



UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE COCLÉ

DR. BERNARDO LOMBARDO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y TECNOLOGÍA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

LA SIMETRÍA DESDE UN PUNTO DE VISTA ALGEBRAICO Y SU VISUALIZACIÓN

AL ARTE Y LA NATURALEZA

TRABAJO DE GRADUACIÓN COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICA

POR:

DALIS EDITH MORÁN RODRÍGUEZ

ASESOR:

PROF. JOSÉ SOLANILLA

2022

## **Carta de aprobación**

Este informe de tesis fue aprobado por el Tribunal Examinado de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología del Centro Regional Universitario de Coclé de la Universidad de Panamá, como requisito parcial para optar por el título de Licenciatura en Matemáticas.

---

Mgtr. Eduardo Rodríguez

---

Dra. María Corrales

---

Dr. José Solanilla

Profesor Asesor

## **Dedicatoria**

*Dedicado a mis padres Valerio Morán y Margarita Rodríguez por motivarme a perseguir y cumplir mis sueños.*

## **Agradecimiento**

*Primero quiero agradecer a todos los profesores que compartieron sus conocimientos y experiencias para mi desarrollo profesional en el futuro. En especial a mi querido profesor José Félix Solanilla por su dedicación, tiempo y paciencia para que este trabajo se lograra con éxito. Agradezco también a mis compañeros y amigos de carrera por ser un grupo unido y altruistas para que todos logremos nuestra meta final.*

*Quiero agradecer también a la Fundación Academia Fórum por su apoyo económico durante la elaboración de este trabajo y estar siempre atentos ante cualquier situación.*

*Por último, pero no menos importantes, quiero agradecer a mi padrinos y familia por su apoyo incondicional.*

## Resumen

Para comprender las simetrías del mundo, no solamente es necesario la parte visual sino también la noción matemática formal de grupo. Esta idea fue desarrollada por los trabajos de Évariste Galois para determinar por qué ecuaciones algebraicas de grado  $n > 4$  no tiene soluciones a través del grupo denominado  $S_n$ , para  $n \geq 1$ .

Por lo tanto, en este trabajo se presentan los conceptos principales de la teoría de grupos que permiten identificarlos dentro de la naturaleza y el arte y que, además, se caracterizan por pertenecer a una estructura determinada de grupo y ser simétricas. En particular, se utilizaron los movimientos rígidos de traslación y rotación en los que, aplicando uno de estos movimientos, el resultado sea invarianza y, en consecuencia, verifican la existencia de ser grupos de tipo  $C_n$  o  $D_n$ , para  $n \geq 1$ .

## Índice

Introducción.....	11
Capítulo 1 .....	13
1.1 Aspectos preliminares.....	13
1.2 Evolución conceptual de la simetría.....	13
1.3 Concepto de simetría .....	15
1.4 Movimientos en el plano.....	16
1.4.1 Rotación .....	17
1.4.2 Traslación.....	19
1.4.3 Identidad .....	21
1.4.4 Reflexión.....	22
1.4.5 Reflexiones con deslizamiento .....	23
1.5 Relación entre simetría y semejanza.....	25
1.6 Clasificación de la simetría.....	28
1.6.1 Simetría respecto a un punto.....	28
1.6.2 Simetría respecto a una recta .....	29
1.6.3 Simetría respecto de un plano .....	30
1.6.4 Simetría helicoidal .....	31
1.7 Poliedros regulares.....	33
1.7.1 Propiedades.....	33

1.8	Tipos de simetría de los poliedros regulares.....	35
1.8.1	Ejes de simetrías .....	35
1.8.2	Planos de simetría .....	36
Capítulo 2. Simetría en el álgebra .....		38
2.1	Reseña histórica del uso de la simetría en el álgebra.....	38
2.2	Programa de Erlangen.....	41
2.3	Grupos.....	42
2.3.1	Subgrupo, clase laterales, grupo cociente y grupo normal. ....	44
2.4	Relaciones entre grupos .....	50
2.4.1	Homomorfismo e isomorfismo .....	50
2.5	Grupos cíclicos .....	52
2.6	Grupo simétrico .....	56
2.6.1	Grupos alternantes .....	60
2.7	Grupos Diedral.....	62
2.8	Grupo de movimiento .....	64
2.9	Grupos de simetría infinita de una figura .....	66
2.9.1	Grupos de frisos .....	66
2.9.2	Grupos cristalográficos planos.....	69
Capítulo 3. Simetría y sus aplicaciones .....		71
3.1	Aplicación de grupos cíclicos .....	75

3.1.1	Caso 1. Alhambra de Granada .....	75
3.1.2	Caso 2. Cerámica de Panamá.....	80
3.1.3	Caso 3. Tembleque .....	82
3.1.4	Caso 4. Rosetón de la iglesia del Carmen en Panamá .....	84
3.1.5	Caso 5. Estrella de Mar .....	87
3.2	Aplicación de grupos diédricos.....	89
3.2.1	Caso 1. Mariposa ojo de búho .....	89
3.2.2	Caso 2. Mezquita-Catedral de Córdoba.....	90
3.2.3	Caso 3. Flor de 5 pétalos.....	95
3.2.4	Caso 4. Las abejas y su panal .....	97
3.2.5	Caso 3. Cristal de nieve .....	99
4	Conclusiones .....	103
5	Comentario final.....	106
6	Referencia bibliográfica .....	107
7	Anexos.....	111

## Índice de figuras

Figura 1.1 <i>Ángulo de rotación</i> .....	17
Figura 1.2 <i>Rotación en el espacio</i> .....	19
Figura 1.3 <i>Traslación de un vector</i> .....	20
Figura 1.4. <i><math>\triangle ABC</math> con movimiento de identidad</i> .....	22
Figura 1.5 <i>Reflexión</i> .....	23
Figura 1.6 <i>Simetría respecto a un punto</i> .....	28
Figura 1.7 <i>Simetría respecto a una recta</i> .....	29
Figura 1.8 <i>Simetría respecto a un plano</i> .....	31
Figura 3.1 <i>Simetría del triángulo equilátero</i> .....	72
Figura 3.2 <i>Simetría del cuadrado</i> .....	74
Figura 3.3 <i>Pajarita</i> .....	77
Figura 3.4 <i>Cúpula de la Sala de las dos Hermanas, Alhambra</i> .....	78
Figura 3.5 <i>Cerámica de Panamá</i> .....	81
Figura 3.6 <i>Tembleques panameños</i> .....	83
Figura 3.7 <i>Rosetón de la Iglesia del Carmen</i> .....	85
Figura 3.8 <i>Mariposa ojo de búho</i> .....	89
Figura 3.9 <i>La cúpula de la Maqsura de la Mezquita de Córdoba</i> .....	91
Figura 3.10 <i>Chabelita</i> .....	95
Figura 3.11 <i>Panal de abeja</i> .....	97
Figura 3.12 <i>Copo de Nieve de 12 ramas</i> .....	100

## Índice de tablas

Tabla 1.1 <i>Tipos de homotecia según su valor de k</i> .....	26
Tabla 1.2. <i>Ejes de Rotación y orden de los ejes</i> .....	36
Tabla 1.3 <i>Planos de simetría</i> .....	37
Tabla 3.1 <i>Tabla de grupo de la simetría del triángulo equilátero</i> .....	73
Tabla 3.2 <i>Tabla de grupo de la simetría del cuadrado</i> .....	75
Tabla 3.3 <i>Tabla de grupo de la simetría la pajarita</i> .....	77
Tabla 3.4 <i>Tabla de Grupo de simetría la Cúpula de Mocárabe</i> .....	80
Tabla 3.5 <i>Tabla de grupo de la simetría la cerámica</i> .....	82
Tabla 3.6 <i>Tabla de grupo de la simetría del tembleque (Tapa oreja)</i> .....	84
Tabla 3.7 <i>Tabla de grupo de la simetría del rosetón de la Iglesia del Carmen</i> .....	86
Tabla 3.8 <i>Estrella de Mar</i> .....	87
Tabla 3.9 <i>Tabla de grupo de la simetría de la Estrella de Mar</i> .....	88
Tabla 3.10 <i>Tabla de grupo de simetría de la mariposa ojo de búho</i> .....	90
Tabla 3.11 <i>Tabla de grupo de la simetría Maqsura de la Mezquita de Córdoba</i> .....	93
Tabla 3.12 <i>Vitral de la Mezquita de Córdoba</i> .....	93
Tabla 3.13 <i>Tabla de grupo de la simetría del rosetón de la Mezquita de Córdoba</i> .....	94
Tabla 3.14 <i>Tabla de grupo de simetría de la planta chabelita</i> .....	97
Tabla 3.15 <i>Tabla de grupo de la simetría del hexágono que tiene un panal de abeja</i> .....	99
Tabla 3.16 <i>Tabla de grupo de la simetría de un cristal de nieve de 12 puntas</i> .....	102

## Introducción

La simetría ha sido siempre objeto de estudio a lo largo del tiempo; en un principio como característica significativa a lo estético que se capta a través de la vista, luego como transformación aplicada a un objeto determinado sobre el plano, hasta ascender a una parte importante en la matemática demostrativa por dar surgimiento a una rama muy importante dentro del álgebra denominada teoría de grupo.

Por lo tanto, la noción de simetría dentro del álgebra nace con el estudio que realizó el matemático francés Galois, quien reinventó el álgebra como una herramienta para el estudio de ella. Esto se origina a partir de encontrar la solución para ecuaciones algebraicas como  $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  para  $n \in \mathbb{N}$ , donde la idea consistía en asociar cada ecuación algebraica al conjunto de todas las permutaciones de sus raíces, nombrado por él como grupo y relacionarlo con las propiedades de la ecuación con las del grupo correspondiente. Esta es la respuesta a la imposibilidad de dar solución a una ecuación de grado  $n > 4$ , mediante radicales, a causa de que  $S_n$  no es resoluble cuando  $n > 4$ .

Aquellas transformaciones en las que un objeto no sufre invarianza están inmersas dentro del concepto de simetría, por lo que se estudiarán ejemplos concretos que se encuentran en la naturaleza y en el arte para entrar al grupo simétrico al cual pertenecen a partir de los movimientos en el plano como rotación, traslación y reflexión; todo ello teniendo como punto principal el concepto de grupo que se define como un conjunto que posee una operación binaria y que cumple con tres propiedades: asociativa, elemento neutro y elemento inverso.

En el capítulo 1, se presentan las nociones básicas de la simetría dentro de la geometría, centrandolo todo en su concepto y los distintos movimientos en el plano que conllevan a esta. Adicionalmente, se clasificarán las principales simetrías según un punto, una recta, un plano y

el espacio como simetría helicoidal. Por último, se presentan los poliedros regulares estudiados por Platón mencionando sus principales características simétricas.

Más adelante, en el capítulo 2, se presentarán aspectos fundamentales de la teoría de grupo iniciando en el proceso del surgimiento de la simetría en el álgebra y cómo conlleva a estar de la mano con el concepto de grupo. De igual manera, se presentarán las propiedades y teoremas principales de este conjunto de nociones como son los subgrupos, clases laterales, grupo cociente, las relaciones entre grupo: homomorfismo e isomorfismo. Además, se incluye el estudio de los grupos cíclicos, grupos simétricos, grupos diédricos y grupo alternado propios de grupos finitos. También se presentan los grupos de transformaciones de tipo infinito de simetría como lo son los grupos de frisos y grupos cristalográficos planos.

