

Caracterización de flujos en el fenómeno de Couette-Taylor a través de simulaciones computacionales

Rafael Alegretti

Asesorado por: Mgtr. Miguel Silvera

Trabajo de graduación como requisito para el
título de Licenciatura en Física

Universidad de Panamá

Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología

Departamento de Física

Escuela de Física

Febrero 2023

Tabla de contenidos

| | |
|--|-----------|
| Resumen | 1 |
| Introducción | 2 |
| 1 Marco Teórico | 4 |
| 1.1 Consideraciones físicas de los fluidos | 4 |
| 1.1.1 Conservación de la masa | 5 |
| 1.1.2 Ecuación de Euler | 6 |
| 1.1.3 Ecuaciones Navier-Stokes | 7 |
| 1.2 Flujo estable entre cilindros rotatorios | 10 |
| 1.3 Flujo entre cilindros rotatorios considerando perturbaciones pequeñas | 12 |
| 2 Análisis numérico | 15 |
| 2.1 Discretización de regiones | 15 |
| 2.2 Método de la diferencia finita | 16 |
| 2.2.1 Extensión del método de la diferencia finita | 18 |
| 2.3 Condiciones de frontera | 20 |
| 2.4 Flujo estacionario entre cilindros rotatorios | 22 |
| 2.5 Flujo entre cilindros rotatorios | 25 |
| 3 Resultados numéricos | 28 |
| 3.1 Soluciones estacionarias | 29 |
| 3.2 Solución de las ecuaciones perturbadas | 33 |
| 3.2.1 Región de Couette o estacionaria | 34 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.2.2 | Vórtices de Taylor | 35 |
| 3.2.3 | Vórtices móviles | 37 |
| 3.2.4 | Mapa de regímenes | 38 |
| 4 | Conclusiones y recomendaciones | 40 |
| 4.1 | Conclusiones | 40 |
| 4.2 | Recomendaciones | 41 |
| 5 | Anexos | 42 |
| 5.1 | Resolución de la ecuación estacionaria | 42 |
| 5.2 | Constantes de las ecuaciones estacionarias | 43 |
| 5.3 | Cálculo de gradientes en dos dimensiones Matriz-Vector | 44 |
| 5.4 | Relación de conmutación de los operadores $\nabla^2 f; \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rf)$ | 45 |
| | Referencias | 47 |

Tabla de figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Diagrama de cilindros coaxiales | 10 |
| 2.1 | Discretización en una dimensión | 15 |
| 2.2 | Posición de una celda en una rendija bidimensional | 16 |
| 3.1 | Solución numérica a la ecuación diferencial estacionaria (Azul) y solución analítica (Rojo) con valores iniciales $V(R_1) = 0.30 m/s$; $V(R_2) = -0.64 m/s$ | 29 |
| 3.2 | Diferencia entre soluciones numérica y analítica con valores de iniciales $V(R_1) = 0.30 m/s$; $V(R_2) = -0.64 m/s$ | 30 |
| 3.3 | Mapa de velocidades en el plano \hat{z} con valores de iniciales $V(R_1) = 0.30 m/s$; $V(R_2) = -0.64 m/s$ | 30 |
| 3.4 | Presión relativa en la dirección \hat{r} con valores de iniciales $V(R_1) = 0.30 m/s$; $V(R_2) = -0.64 m/s$ | 32 |
| 3.5 | Diferencia entre soluciones de presión relativa en la dirección \hat{r} con valores de iniciales $V(R_1) = 0.30 m/s$; $V(R_2) = -0.64 m/s$ | 32 |
| 3.6 | Mapa de presión relativa con valores iniciales $V(R_1) = 0.30 m/s$; $V(R_2) = -0.64 m/s$ | 33 |
| 3.7 | Sin estructura. Mapas de presiones y velocidades en el plano $\hat{\varphi}$ superpuestos (<i>izquierda</i>); mapa de velocidades en la dirección \hat{r} (<i>superior derecha</i>); mapa de velocidades en la dirección \hat{z} (<i>inferior derecha</i>) para el sistema con condiciones $Re_I = 102, 98$ $Re_E = 101, 95$ | 34 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.8 | Estructura de transición. Mapas de presiones y velocidades en el plano $\hat{\varphi}$ superpuestos (<i>izquierda</i>); mapa de velocidades en la dirección \hat{r} (<i>derecha arriba</i>); mapa de velocidades en la dirección \hat{z} (<i>derecha abajo</i>) para el sistema con condiciones $Re_I = 308,95$ $Re_E = 410,90$ | 35 |
| 3.9 | Vórtices de Taylor, $t=0,448$. Mapas de presiones y velocidades superpuestos en el plano $\hat{\varphi}$ (<i>izquierda</i>); mapa de velocidades en la dirección \hat{r} (<i>superior derecha</i>); mapa de velocidades en la dirección \hat{z} (<i>inferior derecha</i>) para el sistema con condiciones $Re_I = 617,89$ $Re_E = 483,50$ | 36 |
| 3.10 | Vórtices móviles, $t = 1,590s$. Mapas de presiones y velocidades superpuestos en el plano $\hat{\varphi}$ (<i>izquierda</i>); mapa de velocidades en la dirección \hat{r} (<i>superior derecha</i>); mapa de velocidades en la dirección \hat{z} (<i>inferior derecha</i>) para el sistema con condiciones $Re_I = 205,96$ $Re_E = 123,89$ | 37 |
| 3.11 | Vórtices móviles, $t = 2,419s$. Mapas de presiones y velocidades superpuestos en el plano $\hat{\varphi}$ (<i>izquierda</i>); mapa de velocidades en la dirección \hat{r} (<i>superior derecha</i>); mapa de velocidades en la dirección \hat{z} (<i>inferior derecha</i>) para el sistema con condiciones $Re_I = 205,96$ $Re_E = 123,89$ | 38 |
| 3.12 | Mapa de regímenes de flujo entre dos cilindros coaxiales rotatorios. Región estacionaria (Rojo); Vórtices de Taylor (Azul) | 39 |

Resumen

Se caracterizaron flujos en función de los números de Reynolds de los cilindros a través de simulaciones computacionales. Entre los flujos caracterizados se encuentran: vórtices móviles, flujos con forma toroidal, flujos sin estructura, y flujos con estructuras de transición entre los dos anteriores. Esto quedó registrado en un mapa de regímenes.

Se analizaron las ecuaciones Navier-Stokes incompresibles a través de perturbaciones de primer orden con simetría azimutal a una solución estacionaria. El programa realizó las simulaciones utilizando una extensión del método de la diferencia finita y fue escrito en el lenguaje *Python*.

Introducción

El estudio de los estados estacionarios y turbulentos de un fluido es la base de la mecánica de fluidos; sin embargo, las características fundamentales de los fluidos y la complejidad de las ecuaciones que los modelan proponen un obstáculo importante en el estudio práctico y teórico efectivo. Esto se debe a que muchas de las ecuaciones que modelan estos fenómenos carecen de soluciones exactas y/o requieren equipo sofisticado y costoso para el estudio práctico de sus propiedades. Las simulaciones computacionales permiten burlar estos obstáculos proveyendo propiedades cualitativas de los sistemas hidrodinámicos a través de soluciones numéricas a las ecuaciones que rigen el movimiento en estos sistemas.

El movimiento de un fluido viscoso entre cilindros coaxiales rotatorios, llamado flujo de Couette-Taylor, es un fenómeno donde se pueden presentar estados estacionarios y turbulentos dependientes de la velocidad de rotación de los cilindros. Sir Geoffrey Taylor estudió la estabilidad del flujo entre cilindros coaxiales, lo que lo llevó a confirmar la condición de frontera de no deslizamiento en una interfase de fluido viscoso-sólido (1923).

Los resultados de simulaciones del sistema de cilindros concéntricos permiten la obtención directa de la viscosidad de un fluido una vez encontrada la velocidad de transición entre regímenes de flujo; además, sirven como guía para la construcción de dispositivos de ósmosis inversa y estudios de magnetohidrodinámica.

Objetivo general

Este proyecto de investigación propone el estudio de los regímenes de flujo del fenómeno Couette-Taylor a través de simulaciones computacionales. Las simulaciones hacen uso del método de las diferencias finitas para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Objetivos específicos

- Analizar las ecuaciones Navier-Stokes del sistema de cilindros rotatorios concéntricos
- Diseñar un programa en el lenguaje *Python* para la simulación del sistema

- Utilizar dicho programa para el estudio sistemático de los estados del flujo de acuerdo a las condiciones de frontera
- Generar un mapa de regímenes de flujo con los números de Reynolds como parámetros

Alcance del trabajo

Los mapas de regímenes de flujo pueden ser utilizados para guiar el diseño y análisis de experimentos de física e ingeniería.

Debido al enfoque modular del diseño del software, es posible su modificación para casos más específicos del fenómeno. Por ejemplo, sistemas con interacciones magnéticas o cambios de temperatura. Esto sumado a la disponibilidad de un software programable que permite modificar las propiedades del fluido a simular.

Limitaciones

Las ecuaciones serán analizadas utilizando la teoría de perturbaciones de primer orden, y el método extendido de la diferencia finita para encontrar soluciones numéricas. Esto puede producir errores para valores muy grandes de las condiciones iniciales del sistema o simulaciones que ameriten una gran cantidad de iteraciones.

La capacidad computacional del hardware utilizado (*Toshiba Satellite L755-S5152 B960* con procesador *Intel® Pentium® B960 2.2 GHz*) limita la resolución que puedan alcanzar las simulaciones.

Capítulo 1

Marco Teórico

1.1 Consideraciones físicas de los fluidos

El movimiento de los fluidos requiere consideraciones iniciales que determinarán el tipo de herramientas matemáticas utilizadas para su estudio. Existen dos líneas de estudio principales: aquellas que consideran el fluido como una colección de partículas que se mueven libremente (estudio estadístico), y aquellas que consideran los fluidos como medios continuos.

