.6: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces $A \subseteq X$ es

qα-cerrado si y sólo si A es qs-cerrado, para cualquier $q \in P$.

Demostración: Por definición, se tiene que cada conjunto qs-cerrado es qα-cerrado.

Por lo tanto solo tenemos que demostrar que un subconjunto A de X es qα-cerrado

entonces A es qs-cerrado, para cualquier $q \in P$.

Sea $A \subseteq X$ qα-cerrado y $A \subseteq U$ donde U es s-abierto.

Supongamos que existe un punto

$$x \in cl_q A \setminus U.$$

Entonces

$$A \subseteq U \subseteq X \setminus \{x\}.$$

Consideremos los siguientes casos por separados:

(1) Si $int(cl\{x\}) = \emptyset$. Entonces $\{x\}$ es α-cerrado. Por lo tanto

$$X \setminus \{x\} \text{ es } \alpha\text{-abierto}$$

Como A es gα-cerrado, tenemos que

$$x \in cl_g A \subseteq X \setminus \{x\},$$

lo cual es una contradicción.

(2) Si $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) \neq \emptyset$, entonces

$$x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\})$$

Por otro lado U es si-abierto, entonces

$$\mathrm{cl}U = \mathrm{cl}(\mathrm{int}U)$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{cl}_g A \subseteq \mathrm{cl}A \subseteq \mathrm{cl}U = \mathrm{cl}(\mathrm{int.}) \subseteq \mathrm{cl}[\mathrm{int}(X \setminus \{x\})] = X \setminus \mathrm{clint}(\{x\}),$$

lo cual es una contradicción.

Debemos mostrar que para cada $q,r \in P$, la propiedad qr-cerrado es equivalente a un tipo conocido de conjunto cerrado generalizado, excepto cuando

$q = \tau$ y $r = \alpha$

(o equivalentemente $r = s$). La clase del conjunto $\tau\alpha$-cerrado es nuevo, como lo estableceremos a continuación.

Definición 2.1: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Cada conjunto cerrado $\tau\alpha$-cerrado y α-cerrado es g-cerrado y gα-cerrado, respectivamente.

Teorema 2.7: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i) Todo subconjunto $\tau\alpha$-cerrado en X es cerrado;

ii) Todo subconjunto $\tau\alpha$-cerrado en X es α-cerrado;

iii) Todo subconjunto $\tau\alpha$-cerrado en X es s-cerrado;

iv) Todo subconjunto gα-cerrado en X es s-cerrado;

v) X es un espacio semi-$T_{1/2}$.

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Se deduce inmediatamente del hecho de que todo subconjunto cerrado es α-cerrado.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Evidente, pues todo subconjunto α-cerrado es s-cerrado

(iii) $\Longrightarrow$ (v)

Sea $x \in X$,

(1) Si $\{x\}$ es α-cerrado, entonces $\{x\}$ es s-cerrado.

(2) Si $\{x\}$ no es α-cerrado, entonces

$$X \setminus \{x\} \text{no es } \alpha\text{-abierto}$$

y por lo tanto

$$X \setminus \{x\} \text{ es } \alpha\text{-cerrado,}$$

lo que implica que

$$X \setminus \{x\} \text{ es s-cerrado}$$

y así $\{x\}$ es s-abierto.

(iv) $\Longrightarrow$ (v)

La prueba es similar a la dada para (iii) $\Longrightarrow$ (v)

(v) $\Longrightarrow$(i)

Supongamos que es semi $T_{½}$, y sea $A \subseteq X$, $\alpha\tau$-cerrado, queremos probar que

$$cl(A) \subseteq A. \text{ Sea } x \in cl(A).$$

(1) Si $\{x\}$ es s-abierto, entonces

$$\{x\} \text{ es abierto}$$

y por lo tanto

$$\{x\} \cap A \neq \emptyset$$

es decir $x \in A$.

(2) Supongamos que $\{x\}$ es s-cerrado, entonces

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{x\})) \subseteq \{x\},$$

por lo tanto

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{x\})) = \emptyset \text{ ó } \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{x\})) = \{x\}$$

Si $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{x\})) = \{x\}$,entonces

$$\{x\} \text{ es abierto}$$

y en consecuencia $x \in A$.

Supongamos que $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\{x\})) = \emptyset$, entonces

$$\{x\} \text{ es } \alpha\text{-cerrado}$$

y por lo tanto

$$X \setminus \{x\} \text{ es } \alpha\text{-abierto},$$

Si $x \notin A$, entonces

$$A \subseteq X \setminus \{x\},$$

Como A es $\tau\alpha$-cerrado, resulta que

$$\operatorname{cl}(A) \subseteq X \setminus \{x\},$$

y esto es absurdo. Así $x \in A$.

Hemos probado que en cualquier caso $x \in A$ y por lo tanto $\operatorname{cl}(A) = A$. Para completar la prueba, basta con demostrar que (v) $\Longrightarrow$(iv).

Supongamos que es semi $T_{1/2}$ y sea $A \subseteq X$, gα-cerrado, queremos probar que $\operatorname{cl}_s(A) \subseteq A$.

Sea $x \in A$, tenemos dos casos $\{x\}$ es s-abierto ó $\{x\}$ es s-cerrado.

(1) Si $\{x\}$ es s-abierto,

Como $x \in \operatorname{cl}_s(A)$, resulta que

$$A \cap \{x\} \neq \emptyset$$

y por lo tanto $x \in A$.

(2) Supongamos que $\{x\}$ es s-cerrado, entonces

$$\text{int}(\text{cl}(\{x\})) \subseteq \{x\}.$$

Si $\text{int}(\text{cl}(\{x\})) = \{x\}$, entonces

$$\{x\} \text{ es abierto,}$$

por lo tanto s-abierto y como tenemos que $x \in A$.