Finalmente, en el capítulo 3 se comienza con el estudio de dos polígonos regulares: el triángulo y el cuadrado, ejemplos muy sencillos y utilizados en el curso álgebra de la carrera para la mejor comprensión del concepto de grupo y de esta forma se mostrará el método de registro de los distintos casos que se encuentran en el arte y la naturaleza, para así lograr identificar el grupo de simetría al que pertenece.

## Capítulo 1

### Aspectos preliminares

En este capítulo se presentarán brevemente los resultados básicos y las definiciones acerca de la teoría de la simetría desde un punto vista geométrico. Las afirmaciones que se desarrollarán ya son conocidas y son parte de la vida cotidiana.

#### 1.1 Evolución conceptual de la simetría.

La simetría, como cualquier otro término, ha tenido su desarrollo paulatinamente dentro de la historia, pero cuando el cerebro humano se da cuenta de su existencia, no solo se conforma con intuirlo. Los matemáticos y filósofos griegos la descubrieron en su propio espacio como en la perpendicularidad entre la línea vertical y el horizonte, al igual que otros pueblos. Sin embargo, los griegos fueron quienes comenzaron a estudiar su naturaleza a partir de la aritmética y la geometría, y hablarnos de ella. Los pitagóricos, por ejemplo, respetaban la relación entre armonía musical y matemática, donde el mismo Pitágoras de Samos la mostró mediante notas de series de longitud fraccionaria, y usó conceptos simples de simetría plana para demostrar su famoso teorema.

Por otra parte, el primer estudio de la simetría fue relacionado con los astros, siendo Platón el primero en considerar que la simetría se aprecia en la naturaleza con su estudio de los cuerpos platónicos. La idea de Platón es que el mundo está construido a partir de cuatro elementos: fuego, tierra, aire y agua, y los elementos de estos tienen la forma de cuatro poliedros regulares que son el tetraedro, cubo, el octaedro e icosaedro relacionados sucesivamente y el quinto

poliedro: el dodecaedro correspondía al mundo entero, esta fue uno de los primeros intentos de introducir la idea de sistematización en la ciencia.

La simetría, además tiene una tendencia a lo estético como también a lo matemático, por lo cual su significado se relaciona con el orden y el equilibrio de las cosas, indicando así “concordancia entre varias partes por la cual estas concurren a integrarse en un todo” (Cruz, 1968, p. 40). Es por ello por lo que Aristóteles intuía que la simetría es el verdadero equilibrio de unidad en un todo. La belleza también se complementa en la simetría, que tiene como elemento clave la repetición, puesto que son aquellas imágenes que se captan en primer lugar de manera visual y que pueden advertir una cierta relación matemática o no. De esta manera “la noción de simetría incluye en sí tres ideas principales:

1. La idea de conservación de las propiedades simétricas de las figuras, cuerpos, cristales.
2. La idea de operación de transformación de la simetría
3. La idea de repetición” (Olkhovaia, 2005, p. 77).

Por otra parte, es importante mencionar que la simetría no es un exclusivo juego matemático o producto del entendimiento humano. Para su sorpresa, el hombre la encuentra en el mundo natural, impuesta por la tridimensionalidad del espacio en el que vive. En nuestra mente inconscientemente tenemos presente el concepto de simetría plasmada. Es tan fascinante y popular que se ha convertido en tema de estudio en muchas disciplinas que van desde las bellas artes, arquitectura, fotografía, música, escultura, cine e, incluso, el área de estudio que corresponde al presente trabajo: las matemáticas, siendo este término muy trascendental.

Actualmente, la simetría del mundo requiere de algunas herramientas matemáticas básicas como el concepto de grupo, pero, por extraño que parezca, no se inventó para comprender mejor la simetría del mundo físico. El concepto de grupo tiene un papel importante dentro del álgebra,

porque fue intuita por Lagrange y desarrollada por Galois para dar solución a las ecuaciones polinómicas sin tener en cuenta los aspectos geométricos, surgiendo así la teoría de grupos que es una antesala a la moderna simetría. Es a partir de esto que se puede asignar un grupo de simetría a cada figura, permitiendo que el concepto de grupo dé lugar al análisis y clasificación de los tipos de simetría que tiene una figura o un cuerpo geométrico y comprender cómo se regula la formación de patrones en el mundo natural.

Algunos de los ejemplos más sencillos donde se puede apreciar la simetría son en las alas de las mariposas, en las flores y en la proyección de la imagen frente a un espejo. De esta forma es posible establecer una idea sencilla de que la simetría es la que indica correspondencia entre las partes. Es decir, que es una transformación matemática que da como resultado una figura idéntica o copia de esta. De igual manera, existen templos, monumentos y mezquitas muy antiguas donde se visualiza el uso de la simetría; ejemplo de esto son las pirámides de Egipto, de los Mayas, los diseños murales de la Alhambra de Granada, en las iglesias románicas, catedrales góticas, entre otros, los cuales, independiente de su significado religioso, dejan plasmado una huella arquitectónica en la perfección de sus creaciones.

## **1.2 Concepto de simetría**

Frecuentemente, se utiliza la palabra simetría en el lenguaje cotidiano y puede tener diferentes significados dependiendo del contexto. El más conocido es aquel concepto ligado al campo de la geometría, donde existe simetría cuando las figuras no se deforman al realizar un movimiento porque las distancias se conservan.

La simetría en figuras planas permite aplicar algún movimiento del plano de modo que deja entera la figura sin alteración mientras que permuta sus puntos. Tal movimiento es una simetría de la figura (Costa, 2015).

Por otra parte, la simetría también se puede definir como una invariante bajo una transformación específica de grupo que permite aplicar el concepto mucho más amplio, no solo a figuras geométricas sino también a objetos abstractos tales como las expresiones matemáticas. En condiciones formales, un objeto es simétrico en lo que concierne a una operación matemática si el resultado de aplicar esa operación da como resultado un objeto indistinguible en su aspecto del objeto original. De esta manera, da lugar a la definición ligada en la teoría de grupos la cual es la siguiente.

**Definición.** Es un grupo bajo la operación de la composición a través de las transformaciones que la dejan invariante.

### 1.3 Movimientos en el plano

En el plano y en el espacio ocurren transformaciones geométricas donde la idea central se visualiza de forma sencilla como cuando se realiza un movimiento de traslado de un lado a otro, el movimiento de las manecillas del reloj, entre otros. Aquellos movimientos que conservan las distancias se le conoce como isometrías, esto último se puede definir como “una función  $T$  de  $R^n$  sobre  $R^n$ , si para cada par de punto  $p$  y  $q$  en  $R^n$ , la distancia de  $T(p)$  a  $T(q)$  es la misma que la distancia de  $p$  a  $q$ ” (Gallian, 2015, p. 461).

Entre las isometrías se distinguen dos tipos de transformaciones, las que son: isometría directa que conservan sus ángulos como son las traslaciones y rotaciones; y las isometrías inversas que conservan la amplitud de los ángulos, pero cambian su sentido como son la reflexión, la reflexión con desplazamiento y rotaciones impropias.

A continuación, se describen y ejemplifican estos movimientos en el plano que además trasciende hacia espacio, los cuales son rotación, traslación, identidad, reflexión, reflexiones con deslizamiento, donde algunos conservan sus mismas propiedades tanto en el plano como en

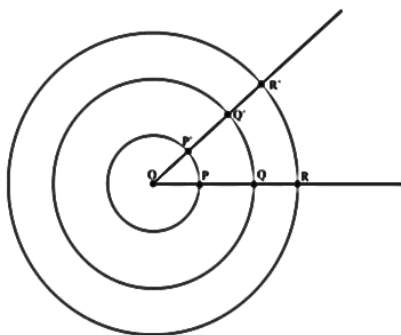
el espacio y otras difieren. Es importante mencionar que en alguna isometría se introduce el concepto de vector para su mejor entendimiento.

### 1.3.1 Rotación

**Definición.** Es un movimiento que se realiza alrededor de un punto fijo, denominado centro de giro. La región del plano está determinada por una semirrecta de extremo el centro de giro, su transformada, y el centro de giro como vértice, el cual es conocido como ángulo de giro. Este último puede ser siempre un número comprendido entre 0 y  $2\pi$ , en donde cualquier punto P que se encuentra en la circunferencia de centro O y que pasa por P, la circunferencia con centro O permanece invariante al realizar dicho movimiento (Figura 1.1).

Figura 1.1

*Ángulo de rotación*



*Nota.* El punto fijo es O al realizar una rotación alrededor de este punto se vuelve a llegar al punto inicial. Tomada de *Una introducción a la simetría*, por A. Costa, 2015, <https://elibro.net/pt/lc/upanama/titulos/48821>.

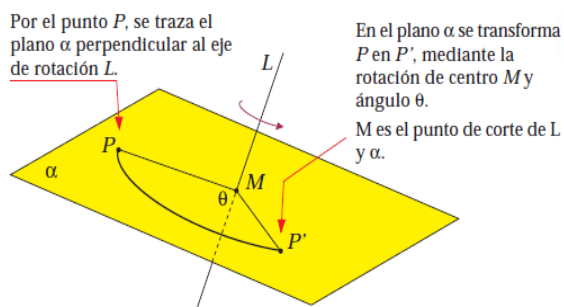
El centro de giro es el único punto invariante, por lo tanto, para determinar un giro es necesario conocer un punto, el centro de giro, el ángulo y el sentido de giro de ese ángulo. De este último punto se puede considerar un giro con orientación positiva (contraria a las agujas del reloj) o negativa (en el sentido de las agujas del reloj). Al girar una figura se giran los puntos que la forman.

Este tipo de movimiento es más frecuente en la vida cotidiana y del que se habla más a menudo. Como ejemplo se encuentra el movimiento de las ruedas de los autos, el volante de un conductor, los caballitos de feria, el disco sobre el tocadiscos, los cientos de ruedas dentadas de las máquinas o las agujas del reloj. Todos ellos tienen en común que realizan un movimiento circular, es decir a lo largo de una circunferencia.

En la Figura 1 en anexos, se aprecia la letra L, formada por los puntos A, B, C, su centro de giro es el punto C, si se le aplica una rotación a un ángulo de  $60^\circ$ , el resultado es una nueva letra L, formada por los puntos A', B', C'. En ella es posible identificar que las distancias se mantienen, es decir  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$  y  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ . Como también se puede apreciar que el ángulo  $\angle ABC$  de la letra L, que es recto es la misma que se obtiene al aplicar el giro en el ángulo  $\angle A'B'C'$  de la otra y que, además, tienen la misma orientación que el anterior.

Para una rotación en el espacio, el movimiento que se da alrededor de una recta es el llamado eje de rotación, de tal forma que los puntos del plano perpendicular al eje determinan un giro en dicho plano cuyo centro es el punto del eje con el plano como se aprecia en la Figura 1.2. Los puntos del eje de rotación son los únicos fijos. A diferencia del plano donde solo es un centro de giro o un punto, ahora corresponde a un eje de giro, el cual es una recta imaginaria que, al girar la figura en ciertos ángulos, va a coincidir consigo misma. Las otras condiciones necesarias para hacer girar un objeto en el espacio son las mismas que en el plano.