En el análisis de los fluidos como medio continuo, se consideran los valores promedio de las magnitudes físicas en volúmenes que deben ser muy pequeños en comparación al cuerpo fluido y grandes en comparación a las distancias intermoleculares. Como consecuencia, esta rama de análisis no permite el estudio de partículas individuales del fluido, sino a paquetes de partículas que son pequeños respecto a las características del sistema, conocidos como volúmenes de control. Entre las magnitudes físicas necesarias para el análisis de los volúmenes de control se encuentran:

- Posición (\mathbf{r})
- Densidad (ρ)
- Presión (p)
- Viscosidad (μ)

1.1.1 Conservación de la masa

Considere un volumen (V_0) de fluido en un sistema cerrado. La masa contenida en este volumen puede determinarse con la ecuación

$$M = \int_{V_0} \rho dV$$

Donde ρ es la densidad de masa del fluido.

El flujo de masa por unidad de tiempo que atraviesa la superficie que contiene el volumen está dado por

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

Donde \mathbf{v} es la velocidad del fluido y $d\mathbf{S}$ un elemento de área de la superficie que contiene a V_0 . Se puede notar que en el caso donde el volumen aumenta su masa $\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} < 0$. De esto

$$\frac{dM}{dt} = - \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

Sustituyendo la identidad para M y aplicando el teorema de Green ($\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{f} dV$) al lado izquierdo de la ecuación, obtenemos

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$$

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

Esto implica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.1}$$

Denominada como *ecuación de continuidad*.

Para fluidos incompresibles; es decir, de densidad constante en el tiempo y espacio, se encuentra

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{1.2}$$

Es decir, los fluidos incompresibles en un sistema cerrado deben mantener divergencia nula en todos los puntos.

1.1.2 Ecuación de Euler

A través de un razonamiento análogo al de la sección anterior, la fuerza que actúa sobre un volumen de fluido V_0

$$\mathbf{F} = - \oint p d\mathbf{S}$$

transformando la integral a través del teorema de Green

$$\mathbf{F} = - \int \nabla p dV$$

Por tanto, el movimiento de un elemento infinitesimal de volumen estará dado por las ecuaciones de Newton de la forma

$$-\nabla p = \frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt}$$

Donde $\mathbf{p} = \rho \mathbf{v}$.

Para el caso de fluidos incompresibles, la densidad es constante en el tiempo, por tanto

$$-\nabla p = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

tomando en cuenta que la velocidad de un fluido es una función del tiempo y las coordenadas, el diferencial total de \mathbf{v} será

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial l} \cdot d\mathbf{l}$$

Donde \mathbf{l} se refiere a la posición del volumen, por tanto, el operador de derivada cumple la identidad $\frac{\partial}{\partial l} = \nabla$. Sustituyendo esto en la derivada total de \mathbf{v} en el tiempo

$$-\nabla p = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} \right)$$

Dado que $\frac{d\mathbf{l}}{dt}$ no es más que la velocidad del volumen

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \quad (1.3)$$

Estas son conocidas como *Ecuaciones de Euler*, las cuales determinan el movimiento de un fluido invíscido e incompresible.

1.1.3 Ecuaciones Navier-Stokes

El momento de una partícula fluida está dado por

$$\rho \mathbf{v}$$

La variación en el tiempo del impulso será entonces

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

De acuerdo a la ecuación de continuidad (1.1)

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{v})$$

Para fluidos incompresibles e invíscidos, la ecuación de Euler (1.3) dispone

$$-\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = \nabla p + \rho \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{v})$$

En forma tensorial

$$-\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

$$-\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho v_k v_i)}{\partial x_k}$$

$$-\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

Donde $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_k v_i$; y describe la transferencia de impulso en cada punto del espacio, por lo que se conoce como tensor de densidad de flujo de momento. Es importante notar que, debido a las asunciones realizadas en el análisis, esta definición solo es válida para fluidos incompresibles e invíscidos.

Se puede modificar el tensor Π_{ik} sumando un término que incluya los efectos del rozamiento entre las partículas del fluido sobre la transferencia de impulso (σ'_{ik}). Esto deja el tensor de densidad de flujo de la forma:

$$\Pi_{ik} = \rho v_k v_i - \sigma_{ik}$$

Donde $\sigma_{ik} = \sigma'_{ik} - \delta_{ik}p$.

Dado que σ'_{ik} contiene los efectos del rozamiento entre las partículas del fluido, este debe anularse cuando la velocidad relativa entre las partículas es cero; es decir, el campo de velocidades del fluido es constante en el espacio. De este razonamiento se deduce que el tensor debe ser función de las derivadas espaciales de las velocidades únicamente.

De manera análoga, el rozamiento entre las partículas debe ser nulo para un movimiento rotacional uniforme. En este se cumple $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, de forma tensorial

$$v_i = \epsilon_{ijk} \Omega_j x_k$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\epsilon_{ijk} \Omega_j x_k)$$

Debido a la antisimetría del tensor Levi-Civita

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{kji} \Omega_j x_i) = -\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

Por lo tanto, la combinación de derivadas de la velocidad que se anula para un movimiento rotacional uniforme es

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad v_i = \epsilon_{ijk} \Omega_j x_k$$

El tensor que cumple las condiciones para velocidad constante y velocidad angular uniforme es entonces

$$\sigma'_{ik} = a \frac{\partial v_l}{\partial x_l} + b \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

Tomando en cuenta la repetición de términos cuando $i = j$, el tensor puede escribirse de la forma

$$\sigma'_{ik} = (\xi - 2/3\mu) \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.4)$$

Donde ξ ; μ son coeficientes positivos ligados a la resistencia del fluido a las deformaciones; es decir, la viscosidad.

Sustituyendo (1.4) en el tensor Π_{ik} modificado,

$$\Pi_{ik} = \delta_{ik} p + \rho v_k v_i - (\xi - 2/3\mu) \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} - \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

La ecuación del movimiento (1.3) queda de la forma

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\xi - 2/3\mu) \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

En la mayoría de los casos, los coeficientes de viscosidad tienen poca variación respecto a las coordenadas o el tiempo, por lo cual

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_i} + (\xi + 1/3\mu) \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_k \partial x_l}$$

En forma vectorial se obtiene

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + (\xi + 1/3\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.5)$$

Donde $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ y se denomina *derivada material*.

Las ecuaciones (1.5) describen el movimiento de un fluido viscoso y se conocen como *Ecuaciones Navier-Stokes*, desarrolladas entre 1822-1850 por Claude-Louis Navier y George

Gabriel Stokes.

El último término se anula para fluidos incompresibles [ver (1.2)], dejando a las ecuaciones de la forma

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} \quad (1.6)$$

Donde $\nu = \mu/\rho$ se conoce como *viscosidad cinemática*.

1.2 Flujo estable entre cilindros rotatorios

Considere un fluido incompresible en medio de dos cilindros de radio R_1 y R_2 (Donde $R_1 < R_2$) libres para rotar con velocidad angular ω_1 y ω_2 , respectivamente.

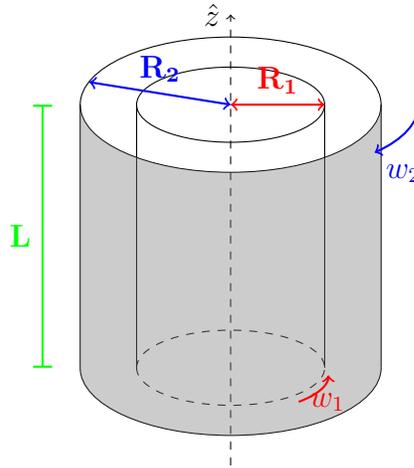


Figura 1.1 : *Diagrama de cilindros coaxiales*

Para flujos estables, podemos reducir el problema debido a su simetría; dado que las velocidades radiales y axiales deben ser nulas. Por tanto, podemos afirmar

$$\mathbf{V} = V(r)\hat{\phi}$$

$$p = p(r)$$

Donde p es la presión en cualquier punto y \mathbf{V} la velocidad en cualquier punto.

Las ecuaciones de Navier-Stokes quedan de la forma

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{V^2}{r} \quad (1.7a)$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} = 0 \quad (1.7b)$$

Estas ecuaciones tienen como solución [Sección 5.1]

$$V = ar + \frac{b}{r} \quad (1.8a)$$

$$p = \rho \left(2ab \ln(r) + \frac{a^2}{2} r^2 - \frac{b^2}{2r^2} \right) \quad (1.8b)$$

Donde las constantes tienen valores $a = \frac{R_1^2 \omega_1 - R_2^2 \omega_2}{R_2^2 - R_1^2}$ y $b = R_1^2 \omega_1 \frac{1 - \omega_2 / \omega_1}{1 - R_1^2 / R_2^2}$. [Sección 5.2]

Es posible determinar el momento de las fuerzas de rotación que rozan contra los cilindros. La fuerza de roce entre el fluido y los cilindros estará dirigida a lo largo de la tangente de la superficie del cilindro ($\hat{\varphi}$), esta será igual a las tensiones del fluido en el plano $r\varphi$. Por tanto

$$M = rF_r$$

$$F_r = 2\pi r \sigma_{r\varphi}$$

$$\sigma_{ik} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \delta_{ik} \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

Para el plano $r\varphi$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

Sustituyendo en la ecuación de momento

$$M = 2\pi\mu r^2 \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right)$$

De acuerdo a la ecuación (1.8a)

$$M = -4\pi\mu b$$

1.3 Flujo entre cilindros rotatorios considerando perturbaciones pequeñas

A partir de los resultados encontrados anteriormente, podemos considerar las soluciones (1.8) como soluciones no perturbadas a las que denominaremos V_0 y p_0 desde este punto. Considerando perturbaciones pequeñas del fenómeno, podemos afirmar

$$\mathbf{V} = (v_r, V_0 + v_\varphi, v_z)$$

$$P = p_0 + p$$

Donde $v_r; v_\varphi; v_z$ son las velocidades en la direcciones radial, azimutal y axial respectivamente, pequeñas con respecto a V_0 y simétricas azimutalmente; es decir, solo son funciones de r, z y t .