Si $\text{Int}(\text{cl}(\{x\})) = \emptyset$, entonces $\{x\}$ es α-cerrado. Por lo tanto

$$X \setminus \{x\} \text{ es } \alpha\text{-abierto}$$

Si suponemos que $x \notin A$, resulta que

$$A \subseteq X \setminus \{x\}$$

Como A es gα-cerrado, resulta que

$$\text{cl}_\alpha(A) \subseteq X \setminus \{x\}$$

Como $\text{cl}_s(A) \subseteq \text{cl}_\alpha$, nos queda que

$$x \in \text{cl}_s(A) \subseteq X \setminus \{x\}$$

que es absurdo. Así $x \in A$.

Hemos probado, por lo tanto que A es s-cerrado.

Teorema 2.8: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces cada subconjunto g-cerrado en X es $\tau\alpha$-cerrado si y solo si X es T_{gs}-espacio.

Demostración: Consideremos que cada subconjunto g-cerrado en X es $\tau\alpha$-cerrado. Supongamos que existe un conjunto unitario no cerrado $\{x\} \subseteq X$. Entonces

$$X \setminus \{x\} \text{ es no abierto}$$

Así

$$X \setminus \{x\} \text{ es g-cerrado}$$

Por hipótesis $X \setminus \{x\}$ es $\tau\alpha$-cerrado. Por lo tanto $\{x\}$ es p-abierto, entonces

$$\text{int}(\text{cl}\{x\}) = \emptyset$$

Así $\{x\}$ es s-cerrado y por consiguiente

$$X \setminus \{x\} \text{ es s-abierto}$$

Como

$$\text{cl}(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{x\}$$

Así

$$X \setminus \{x\} \text{ es cerrado}$$

Y por lo tanto $\{x\}$ es abierto. Lo cual es imposible.

Recíprocamente, Sea $A \subseteq X$ un g-cerrado y sea U un s-abierto con $A \subseteq U$.

Supongamos que existe un punto

$$x \in \text{cl}A \setminus U$$

Entonces

$$A \subseteq U \subseteq X \setminus \{x\}$$

Consideremos los siguientes casos:

(1) Si $\{x\}$ es cerrado, entonces $X \setminus \{x\}$ es abierto.

Así $x \in \text{cl}A \subseteq X \setminus \{x\}$. Lo cual es una contradicción.

(2) Si $\{x\}$ es p-abierto, entonces $x \in \text{int}(\text{cl}(\{x\}))$. Por hipótesis U es s-abierto, entonces

$$U \subseteq \text{cl}(\text{int}U).$$

Por lo tanto

$$A \subseteq U \subseteq \text{cl}(\text{int}(U)) \subseteq X \setminus \text{int}(\text{cl}\{x\})$$

Así

$$\mathrm{cl}A \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}\{x\}) = \emptyset$$

Lo que nos lleva a una contradicción.

Teorema 2.9: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i) X es nodec, si todo conjunto nunca denso es cerrado;

ii) Todo α-cerrado es cerrado;

iii) Todo gα-cerrado es $\tau\alpha$-cerrado;

iv) Todo α-cerrado es $\tau\alpha$-cerrado.

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Se da por la definición de conjunto nodec.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Como para cualquier subconjunto A $\subseteq$ X, se tiene que

$$\mathrm{cl}A = \mathrm{cl}_{\alpha}A.$$

Por lo tanto cada subconjunto gα-cerrado es $\tau\alpha$-cerrado.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

Es obvio

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

Supongamos que cada subconjunto α-cerrado de X es $\tau\alpha$-cerrado y sea A $\subseteq$ X un conjunto nunca denso. Debemos mostrar que A es cerrado.

Supongamos que existe un punto

$$x \in \mathrm{cl}A \setminus A.$$

Como clA es nunca densa, entonces $\{x\}$ es nunca denso.

Por lo tanto

$$A \text{ y } \{x\} \text{ son } \alpha\text{-cerrado.}$$

Por hipótesis,

$$A \text{ es } \tau\alpha\text{-cerrado}$$

Entonces

$$A \subseteq X \setminus \{x\}.$$

Como $X \setminus \{x\}$ es α-abierto. Entonces

$$x \in clA \subseteq X \setminus \{x\}$$

Esto es una contradicción, lo cual implica que A es cerrado.

De los teoremas 2.7, 2.8 y 2.9 vemos que en un espacio topológico general los conjuntos $\tau\alpha$-cerrado no son equivalente a los conjuntos cerrados, g-cerrado, conjunto $g\alpha$-cerrado, o a los conjuntos α-cerrado.

CAPÍTULO III

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS CERRADOS GENERALIZADOS

El objetivo de este capítulo es completar el diagrama # 1, introduciendo una nueva relación. Para tal fin, introduciremos nuevos conceptos como son: extremadamente disconexo, resoluble, irresoluble, fuertemente resolubles, hereditablemente irresoluble, etc. También veremos la descomposición de Hewitt, sus aplicaciones y algunas relaciones entre los conjuntos gp-cerrado y sg-cerrado.

Definición 3.1: Un espacio topológico (X, $\mathscr{T}$) es extremadamente disconexo si para todo abierto U, la clausura cl(U) de U es abierto.

Definición 3.2: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Diremos que A es regular abierto si A = int(cl(A)).

Definición 3.3: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Diremos que A es regular cerrado si A = cl(int(A)).

Los lemas que enunciamos a continuación serán de gran utilidad para la demostración del teorema 3.1.

Lema 3.1: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. A es regular abierto si y sólo si A^c es regular cerrado.

La demostración de este lema se obtiene aplicando las propiedades del operador clausura que se mencionan en el premier capítulo.

Lema 3.2: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Si A es abierto entonces cl(A) es regular cerrado.

Demostración: Probaremos que $cl(A) = cl(int(cl(A)))$. Como $int(cl(A)) \subseteq cl(A)$, entonces

$$cl(int(cl(A))) \subseteq cl(A) \quad (1)$$

Por otro lado $A \subseteq cl(A)$. Como A es abierto se tiene que $A \subseteq int(cl(A))$. Por lo tanto

$$cl(A) \subseteq cl(int(cl(A))) \quad (2)$$

Luego por (1) y (2) se tiene que:

$$cl(A) = cl(int(cl(A))).$$

Por lo tanto hemos probado que cl(A) es regular cerrado.