Figura 1.2

*Rotación en el espacio*

*Nota.* Una rotación en el espacio hace corresponder a un punto  $P$  de este otro punto  $P'$ , al describir un ángulo  $\theta$  alrededor de un eje de rotación  $L$ . Tomada de *Matemática Maravillosa*, por Fundación Polar, 2016,

[https://issuu.com/danielfelipegarciapulgarin6/docs/matematica\\_maravillosa\\_-\\_fundacion\\_](https://issuu.com/danielfelipegarciapulgarin6/docs/matematica_maravillosa_-_fundacion_)

Un ejemplo sobre el espacio puede ser la acción de cerrar una puerta, dado que al aplicar este movimiento ocurre una rotación, esto mismo es posible en las patillas de las gafas, y en las ruedas de un coche. Otro ejemplo por mencionar es la rotación de la tierra, la cual gira alrededor de un eje perpendicular al plano del Ecuador que pasa por el centro de la tierra, completando una vuelta en 24h, provocando que existan los días y las noches en el planeta.

**1.3.2 Traslación**

**Definición.** En el plano o el espacio es un desplazamiento con una dirección determinada que no deja ningún punto fijo, es decir, que no se cambian sus características, solo su posición.

Para poder realizar una traslación se necesita de varios datos:

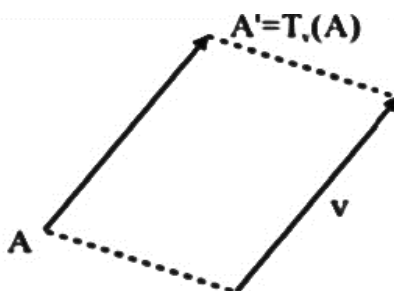
1. La **dirección**, que viene indicada por una recta sobre la que desplaza el objeto. Esta recta solo es una guía en la que apoya el objeto que se mueve, luego no es única y puede sustituir otra recta paralela.

2. El **sentido** en el que se hará el movimiento pues cualquier dirección lleva aparejado dos sentidos del movimiento.
3. El **módulo** o la longitud del desplazamiento

Estas tres características son los componentes de un vector<sup>1</sup>. Así pues, una traslación se puede dar en términos formales como una transformación en la que un punto en el plano  $A$  corresponde a un punto en el plano  $A'$  en  $\overrightarrow{AA'}$  está en la clase equivalencia definida por el vector  $\vec{v}$ . Es decir,  $\overrightarrow{AA'}$  representa el vector  $\vec{v}$ . La traslación del vector  $\vec{v}$  se puede escribir como  $T_{\vec{v}}$ , de modo tal que  $T_{\vec{v}} = A'$  (ver Figura 1.3).

Figura 1.3

*Traslación de un vector*



Nota. Tomada de *Una introducción a la simetría*, por A. Costa, 2015, <https://elibro.net/pt/lc/upanama/titulos/48821>.

Propiedades de las traslaciones en el plano:

**Identidad.** Las traslaciones de vector de traslación nulo dejan todos los puntos invariantes, es decir, no se traslada nada, y se denomina traslación identidad o simplemente: identidad.

**Puntos invariantes.** Un punto invariante es el que se transforma en sí mismo. Una recta invariante es la que se transforma en ella misma, aunque sus puntos no sean invariantes. Una recta invariante de puntos invariantes es un caso particular de recta invariante en la que cada

---

<sup>1</sup> Un vector fijo  $\overrightarrow{AB}$  es un segmento orientado que tiene su origen en punto A y su extremo punto B. Se representa normalmente con una flecha.

uno de sus puntos es un punto invariante. En la traslación identidad deja todo el plano invariante, pero una traslación no deja ningún punto invariante. (Salvador y Morelo, 2018, p. 206)

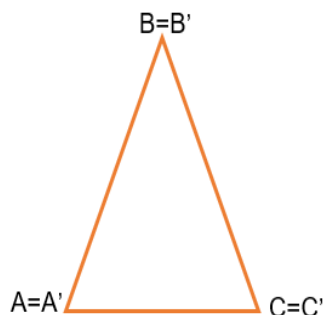
En el espacio, las traslaciones conservan las mismas propiedades que las traslaciones en el plano. De este modo, basta conocer un vector de traslación para determinar una traslación en el espacio con la única diferencia de que dicho vector tiene tres componentes. En cuanto al espacio es posible considerar el ejemplo de un avión que se mueve o simplemente se traslada. En el plano se puede considerar el utilizar el triángulo  $\triangle ABC$  que se muestra en la Figura 2 en anexos, el cual se ha trasladado en el sentido del vector  $\vec{u}$  donde se origina el triángulo  $\triangle A'B'C'$  trazando rectas paralelas a dicho vector.

### 1.3.3 *Identidad*

**Definición.** Es el resultado de una rotación de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  alrededor de un punto o eje de giro, donde su principal característica es que no ocurre nada porque la identidad  $id$  se define por  $id(P) = P$ , para todo punto  $P$  del plano. Sin embargo, cuenta con todas las condiciones de la definición de movimiento en el plano; en otras palabras, la identidad se puede considerar como una traslación de vector nulo o una rotación de ángulo cero. En la Figura 1.4 se puede apreciar el  $\triangle ABC$  en el cual se ha realizado un movimiento de identidad y el resultado es el  $\triangle A'B'C'$  que queda en la misma posición.

Figura 1.4.

$\triangle ABC$  con movimiento de identidad



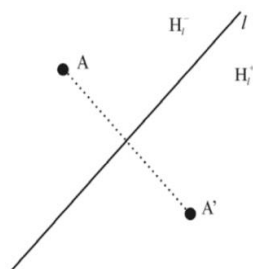
### 1.3.4 Reflexión

**Definición.** En el plano o en el espacio, es un movimiento que mantiene toda una recta de puntos fijos en el plano el eje de reflexión, o todo un plano de puntos fijos en el espacio al plano de reflexión. De manera más sencilla, la reflexión de una figura necesita de una recta en los planos o un plano en el espacio que representa el espejo.

El eje de reflexión no necesariamente tiene que ser horizontal, también puede ser vertical o inclinado en cualquier dirección. En este tipo de movimiento se conservan todas las longitudes y la magnitud de los ángulos con la diferencia de que cambia el sentido de esto, siendo así un tipo de movimiento inverso. De esta manera, tanto el eje de reflexión como el plano de reflexión funcionan como espejos que reflejan exactamente un fragmento de la figura en el otro fragmento.

En el plano se describe la reflexión como sea  $l$  como una recta cualquiera en el plano, donde la reflexión de eje  $l$  es una transformación que envía cada punto  $A$  en otro  $A'$  en el cual la recta  $l$  va a ser la mediatriz del segmento  $AA'$ . Esta será nombrada como  $S_l(A) = A'$  (Figura 1.5).

Figura 1.5

*Reflexión*

Nota.  $H_l^+$  y  $H_l^-$  son los semiplanos determinados por  $l$ . Tomada de *Una introducción a la simetría*, por A. Costa, 2015, <https://elibro.net/pt/lc/upanama/titulos/48821>.

Como ejemplos se puede mencionar el más sencillo de mirarnos al espejo, los paisajes que se reflejan en la superficie del agua de lagos, una torre con puerta del margen que tiene un plano de reflexión, entre otros. Por otra parte, las circunferencias son globalmente invariantes por cualquier reflexión plana cuyo eje pase por el centro de esta. Las esferas son globalmente invariantes por cualquier reflexión cuyo plano de reflexión pase por el centro de esta.

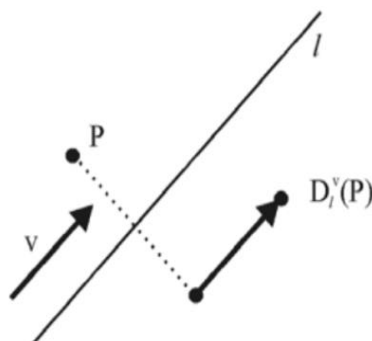
**1.3.5 Reflexiones con deslizamiento**

**Definición.** Es una reflexión seguida de una traslación en la misma dirección que el eje de reflexión, en donde no se mantiene ningún punto fijo. En el plano, el operador de reflexión es la línea de deslizamiento y la traslación contenida dentro de ella; en el espacio, el operador de reflexión es el plano de deslizamiento y la traslación contenida dentro de ella y las figuras reflejan proyecciones, por lo que el plano de deslizamiento se observa como una línea. Tanto en el plano como en el espacio, la distancia de la traslación tiene que ser la mitad de la traslación unida en dicha dirección

Este tipo de movimiento se puede describir en el plano de la siguiente manera: con eje  $l$  y vector  $\vec{v}$ ,  $D_l^{\vec{v}}$ , donde  $\vec{v} \neq 0$ , el cual va a ser un vector paralelo a  $l$ , es un movimiento que es el producto de una reflexión cuyo eje es  $l$  y una traslación de vector  $\vec{v}$ , es decir  $D_l^{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ S_l$  (Figura 1.6). En esta solo queda invariante el eje  $l$ .

Figura 1.6

*Reflexión con desplazamiento de un vector*



Nota. Tomada de *Una introducción a la simetría*, por A. Costa, 2015, <https://elibro.net/pt/lc/upanama/titulos/48821>.

Este movimiento está relacionado en dos pasos, puesto que consiste en realizar un reflejo sobre una línea y luego una traslación a lo largo de esa línea, pero combinados en una sola operación. Por lo cual es una composición entre isometrías que conservan su forma y tamaño, y si se varía el orden en que se aplican las isometrías a un objeto va a obtener el mismo resultado.

Dicho desplazamiento también se le conoce como reflexión sesgada y está presente en la naturaleza como en las huellas que se dejan al caminar sobre la arena porque los pasos son como un deslizamiento de la forma del pie, y sus dos pies son como reflejos de espejo el uno del otro. De igual manera, en la generación de frisos; otro ejemplo es el que se muestra en la Figura 1.3 en anexos, en el cual se puede observar un triángulo sometido a un movimiento de reflexión con desplazamiento.

#### 1.4 Relación entre simetría y semejanza

Los términos de simetría y semejanza son dos conceptos muy vistos en la geometría que, a simple vista, no parecieran tener una relación. Ambos conceptos están ligados a las transformaciones, pero se diferencian debido a que la simetría es un tipo de movimiento isométrico donde se conservan la forma y el tamaño de la figura, y el tamaño de la semejanza varía, pero sigue teniendo la misma forma.

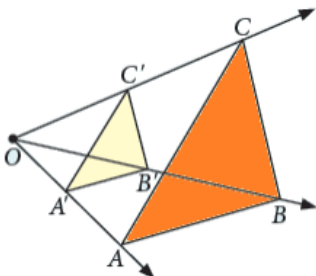
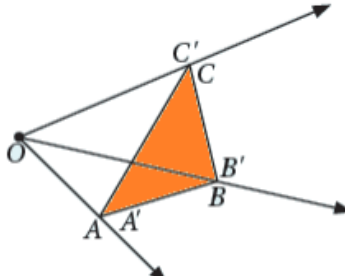
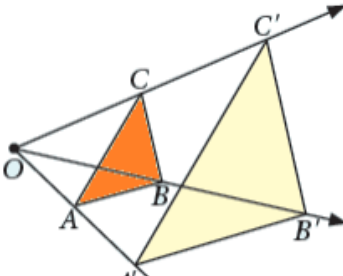
La semejanza está ligada al concepto de homotecia porque si la figura a la que se somete una semejanza tiene una posición específica, el concepto toma relevancia. Las homotecias, por otra parte, se pueden definir como “una transformación geométrica que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor” (Guerrero, 2015 p. 8). Es decir que este tipo de transformación alteran el tamaño de las figuras que conducen a otras semejantes el resultado es una figura con la misma forma que la original. En consecuencia, la semejanza se puede definir como un producto de una homotecia por un movimiento.