A partir de esto, las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles (1.6) quedan de la forma

Para r

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{(V_0 + v_\varphi)}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{(V_0 + v_\varphi)^2}{r} \right) = - \frac{\partial}{\partial r}(p_0 + p) + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right]$$

Debido a la simetría de las perturbaciones, todas las derivadas respecto a φ se anulan

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{V_0^2 + 2V_0 v_\varphi + v_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial r}(p_0 + p) + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right]$$

Además, es posible obviar los términos de las perturbaciones de segundo orden

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{V_0^2}{r} - 2\frac{V_0}{r}v_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r}(p_0 + p) + \frac{\mu}{\rho} \left[\nabla_1^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right]$$

$$\text{Donde } \nabla_1^2(\cdot) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - 2\frac{V_0}{r}v_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left[\nabla_1^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right]} \quad (1.9)$$

Para φ

$$\rho \left(\frac{\partial(V_0 + v_\varphi)}{\partial t} + v_r \frac{\partial(V_0 + v_\varphi)}{\partial r} + \frac{(V_0 + v_\varphi)}{r} \frac{\partial(V_0 + v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial(V_0 + v_\varphi)}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\nabla_1^2(V_0 + v_\varphi) - \frac{(V_0 + v_\varphi)}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)$$

Ignorando los términos de segundo grado de las perturbaciones y las derivadas respecto

a φ

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r V_0' + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \left[\nabla_1^2 v_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_0') - \frac{(V_0 + v_\varphi)}{r^2} \right]$$

La derivada de (rV_0') es idénticamente $\frac{V_0}{r}$, por tanto

$$\boxed{\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r V_0' + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \left[\nabla_1^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right]} \quad (1.10)$$

Para z

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla_1^2 v_z$$

$$\boxed{v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\mu}{\rho} \nabla_1^2 v_z} \quad (1.11)$$

La ecuación de continuidad toma la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho u_i) = 0$$

Donde ∇_i representa la divergencia en cada dirección y u_i , la componente de la velocidad en cada dirección. Como asumimos una densidad constante $\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0$; $x_k = \{r, \varphi, z, t\}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(V_0 + v_\varphi) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0} \quad (1.12)$$

Con esto, quedan expresadas cuatro ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del fluido incompresible. Es notable que las ecuaciones (1.9); (1.10);(1.11) tienen formas similares. Estas difieren en términos debido a la solución estacionaria, que al ser función de r dirigida en la dirección $\hat{\varphi}$ acoplan las velocidades en estas dos direcciones.

Capítulo 2

Análisis numérico

2.1 Discretización de regiones

Consideremos una región unidimensional Ω . Esta región puede ser subdividida en N celdas finitas de longitud δx , tal que

$$\delta x = \frac{b - a}{N}$$

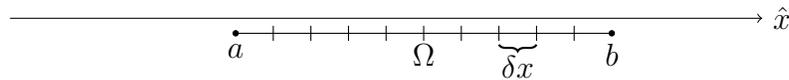


Figura 2.1 : *Discretización en una dimensión*

Donde $L = b - a$ es la longitud de la región.

Es posible definir la posición de la celda i a través de la fórmula

$$x_i = x_0 + i\delta x; \quad N \leq i \leq 0$$

Donde x_0 es la posición de la celda de referencia. A la región discreta se le denota como $\partial\Omega$.

Estos conceptos se pueden extender a regiones bidimensionales

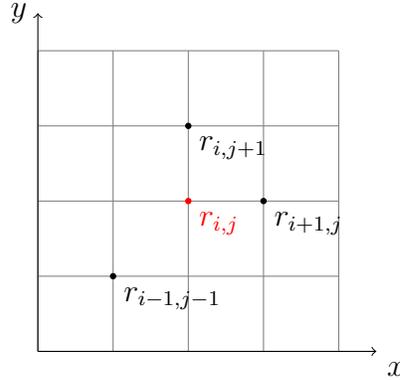


Figura 2.2 : Posición de una celda en una red bidimensional

$$r_{ijk} = (x_0 + i\delta x, y_0 + j\delta y)$$

y de igual manera, a regiones tridimensionales

$$r_{ijk} = (x_0 + i\delta x, y_0 + j\delta y, z_0 + k\delta z)$$

2.2 Método de la diferencia finita

Es posible solucionar problemas matemáticos a través de métodos numéricos. Esto implica digitalizar la información para poder ser manejada, lo cual requiere especial cuidado cuando se manejan cantidades que pertenecen al continuo [$x \in \mathbb{R}^n$]. Un método para la discretización de derivadas es el método de diferencias finitas (FDM por sus siglas en inglés), este aproxima las derivadas de una ecuación diferencial haciendo uso de las series de Taylor.

Consideremos f una función continua y diferenciable de x en una región Ω . Debido al teorema de Taylor, podemos realizar una expansión de la función alrededor de un punto $x_0 \in \Omega$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} \frac{d}{dx} f(x_0) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} f(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x_0)$$

Considerando la aproximación hasta la m -ésima derivada se encuentra

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} \frac{d}{dx} f(x_0) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} f(x_0) + \cdots + \frac{h^m}{m!} \frac{d^m}{dx^m} f(x_0) + R_m(x_0)$$

Donde R_m contiene los $n - m$ términos de la aproximación desde la m -ésima derivada a la n -ésima ($R_m(x_0) = \sum_{m+1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x_0)$). Resolviendo para $\frac{d^m f}{dx^m}$

$$\left(\frac{d^m f}{dx^m} \right)_{x_0} = \frac{m!}{h^m} \left(f(x_0 + h) - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{h^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x_0) \right) \right) - \frac{m!}{h^m} R_m \quad (2.1)$$

Definiremos la aproximación de la derivada discretizada como

$$\partial_x^m f := \frac{m!}{h^m} \left(f(x_0 + h) - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{h^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x_0) \right) \right)$$

El último término se puede considerar pequeño respecto a $\left(\frac{d^m f}{dx^m} \right)_{x_0}$, por tanto

$$\left(\frac{d^m f}{dx^m} \right)_{x_0} \approx \partial_x^m f \quad (2.2)$$

Para el caso donde $m = 1; x_0 = x$

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para el cual tiende a la definición de derivada cuando $h \rightarrow 0$.

De la ecuación (2.2) se puede concluir que para aproximar la derivada m de una función a través de la aproximación FDM son necesarios al menos m términos.

El error se encuentra comparando la derivada con la aproximación numérica $E_m = \left(\frac{d^m f}{dx^m} \right) - \partial_x^m f$. Sustituyendo las ecuaciones (2.1) y (2.2)

$$E_m = \frac{m!}{h^m} R_m$$

$$E_m = \sum_{m+1}^{\infty} m! \frac{h^{n-m}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x_0)$$

El término predominante del error será entonces

$$E_m = m! \frac{h}{(m+1)!} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x_0)$$

$$E_m = \frac{h}{(m+1)} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x_0) \quad (2.3)$$

El cual es proporcional a h , esto suele escribirse de la forma

$$E_m = \mathcal{O}(h)$$

2.2.1 Extensión del método de la diferencia finita

Podemos extender el concepto de aproximación por diferencias finitas realizando aproximaciones de cada término por series de Taylor. Para la derivada n de una función f

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \sum_{j=-i}^i a_j f(x + j\delta x)$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = a_{-i} f(x - i\delta x) + a_{-i+1} f(x - (i-1)\delta x) + \dots + a_0 f(x) + \dots + a_i f(x + i\delta x)$$

Donde $i \in \mathbb{N}$. Ampliando el primer término en series de Taylor de orden m alrededor del punto x

$$f(x - i\delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} (-i\delta x) + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{(-i\delta x)^2}{2!} + \dots + \frac{d^m f(x)}{dx^m} \frac{(-i\delta x)^m}{m!}$$

Aplicando esta expansión a los $2i$ términos (exceptuando el término $f(x)$), encontramos $m \geq 2i + 1$ ecuaciones de la forma

$$a_{-i} f(x) + a_{-i+1} f(x) + \dots + a_0 f(x) + \dots + a_i f(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& a_{-i}\delta x f'(x) + a_{-i+1}\delta x f'(x) + \dots + a_i\delta x f'(x) = 0 \\
& \vdots \\
& a_{-i}\frac{(-i\delta x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + a_{-i+1}\frac{(-(i-1)\delta x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \dots + a_i\frac{(i\delta x)^n}{n!}f^{(n)}(x) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \\
& \vdots \\
& a_{-i}\frac{(-i\delta x)^m}{m!}f^{(m)}(x) + a_{-i+1}\frac{(-(i-1)\delta x)^m}{m!}f^{(m)}(x) + \dots + a_i\frac{(i\delta x)^m}{m!}f^{(m)}(x) = 0
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones tendrán solución si se cumple $n \leq m$.

Escribiendo las ecuaciones de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ (-i) & \dots & 0 & \dots & i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-i)^m & \dots & 0 & \dots & i^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-i} \\ \vdots \\ a_0 \\ \vdots \\ a_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta x^n} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ n! \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que se utilizan términos en la expansión de Taylor hasta la derivada m -ésima, el error es proporcional a la potencia $m - n$ de δx

$$\mathcal{O}(\delta x^{m-n})$$

Esta extensión del método de la diferencia finita permite la reducción del error de las aproximaciones como potencias del tamaño de las celdas.