Lema 3.3: Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. X es extremadamente disconexo si y sólo si Dado $A \subseteq X$ es regular abierto, entonces A es cerrado.

Demostración: Supongamos que X es extremadamente disconexo y sea A regular abierto, entonces

$$A = int(cl(A)).$$

Como int(cl(A)) es abierto, por hipótesis se tiene que cl(int(cl(A))) es abierto. Luego

$$cl(int(cl(A))) = int(cl(int(cl(A))))$$

Entonces

$$cl(A) = A$$

Así A es cerrado.

Recíprocamente, Supongamos que todo subconjunto regular abierto de X, A es cerrado.

Sea A abierto, por el lema 3.2 la cl(A) es regular cerrado. Por lo tanto $[cl(A)]^c$ es regular abierto. De la hipótesis se obtiene que $[cl(A)]^c$ es cerrado, entonces cl(A) es abierto.

Por lo tanto X es extremadamente disconexo.

Teorema 3.1: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Cada subconjunto sg-cerrado de X es gα-cerrado si y solo si X es extremadamente disconexo.

Demostración: Supongamos que X es extremadamente disconexo. Sea A $\subseteq$ X un sg-cerrado y sea U un conjunto α-abierto que contiene a A. Como U es s-abierto, resulta que

$$cl_s(A) \subseteq U.$$

Tenemos que

$$int(cl(A)) = [\ cl(int(A^c))\ ]^c.$$

Como X es extremadamente disconexo cl(int(A^c)) es abierto y por lo tanto int(cl(A)) es cerrado. Así

$$cl_\alpha(A) = A \cup cl(int(cl(A))) = A \cup int(cl(A)) = cl_\alpha(A) \subseteq U.$$

Hemos probado que A es gα-cerrado.

Para probar el recíproco, supongamos que cada subconjunto sg-cerrado de X es gα-cerrado. Consideremos A $\subseteq$ X un abierto regular. Entonces A = int(cl(A)), y por lo tanto A es s-cerrado; y así sg-cerrado. De la hipótesis se tiene que A es gα-cerrado.

Por otro lado, A es abierto y en consecuencia α-abierto, lo que implica que $cl_\alpha A \subseteq A$. Pero

$$cl_\alpha(A) = A \cup cl(int(A)) = clA$$

Luego cl(A) $\subseteq$ A, y así A es cerrado.

Ahora establecemos que no existe otra relación en general. Primero confirmamos que en general ninguna de las implicaciones del diagrama # 1 pueden ser invertidos. En algunos casos se ha mostrado que la implicación recíproca sólo ocurre si el espacio topológico tiene propiedades específicas.

Teorema 3.2: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces X es nodeg, si y sólo si cada subconjunto αg-cerrado de X es g-cerrado.

Demostración: Supongamos que cada subconjunto αg-cerrado de X es g-cerrado y sea A un subconjunto nunca denso en X, entonces A es α-cerrado y por lo tanto g-cerrado.

Recíprocamente, supongamos que cada subconjunto nunca denso de X es g-cerrado.

Sea $A \subseteq X$ un subconjunto αg-cerrado y U abierto tal que $A \subseteq U$.

Por hipótesis

$$cl_{\alpha}A = A \cup cl[int(cl(A))] \subseteq U.$$

y

$$N = A \setminus cl[int(cl(A))] \text{ es nunca denso,}$$

y por lo tanto es g-cerrado. Como $N \subseteq U$ se tiene que

$$cl(A) \cap (X \setminus cl[int(cl(A))]) \subseteq cl(U) \subseteq U.$$

Se tiene inmediatamente que

$$clA \setminus cl_{\alpha} \subseteq U \text{ y así } clA \subseteq U.$$

Por lo tanto, A es g-cerrado.

3.1 Espacio topológico localmente indiscreto.

Los espacios localmente indiscreto son importantes para entender la descomposición de Hewitt, por tal motivo estudiaremos tales espacios, enunciaremos algunos resultados y lo caracterizaremos en términos de conjuntos p-cerrado.

Definición 3.4: Un espacio topológico (X, $\mathscr{T}$) es localmente indiscreto si todo subconjunto abierto de X es cerrado.

Observación 3.1: Si (X, $\mathscr{T}$) es un espacio topológico y A subconjunto de X, decimos que A es **clopen** si es tanto abierto como cerrado.

Teorema 3.3: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces X es localmente indiscreto si y sólo si todo subconjunto de X es p-cerrado.

Demostración: Supongamos que X es localmente indiscreto , y sea $A \subseteq X$, entonces como int(A) es abierto resulta que:

$$cl(int(A)) = int(A) \subseteq A$$

Por lo tanto A es p-cerrado.

Recíprocamente, supongamos que todo subconjunto de X es p-cerrado y sea A abierto, entonces

$$cl(A) = cl(int(A)) \subseteq A,$$

lo que implica que A es cerrado. Así X es localmente indiscreto.

Lema 3.4: Sean (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico, A un subespacio clopen localmente indiscreto de X y $W \subseteq A$ α-abierto en X. Entonces W es clopen en X.

Demostración: Sea $W \subseteq A$. Por el teorema 3.3 W es p-cerrado en A. Denotemos por $cl_A(W)$ e $int_A(W)$ a la clausura e interior de W en A. Sabemos que

$$cl_A(W) = cl(W) \cap A = cl(W)$$

$$int_A(W) = int(W \cup A^c) \cap A = int(W)$$

Por lo tanto W es p-cerrado en X. Así

$$cl(int(W)) \subseteq W$$

Como W es α-abierto

$$W \subseteq int(cl(int(W))) \subseteq int(W)$$

Entonces W es abierto y $cl(W) \subseteq W$, entonces W es cerrado.

Así hemos probado que W es clopen.

Teorema 3.4: Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Sea A localmente indiscreto clopen. Entonces todo subconjunto A es gα-cerrado y gα-abierto.

Demostración: Sea $W \subseteq A$, nos basta probar que W es gα-cerrado.