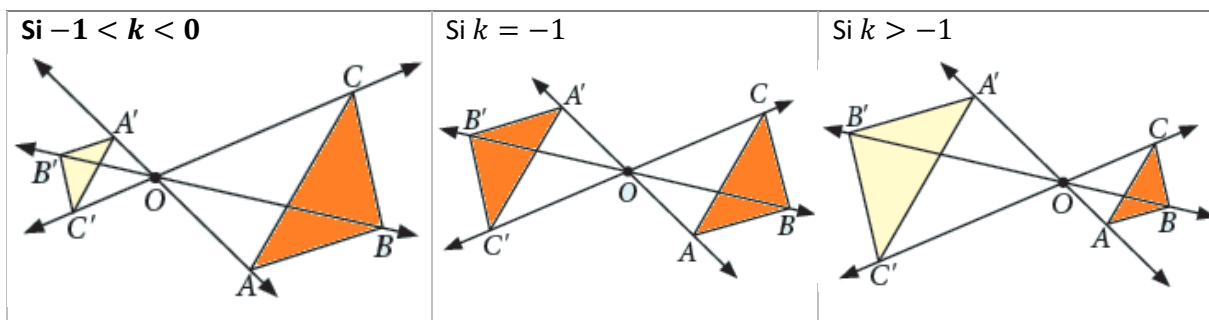
Para entender la semejanza, se utilizará la figura del triángulo para conocer cómo, dependiendo de su posición, se aprecia la homotecia. Para ello es importante recordar que para que dos triángulos sean semejantes sus ángulos correspondientes deben ser iguales y sus lados correspondientes deben ser proporcionales. Si se cumplen estos criterios, se utiliza el signo de  $\sim$  para indicar que estos triángulos son semejantes  $ABC \sim A'B'C'$ . Es importante recalcar que la homotecia no solamente se da en los triángulos, sino que conlleva a más figuras tanto en el plano como en el espacio debido a que las propiedades se conservan. Lo que sí es un hecho es que toda figura homotética conlleva a que las figuras sean semejantes, sin embargo, no hay reciprocidad.

La homotecia “tiene un centro de homotecia,  $O$ , y un punto  $P$  que se transforma por una homotecia en el punto  $P'$  que está en la recta  $OP$ , si se verifica que:  $OP' = rOP$  donde  $r$  es un número llamado razón de homotecia” (Salvador y Molero, 2013, p. 203). A partir de la razón de homotecia surgen dos tipos de esta, las cuales son homotecia directa y la homotecia inversa, detallada en la Tabla 1.1. La primera se da en tres casos: en el primero, la figura tiene como resultado una reducción de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia ( $O$ ); en el segundo caso, la figura resultante es congruente con la figura original, lo cual se conoce como identidad; y en el tercero, la figura resultante es una ampliación de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia ( $O$ ). En la homotecia inversa también ocurren tres casos; en el primero, la figura resultante es una reducción de la figura original y el centro ( $O$ ) está ubicado entre ambas figuras; en el segundo, la figura resultante es congruente con la figura original, lo cual se conoce como reflexión o simetría central; y en el tercero, la figura resultante es una ampliación de la figura original y el centro de homotecia ( $O$ ) está ubicado entre ambas figuras.

Tabla 1.1

*Tipos de homotecia según su valor de  $k$*

<b>1. Si <math>k &gt; 0</math>, es una homotecia directa y se tiene los siguientes casos:</b>		
<b>Si <math>0 &lt; k &lt; 1</math></b> 	<b>Si <math>k = 1</math></b> 	<b>Si <math>k &gt; 1</math></b> 
<b>2. Si <math>k &lt; 0</math>, es una homotecia inversa y se tiene los siguientes casos:</b>		



Nota. Adaptada de Guía matemática, por Homotecia del Colegio Santa María de Maipú, 2020,

[https://www.colegiosantamariademaipu.cl/wp-](https://www.colegiosantamariademaipu.cl/wp-content/uploads/2020/06/Matem%C3%A1tica_Gu%C3%ADaN%C2%B010_IV%C2%B0EL)

[content/uploads/2020/06/Matem%C3%A1tica\\_Gu%C3%ADaN%C2%B010\\_IV%C2%B0EL](https://www.colegiosantamariademaipu.cl/wp-content/uploads/2020/06/Matem%C3%A1tica_Gu%C3%ADaN%C2%B010_IV%C2%B0EL)

[ECTIVO.docx](https://www.colegiosantamariademaipu.cl/wp-content/uploads/2020/06/Matem%C3%A1tica_Gu%C3%ADaN%C2%B010_IV%C2%B0EL)

En la vida cotidiana, la homotecia se aplica a la función que hacen las fotocopiadoras o impresoras, donde la finalidad es ampliar o reducir un documento o imagen, la máquina realiza el proceso de transformación del documento original mediante la homotecia. El zoom es otro instrumento donde la homotecia se hace presente, porque permite hacer que los objetos se acerquen o se alejen sin desplazar la cámara.

Si bien es cierto, el triángulo es un polígono, la semejanza se aplica para todos los polígonos en general donde la semejanza que ocurre cuando “uno es imagen de otro por aplicación de una función, tal que se cumplan las siguientes condiciones:

- Sus puntos conservan el orden y la pertenencia
- Sus lados homólogos son proporcionales
- Sus ángulos homólogos son congruentes” (Blue et al., 2019, p. 8)

A partir de lo anterior, es preciso afirmar que los objetos pueden tener una orientación distinta, pero, a su vez, semejantes. Es decir que la clave para detectar dos objetos semejantes o no, es su forma. En la Figura 4 de anexos, se puede apreciar el polígono formado por los vértices

$ABCDE$  y  $A'B'C'D'E'$ , las cuales son semejantes debido a que sus lados son proporcionales y sus ángulos son congruentes.

Por lo tanto, la relación entre simetría y semejanza es que da lugar a otro tipo de simetría que se puede denominar simetría homotética, en la que el objeto se va a caracterizar por disminuir su tamaño. Sin embargo, este contenido no se enfocará en este tipo de simetría que abarca otras características que se alejan del objeto de estudio.

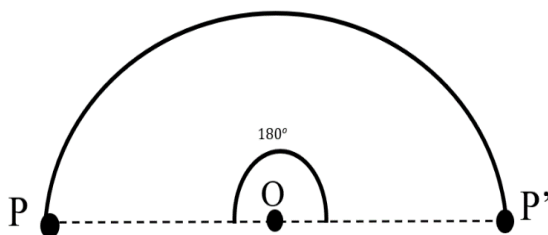
## 1.5 Clasificación de la simetría

### 1.5.1 Simetría respecto a un punto

**Definición.** Una simetría central se puede definir como dado un punto " $P'$ " es simétrico de  $P$  en la simetría central de centro  $O$ , entonces,  $O$  es el punto medio del segmento  $\overline{PP'}$ " (Salvador y Molero, 2013, p. 213). En la figura 1.6, se muestra la simetría de un punto  $P$  respecto al punto  $O$  generando un  $P'$  al realizarle un giro en el centro a un ángulo de  $180^\circ$ .

Figura 1.6

*Simetría respecto a un punto*



Si son dos figuras las que se están analizando, el criterio es el mismo tanto en el plano como en el espacio como se muestra en la Figura 5 en anexos. La (A) muestra dos triángulos el  $\Delta ABC$  Y  $\Delta A'B'C'$  con un centro de simetría en el punto  $O$  en el plano, en la (B) se muestra el tetraedro  $ABCD$  Y  $A'B'C'D'$  los cuales son simétricos respecto al centro  $O$  en el espacio.

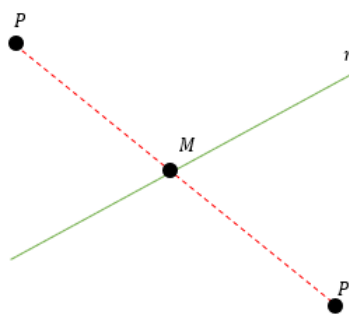
La simetría respecto a un punto también se aplica a una sola figura y, en ocasiones, no solo va a tener un solo centro de simetría, puesto que al aplicar un giro de  $360^\circ$  a una figura alrededor de su centro se producen  $n$  coincidencias; estas figuras corresponden a un orden  $n$  y una figura invariante de orden  $n$ . En la Figura 6 en anexo se observa que en a) el centro de simetría del cuadrado y en el b) el centro de simetría del octaedro regular, por lo que se relaciona en que el centro de simetría es donde concurre una cantidad de ejes como el punto de intersección de ellas.

### 1.5.2 Simetría respecto a una recta

**Definición.** El simétrico del punto  $P$  respecto de la recta  $r$  es el punto  $P'$  tal que la recta  $s$  que pasa por los puntos  $P$  y  $P'$  y son perpendicular a la recta  $r$ , y el punto de intersección de las rectas  $r$  y  $s$  el punto medio del segmento  $\overline{PP'}$  (Ver Figura 1.7). Este tipo de simetría también se conoce como simetría axial, dado que se conservan todas las longitudes y las magnitudes de los ángulos, pero cambia el sentido de estos. De esta forma, no es posible hacer coincidir una figura con una figura distinta debido a que las figuras deben ser siempre simétricas.

Figura 1.7

*Simetría respecto a una recta*



La simetría es por tanto un movimiento inverso. Para este tipo de simetría, los puntos del eje de simetría quedan invariantes; el eje de simetría es una recta invariante con puntos invariantes. Si dos figuras, las cuales presentan simetría respecto a una recta, y estas mismas propiedades van

a ocurrir tanto en el plano como en el espacio. En la Figura 7 en anexos, se puede observar en a) la simetría respecto a una recta del triángulo  $\Delta ABC$  y  $\Delta A'B'C'$  y en b) se puede apreciar los tetraedros los cuales están formado con los vértices  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  los cuales son simétrico respecto a la recta  $L$ .

La simetría axial no solo se aplica a una figura como en el ejemplo anterior, sino también se aplica en dos figuras. En una sola figura tiene eje de simetría cuando el simétrico de cualquier punto de la figura respecto de dicha recta es un punto de la misma figura. Esto ocurre tanto en el plano como en el espacio, donde algunas van a tener más de un eje de simetría. En la Figura 8 en anexos se puede observar que en a) un triángulo equilátero que tiene tres ejes de simetría y en b) se observa un cubo donde el punto  $P'$  es el simétrico del punto  $P$  respecto de la recta  $L$  y el punto  $Q'$  es el simétrico del punto  $Q$  respecto de la recta  $L$ .

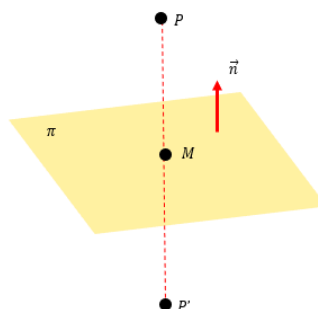
### 1.5.3 *Simetría respecto de un plano*

**Definición.** El simétrico del punto  $P$  respecto del plano  $\pi$  es el punto  $P'$  tal que las recta  $r$  que pasa por el  $P$  y  $P'$  es perpendicular al plano  $\pi$  y el punto de intersección de las rectas  $r$  y el plano  $\pi$  es el punto medio del segmento  $\overline{PP'}$  (Ver Figura 1.8).