2.3 Condiciones de frontera

Considere una ecuación diferencial bidimensional en la región Ω con solución $\psi(x)$, la cual cumple las condiciones de frontera

$$\psi = f(x, y) \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = g_x(y) \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = g_y(x) \quad (2.4c)$$

Estas condiciones pueden discretizarse a través del método de la diferencia finita. Las condiciones de frontera quedan de la forma

$$\psi_{ij} = f_{ij} \quad (2.5a)$$

$$\partial_x \psi = g_j; \quad i = 0; i = i_{max} \quad (2.5b)$$

$$\partial_y \psi = h_i; \quad j = 0; j = j_{max} \quad (2.5c)$$

Donde

$$\psi_{ij} = \psi(i\delta x, j\delta y)$$

Utilizando la extensión del método de la diferencia finita

$$\sum_{i=0}^N \frac{a_i}{\delta x} \psi(i\delta x, j\delta y) = g_j$$

Separando el término $i = 0$ de la sumatoria se encuentra

$$a_0 \psi_{0j} + \sum_{i=1}^N a_i \psi_{ij} = g_j \delta x$$

El valor de la función discreta debe cumplir la siguiente ecuación para los puntos ψ_{0j}

$$\psi_{0j} = \frac{1}{a_0} \left(g_j \delta x - \sum_{i=1}^N a_i \psi_{ij} \right)$$

Igualando esta condición con (2.5a)

$$\psi_{0j} = \frac{1}{2a_0} \left(g_j \delta x + a_0 f_{0j} - \sum_{i=1}^N a_i \psi_{ij} \right) \quad (2.6)$$

Para $i = i_{max}$

$$\psi_{i_{max}j} = \frac{1}{2a_{i_{max}}} \left(g_j \delta x + a_0 f_{i_{max}j} - \sum_{i=i_{max}-(N+1)}^{i_{max}-1} a_i \psi_{ij} \right)$$

De manera análoga para las condiciones de frontera (5c)

$$\psi_{i0} = \frac{1}{2b_0} \left(h_i \delta y + b_0 f_{i0} - \sum_{j=1}^N b_j \psi_{ij} \right) \quad (2.7)$$

En el punto $i = j = 0$, se deben cumplir las condiciones (2.6) y (2.7), por tanto

$$\psi_{00} = \frac{1}{4a_0} \left(g_0 \delta x + a_0 f_{00} - \sum_{i=1}^N a_i \psi_{i0} \right) + \frac{1}{4b_0} \left(h_0 \delta y + b_0 f_{00} - \sum_{j=1}^N b_j \psi_{0j} \right)$$

Esta ecuación es válida para los puntos $(0, 0)$; $(0, j_{max})$; $(i_{max}, 0)$; (i_{max}, j_{max})

$$\sum_{i=0}^N \frac{a_i}{\delta x} \psi(i\delta x, j\delta y) = g_j$$

Separando el término $i = N$ de la sumatoria, se encuentra

$$a_N \psi_{Nj} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i \psi_{ij} = g_j \delta x$$

$$\psi_{Nj} = \frac{1}{a_N} \left(g_j \delta x - \sum_{i=0}^{N-1} a_i \psi_{ij} \right)$$

Sumando $\psi_{0j} - f_{0j} = 0$

$$\psi_{Nj} = \frac{1}{a_N} \left(g_j \delta x - \sum_{i=0}^{N-1} a_i \psi_{ij} \right) + \psi_{0j} - f_{0j}$$

Sustituyendo en $\partial_x^2 \psi_{0j} = \sum_i^N b_i \psi_{ij} / \delta x^2$

$$\partial_x^2 \psi_{0j} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{b_i \psi_{ij}}{\delta x^2} + \frac{b_N}{a_N \delta x^2} \left(g_j \delta x - \sum_{i=0}^{N-1} a_i \psi_{ij} \right) + \frac{b_N}{\delta x^2} \psi_{0j} - \frac{b_N}{\delta x^2} f_{0j}$$

$$\partial_x^2 \psi_{0j} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(b_i - \frac{b_N}{a_N} a_i \right) \frac{\psi_{ij}}{\delta x^2} + \frac{b_N}{\delta x^2} \psi_{0j} + b_N \left(\frac{g_j}{a_N \delta x} - \frac{f_{0j}}{\delta x^2} \right)$$

2.4 Flujo estacionario entre cilindros rotatorios

Adoptaremos la notación $v_{r(ijk,n)} = v_r$ para términos pertenecientes a la celda; $v_{r(i\pm 1, j\pm 1, k\pm 1, n)}$ para celdas adyacentes a la celda principal; y $v_r^{(n\pm 1)}$ para términos futuros o pasados de la celda. Aquí i, j, k se refiere a la coordenada r, φ, z respectivamente.

Aplicando las aproximaciones de derivada de la sección (2.2.1) en las ecuaciones (1.8) se obtiene

$$\frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\delta r} = \rho \frac{V_i^2}{r_i}$$

$$\frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{\delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{V_{i-1} - V_{i+1}}{2\delta r} + \frac{V_i}{r_i^2} = 0$$

Despejando para la celda i , tenemos

$$p_i = 2\rho \frac{V_{i+1}^2}{r_i} \delta r + p_{i+2}$$

$$-V_{i-1} \frac{r_i^2 - r_i \delta r}{\delta r^2 + 2r_i^2} + V_i - V_{i+1} \frac{r_i^2 + r_i \delta r}{\delta r^2 + 2r_i^2} = 0$$

Estos sistemas de ecuaciones pueden convertirse en las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{r_i^2 - r_i \delta r}{\delta r^2 + 2r_i^2} & 1 & -\frac{r_i^2 + r_i \delta r}{\delta r^2 + 2r_i^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{r_i^2 - r_i \delta r}{\delta r^2 + 2r_i^2} & 1 & -\frac{r_i^2 + r_i \delta r}{\delta r^2 + 2r_i^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{imax} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{R1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_{R2} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{imax} \end{bmatrix} = 2\rho\delta r \begin{bmatrix} \frac{V_{R1}^2}{R_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{V_{R2}^2}{R_2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Donde V_{R1} y V_{R2} son las condiciones de frontera.

Esto produce un problema debido a que la matriz de la ecuación (2.9) no es invertible. Es posible sortear estos problemas aplicando aproximaciones dinámicas a lo largo de la rendija. Para una diferencia de 5 términos

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_i \frac{a_i f_i}{12\delta r}$$

Donde las constantes a_i están dadas por las ecuaciones discutidas en la sección 2.2.1. Puede aplicarse dependiendo de la posición de la celda. Por ejemplo

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_{i=0}^4 \frac{a_i f_i}{12\delta r} \quad \text{Para } i = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_{i=-1}^3 \frac{b_i f_i}{12\delta r} \quad \text{Para } i = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_{i=-2}^2 \frac{c_i f_i}{12\delta r} \quad \text{Para } 2 \leq i \leq i_{max} - 2$$

Debe notarse que esto es aplicable para n celdas, siempre que se cumpla $n < i_{max}$.

Todo esto puede extenderse para lograr una mayor precisión con intervalos más grandes. A continuación aplicaremos la aproximación extendida a una celda sobre la ecuación (1.8a). Las derivadas espaciales quedan de la forma

Para $i = 0$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial r} \right]_i = \rho \sum_{l=0}^4 a_{i+l} \frac{V_{0(i+l)}}{r_{i+l}}$$

$$a_i = -25; a_{i+1} = 48; a_{i+2} = -36; a_{i+3} = 16; a_{i+4} = -3$$

Para $i = 1$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial r} \right]_i = \rho \sum_{l=-1}^3 a_{i+l} \frac{V_{0(i+l)}}{r_{i+l}}$$

$$a_{i-1} = -3; a_i = -10; a_{i+1} = 18; a_{i+2} = -6; a_{i+3} = 1;$$

Para $2 \leq i \leq i_{max} - 2$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial r} \right]_i = \rho \sum_{l=-2}^2 a_{i+l} \frac{V_{0(i+l)}}{r_{i+l}}$$

$$a_{i-2} = 1; a_{i-1} = -8; a_i = 0; a_{i+1} = 8; a_{i+2} = -1;$$

Esta aproximación es especialmente útil para situaciones donde se desconocen las condiciones de frontera del sistema. A partir de este punto, se referirá a las aproximaciones discretas de las derivadas espaciales por el símbolo ∂_{x_i} , donde x_i hace referencia a la dirección de la derivada. Esto se puede aplicar a la ecuación (1.8b). Para las diferencias centrales ($2 \leq i \leq i_{max} - 2$)

$$r_i^2 \frac{-V_{i+2} + 16V_{i+1} - 30V_i + 16V_{i-1} - V_{i-2}}{12\delta r^2} + \dots$$

$$+ r_i \frac{V_{i+2} - 8V_{i+1} + 8V_{i-1} - V_{i-2}}{12\delta r} - V_i = 0$$

Reagrupando,

$$V_{i+2} \left(\frac{r\delta r - r^2}{12\delta r^2 + 30r^2} \right) + V_{i+1} \left(\frac{r^2 - 8r\delta r}{12\delta r^2 + 30r^2} \right) + \dots \\ + V_{i-1} \left(\frac{16r^2 + 8r\delta r}{12\delta r^2 + 30r^2} \right) - V_{i-2} \left(\frac{r^2 + r\delta r}{12\delta r^2 + 30r^2} \right) = V_i$$

Estos sistemas de ecuaciones pueden utilizarse para generar matrices similares a las mostradas anteriormente.

2.5 Flujo entre cilindros rotatorios

Aplicando las aproximaciones de la sección (2.2.1), el operador de Laplace cilíndrico queda de la forma

$$\nabla^2 f \approx \partial_r^2 f + \frac{1}{r} \partial_r f + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f$$

Debido a que las perturbaciones del problema son azimutalmente simétricas, este operador puede reducirse a

$$L_{ki} f =: \partial_r^2 f + \frac{1}{r} \partial_r f + \partial_z^2 f$$

Donde L_{ki} será el operador de Laplace discreto para la celda ijk . Las condiciones de frontera quedan de la forma

$$\left. \begin{array}{l} v_{r(ijk)} = 0 \\ v_{\varphi(ijk)} = 0 \\ v_{z(ijk)} = 0 \end{array} \right\} \text{Para } i = 0; i = i_{max} \quad (2.10)$$

Aplicando la discretización de derivadas temporales explícitas a las ecuaciones (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) quedan de la forma.

Ecuación (1.9) con derivada temporal discreta

$$\frac{v_r^{(n+1)} - v_r}{\delta t} - 2 \frac{V_0}{r} v_\varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left[\nabla_1^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right]$$

$$v_r^{(n+1)} = \left(1 - \nu \frac{\delta t}{r^2} + \nu \delta t \nabla_1^2\right) v_r + 2\delta t \frac{V_0}{r} v_\varphi - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

Ecuación (1.10) con derivada temporal discreta

$$\frac{v_\varphi^{(n+1)} - v_\varphi}{\delta t} = \frac{\mu}{\rho} \left[\nabla_1^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right] - v_r V_0'$$

$$v_\varphi^{(n+1)} = \left(1 - \nu \frac{\delta t}{r^2} + \nu \delta t \nabla_1^2\right) v_\varphi - \delta t V_0' v_r$$

Ecuación (1.11) con derivada temporal discreta

$$\frac{v_z^{(n+1)} - v_z}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p) + \frac{\mu}{\rho} [\nabla_1^2 v_z]$$

$$v_z^{(n+1)} = (1 + \nu \delta t \nabla_1^2) v_z - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Estas se pueden resumir en una ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix}^{n+1} = \mathbf{T}_e \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 \\ \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} A & C & 0 \\ D & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$$

Donde \mathbf{T}_e es la matriz de evolución explícita; $A = (1 - \nu \frac{\delta t}{r^2} + \nu \delta t \nabla_1^2)$; $B = (1 + \nu \delta t \nabla_1^2)$; $C = 2\delta t \frac{V_0}{r}$; $D = \delta t V_0'$.