Sea O α-abierto tal que $W \subseteq O$. Entonces

$$W \subseteq O \cap A \subseteq A \text{ y } O \cap A \text{ es } \alpha\text{-abierto.}$$

Por el lema 3.4 se tiene que $O \cap A$ es clopen y por lo tanto

$$cl_\alpha(W) \subseteq cl_\alpha(O \cap A) = O \cap A \subseteq O$$

Así hemos probado que W es gα-cerrado.

3.2 La descomposición de Hewitt y sus aplicaciones

En está sección introducimos la descomposición de Hewitt y definiremos algunos conceptos afines relevantes. La descomposición de Hewitt es fundamental para la completación del diagrama #1.

Definición 3.5: Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es resoluble si existe un subconjunto D de X, tal que D y $X \setminus D$ son ambos densos en X.

Ejemplo 3.1: El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con la topología usual es resoluble.

Definición 3.6: Un espacio topológico (X, $\mathcal{T}$) es irresoluble si no es resoluble.

Ejemplo 3.2: Sea X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $\mathcal{T}$ la topología discreta, entonces X es irresoluble.

Definición 3.7: Un espacio topológico (X, $\mathcal{T}$) es fuertemente irresoluble si todo subespacio abierto de A es irresoluble.

Definición 3.8: Un espacio topológico (X, $\mathcal{T}$) es hereditariamente irresoluble, si no contiene un subconjunto no vacío resoluble.

Con el siguiente lema definimos la descomposición de Hewitt que vamos a utilizar en el desarrollo de este trabajo.

Lema 3.5:(Descomposición de Hewitt). Sea (X, $\mathcal{T}$) un espacio topológico. Entonces X tiene una descomposición X = F ∪ G, donde F es cerrado y resoluble, y G es abierto y hereditariamente irresoluble. Está descomposición es llamada la descomposición de Hewitt de X .

Definición 3.9:(descomposición de Jankovic-Reilly): Sea (X, $\mathcal{T}$) un espacio topológico, definiremos a los subconjuntos X_1 y X_2 como:

$$X_1 = \{ x \in X : \{x\} \text{ es nunca denso } \} \text{ y } X_2 = \{ x \in X : \{x\} \text{ es p-abierto } \}$$

Entonces $X = X_1 \cup X_2$ es una descomposición en X, la cual llamaremos la descomposición de Jankovic-Reilly.

Para la demostración del teorema 3.5, que veremos más adelante, necesitamos los siguientes resultados.

Lema 3.6: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces:

i) La unión de dos subconjuntos g-cerrado es g-cerrado

ii) La intersección de un subconjunto cerrado con uno g-cerrado es g-cerrado.

Demostración:

i) Sean A ,B dos g-cerrado y O abierto tal que $A \cup B \subseteq O$. Entonces $A \subseteq O$ y $B \subseteq O$, por lo tanto $cl(A) \subseteq O$ y $cl(B) \subseteq O$. Así

$$cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B) \subseteq O$$

hemos probado así que $A \cup B$ es g-cerrado.

ii) Sean A cerrados y B g-cerrado y O abierto tal que $A \cap B \subseteq O$. Resulta que $B \subseteq O \cup A^c$. Como A es cerrado $O \cup A^c$ es abierto y en consecuencia.

$$cl(B) \subseteq O \cup A^c$$

Así

$$cl(B) \cap A \subseteq O$$

Con lo que se tiene

$$cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B) = A \cap cl(B) \subseteq O$$

Lema 3.7: Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico fuertemente irresoluble, D un subconjunto de X tales que D es denso, B es abierto y $D \subseteq B$, entonces $D \in \mathcal{T}^{\alpha}$

Demostración: Como D es denso en B, se tiene que $B \subseteq (cl(int(D)))$, entonces

$$B \subseteq int(cl(int(D))).$$

Por consiguiente,

$$D = D \cap B \subseteq D \cap int(cl(int(D)))$$

Así D es α-abierto.

Lema 3.8: Sean $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, un subconjunto A de X es $g\alpha$-cerrado si sólo si $X_1 \cap cl_\alpha(A) \subseteq A$.

Demostración: Supongamos que

$$A \text{ es } g\alpha\text{-cerrado, y } x \in X_1 \cap cl_\alpha(A)$$

Si $x \notin A$, entonces $A \subseteq X \setminus \{x\}$ y $X \setminus \{x\}$ es un α-abierto y así $cl_\alpha(A) \subseteq X \setminus \{x\}$, lo cual es imposible, y por lo tanto $x \in A$ y en consecuencia $X_1 \cap cl_\alpha(A) \subseteq A$.

Recíprocamente, supongamos que $X_1 \cap cl_\alpha(A) \subseteq A$. Sea U un conjunto α-abierto tal que $A \subseteq U$ y sea $x \in cl_\alpha(A)$. Si $x \in X_1$, entonces $x \in A \subseteq U$. Supongamos que $x \in X_2$ y que $x \notin U$. Entonces $X \setminus U$ es un α-cerrado que contiene a x, y así,

$$cl_\alpha(\{x\}) = \{x\} \cup cl(int(cl(\{x\}))) \subseteq X \setminus U.$$

Como $\{x\}$ es p-abierto, se tiene que

$$int(cl(\{x\})) \cap A \neq \emptyset.$$

tomemos un punto

$$y \in int(cl(\{x\})) \cap A.$$

Entonces

$$y \in A \cap (X \setminus U) \subseteq U \cap (X \setminus U).$$

Lo cual es una contradicción.

Lema 3.9: Sean (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico, un subconjunto A de X es sg-cerrado si sólo si $X_1 \cap cl_s(A) \subseteq A$.

La prueba des este lema es análoga a la del lema 3.8.

Definición 3.10: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Sea A subconjunto de X, A es codenso si tiene interior no vacío, es decir, int(A) $\neq \emptyset$.