Este tipo de simetría también se conoce como simetría especular, dado que deja invariantes los puntos pertenecientes al plano de simetría y solo ocurre en el espacio, dejando invariante las rectas ortogonales al plano de simetría, y deja invariante al plano de simetría. Un plano de simetría es como un espejo que refleja exactamente un fragmento de la figura en el otro fragmento.

Figura 1.8

*Simetría respecto a un plano*



La simetría respecto a un plano se aplica tanto para dos figuras como a una sola figura; el plano de simetría de una figura es el plano imaginario tal, que todo punto de la figura se transforma por la simetría respecto de ese plano en otro punto de dicha figura. En algunos poliedros están formados por varios planos. En la Figura 9 en anexos, en la parte a) se visualizan los tetraedros  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  los cuales son simétricos respecto al plano L y en la parte b) se observa un cubo con sus distintos planos simétricos.

#### **1.5.4 Simetría helicoidal**

**Definición.** Es el trazado tridimensional que resulta de la rotación de un objeto a una velocidad angular constante, mientras que simultáneamente se traslada a una velocidad lineal constante a lo largo de su eje de rotación. En cualquier momento, estos dos movimientos se combinan para dar un ángulo de enrollamiento que ayuda a definir las propiedades de la hélice trazada.

De forma general, la simetría helicoidal, está relacionado con el concepto de hélice, en geometría se refieren a ella como toda línea curva cuyas tangentes forman un ángulo constante y con una dirección fija. Dichas “hélices son quirales, es decir, que pueden ser hélices enrolladas

a la derecha y hélices enrolladas a la izquierda, por lo tanto, sus imágenes enantiomorfas<sup>2</sup> no coinciden. En ocasiones, se arrollan alrededor del mismo eje dos hélices enantiomorfas, obteniéndose entonces curiosas estructuras” (Navarro, 2011, p.80).

Se puede distinguir tres clases principales de simetría helicoidal, según la interacción del ángulo de las simetrías de enrollamiento y traslación a lo largo del eje:

- **Simetría helicoidal infinita**, el objeto tendrá infinitas simetrías helicoidales si para cualquier pequeña rotación del objeto alrededor de eje central, existe un punto cercano (distancia de traslación) en ese eje en el que el objeto aparecerá exactamente como antes. Ejemplo de esto son los resortes en espiral uniformemente, brocas y sinfines.
- **Simetría helicoidal de n-ejes**, para este tipo los objetos exhibirán una simetría después de una rotación en un ángulo fijo y una traslación en una distancia fija, pero generalmente no serán invariantes para ningún ángulo de rotación.
- **Simetría helicoidal no repetitiva**, en este caso el ángulo de rotación requerido para observar la simetría es irracional. El ángulo de rotación nunca se repite exactamente, no importa cuántas veces se gire la hélice.

Para ejemplificar este tipo de simetría, se encuentran las hélices que tienen las pistolas, fusiles y demás armas de fuego. También se puede observar en un tornillo o una tuerca. Otro ejemplo más específico es en las escaleras helicoidal, mostrada en la Figura 10 en anexos, la cual se puede describir como un movimiento en el lugar que permanece a una distancia fija de una línea, mientras se mueve de manera circular. Dicho de otra manera, es lo que se denomina hélice.

---

<sup>2</sup> En geometría, enantiomorfas se refiere a que está formado por las partes dispuestas en orden inverso como si fuera una imagen reflejada en un espejo.

## 1.6 Poliedros regulares

Los poliedros regulares también conocidos como poliedros convexos<sup>3</sup>, se pueden definir como “poliedros cuyas caras son polígonos regulares<sup>4</sup> iguales, en sus vértices se unen el mismo número de caras” (Díaz y Canino, 2012, 59), los cuales son también conocidos como los cuerpos platónicos.

Existen cinco tipos de poliedros regulares como el tetraedro, el cubo o hexaedro, el dodecaedro, e icosaedro. En la antigua Grecia, Platón, en su libro *Timaeus*, exponía que el mundo estaba construido por cuatro elementos: el fuego, la tierra, el aire y el agua y, a su vez, lo relacionaba con los poliedros regulares. Entre estos, el tetraedro representa el fuego, el icosaedro representaba el agua, el cubo la tierra, el octaedro el aire y el dodecaedro, quinto cuerpo platónico, simbolizaba el mundo entero, considerado como el más importante de todos. Esta correspondencia entre los cuerpos y los cuatro elementos naturales primarios fue uno de los primeros intentos en introducir la sistematización en la ciencia. Los poliedros regulares se caracterizan por ser figuras tridimensionales formadas por varios polígonos ya sea cuadrados o triángulos.

### 1.6.1 Propiedades

- Las aristas de un poliedro regular son iguales entre sí.
- Todos los ángulos diedros que contiene dos caras con una arista común son iguales.
- Se le llama poliedro regular siempre y cuando concurren el mismo número de caras en cada vértice.

---

<sup>3</sup> Un poliedro es convexo indica que si tomamos dos puntos cualesquiera del poliedro la línea que los une es interna a la figura. Es decir, el segmento no sobresale al exterior.

<sup>4</sup> Un polígono regular se refiere a que tiene tanto sus lados como ángulos iguales.

- El **Tetraedro regular** tiene cuatro caras que están compuestas por cuatro triángulos equiláteros, por lo tanto, sus tres lados miden lo mismo; cada uno de sus vértices es un vértice de tres triángulos. Es una pirámide con base triangular, siendo uno de los poliedros más simples y el único que posee menos de cinco lados. En la figura 11 en anexos, se puede distinguir un tetraedro formado por los vértices A, B, C y D, en donde sus caras la forman los triángulos ABC, ADC, ADB y BDC, por otra parte, sus aristas son AB, AC, AD, BC, CD y DB.
- El **octaedro regular** está compuesto por ocho caras que son triángulos equiláteros idénticos. Tiene además doce aristas y seis vértices. Cada vértice del octaedro es un vértice de cuatro triángulos. En la Figura 12 en anexos, se puede observar un octaedro formado por los vértices A, B, C, D, E, F la cual parece la unión de dos pirámides unidas por la base.
- El **icosaedro regular** está compuesto por veinte triángulos equiláteros iguales. Es decir, cada una de las caras de este poliedro está formada por tres lados que miden lo mismo. Cada vértice del icosaedro es un vértice de cinco triángulos. En la figura 13 en anexos, se puede observar un icosaedro formado por los vértices A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K y L.
- El **cubo (hexaedro)** tiene seis lados formados por cuadrados idénticos. Cada vértice del cubo es de tres cuadrados. Como también cada cara del hexaedro regular es un paralelogramo con cuatro lados de la misma longitud, y todas las caras son congruentes. En la Figura 14 en anexo, se puede identificar el cubo formado por los vértices A, B, C, D, E, F, G y H.

- El **Dodecaedro regular** está compuesto por doce caras congruentes que son pentágonos regulares (polígonos de cinco lados), 30 aristas congruentes y 20 vértices. Cada vértice del dodecaedro es un vértice de tres pentágonos regulares; su poliedro dual es el icosaedro y, además, su volumen y área están relacionadas a la proporción áurea. En la Figura 15 en anexo, se puede observar un dodecaedro formado por los vértices A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S y T.

## 1.7 Tipos de simetría de los poliedros regulares

### 1.7.1 Ejes de simetrías

El eje de rotación de un poliedro es una recta tal que, si se gira el poliedro alrededor de ella, antes de dar una vuelta completa, este aparece con el mismo aspecto que en la posición. Por otra parte, el orden de rotación del eje es el número de veces que aparece el poliedro con el aspecto inicial antes de completar una vuelta. En la Tabla 1.2 se puede observar, primeramente, los ejes de simetría del tetraedro que tiene cuatro ejes de simetría y todos de orden de rotación tres, las cuales son la recta perpendicular a cada cara por el vértice opuesto de tetraedro; en anexo en la Figura 16 se puede apreciar visualmente estos ejes de simetría.

Luego, el hexaedro tiene tres ejes de simetría de orden cuatro, las cuales son rectas perpendiculares a cada par de caras paralelas por su punto medio; cuatro ejes de simetría de orden tres: las rectas que unen los centros de los vértices opuestos; seis ejes de simetría de orden dos que unen los centros de las aristas opuestas, en anexo en la Figura 17 se puede visualizar sus ejes de simetría. El octaedro regular tiene tres ejes de simetría de orden cuatro, las rectas que unen vértices opuestos; seis ejes de simetría de orden dos, las rectas que unen los centros de aristas opuestas; cuatro ejes de simetría de orden tres, las rectas que unen los baricentros de

las caras opuestas. El que sigue es el dodecaedro, el cual tiene seis ejes de simetría de orden cinco, las rectas que unen los centros de caras opuestas; quince ejes de simetría de orden dos, las rectas que unen los centros de aristas opuestas. Por último, el icosaedro regular que tiene 15 ejes de simetría de orden dos, las rectas que unen los centros de aristas opuestas y seis ejes de simetría de orden cinco que son las rectas que unen los vértices opuestos.

Tabla 1.2.

*Ejes de Rotación y orden de los ejes*

Poliedro	Eje de orden 2	Eje de orden 3	Eje de orden 4	Eje de orden 5
Tetraedro	3			
Cubo	6	4	3	
Octaedro	6	4	3	
Dodecaedro	15	10		6
Icosaedro	15	10		6

Nota. Adaptado de *Análisis de diseños: Reconocimiento de Isometrías* por M. Cruz, 2018,

<https://docplayer.es/23457477-Analisis-de-disenos-reconocimiento-de-isometrias.html>.

### 1.7.2 Planos de simetría

Un plano de simetría de un poliedro es un plano que pasa por algún eje de simetría de dos caras paralelas. En la Tabla 1.3, se observa que el tetraedro tiene seis planos de simetría formados por cada arista y el punto medio de la arista opuesta. En la Figura 18 en anexos, se puede apreciar visualmente los planos de simetrías. Por otra parte, el hexaedro tiene nueve planos de simetría: tres paralelos a cada par de caras paralelas por el punto medio de las aristas que las unen, y seis formados por los pares de aristas opuestas. El octaedro por su parte tiene tres de los nueve planos de simetría del tetraedro, los cuales pasan por cada cuatro vértices del octaedro que se encuentran en el mismo plano. Seis planos de simetría pasan por dos vértices que no pertenecen a la misma cara y los puntos medios de aristas opuestas, en la parte de anexo en la Figura 19 se

observan estos planos mencionados. El dodecaedro tiene 15 planos de simetría que se pueden observar en la Figura 20 en anexos. Cualquiera de los planos de simetría pasa por cada cara del vértice y el medio de la arista opuesta. En el icosaedro también hay planos de simetría 15 y se puede apreciar en la Figura 20 en anexos. Los planos de simetría pasan por cuatro vértices que se encuentran en el mismo plano y los puntos medios de los lados paralelos opuestos.

Tabla 1.3

*Planos de simetría*

Poliedro	Pasando por una arista y por el medio de otra	Paralelos a pares de caras	Perpendicular es el segmento que une pares de vértices	Pasan por los pares de aristas opuestas	Pasan por los puntos medios de aristas opuestas	Pasan por pares de aristas opuestas y cortan por el punto medio a otro par de aristas
Tetraedro	6					
Cubo		3		6		
Octaedro			3		6	
Dodecaedro						15
Icosaedro						15

Nota. Adaptado de Análisis de diseños: Reconocimiento de Isometrías *por* M. Cruz, 2018, <https://docplayer.es/23457477-Analisis-de-disenos-reconocimiento-de-isometrias.html>.