Utilizaremos la ecuación de continuidad para encontrar una relación entre los campos de velocidad y la presión

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^{(n+1)}) + \frac{\partial}{\partial z} v_z^{(n+1)} = 0$$

Los términos de v correspondientes al tiempo n se anularán idénticamente a la ecuación de continuidad. Queda la expresión

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[-\nu \frac{\delta t}{r^2} v_r + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + 2 \frac{V_0}{r} v_\varphi + \nu \nabla_1^2 v_r \right) \delta t \right] \right) + \delta t \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla_1^2 v_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[-\nu \frac{v_r}{r^2} + 2 \frac{V_0}{r} v_\varphi + \nu \nabla_1^2 v_r \right] \right) + \nu \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_1^2 v_z) = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right]$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[-\nu \frac{v_r}{r^2} + 2 \frac{V_0}{r} v_\varphi \right] \right) + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \nabla_1^2 v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_1^2 v_z) \right] = \frac{1}{\rho} \nabla_1^2 (p)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[-\nu \frac{v_r}{r^2} + 2 \frac{V_0}{r} v_\varphi \right] \right) + \nu \nabla_1^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \right] + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r}{r} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla_1^2 (p)$$

El término dentro del operador de Laplace se anula debido a la ecuación de continuidad

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\nu \frac{v_r}{r} + 2 V_0 v_\varphi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \frac{v_r}{r} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla_1^2 (p)$$

$$\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (V_0 v_\varphi) = \frac{1}{\rho} \nabla_1^2 (p)$$

Discretizando las derivadas espaciales, obtenemos el siguiente grupo de ecuaciones explícitas

$$\boxed{\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix}^{n+1} = \mathbf{T}_e \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\delta t}{\rho} \partial_r p \\ 0 \\ \frac{\delta t}{\rho} \partial_z p \end{pmatrix}} \quad (2.11)$$

$$\boxed{\frac{2}{r} \partial_r (V_0 v_\varphi) = \frac{1}{\rho} L_{ik}(p)} \quad (2.12)$$

Capítulo 3

Resultados numéricos

Se aplicó el método de las diferencias finitas para una malla móvil de 5 puntos con el fin de analizar las soluciones estacionarias y perturbadas del sistema de cilindros coaxiales. El fluido simulado tuvo las características físicas de la glicerina ($\rho = 1261 \text{kg/m}^3$; $\mu = 1,412 \text{Pa} \cdot \text{s}$). Los datos recopilados son producto de programas escritos en el lenguaje *Python*, versión **3.7.9**. Los libretos se encuentran disponibles en <https://github.com/Alegretti0wl/FDM.git>. Los programas fueron ejecutados en una computadora *Toshiba Satellite L755-S5152 B960* con procesador *Intel® Pentium® B960 2.2 GHz*.

3.1 Soluciones estacionarias

Se hace uso del método numérico con una resolución de $N = 100$, sobre la ecuación para el sistema estacionario. Esto con el fin de comparar los resultados del método numérico con los valores exactos. Debido a la simetría axial y azimutal de las ecuaciones, solo es necesario encontrar la solución en una línea dirigida en la dirección \hat{r} .

El sistema simulado tiene las siguientes propiedades físicas:

$$R_1 = 0.2\text{ m}; R_2 = 0.8\text{ m}; \omega_1 = 1.5\text{ rad/s}; \omega_2 = -0.8\text{ rad/s}$$

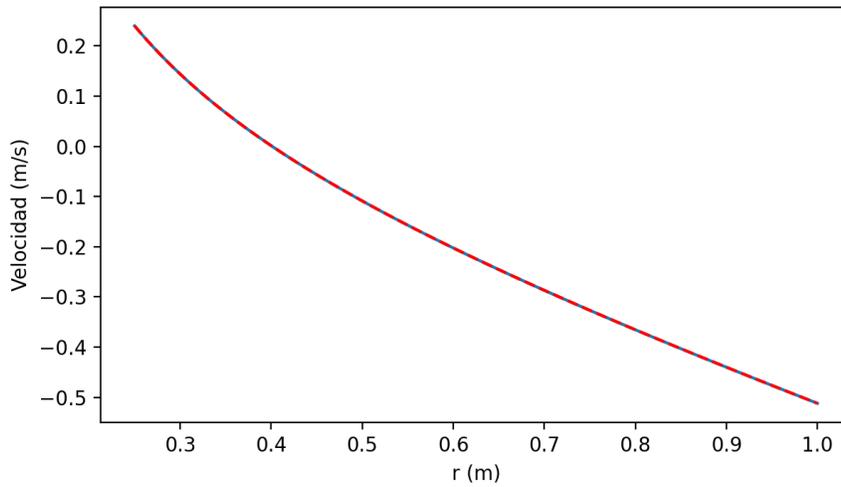


Figura 3.1 : Solución numérica a la ecuación diferencial estacionaria (Azul) y solución analítica (Rojo) con valores iniciales $V(R_1) = 0.30\text{ m/s}$; $V(R_2) = -0.64\text{ m/s}$

Dada la cercanía de los datos, se presenta la diferencia entre las soluciones

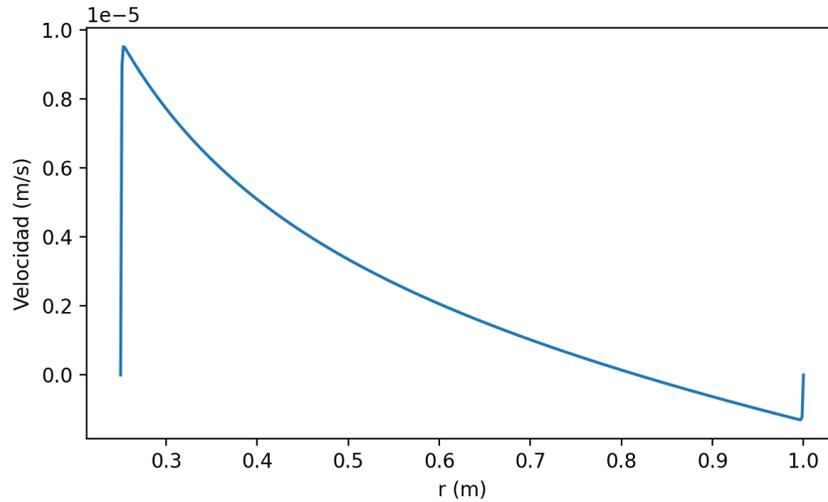


Figura 3.2 : Diferencia entre soluciones numérica y analítica con valores de iniciales $V(R_1) = 0.30 \text{ m/s}$; $V(R_2) = -0.64 \text{ m/s}$

Es posible extrapolar esta solución al resto del dominio.

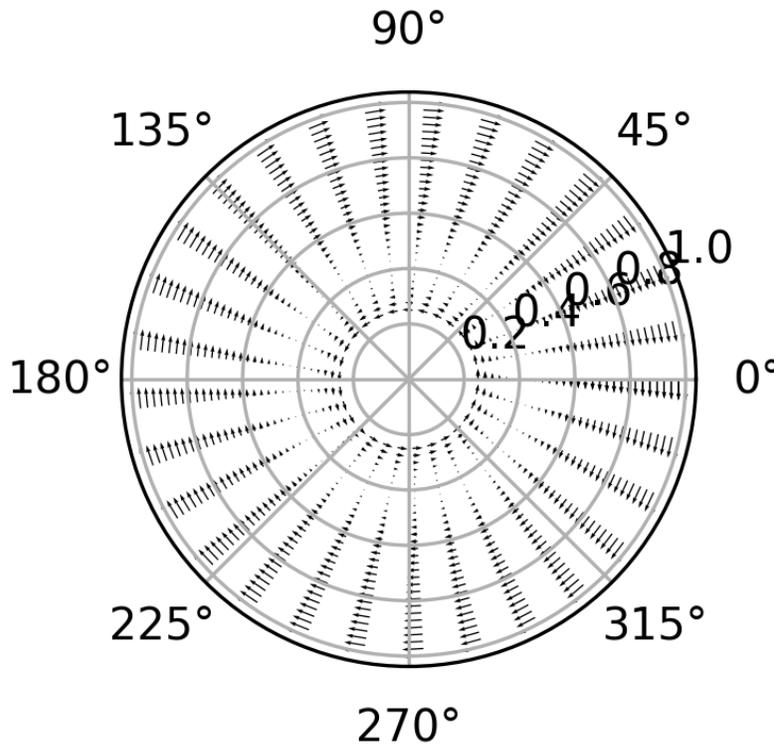


Figura 3.3 : Mapa de velocidades en el plano \hat{z} con valores de iniciales $V(R_1) = 0.30 \text{ m/s}$; $V(R_2) = -0.64 \text{ m/s}$

Debido a las condiciones de frontera $V(R_1) = R_1\omega_1$; $V(R_2) = R_2\omega_2$, siempre que los cilindros giren en sentidos opuestos, se puede afirmar que existe un punto del flujo con

velocidad $V = 0$

De manera similar, se encuentran las soluciones de la presión y la diferencia entre ellas. Debido a que carecen de condiciones iniciales de la presión, solo es posible analizar la presión relativa respecto al punto de mayor presión de la forma $p_R(r) = \frac{p(r)}{p_{max}}$