Teorema 3.5: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Con $X = F \cup G$ la descomposición de Hewitt y sea $X_1 = \{ x \in X : \{x\}$ nunca denso $\}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Todo conjunto β-cerrado es sg-cerrado,

ii) $X_1 \cap cl_s(A) \subseteq cl_{sp}(A)$ para cada $A \subseteq X$,

iii) $X_1 \subseteq int(cl(G))$,

iv) (X, $\mathscr{T}$) es la suma topológica de un espacio localmente indiscreto y fuertemente irresoluble,

v) Todo conjunto p-cerrado es gα-cerrado,

vi) (X, $\mathscr{T}^{\alpha}$) es g-submaximal

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sea $x \in X_1 \cap cl_s(A)$, supongamos que $x \notin cl_{sp}(A) = B$ .Entonces el conjunto B es β-cerrado y está contenido en el s-abierto $X - \{x\}$, y por lo tanto $cl_s(B) \subseteq X - \{x\}$. Así, $A \subseteq B$ de donde $cl_s(A) \subseteq cl_s(B)$, luego $x \notin cl_s(A)$, es una contradicción.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Sean E_1, E_2 subconjuntos densos disjuntos de F, con

$$F = E_1 \cup E_2 \ , \quad D_1 = E_1 \cup G \quad y \quad D_2 = E_2 \cup G.$$

Entonces D_1 y D_2 son densos,

$$cl_s(D_1) = cl_s(D_2) = X \ \ y \ \ int(D_1) = int(D_2) = G.$$

Así

$$cl_{sp}(D_i) = D_i \cup int(cl(G)) = E_i \cup int(cl(G)) \text{ para } i = 1,2,$$

Por hipótesis se tiene que

$$X_1 \subseteq (E_1 \cup int(cl(G)) \cap (E_2 \cup int(cl(G))) = int(cl(G)).$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

Sea

$$A = X - int(cl(G)) = cl(int(F)), \text{ y } \ B = int(cl(G)).$$

Entonces B es fuertemente irresoluble y por definición, $A \subseteq X_2$.

Si $C \subseteq A$ es cerrado en A, entonces C es cerrado y p-abierto en X. Así, C es abierto en X y por lo tanto en A. Por consiguiente A es un subespacio clopen localmente indiscreto.

(iv) $\Longrightarrow$(v)

Sea $X = A \cup B$, donde A y B son disjuntos y clopen. A es localmente indiscreto y B es fuertemente irresoluble. Sea C un subconjunto p-cerrado de X.

Como $C = H \cup E$, con H τ-cerrado, entonces τ^{α}-cerrado, y E es codenso en (X, $\mathscr{T}$), por lo tanto codenso en (X, $\mathscr{T}^{\alpha}$). Así $(X - E) \cap B$ es denso en B, por el lema 3.7 se tiene que H es τ-cerrado. Más aun, $(X - E) \cap A$ es g-abierto en (X , $\mathscr{T}^{\alpha}$), por el teorema 3.4. Luego por la parte (ii) del lema 3.6, se tiene que X – E es g-abierto en (X, $\mathscr{T}^{\alpha}$) y $C = H \cup E$ es g-cerrado en (X, $\mathscr{T}^{\alpha}$).

(v) $\Longrightarrow$ (vi)

Sea $D \subseteq X$ en $\mathscr{T}^{\alpha}$ denso. Entonces $X - D$ es p-cerrado en $(X, \mathscr{T})$ y así g-cerrado en

$(X, \mathscr{T}^{\alpha})$, es decir, D es g-abierto en $(X, \mathscr{T}^{\alpha})$.

(vi) $\Longrightarrow$ (iii)

Sea $x \in X_1$ y supongamos que $x \notin int(cl(G))$, es decir $x \in cl(int(F))$. Sean E_1, E_2 subconjuntos densos disjuntos de cl(int(F), tales que $cl(int(F)) = E_1 \cup E_2$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $x \in E_1$. Como E_2 es codenso, es g-cerrado en $(X, \mathscr{T}^{\alpha})$ y está contenido en el α-abierto $X - \{x\}$, por lo tanto

$$cl_{\alpha}(E_2) = E_2 \cup cl(int(cl(E_2))) \subseteq X - \{x\},$$

lo que es absurdo.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)

Sea $x \in X_1 \cap cl_s(A)$ y supongamos que

$$x \notin cl_{sp}(A) = A \cup int(cl(int(A))).$$

Escogemos una vecindad abierta de x, con $V \subseteq cl(G)$ y $V \subseteq cl(A)$. Así

$$x \in X - int(cl(int(A))) = cl(int(cl(X - A))),$$

con lo que concluimos que $H = V \cap int(cl(X - A))$ es no vacío y abierto. Ahora es fácil comprobar que $H \cap A$ y $H \cap (X - A)$ son densos en H, y por lo tanto $H \subseteq int(F)$, es decir, $H \cap cl(G) = \emptyset$, esto es una contradicción, pues $H \subseteq V \subseteq cl(G)$.

(ii) $\Longrightarrow$(i)

Sea A β-cerrado, es decir, $A = cl_{sp}(A)$. Por hipótesis, se tiene que

$$X_1 \cap cl_s(A) \subseteq A.$$

por el lema 3.9 A es sg-cerrado.

De está manera terminamos nuestra demostración.

Teorema 3.6: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico y $F \cup G$ la descomposición Hewitt de X. Si todo conjunto p-cerrado es αg-cerrado, entonces int(F) es un subespacio clopen localmente indiscreto.

Demostración: Sea U un subconjunto abierto de int(F). Como el int(F) es resoluble, se puede descomponer como dos subconjuntos E_1 y E_2 densos disjuntos. Si $R = U \cap E_1$, entonces R tiene interior vació, por lo tanto es p-cerrado en X.

Por hipótesis, $R \subseteq U$ es αg-cerrado y por lo tanto $cl_\alpha(R) \subseteq U$. Como cl(R) = cl(U), se tiene que cl(int(cl(U))) $\subseteq$ U y cl(int(cl(U))), es decir, U es cerrado.

Hemos mostrado que int(F) es un espacio clopen localmente indiscreto.