Por último, para los poliedros regulares, el centro de simetría es el punto de intersección; de los ejes de simetría de los cinco cuerpos geométricos, solo el tetraedro, no presenta centro de simetría. De lo anterior se puede afirmar que las simetrías totales para cada cuerpo geométrico son las siguientes:

- El tetraedro tiene un orden de simetría total de 24.
- El hexaedro regular es un cuerpo que tiene orden de simetría total de 48.
- Octaedro tiene un orden de simetría total de 72.
- El dodecaedro es cuerpo tiene un orden de simetría total de 120.

## Capítulo 2

### Simetría en el álgebra

En el capítulo 2 se contextualiza la simetría hacia la línea del álgebra, siendo la teoría de grupo un lenguaje unificador entre la simetría vista geoméricamente con el álgebra, partiendo de sus estudios iniciales hasta los distintos grupos que han surgido de esta conexión, para explorar las características de cada grupo y lograr identificar los grupos que corresponden a un determinado ejemplo de la naturaleza o el arte.

#### 2.1 Reseña histórica del uso de la simetría en el álgebra

El uso de la simetría en el álgebra inicia con el surgimiento del concepto de grupo, el cual, a su vez, nace a principios del siglo XIX a raíz de la necesidad de perfilar la noción de grupo para solucionar ciertos problemas concretos de la época. Anteriormente, el álgebra solo se basaba en dar soluciones a ecuaciones polinómicas, luego se convirtió en el estudio de los sistemas axiomáticos abstractos hasta ascender a la llamada álgebra clásica de ecuaciones polinómicas al álgebra moderna. Por tal razón, se presentan los hechos más relevantes que permitieron el desarrollo entre la simetría y el álgebra.

Unos de los primeros en dar estudios formales al álgebra fue Lagrange (1736-1813), a través de su teoría de ecuaciones algebraicas con el objetivo de encontrar las razones por las cuales las ecuaciones de tercer y cuarto grado tienen solución por radicales, encontrando que para resolver estos tipos de ecuaciones se necesitaba encontrar funciones en raíces que fueran invariantes por efecto de ciertas permutaciones. Adicional a ello, mostró que dicho método fallaba con las quinticas. Este estudio fue considerado como el origen de los grupos de permutaciones.

Posterior a esto, en el año de 1799, Ruffini (1765-1822) afirmó que las ecuaciones de grado quinto no son resolubles por radicales, basándose en los trabajos de Lagrange e introduce las propiedades de los grupos de permutaciones.

Luego en 1815 Cauchy (1789-1857) estudió las permutaciones de las raíces de ecuaciones definiendo el orden de una permutación, incorporando la notación y utilizando el término de sustituciones conjugadas para estudiar las permutaciones de las raíces de ecuaciones.

Posterior a esto, la simetría toma relevancia dentro del álgebra con el matemático francés Evariste Galois (1811-1832) el cual “inventó un lenguaje para describir la simetría en las estructuras matemáticas y para deducir consecuencias” (Stewart, 2008, p. 1). Su aporte fue más allá que solo demostrar las de grado quinto, puesto que también “creó una herramienta matemática para poder saber qué ecuaciones de grado igual o superior a cinco se pueden calcular con fórmula” (Castro, 2018, p. 1). Así, para 1831 Galois examinó ciertas permutaciones de una ecuación  $f(x)$  y observó que obedecían a un sistema algebraico que denominó Grupo. Luego encontró una fórmula para las raíces  $f(x)$  si y solo si satisfacen los axiomas de grupos conocidas.

En términos modernos, Galois concluyó que los polinomios de grado  $n$  tiene como grupo, el grupo de permutaciones  $S_n$ . Estos a su vez son resolubles para  $n = 2,3,4$ . Es decir, que las ecuaciones de grado 2, 3 y 4 se pueden obtener por radicales. Estas aportaciones para su época fueron comprendidas gracias a Joseph Liouville (1809-1882) que en 1843 publicó los resultados de Galois, dando su comentario. Sin embargo, no comprendió en profundidad estas contribuciones.

Años más tarde, el matemático francés Camille Jordán (1838-1922) unificó las ideas de Galois y de Cauchy en el libro llamado “*Traité des substitutions et des équations algébriques*”

publicado en 1870, impactando significativamente el desarrollo de la teoría de grupos, debido a que aplicó tanto el concepto de grupo como la geometría algebraica a funciones trascendentes y a la mecánica teórica, definiendo los isomorfismos de grupo de permutaciones y probó el teorema Jordan-Holder de existencia y unicidad.

Luego, en 1872 se dio la publicación de una investigación denominada “Programa de Erlangen” del matemático Félix Klein (1849-1925) permitiendo marcar un antes y un después dentro de la geometría, y logrando, a través del álgebra, conectar una definición formal de la geometría que se encontraba dispersa. Más adelante se amplía en detalle dicho documento, dado que es fundamental para la investigación.

Otro aporte relevante se encuentra con la matemática Emily Noether (1882-1935), considerada como madre del álgebra moderna, puesto que aplicó el concepto de simetría en el área de física teórica, dando como resultado su teorema denominado Teorema de Noether, el cual trata las relaciones simétricas en física con las leyes de conservación, siendo un aporte crucial en la relatividad y la física cuántica.

Luego, en 1918 Hermann Weyl (1885-1955), realizó una introducción a una teoría unificada de campos para gravitación y electromagnetismo, donde incluyó la invarianza bajo las transformaciones de escala, llamada invarianza o simetría gauge, que implica la conservación eléctrica; utilizando los teoremas expuestos por Noether.

## 2.2 Programa de Erlangen

En el año de 1872, el matemático alemán Félix Klein unificó la geometría luego de haber demostrado que las geometrías métricas, euclídeas o no euclídeas constituyen casos particulares de la geometría proyectiva, publicando un documento que adquiere fama dentro del mundo de las matemáticas conocido como Programa de Erlangen. Debido a él nacieron innumerables aportaciones como son las derivadas e integrales, entre muchos otros conceptos e ideas importantes dentro del tema. El programa de Erlangen se caracteriza por “sintetizar en una sola idea todo el significado disperso de la palabra geometría” (Navarro, 2010, p. 130).

En la época del Klein había muchas y nuevas ramas dispersas de la geometría, por lo tanto, su objetivo fue darle una definición formal a la geometría a través del concepto de grupos; más adelante se detalla las generalidades. Como tal, este concepto no proviene de Klein, sino de Galois como ya se mencionó anteriormente, por lo cual, Klein buscó una relación entre las distintas geometrías debido a que cada una estudia las propiedades que no cambian al aplicarse cierto tipo de transformaciones. A estas propiedades se les denomina invariantes y el conjunto de las transformaciones que a una invariante no la hacen cambiar, tiene estructura de grupo bajo la composición de funciones. Por ejemplo, en la geometría euclidiana las invariantes son las distancias y las transformaciones que ayudan a preservar esas distancias son las isometrías o los movimientos en el plano.

Es por ello por lo que la idea principal del programa de Erlangen reside en fijar un grupo  $G$  y en todas sus simetrías y en todas las transformaciones de la geometría determinada por el grupo. De igual manera, esto confirma que los métodos sintético y algebraico no son geometrías distintas, sino que son la misma geometría, pero con un enfoque diferente.

## 2.3 Grupos

**Definición.** Un grupo  $(G,*)$  es un conjunto no vacío, junto con la operación binaria  $*$  definida sobre  $G$  que satisface las siguientes propiedades:

- (1) Cerradura:  $\forall a, b \in G, a * b \in G$
- (2) Asociatividad:  $\forall a, b, c \in G$ , se satisface:  $(a * b) * c = a * (b * c)$
- (3) Existe un elemento neutro:  $\exists e \in G$ , tal que  $\forall g \in G$ , se verifica:  $g * e = e * g = g$
- (4) Existencia del inverso:  $\forall g \in G$  existe otro elemento, al que llamaremos inverso de  $g$  y se designará por  $g^{-1}$ , tal que:  $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

**Definición** (Conmutatividad). Se dice que un grupo  $G$  es abeliano si  $ab = ba, \forall a, b \in G$ .

**Definición** (Semigrupo). Si  $(G,*)$  cumple únicamente con (1) y (2) se le denomina semigrupo.

**Definición** (Monoide). Si  $(G,*)$  cumple con (1), (2) y (3) se le llamará monoide.

**Lema 1.** Sea  $(G,*)$  un grupo, entonces, se cumplen las siguientes propiedades

- (1) El elemento neutro es único
- (2) El inverso de cada elemento es único
- (3)  $\forall a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$
- (4)  $\forall a, b \in G, (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

**Demostración.** (1) Supóngase que tanto  $e$  como  $e'$  son identidades de  $G$ . Entonces,

- a-  $ae = a$  para todo  $a$  en  $G$ , y
- b-  $e'a = a$  para todo  $a$  en  $G$ .

De la parte (a-)  $a = e'$  y  $a = e$  en parte (b-) producen  $e'e = e'$  y  $e'e = e$ . Por lo tanto,  $e$  y  $e'$  son ambos iguales a  $ee'$  y, por lo tanto, son iguales entre sí.

(2) Si  $b$  y  $c$  son inversos de  $a$ . Entonces,  $ab = e$  y  $ac = e$ . De modo que  $ab = ac$ ; luego, cancelando a izquierda, se obtiene  $b = c$ , lo que muestra la unicidad de elemento inverso.

(3) Como  $a^{-1} \in G$ , entonces,  $(a^{-1})^{-1} \in G$ . Se sabe que  $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = e$ , por lo que  $aa^{-1}(a^{-1})^{-1} = ae$  y  $e(a^{-1})^{-1} = a$ . Así,  $(a^{-1})^{-1} = a$  para todo  $a$  en  $G$ .

(4) Como  $(ab)(ab)^{-1} = e$  y

$$a(bb^{-1})a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = (ae)a^{-1} = aa^{-1} = e,$$

Se tiene, por la unicidad del inverso, que  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ . ■

**Definición.** Se dice que un grupo  $G$  es un grupo finito si consta de un número finito de elementos. El número de elementos de  $G$  se llama orden de  $G$  y se denota por  $|G|$ . Si  $G$  es infinito, se afirma que tiene orden infinito.

**Definición (Potencia).** Sea  $G$  un grupo. Si  $n \geq 0$  es un entero, se define inductivamente la  $n$ -ésima potencia  $a^n$  de  $a$  como sigue:

$$a^0 = e, a^n = aa^{n-1}, \text{ para todo } n \geq 1$$

Así,  $a^1 = a$ ,  $a^2 = aa$ ,  $a^3 = aaa$ , y así sucesivamente. Además, si  $n$  es un entero positivo, definimos  $a^{-n} = (a^{-1})^n$ .

Con esta notación, si  $G$  es un grupo entonces para cualquier  $a$  elemento de  $G$  y para todo  $m, n$  elementos de  $\mathbb{Z}$  se verifica que:

$$(1) a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(2) (a^m)^n = a^{mn}$$

En general,  $(ab)^n \neq a^n b^n$ , aunque existe una relación simple entre  $(ab)^{-1}$ ,  $a^{-1}$  y  $b^{-1}$ .

**Definición.** El orden de un elemento de un grupo es definido de la siguiente manera: si  $G$  es un grupo y  $x \in G$ , entonces:

- El orden de  $x$  es  $n \in \mathbb{N}$  si se cumple:

- i)  $x^n = e$
- ii) Si  $x^r = e$ , entonces,  $r \geq n$  y  $r > 0$ .
- El orden de  $x$  es infinito de si para todo  $n \in \mathbb{N}, n \neq 0, x^n \neq e$ .