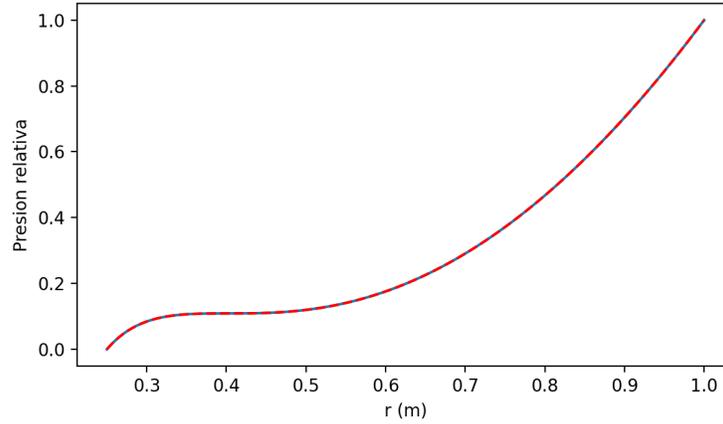


Figura 3.4 : *Presión relativa en la dirección \hat{r} con valores de iniciales $V(R_1) = 0.30 \text{ m/s}$; $V(R_2) = -0.64 \text{ m/s}$*

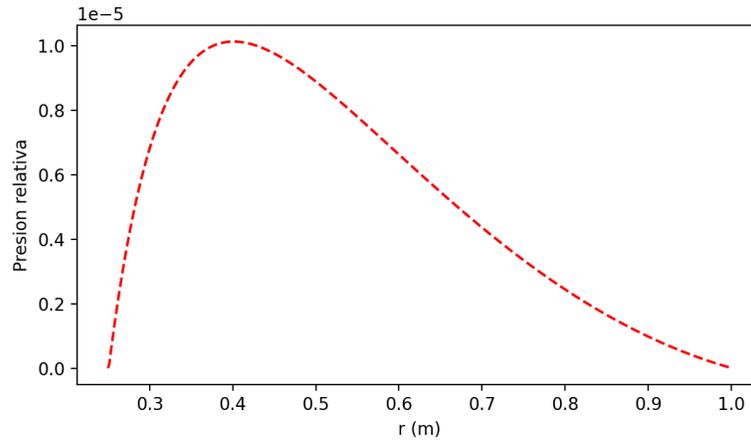


Figura 3.5 : *Diferencia entre soluciones de presión relativa en la dirección \hat{r} con valores de iniciales $V(R_1) = 0.30 \text{ m/s}$; $V(R_2) = -0.64 \text{ m/s}$*

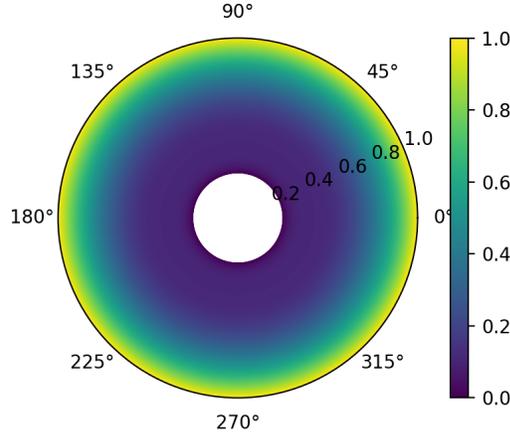


Figura 3.6 : Mapa de presión relativa con valores iniciales $V(R_1) = 0.30 \text{ m/s}$; $V(R_2) = -0.64 \text{ m/s}$

Cabe notar que las diferencias entre las soluciones; es decir, el error entre la soluciones numéricas se encuentra en el orden de magnitud 10^{-5} predicho en la sección 2.2.1

3.2 Solución de las ecuaciones perturbadas

Se estudió el sistema simulado haciendo variaciones a los números de Reynolds de los cilindros en rotación $Re_I(\omega_I)$; $Re_E(\omega_E)$ a través de cambios en rapidez angular de los mismos, donde los subíndices I ; E refieren al cilindro interno y externo respectivamente. Los cilindros poseen las siguientes propiedades físicas

$$R_I = 0.70 \text{ m}; R_E = 1.05 \text{ m}; L = 10(R_E - R_I) = 3.5 \text{ m}$$

El programa utiliza una longitud de malla por dirección de:

$$\delta r = \frac{(R_E - R_I)}{N}; \delta z = \frac{L}{N}; \delta \varphi = \frac{2\pi}{N}; N = 42$$

Se realizó una comparación entre las soluciones estacionarias y las soluciones perturbadas para categorizar si las velocidades producen un efecto notable en el comportamiento del fluido, esto se realiza a través de la condición $\frac{V-V_0}{V_0} \geq 0.05$. Se logró caracterizar tres tipos de comportamientos dependientes de las condiciones iniciales del sistema.

3.2.1 Región de Couette o estacionaria

En esta región, las perturbaciones son atenuadas o su amplitud no cumple con la condición $\frac{V-V_0}{V_0} \geq 0.05$. Esto implica que el comportamiento está gobernado principalmente por las ecuaciones estacionarias (5.1). Las simulaciones de estos casos carecen de estructuras o presentan estructuras de transición.

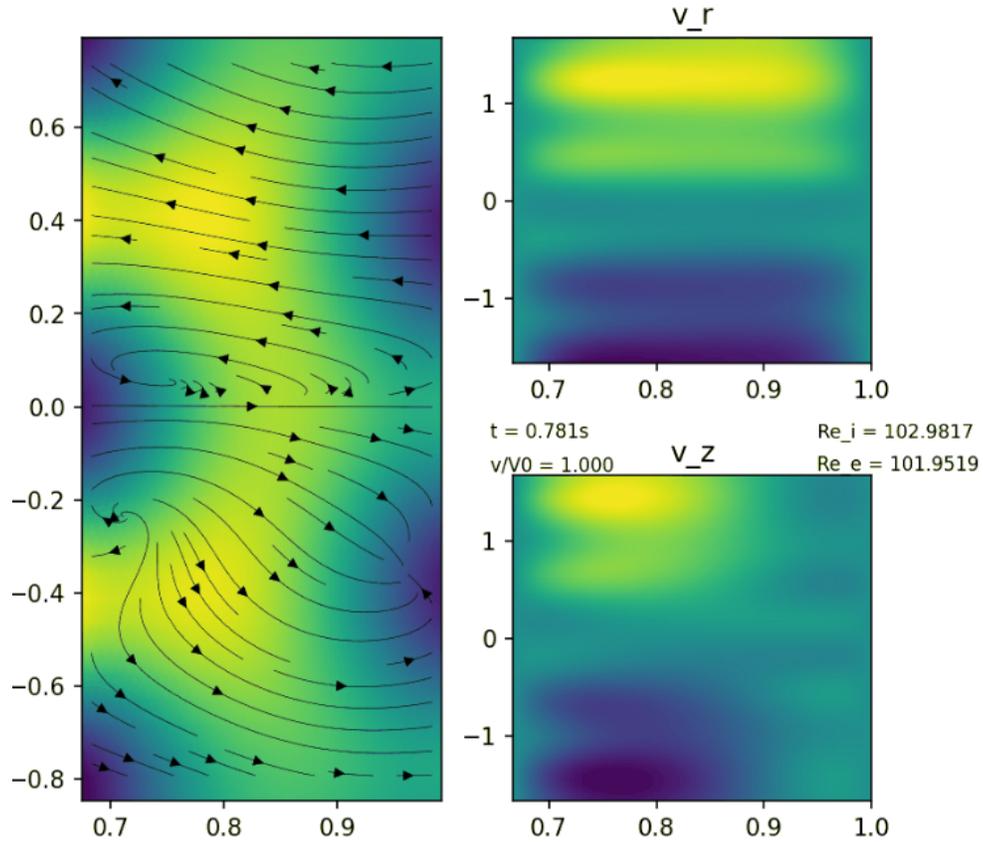


Figura 3.7 : Sin estructura. Mapas de presiones y velocidades en el plano $\hat{\phi}$ superpuestos (izquierda); mapa de velocidades en la dirección \hat{r} (superior derecha); mapa de velocidades en la dirección \hat{z} (inferior derecha) para el sistema con condiciones $Re_I = 102,98$ $Re_E = 101,95$

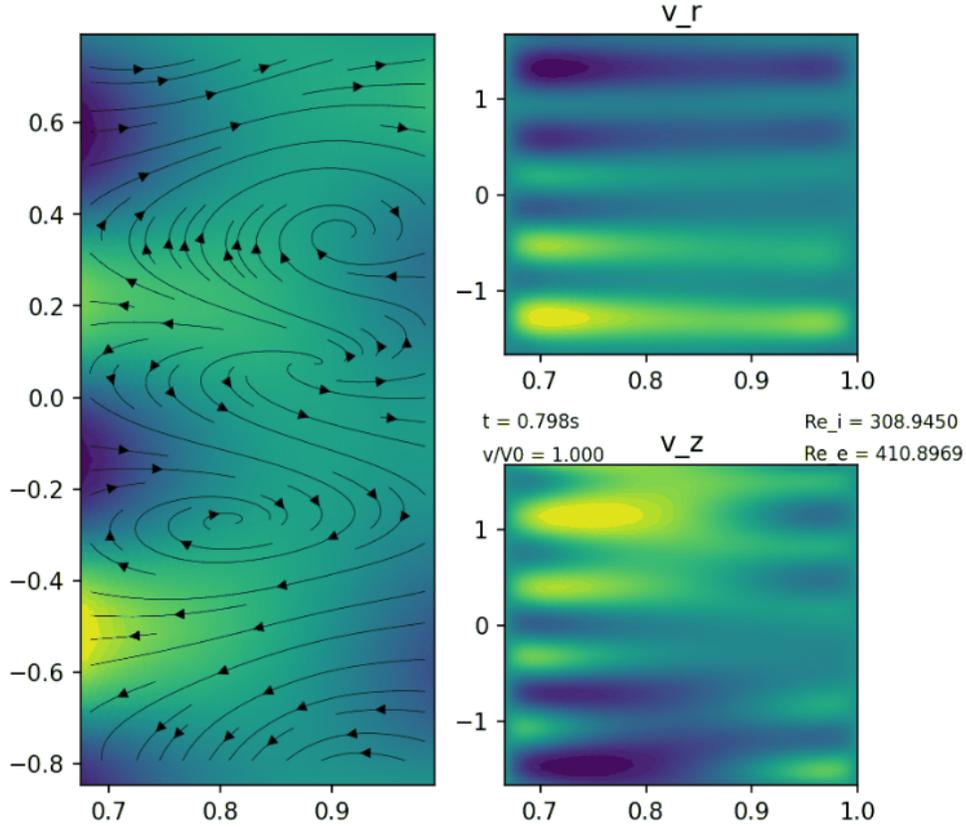


Figura 3.8 : Estructura de transición. Mapas de presiones y velocidades en el plano $\hat{\phi}$ superpuestos (izquierda); mapa de velocidades en la dirección \hat{r} (derecha arriba); mapa de velocidades en la dirección \hat{z} (derecha abajo) para el sistema con condiciones $Re_I = 308,95$ $Re_E = 410,90$

Este comportamiento ocurre en la región

$$Re_I \leq Re_E; Re_E > 0; \frac{Re_E}{Re_I} \approx 1$$

3.2.2 Vórtices de Taylor

En estas instancias las perturbaciones alcanzan, y usualmente superan, la condición $\frac{V-V_0}{V_0} \geq 0.05$. Las perturbaciones de las ecuaciones producen estructuras periódicas con forma circular en el plano perpendicular a la dirección $\hat{\phi}$ que, al extrapolar debido a la simetría axial del sistema, tienen forma tridimensional toroidal.