Lema 3.10: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico y $X = F \cup G$ la descomposición de Hiwitt. Entonces $X \setminus$ int(F) = cl(G) es siempre fuertemente irresoluble.

La demostración de este lema se obtiene aplicando el teorema 3.6 y la parte cuatro del teorema 3.5.

3.3 Caracterización de los espacios T_{gs}.

En está parte del trabajo veremos algunos resultados interesantes entre espacios T_{gs} y conjuntos p-cerrados,αg-cerrado, gα-cerrado, gp-cerrado y conjuntos unitarios p-abiertos o cerrados.

El siguiente teorema asegura la existencia de algunas relaciones entre los conjuntos gp-cerrado,αg-cerrado, p-cerrado y gα-cerrado que nos serán de gran utilidad para el desarrollo de este trabajo.

Teorema 3.7: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Todo conjunto gp-cerrado es αg-cerrado,

(ii) Todo conjunto p-cerrado es αg-cerrado,

(iii) Todo conjunto p-cerrado es gα-cerrado .

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) y (iii) $\Longrightarrow$ (ii) es obvio, y (ii) $\Longrightarrow$ (iii) se obtiene por el lema 3.10 y la parte (iv) del teorema 3.5.

Sólo falta demostrar (ii) $\Longrightarrow$(i).

Sea A gp-cerrado y $A \subseteq U$ donde U es abierto. Si $B = cl_p(A)$, entonces $B \subseteq U$.

Por hipótesis,

B es αg-cerrado y la $cl_\alpha(A) \subseteq cl_\alpha(B) \subseteq U$,

por lo tanto A es αg-cerrado.

Recordemos que un espacio es T_{gs} si cada conjunto gs-cerrado de X es sg-cerrado.

Teorema 3.8: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces los siguientes resultados son equivalentes:

i) X es un espacio T_{gs},

ii) Todo subconjunto unitario deX es p-abierto o cerrado

iii) Todo subconjunto αg-cerrado en X es gα-cerrado

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sea $x \in X_1$ y supongamos que $\{x\}$ es no cerrado. Entonces

$$X \setminus \{x\} \text{ es gs-cerrado, denso y s-abierto.}$$

Por lo tanto

$$X_1 \cap cl_s(X \setminus \{x\}) = X_1 \subseteq X \setminus \{x\},$$

es una contradicción.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

Sea

$$A \text{ gs-cerrado y } x \in X_1 \cap cl_s(A).$$

Entonces $\{x\}$ es cerrado.

Si $x \notin A$, es decir $A \subseteq X \setminus \{x\}$.Por lo tanto

$$cls(A) \subseteq X \setminus \{x\},$$

es una contradicción.

Ahora probaremos que (iii) $\Longleftrightarrow$ (i)

Supongamos que X es T_{gs} . Sea

$$A \ \alpha g\text{-cerrado y } x \in X_1 \cap cl_\alpha(A).$$

Entonces $\{x\}$ es cerrado.

Asumamos que $x \notin A$, es decir $A \subseteq X \setminus \{x\}$. Como

$$A \text{ es } \alpha g\text{-cerrado y } X \setminus \{x\} \text{ es abierto,}$$

tenemos que

$$x \in cl_\alpha (A) \subseteq X \setminus \{x\},$$

es una contradicción. Por lo tanto

$$X_1 \cap cl_\alpha(A) \subseteq A .$$

por el lema 3.8 se tiene que A es $g\alpha$-cerrado.

Recíprocamente, Supongamos que todo subconjunto αg-cerrado en X es

$g\alpha$-cerrado. Sea $x \in X_1$ y supongamos que $\{x\}$ es no cerrado. Entonces $X \setminus \{x\}$ es denso y αg-cerrado, así $g\alpha$-cerrado. Por el lema 3.8 se tiene que

$$X_1 \cap cl_\alpha (X \setminus \{x\}) = X_1 \cap X = X_1 \subseteq X \setminus \{x\}.$$

De aquí obtenemos que

$$x \in X \setminus \{x\},$$

lo que es una contradicción. Así

$$X \text{ es } T_{gs}$$

Teorema 3.9: Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Todo conjunto gp-cerrado es $g\alpha$-cerrado,

ii) X es T_{gs} y todo conjunto gp-cerrado es αg-cerrado

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Demostraremos que X es T_{gs} . Sea $x \in X$ y supongamos que $\{x\}$ es nunca denso y no cerrado. Entonces $X \setminus \{x\}$ es α-abierto y gp-cerrado, y por lo tanto

$$cl_\alpha(X \setminus \{x\}) \subseteq X \setminus \{x\},$$

pero

$$X \setminus \{x\} \text{ es } \alpha\text{-cerrado y } \{x\} \text{ es } \alpha\text{-abierto},$$

lo que es una contradicción . Así hemos probado que X es T_{gs}

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

se obtiene del teorema 3.8.

En el siguiente ejemplo se exhibe un espacio topológico en el que todo conjunto gp-cerrado es αg-cerrado y que no es T_{gs} , así tenemos que un subconjunto que es gp-cerrado no es necesariamente gα-cerrado.

Ejemplo 3.3: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, para cada $n \in \mathbb{N}$,definimos

$$A_n = \{ 1,2,\ldots, n \} \text{ y } \mathscr{T} = \{ A_n \ / n \in \mathbb{N} \} \cup \{ \emptyset, \mathbb{N} \}.$$

Es claro que $(\mathbb{N}, \mathscr{T})$ es fuertemente irresoluble. Por el teorema 3.7 todo los subconjuntos p-cerrados son gα-cerrados y por el teorema 3.9 todos los subconjuntos gp-cerrados son αg-cerrados. Si

$$m > 1, \ cl(m) = \mathbb{N} \setminus A_{m-1}$$

y por lo tanto

$$int(cl(\{m\})) = \emptyset.$$

Así $\{m\}$ es nunca denso no cerrado y por lo tanto

$$(\mathbb{N}, \ \mathscr{T}) \text{ no es } T_{gs}.$$

3.4 Relaciones entre los conjuntos gp-cerrados y sg-cerrado

En esta sección consideramos la relación entre los conjuntos gp-cerrado y sg-cerrado (respectivamente gs-cerrado). Primero observemos que todo conjunto sg-cerrado es gs-cerrado. La relación entre entre dos conjuntos sg-cerrado (gs-cerrado) y otro gp-cerradose ilustra en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \text{sg-cerrado} & \longrightarrow & \text{gs-cerrado} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{sp-cerrado} & \longrightarrow & \text{gsp-cerrado} \end{array}$$

Diagrama # 2

En general la noción de conjunto gp-cerrado y sg-cerrado (gs-cerrado) son independientes.