Si  $x \in G$ , el orden de  $x$  lo denotamos como  $o(x)$ .

**Proposición 1.** Si  $o(x) = n$  y  $x^r = e$ , entonces,  $n|r$

Demostración. Si se supone que  $n \nmid r$ , entonces,  $r = nk + m$  para algún  $k \in \mathbb{N}$  y  $0 < m < n$ .

Así,  $x^r = x^{nk+m} = x^{nk}x^m = (x^n)^k x^m = e^k x^m = ex^m = x^m$ , por lo que  $x^m = e$ , lo cual contradice la hipótesis de que  $o(x) = n$ , por lo tanto,  $n|r$ . ■

### 2.3.1 Subgrupo, clase laterales, grupo cociente y grupo normal.

Un grupo se distingue de un conjunto ordinario por el hecho de que está dotado de una operación bien definida. Por lo tanto, es natural exigir que dichas partes se comporten razonablemente con respecto a la operación de  $G$ . Una vez que se tiene esto, se llega casi inmediatamente al concepto de subgrupo de un grupo. (Herstein, 1988, p. 50)

**Definición** (Subgrupo). Un subconjunto  $H$  de un grupo  $G$  es en sí mismo un grupo bajo la operación de  $G$ , decimos que  $H$  es un subgrupo de  $G$ .

Todo grupo  $G$  tiene automáticamente dos subgrupos obvios,  $G$  mismo y el subgrupo que consiste en el elemento identidad “ $e$ ”. A estos dos subgrupos se les llama subgrupos triviales. Se usa la notación  $H \leq G$  para indicar que  $H$  es un subgrupo de  $G$  y  $H < G$  para indicar  $H$  es un subgrupo de  $G$ , pero no es igual a  $G$ .

**Teorema 1.** (Prueba de subgrupo) Un subconjunto  $H$  de un grupo  $G$  es un subgrupo si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones.

- (1)  $1_G \in H$ , donde  $1_G$  es la unidad de  $G$

(2) Si  $h \in H$  y  $h_1 \in H$ , entonces  $hh_1 \in H$

(3) Si  $h \in H$  entonces  $h^{-1} \in H$ , donde  $h^{-1}$  denota el inverso de  $h$  en  $G$

En el caso,  $H$  tiene una misma unidad que  $G$  y, si  $h \in H$  su inverso en  $H$  es igual a su inverso en  $G$ .

Demostración. Si  $H$  satisface (1), (2) y (3), entonces  $H$  es cerrado por (2), la unidad de  $G$  es la unidad de  $H$  por (1), y la inversa en  $G$  de un elemento  $h \in H$  sirve como la inversa de  $h$  en  $G$  por (3). Como  $H$  hereda la ley asociativa de  $G$ , es un subgrupo.

A la inversa, si  $H$  es un subgrupo, sea la unidad  $e$  de  $H$ . Entonces  $e^2 = e = e \cdot 1_G$ , entonces  $e = 1_G$  por cancelación en  $G$ . Esto prueba (1) y (2) se sigue porque  $H$  es cerrado bajo la operación de  $G$ . Finalmente, si  $h \in H$ , sea  $h'$  su inversa en  $H$ . Si  $h^{-1}$  es la inversa en  $G$ , entonces  $hh' = 1 = hh^{-1}$ , entonces  $h = h^{-1}$  por cancelación en  $G$ . Esto prueba (3) y la última oración del teorema. ■

**Teorema 2.** (Prueba de subgrupos finitos). Sea  $H$  un subconjunto finito no vacío de un grupo  $G$ . Si  $H$  es cerrado bajo la operación de  $G$ , entonces  $H$  es subgrupo de  $G$ .

Demostración. Del teorema anterior, solo bastaría demostrar que  $a^{-1} \in H$  siempre que  $a \in H$ . Si  $a = e$ , entonces  $a^{-1} = a$  y se ha terminado. Luego si  $a \neq e$ , ocurre la secuencia  $a, a^2, \dots$  Por clausura, todos estos elementos pertenecen a  $H$ . Dado que  $H$  es infinito, no todos estos elementos son distintos. Dado que  $a^{i-j} = e$ ; y como  $a \neq e$ ,  $i - j > 1$ . Así  $aa^{1-j-1} = a^{i-j} = e$ , Por lo tanto  $a^{1-j-1} = a^{-1}$ . Pero  $i - j \geq 1$  implica que  $a^{1-j-1} \in H$ . ■

**Definición.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , se define el conjunto  $n\mathbb{Z}$  como sigue:  $n\mathbb{Z} = \{nz | z \in \mathbb{Z}\}$ . Este es el conjunto de los múltiplos de  $n$ .

**Proposición 2.** Sea  $(\mathbb{Z}, +)$  con  $+$  la operación usual, veamos que  $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}$ .

Demostración. Sean  $x, y \in n\mathbb{Z}$ , entonces,  $x = nz_1$  y  $y = nz_2$  con  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ . De manera que  $x + (-y) = nz_1 + (-nz_2) = n(z_1 - z_2) = nz$  con  $z_1 - z_2 = z$  para algún  $z \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto,  $n\mathbb{Z}$  es grupo y  $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ . ■

**Teorema 3.** Sea  $G$  un grupo y  $F = \{H_\alpha | \alpha \in I\}$  una familia no vacía de subgrupos de  $G$ , entonces,  $\bigcup_{\alpha \in I} H_\alpha < G$ .

Demostración. Sean  $a, b \in \bigcup_{\alpha \in I} H_\alpha$ , entonces,  $a, b \in H_\alpha \forall \alpha \in I$  y como  $H_\alpha < G \forall \alpha \in I$ , entonces  $ab^{-1} \in H_\alpha \forall \alpha \in I$ , por lo que  $ab^{-1} \in \bigcup_{\alpha \in I} H_\alpha$  y así,  $\bigcup_{\alpha \in I} H_\alpha < G$ . ■

**Definición.** Sean  $M < G$  y  $N < G$ , se define el producto de  $M$  y  $N$  por  $MN = \{mn | m \in M \text{ y } n \in N\}$ .

**Teorema 4.** Sea  $G$  un grupo,  $x \in G$  y  $H = \langle x \rangle$ , entonces,  $H < G$ .

Demostración. Por la definición de subgrupo cíclico,  $H = \{x^z | z \in \mathbb{Z}\}$ . Sean  $h_1, h_2 \in H$ , entonces,  $h_1 = x^{z_1}$  y  $h_2 = x^{z_2}$  para algunos  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ . De tal manera que  $h_1 h_2^{-1} = x^{z_1} (x^{z_2})^{-1} = x^{z_1} x^{-z_2} = x^{z_1 - z_2} = x^z$ , con  $z = z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}$ . De tal manera que  $h_1 h_2^{-1} = x^{z_1} (x^{-z_2}) = x^{z_1 - z_2} = x^z$ , con  $z = z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}$ . Por lo que  $h_1 h_2^{-1} \in H$  y así  $H < G$ . ■

### Clases Laterales

**Definición.** Una relación  $\sim$  en un conjunto  $G$  se llama relación de equivalencia si satisface:

- (a)  $a \sim b$  (reflexividad)
- (b)  $a \sim b$  implica que  $b \sim a$  (simetría)
- (c)  $a \sim b, b \sim c$  implica que  $a \sim c$  (transitividad), para todo  $a, b, c \in G$ .

**Definición.** Sea  $H$  un subgrupo de un grupo  $G$ . Para cada  $a$  en  $G$ , la clase lateral; izquierda  $aH$  es el conjunto  $\{ah | h \in H\}$ . Análogamente  $Ha = \{ha | h \in H\}$  es la clase lateral derecha.

**Teorema 5.** Para cada  $a$  en  $G$ ,  $[a] = Ha$ .

Demostración. Como  $b \in [a]$  si y solo si,  $b = Ha$ , para algún  $h \in H$ ; si y solo si,  $ba^{-1} \in H$ ; si y solo si  $ba^{-1} = h$ , para algún  $h \in H$ ; si y solo si,  $b = ha$ , para algún  $h \in H$ ; si y solo si  $b \in Ha$ . ■

**Definición** (Subgrupo Normal). Un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  se llama subgrupo normal de  $G$  si  $aH = Ha$  para todo  $a$  en  $G$ . Se denota por  $H \triangleleft G$

**Teorema 6.** Prueba de Normalidad: las condiciones son equivalentes para un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$ .

1. El subgrupo  $N$  es normal en  $G$
2. Para todo  $g \in G, gNg^{-1} \subset N$
3. Para todo  $g \in G, gNg^{-1} = N$

Demostración. (1)  $\Rightarrow$  (2). Sea  $x \in gHg^{-1}$ , se afirma que  $x = ghg^{-1}$ . Entonces  $gh \in gH = Hg$  por (1), digamos  $gh = h_1g$ . Entonces  $x = ghg^{-1} = h_1gg^{-1} = h_1 \in H$ . Esto demuestra (2). (2)  $\Rightarrow$  (3). Si  $g \in G$  entonces  $gHg^{-1} \subseteq H$  por (2). Tomando  $g^{-1}$  en lugar de  $g$  en (2),  $g^{-1}Hg \subseteq H$ . Esto implica  $H \subseteq gHg^{-1}$ , entonces  $H = gHg^{-1}$ , demostrando (3).

(3)  $\Rightarrow$  (1). Dado  $g \in G$ , tenemos  $gHg^{-1} = H$  por (3). Si  $x \in gH$ , esto muestra que  $xg^{-1} \in Hg$ . Esto prueba que  $gH \subseteq Hg$ . Dado que  $g^{-1}Hg$  por (3) (con  $g^{-1}$  reemplazando  $g$ ), un argumento similar muestra que  $Hg \subseteq gH$ . Ahora sigue (1)

**Teorema 7.** Todo subgrupo de un grupo abeliano es normal

Demostración. Sea  $G$  un grupo abeliano y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Dado que  $ah = ha$  para todo  $a \in G$  y todo  $h \in H$  se tiene  $aH = Ha$ . Por lo tanto,  $H$  es un subgrupo normal de  $G$ . ■

**Definición.** Sea  $G$  un grupo,  $H \subset G$  y  $x, y \in G$ , se define el conjunto  $xHyH = \{xh_1yh_2 | h_1, h_2 \in H\} \subset G$ .

**Teorema 8.** Sea  $H < G, H \triangleleft G$  si y solo si  $\forall x, y \in G, xHyH = xyH$ .

Demostración. Si  $H \triangleleft G$  y sean  $x, y \in G$ , entonces,  $yH = Hy$ , así,  $xHyH = xyHH = xyH$ , por lo tanto,  $\forall x, y \in G, xHyH = xyH$ .

Ahora, si se supone que  $\forall x, y \in G, xHyH = xyH$ . Como  $H < G, e \in H$ .

Sean  $x \in G$  y  $h \in H$ , entonces,  $xhx^{-1} = xhx^{-1}e \in xHx^{-1}H = xx^{-1}H = eH = H$ , así,  $\forall x \in G$  y  $\forall h \in H, xhx^{-1} \in H$ . Por lo tanto  $H \triangleleft G$ . ■

**Definición.** Sean  $G$  un grupo y  $N \triangleleft G$ , se define  $\frac{G}{N} = \{Ng | g \in G\} = \{gN | g \in G\}$ .