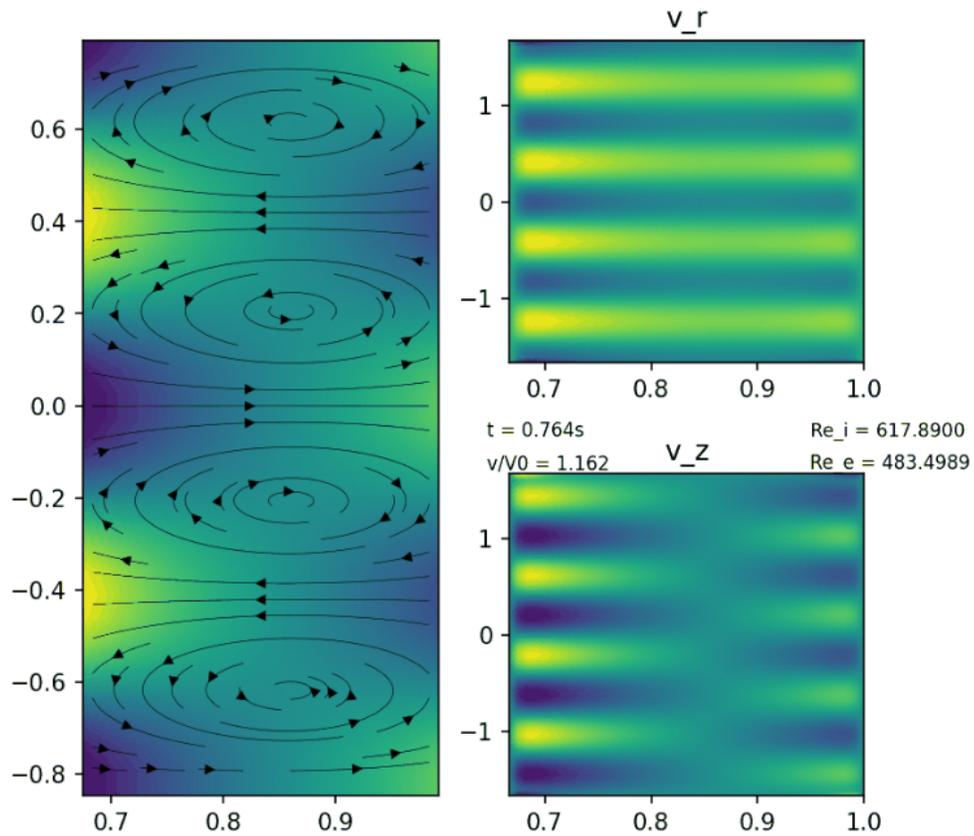


Figura 3.9 : *Vórtices de Taylor, $t=0,448$. Mapas de presiones y velocidades superpuestos en el plano $\hat{\phi}$ (izquierda); mapa de velocidades en la dirección \hat{r} (superior derecha); mapa de velocidades en la dirección \hat{z} (inferior derecha) para el sistema con condiciones $Re_I = 617,89$ $Re_E = 483,50$*

3.2.3 Vórtices móviles

Se encontró una única instancia de regiones de alta vorticidad que se movían en la dirección \hat{z} positiva con las condiciones $Re_I = 205,96$; $Re_E = 123,89$.

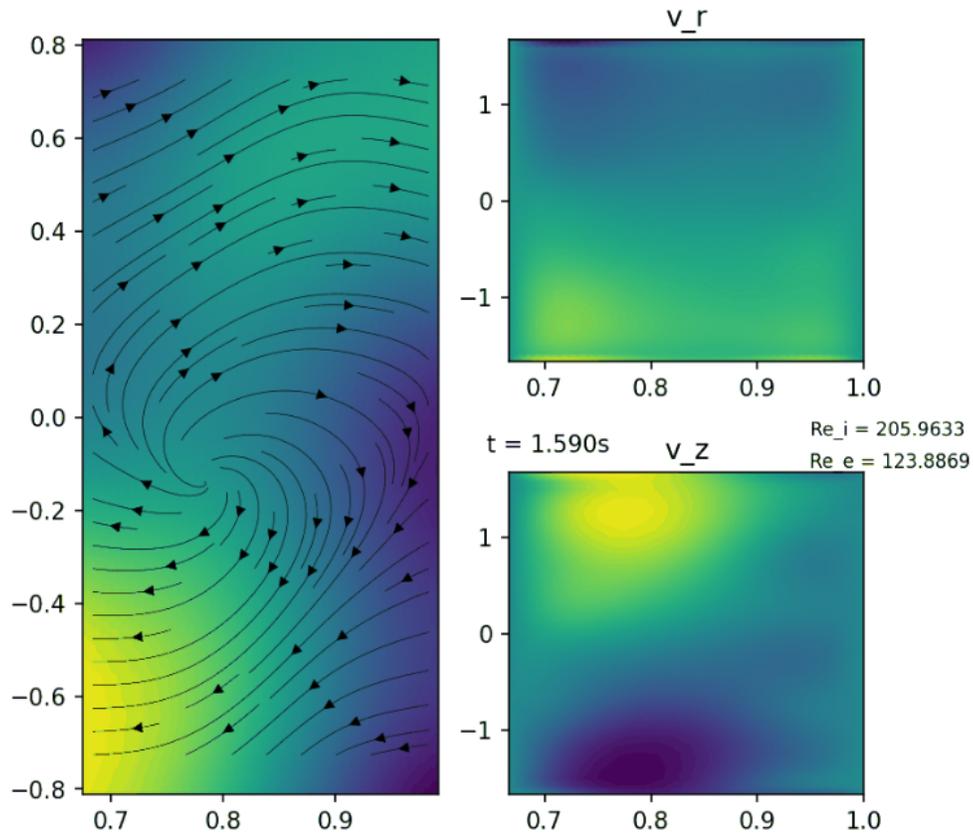


Figura 3.10 : Vórtices móviles, $t = 1,590s$. Mapas de presiones y velocidades superpuestos en el plano $\hat{\varphi}$ (izquierda); mapa de velocidades en la dirección \hat{r} (superior derecha); mapa de velocidades en la dirección \hat{z} (inferior derecha) para el sistema con condiciones $Re_I = 205,96$ $Re_E = 123,89$

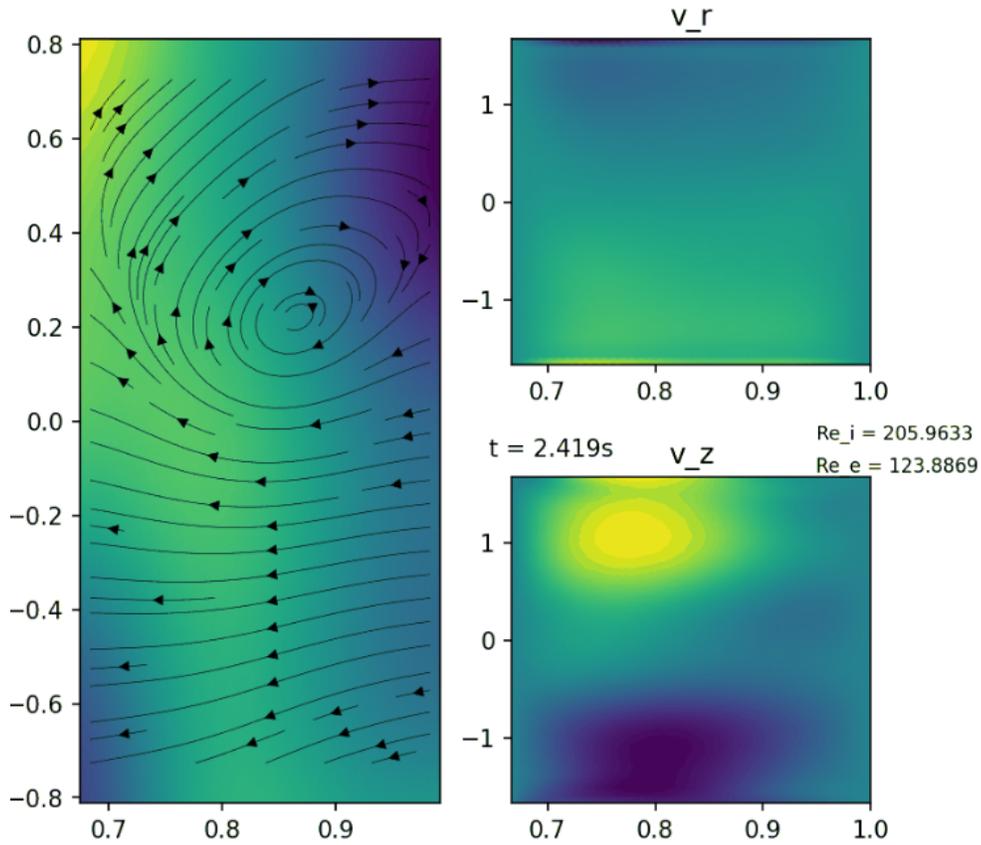


Figura 3.11 : Vórtices móviles, $t = 2,419s$. Mapas de presiones y velocidades superpuestos en el plano $\hat{\varphi}$ (izquierda); mapa de velocidades en la dirección \hat{r} (superior derecha); mapa de velocidades en la dirección \hat{z} (inferior derecha) para el sistema con condiciones $Re_I = 205,96$ $Re_E = 123,89$

3.2.4 Mapa de regímenes

Se tomaron medidas haciendo variaciones del número de Reynolds del cilindro interior y manteniendo el número de Reynolds del cilindro exterior con el fin de encontrar las fronteras entre los tipos de comportamiento encontrados.