Recordemos que un espacio topológico X es sg-submaximal si cada conjunto denso de X es sg-abierto.

Definición 3.11: Un espacio topológico (X, $\mathscr{T}$) . X es fuertemente sg-submaximal si todo subconjunto gsp-cerrado de X es gs-cerrado.

Teorema 3.10: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Todo subconjunto gs-cerrado en X es gp-cerrado,

ii) Todo subconjunto sg-cerrado en X es gp-cerrado

iii) Todo subconjunto s-cerrado en X es gp-cerrado

iv) X es un espacio extremadamente disconexo.

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) y (ii) $\Longrightarrow$ (iii) son implicaciones obvias.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

Sea A un subconjunto abierto regular en X. Entonces A es s-cerrado.

Por la hipótesis , A es gp-cerrado y $A \subseteq A$. Entonces $cl_p(A) = cl(A) \subseteq A$, es decir A es cerrado y por lo tanto X es extremadamente disconexo.

(iv) $\Longrightarrow$(i)

Sea A un gs-cerrado con $A \subseteq U$ donde U es abierto. Entonces

$$cl_s(A) = A \cup int(cl(A).$$

Por la hipótesis, int(cl(A)) es cerrado y claramente

$$cl_p(A) = A \cup cl(int(A)),$$

es decir A es gp-cerrado.

Teorema 3.11 Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Todo conjunto gp-cerrado es gs-cerrado,

ii) Todo conjunto p-cerrado es gs-cerrado

iii) X es sg-submaximal.

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$(ii) Es obvio

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Supongamos que todo subconjunto p-cerrado es gs-cerrado. Sea $X = F \cup G$ la descomposición de Hewitt en X, y sea E_1, E_2 subconjuntos densos disjuntos de int(F), con $int(F) = E_1 \cup E_2$.

Afirmamos que todo subconjunto abierto $V \subseteq int(F)$ es regular abierto . De hecho, $V \cap E_1$ es codenso y está contenido en V. Como los conjuntos codenso p-cerrado, por hipótesis, ellos son gs-cerrado. Así

$$int(cl(V \cap E_1)) \subseteq V.$$

Por otro lado, E_1 es denso en int(F), así tenemos que

$$\text{int}(\text{cl}(\ V \cap E_1\ ) = \text{int}(\text{cl}(V)).$$

Se sigue que $V = \text{int}(\text{cl}(V))$.

Ahora sea

$$x \in \text{int}(F) \text{ y } \ V = \text{int}(F) \cap (\ X \setminus \text{cl}(\{x\})\ ).$$

Supongamos que $\{x\}$ es nunca denso. Entonces

$$X \setminus \text{cl}(\{x\}) \text{ es denso y } \text{int}(\text{cl}(V)) = \text{int}(\text{cl}(\text{int}(F))) = \text{int}(F).$$

Por lo anterior,

$$\text{int}(F) = V.$$

Así

$$\text{int}(F) \subseteq X \setminus \{x\},$$

que es una contradicción. Por lo tanto $\{x\}$ es p-abierto, hemos probado que

$$\text{int}(F) \subseteq X_2 \text{, es decir } X_1 \subseteq \text{cl}(G).$$

Por lo tanto X es sg-submaximal.

La prueba del siguiente teorema es similar al teorema anterior, por tal razón la omitiremos.

Teorema 3.12: Sea $(\ X, \mathscr{T}\ )$ un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Todo conjunto gsp-cerrado en X es gs-cerrado (X es fuertemente sg-submaximal)

ii) Todo conjunto sp-cerrado en X es gs-cerrado

Caracterizando a los espacios g-submaximales en X_α obtenemos los siguientes resultados a los cuales omitiremos su demostración.

Teorema 3.13: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Si (X, $\mathscr{T}^{\alpha}$) es g-submaximal, entonces (X, $\mathscr{T}$) es fuertemente sg-submaximal.

Teorema 3.14: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico T_{gs} y fuertemente sg-submaximal. Entonces (X, $\mathscr{T}^{\alpha}$) es g-submaximal.

Teorema 3.15: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico extremadamente disconexo y sg-submaximal. Entonces X es fuertemente sg-submaximal.

Teorema 3.16: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) X es T_{gs}-espacio

(ii) Cada subconjunto g-cerrado de X es gα-cerrado;

(iii) Cada subconjunto αg-cerrado de X es sg-cerrado;

(iv) Cada subconjunto g-cerrado de X es β-cerrado;

(v) Cada subconjunto g-cerrado de X es p-cerrado;

(vi) Cada subconjunto g-cerrado de X es sg-cerrado;

(vii) Cada subconjunto αg-cerrado de X es β-cerrado;

(viii) Cada subconjunto gs-cerrado de X es β-cerrado;

Teorema 3.17: Sea (X, $\mathscr{T}$) un espacio topológico. Entonces

(i) X es extremadamente disconexo $\Longleftrightarrow$ cada subconjunto semi-cerrado de X es αg-cerrado.

(ii) X es extremadamente disconexo si y sólo si cada subconjunto sg-cerrado de X es αg-cerrado.

(iii) X es nodeg y extremadamente disconexo si y sólo si cada subconjunto semi-cerrado de X es g-cerrado.

(iv) X es $T_{1/2}$ si y sólo si cada subconjunto gα-cerrado de X es semi- cerrado.

Así se tiene un nuevo diagrama que muestra las relaciones entre las clases de conjuntos cerrados generalizados bajo discusión. Ninguna de las implicaciones mostradas en el siguiente diagrama pueden ser revertidas en un espacio topológico general.

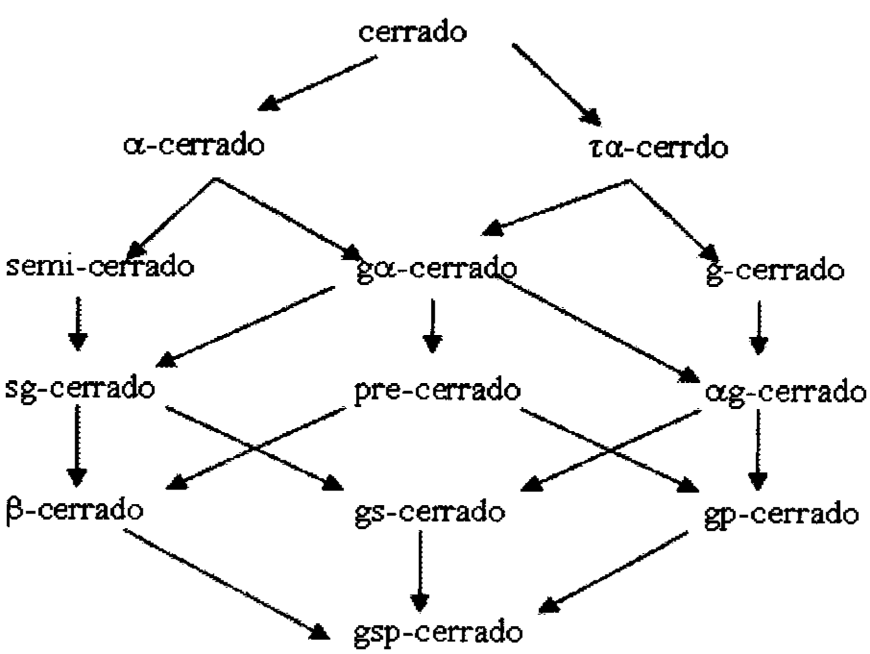

Diagrama # 3

CONCLUSIÓN

En un espacio topológico todos los subconjuntos A de X α-abiertos son semi-abierto y pre-abierto.

Todo subconjunto α-abiertos forman una topología, no así los subconjuntos semi-abiertos, pre-abiertos y β-abiertos.

Los conjuntos $\tau\alpha$-cerrado no son equivalentes con lo conjuntos cerrados, g-cerrados, gα-cerrado o α-cerrado.

Cada subconjunto sg-cerrado de X es gα-cerrado si el espacio X es extremadamente disconexo.

El espacio X es nodeg si todo subconjunto αg-cerrado de X es g-cerrado y X es sg-submaximal si todo subconjunto pre-cerrado de X es gs-cerrado.

El estudio de conjuntos cerrados generalizados a producidos un nuevo axioma de separación el cual esta entre T_0 y T_1, tnto como $T_{1/2}$, T_g, $T_{3/4}$ .Algunos de estos han sido muy útiles en las Ciencias Computacionales y Topología Digital.

BIBLIOGRAFÍA

Aho,T., y Nieminen, T. (1994) Spaces in which preopen subsets are smi-open. Ricerche Mat. 43. Págs: 45-59.

Arya, S., y Nour, T. (1990) Characterisations of s-normal spaces. Indian J. Pure Appl. Math. 21. Págs: 717-719.

Bhattacharya, P., y Lahiri, B. (1987) Semi-generalised closed sets in topology. Indian J. Math. 29. Págs: 375-382.

Cao, J., Ganster, M., y Reilly, I. (1998) Submaximality, extremal disconnectedness and generalized closed sets. Houston J. Math. 24.Págs: 681-688.

Cao, J., Ganster, M., y Reilly, I. (1999) On sg- closed sets and gα-closed sets. Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser A, Math. 20. Págs: 1-5.

Cao, J., Ganster, M., y Reilly, I. (1998) On generalized closed sets. Topology Appl. Proceedings Gyula Topology Colloquium, to appear.

Cao, J., Ganster, M., Konstadilaki, Ch., y Reilly, I. On preclosed sets and their generalizations. Preprint

Dontchev, J. (1995) On generating semi- preopen sets. Mem. Fac.Sci. Kochi Univ. Ser. A. Math.16. Págs: 35-48.

Dontchev, J. (1997) On some separation axioms associated with the α-topology. Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A. Math. 18. Págs: 31-35.

Dontchev, J., y Ganster, M. (1996) On δ-generalized closed sets and $T_{3/4}$ spaces. Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A. Math. 17. Págs:15-31.

Douwen, E. (1993) Applications of maximal topologies. Topology Appl. 51. Págs: 125-139.

Iribarren, I. (1987) Topología de espacios métricos. México.

Jankovid, D., y Reilly, I. (1985) On semi-separation properties. Indian J. Pure Appl. Math. 16. Págs 957-964.

Levine, N. (1970) Generalizad closed sets in topological spaces. Rend. Circ. Math. Palermo. 19. Págs: 89-96.

Maki, H., Devi, R., y Balachandren, K. (1993) Generalizad α- closed sets in topology. Bull. Fukuoka Univ. Ed. Part III, 42. Págs: 13-21.

Maki, H., Balachandren, K., y Devi, R. (1996) Remarks on semi-generalized closed sets and generalizad semi-closed sets. Kyungpook Math. 36.Págs: 155-163.

Maki, H., Umehara, J., y Noiri, T. (1996) Every topological spaces pre-$T_{1/2}$. Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A, Math. 17. Págs: 33-42.

Moore, T. (1964) Elementary General Topology. Estados Unidos.

Munkres, J. (2002) Topología. España.

Njastad, O. (1965) On some classes of nearly open sets. Pacific J. Math. 15. Págs: 961-970.

Reilly, I., y Vamanamurthy, M. (1985) On α-conyinuity in topological spaces. Acta Math. Hungar. 45. Págs: 27-32.

Simmons, G. (1963) Introduction to Topology and Modern Analysis. Japón.