La toma de datos se realizó utilizando un algoritmo de mapeo, donde n se refiere al número de iteración del proceso de toma de datos, para la primera iteración $n = 1$. Para cada simulación se evaluó el tipo de comportamiento y se compara con la instancia $n - 1$

- De encontrarse comportamientos de diferentes tipos, se procedió a tomar el punto medio $Re_{i(n+1)} = \frac{Re_{i(n)} - Re_{i(n-1)}}{2}$

- En caso de encontrarse el mismo tipo de estado en ambos puntos se realizó una medición tal que $Re_{i(n+1)} = 2Re_{i(n)}$.

Para cada caso se repitió este procedimiento con el objetivo de encontrar la frontera entre posibles estados.

Estos datos se recopilan en un mapa de los datos utilizando los números de Reynolds como parámetros.

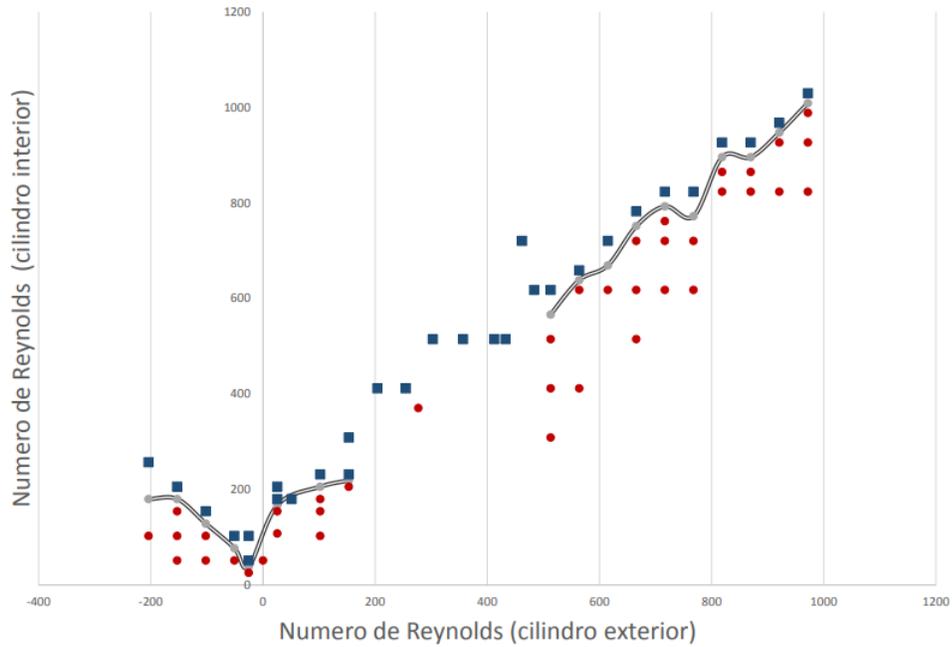


Figura 3.12 : Mapa de regímenes de flujo entre dos cilindros coaxiales rotatorios. Región estacionaria (Rojo); Vórtices de Taylor (Azul)

Capítulo 4

Conclusiones y recomendaciones

4.1 Conclusiones

Se ha desarrollado un programa para la simulación del sistema de cilindros estacionarios. El programa permite la caracterización de, al menos, dos tipos de flujo y la ubicación de las fronteras entre ellos. La forma de los campos obtenidos son comparables con los resultados experimentales encontrados en la literatura [1].

Las simulaciones apuntan a que la ruptura del flujo laminar no es exclusiva de la región de vórtices de Taylor; estas pueden presentarse, en menor magnitud, en la región de Couette.

Los límites entre comportamiento apuntan a que la producción de vórtices de Taylor depende no solo de la magnitud de la velocidad de rotación de los cilindros, sino también del sentido de rotación. En la figura **3.12** se puede apreciar una diferencia de inclinación en la frontera entre comportamientos.

En los casos donde $Re_I > 0$; $Re_E > 0$; $\frac{Re_I}{Re_E} \approx 1$, el sistema mantiene una simetría axial y azimutal; sin embargo, para los casos donde $Re_I > 0$; $Re_E < 0$ la frontera se encuentra en la línea $Re_I = -Re_E$.

Se encontró una instancia donde el sistema genera vórtices móviles. Estos vórtices se mueven en dirección axial con una rapidez de $v \approx 0.4221 \text{ m/s}$. Este fenómeno no está

descrito en la literatura, por lo cual es preciso realizar más investigación experimental a su alrededor antes de ser descartado como una estructura de transición entre regiones.

4.2 Recomendaciones

Es posible implementar el método extendido de la diferencia finita para derivadas temporales, lo cual afectará la precisión y estabilidad de los resultados numéricos. La utilización de más puntos en la malla para el cálculo de derivadas espaciales también puede afectar la estabilidad de las soluciones de forma positiva.

Puede importarse este programa a una computadora de alto rendimiento para realizar simulaciones con mayor resolución.

El estudio de la ecuación sin simetría azimutal puede llevar a la caracterización de otros tipos de flujo en el fenómeno.

Capítulo 5

Anexos

5.1 Resolución de la ecuación estacionaria

Suponemos V como una serie de potencias $V = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$, donde a_n es el coeficiente correspondiente a la potencia n -ésima.

$$\frac{dV}{dr} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n r^{n-1} \quad (5.1)$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n r^{n-2} \quad (5.2)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.7b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n r^{n-2} + \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n r^{n-1} - \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = 0$$

Agrupando bajo los símbolos de sumatoria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n-1)a_n r^{n-2} + \frac{1}{r} n a_n r^{n-1} - \frac{1}{r^2} a_n r^n \right] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n-2} [n(n-1) + n - 1] = 0$$

Esto implica

$$[n(n-1) + n - 1] = 0$$

$$(n-1)(n+1) = 0$$

$$n = \pm 1$$

Por tanto, la solución a la ecuación tiene la forma

$$\boxed{V = ar + \frac{b}{r}} \quad (5.3)$$

5.2 Constantes de las ecuaciones estacionarias

Podemos conseguir las constantes a las funciones (1.8) haciendo uso de las condiciones de frontera del sistema. En las paredes de los cilindros la velocidad del fluido debe ser $R_1\omega_1$ y $R_2\omega_2$ respectivamente. Por tanto

$$V(R_1) = R_1\omega_1$$

$$aR_1 + \frac{b}{R_1} = R_1\omega_1$$

$$aR_1^2 + b = R_1^2\omega_1$$

Análogamente para $V(R_2) = 0$.

$$aR_2^2 + b = R_2^2\omega_2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, encontramos

$$a = \frac{R_1^2\omega_1 - R_2^2\omega_2}{R_1^2 - R_2^2}$$

$$b = R_1^2\omega_1 \frac{1 - \omega_2/\omega_1}{1 - R_1^2/R_2^2}$$

5.3 Cálculo de gradientes en dos dimensiones Matriz-Vector

Debido a la discretización de los datos utilizados para los cálculos de las ecuaciones diferenciales, podemos transformar la matriz de soluciones ($n \times m$) en un vector de largo $(n \cdot m)$

La matriz de soluciones tendrá la forma

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Debido a la finitud de los elementos de la matriz, estos pueden ser identificados en un vector de largo $n \cdot m$ donde cada elemento estará identificado por

$$a_{(i+jn)} = a_{(j+im)} = a_{ij}$$

Donde i es la fila y j la columna donde se encuentra el elemento en la matriz de

solución.

Esto permite transformar el sistema de ecuaciones tridimensional en una matriz cuadrada de largo $(n \cdot m)$ y solucionar el sistema de ecuaciones bidimensional con los métodos de resolución de matrices cuadradas de Cramer.

5.4 Relación de conmutación de los operadores $\nabla^2 f$;

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \nabla_1^2 f) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \nabla_1^2 f) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \nabla_1^2 f) = \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

$$\nabla_1^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) \right] = \nabla_1^2 \left[\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{f}{r} \right]$$

$$\nabla_1^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{f}{r} \right] \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{f}{r} \right]$$

$$\nabla_1^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) \right] = \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{f}{r} \right) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{r} \right) \right] + \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla_1^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) \right] = \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2f}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\nabla_1^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) \right] = \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{f}{r^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

$$\nabla_1^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \nabla_1^2 f) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{r} \right)$$

Referencias

1. G. I. Taylor. (1923). *Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 223, 289–343.
Disponible en: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1923.0008>
2. C. R. Kothari. (2004). *Research Methodology, Methods and Techniques*. New Age International Publisher, 2da Edición.
3. Taylor, Cameron R. (2016). *Finite Difference Coefficients Calculator*.
Disponible en: <https://web.media.mit.edu/~crtaylor/calculator.html>
4. Jake, Blanchard. (2008). *Boundary Value Problems*.
Disponible en: <https://blanchard.ep.wisc.edu/PublicMatlab/BVP/BVP.pdf>
5. G. Michael, D. Thomas. N. Tilman. (1998). *Numerical Simulation in Fluid Dynamics - A Practical Introduction*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
6. Guio, P. University College London. (2011, octubre). *Levi-Civita symbol and cross product vector/tensor*. Recuperado 13 de enero de 2023, de <http://www.homepages.ucl.ac.uk/~%7Eucappgu/levi-civita.html>
7. Massachusetts Institute of Technology. (2005). *Marine Hydrodynamics - Lecture 3*. Recuperado 13 de enero de 2023, de https://ocw.mit.edu/courses/2-20-marine-hydrodynamics-13-021-spring-2005/39a5f563643fdd45303dbc85c4a3ab27_lecture3.pdf