**Proposición 3.** Sean  $G$  un grupo y  $N \triangleleft G$ , entonces,  $(G/N, *)$  es un grupo con la operación \* dada por  $xNyN = xyN$ .

Demostración. Se observa el cumplimiento de la cerradura en  $G/N$  y las 3 propiedades de grupo, sean  $x, y, z \in G$ :

- (1) Cerradura: Sean  $xN, yN \in G/N$ , entonces,  $xNyN = xyN$  y como  $xy \in G$ , entonces,  $xy \in G/N$ .
- (2) Asociatividad: Sean  $xN, yN, zN \in G/N$ , entonces,  $xN(yNzN) = xN(yzN) = x(yz)N = (xy)zN = xyNzN = (xNyN)zN$ .
- (3) Existe el neutro: Sean  $N = eN$ , entonces  $\forall x \in G, NxN = eNxN = exN = xN$ .
- (4) Existen los inversos:  $xNx^{-1}N = xx^{-1}N = eN = N$ , de manera que,  $\forall x \in G, (xN)^{-1} = x^{-1}N$ .

Por lo tanto,  $G/N$  es un grupo. A  $G/N$  se le conoce como grupo cociente de  $G$  módulo  $N$ . ■

**Definición.** Suma y producto módulo  $n$ .

Por el algoritmo de la división, si  $z \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $\forall n \in \mathbb{N} \exists! x \in \mathbb{Z}$  y  $r \in \mathbb{N}, r < n$ , tales que  $z = nx + r$ .

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ , por lo anterior,  $a + b = nx_1 + r_1$  y  $a \cdot b = nr_2 + r_2$ , así es posible definir:

$$(1) a + b \pmod{n} = r_1$$

$$(2) a \cdot b \pmod{n} = r_2.$$

Así que como  $r \in \mathbb{N}$  y  $r < n$ , entonces,  $r \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ .

**Definición.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , se define el conjunto  $\mathbb{Z}_n$  como sigue:

$$\mathbb{Z}_N = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{0 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n - 1) + n\mathbb{Z}\}$$

**Teorema 9** (de Lagrange). Si  $G$  es un grupo finito y  $H$  es un subgrupo de  $G$ , entonces  $|H|$  divide a  $|G|$ .

Demostración. Existe una clase finita de clases laterales izquierdas, y que  $G$  es finito, entonces

$$a_1H, a_2H, \dots, a_tH$$

Las distintas clases, con  $t = |G:H|$

Si se conoce que  $G$  es la unión ajena de sus clases laterales izquierdas,

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_tH$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |G| &= |(a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_tH)| = |a_1H| + |a_2H| + \dots + |a_tH| = |H| + |H| + \dots + |H| \\ &= t|H| = |G:H||H|. \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.4 Relaciones entre grupos

En los grupos se dan situaciones en donde el mismo grupo se describe con una terminología diferente. Cuando esto ocurre, se dice que hay un isomorfismo entre los grupos, por lo que se necesita conocer las siguientes propiedades para determinar si dos grupos definidos en diferentes términos o contextos son realmente iguales.

### 2.4.1 Homomorfismo e isomorfismo

**Definición.** Sean  $G, H$  dos grupos; entonces una aplicación  $\varphi: G \rightarrow G'$  es un homomorfismo si  $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$  para todo  $a, b \in G$ .

El producto  $ab$  está en  $G$ , mientras que  $\varphi(a) \cdot \varphi(b)$  está en  $G'$ . Si  $\varphi$  es inyectiva, por lo que se afirmará que  $\varphi$  es un monomorfismo; si es suryectiva,  $\varphi$  es un epimorfismo y si es biyectiva.

**Teorema 10.** Sea  $\varphi: G \rightarrow G'$  un homomorfismo y  $a$  un elemento de  $G$ . Entonces,

(1)  $\varphi$  lleva el elemento identidad de  $G$  al elemento identidad de  $G'$

(2)  $\varphi$  lleva el inverso de  $a$  al inverso de  $\varphi(a)$

Demostración. Sean  $e$  y  $e'$  el elemento identidad de  $G$  y  $G'$ , respectivamente. Note que  $\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e^2) = \varphi(e) = \varphi(e)e'$ ; luego, por la propiedad cancelativa,  $\varphi(e) = e'$ , lo que prueba (1).

De (1),  $\varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(e) = e'$ , lo que implica  $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$  y queda demostrado (2). ■

**Teorema 11.** Sea  $\varphi: G \rightarrow G'$  un homomorfismo y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Entonces,

(1)  $\varphi(H)$  es un subgrupo de  $G'$

(2) Si  $H'$  un subgrupo de  $G'$  entonces  $\varphi^{-1}(H')$  es un subgrupo de  $G$

Demostración. (1)  $\varphi(H)$  se define como  $\varphi(H) = \{\varphi(a) | a \in H\}$ .

El conjunto no es vacío, dado que  $\varphi(a)$  y  $\varphi(b)$  son elementos de  $\varphi(H)$  se tiene que  $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1})$  está en  $\varphi(H)$ , puesto que  $ab^{-1}$  está en  $H$ . Esto prueba que  $\varphi(H)$  es un subgrupo de  $G'$ .

(3)  $\varphi^{-1}(H')$  se define como  $\varphi^{-1}(H') = \{a \in G | \varphi(a) \in H'\}$ . Si  $e$  es el elemento identidad de  $G$ , entonces  $\varphi(e)$  es el elemento identidad de  $G'$ , por lo que  $\varphi(e)$  está en  $H'$ . Así,  $\varphi^{-1}(H')$  contiene a  $e$ , por lo que  $\varphi^{-1}(H') \neq \emptyset$ .

Sean  $a, b$  en  $\varphi^{-1}(H')$ . Entonces,  $\varphi(a), \varphi(b)$  y  $\varphi(b)^{-1}$  están en  $H'$ . Luego,

$$\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} \in H',$$

Lo cual implica que  $ab^{-1}$  está en  $\varphi^{-1}(H')$ . Esto prueba que  $\varphi^{-1}(H')$  es un subgrupo de  $G$ . ■

**Definición (Isomorfismo).** Sea  $G$  y  $G'$  dos grupos cualesquiera. Una biyección  $\varphi: G \rightarrow G'$  se dice un isomorfismo de grupos si  $\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g')$ ,  $\forall g, g' \in G$ . Si existe tal isomorfismo,  $G$  y  $G'$  son grupos isomorfos, lo cual se denota  $G \cong G'$ .

Para demostrar que dos grupos son isomorfos, primeramente, se debe definir una correspondencia  $\varphi: G \rightarrow G'$  y probar que está bien definida (es una función). Luego, probar que esta función es inyectiva y suryectiva y, finalmente, que la función es un homomorfismo.

**Teorema 12** (Clasificación de grupos cíclicos). Todo grupo infinito es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  y todo grupo ciclo finito es isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ .

Demostración. Sea  $G = \langle a \rangle$  un grupo cíclico. Si se presume, primero, que  $G$  es de orden infinito y se define  $\varphi(a^i) = i$  entonces  $i = j$  por definición de  $\varphi$ , lo que implica  $a^i = a^j$ . Y para la suryectividad, si  $i$  es un número entero entonces  $a^i$  es un elemento de  $G$  cuya imagen es  $\varphi(a^i) = i$ . Finalmente,  $\varphi$  es un homomorfismo, dado que

$$\varphi(a^i a^j) = \varphi(a^{i+j}) = i + j = \varphi(a^i) + \varphi(a^j).$$

Por lo tanto,  $G \cong \mathbb{Z}$ , si  $G$  es de grado infinito.

Si se supone ahora que  $G$  es de grado finito  $n$  y se define a  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_n$  por  $\varphi(a^i) = \bar{i}$ . Esta es claramente una función. Para la inyectividad, si  $\varphi(a^i) = \varphi(a^j)$  entonces  $\bar{i} = \bar{j}$  por definición de  $\varphi$ , lo que implica que  $n$  divide a  $i - j$ ; de la teoría de Grupos Cíclicos, se conoce que esto implica  $a^i = a^j$ . Para la suryectividad, dada la clase  $\bar{i}$  de  $\mathbb{Z}_n$ ,  $a^i$  es un elemento de  $G$  cuya imagen es  $\varphi(a^i a^j) = \varphi(a^{i+j}) = \overline{i+j} = \bar{i} + \bar{j} = \varphi(a^i) + \varphi(a^j)$ .

Por lo tanto,  $G \cong \mathbb{Z}_n$ , si  $G$  es de grado finito. ■

Está implícito en la definición que los grupos isomorfos tiene el mismo orden y que, adicionalmente tienen exactamente la misma tabla y se comportan del mismo modo y solo se diferencian porque se escriben con distintas letras y signos, pero en el fondo son lo mismo.

## 2.5 Grupos cíclicos

**Definición.** Sea  $(G, *)$  un grupo:

- a) Si existe  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subseteq G$ , un subconjunto finito de  $G$ , de modo que

$$\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle = G$$

Se dice que  $G$  está finitamente generado.

- b) Si existe  $g \in G$  de modo que  $\langle g \rangle = G$ , se dice que  $G$  es un grupo cíclico y que  $g$  es generador de  $G$ .

**Teorema 13.** Sea  $a$  un elemento de orden infinito en un grupo. Entonces  $a^k = a^m$  si y solo si  $k = m$ .

Demostración. Si  $a^k = a^m$ . Entonces

$$a^{k-m} = a^k a^{-m} = a^m a^{-m} = e.$$

Luego, si  $k \neq m$  entonces  $a$  tendría orden infinito. Por lo tanto,  $k = m$ .

La reciproca es trivial. ■

**Teorema 14.** Sea  $a$  un elemento de orden  $n$  en un grupo. Entonces,  $a^k = a^m$  si y solo si  $n$  divide a  $k - m$ . Además,  $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ .

Demostración. Si  $a^k = a^m$ ,  $k \geq m$ . Entonces,  $a^{k-m} = e$ . Por el algoritmo de la división, es posible escribir  $k - m = nq + r$ , donde  $r = 0$  o  $0 < r < n$ .

Luego,  $e = a^{k-m} = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = ea^r = a^r$ ;

Lo que implica que  $0 < r < n$  contradice la minimalidad de  $n$ . Por lo tanto,  $r = 0$  y se concluye que  $n$  divide a  $k - m$ .

Recíprocamente, si  $n$  divide a  $k - m$  existe un entero  $q$  tal que  $k - m = nq$ ; es decir,  $k = m + nq$ . Por lo tanto,

$$a^k = a^{m+nq} = a^m(a^n)^q = a^m e = a^m.$$

Finalmente, para probar que  $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ .

Es claro que  $\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \subseteq \langle a \rangle$ . Ahora, sea  $a^k$  un elemento de  $\langle a \rangle$ . Por el algoritmo de la división,

$$k = nq + r, \text{ donde } r = 0 \text{ o } 0 < r < n.$$

Entonces,

$$a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = ea^r = a^r \in \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\},$$

Lo que implica que  $\langle a \rangle \subseteq \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ .

Así,  $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ . ■

**Corolario 1.** Para cualquier elemento  $a$  en un grupo,  $|a| = |\langle a \rangle|$ .

Demostración. Si  $a$  es de orden infinito y la igualdad es cierta. Si  $a$  es de orden  $n$ , entonces  $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ , lo que implica  $|a| = n = |\langle a \rangle|$ . ■

**Corolario 2.** Sea  $G$  un grupo y  $a$  un elemento de  $G$ . Entonces,  $a^k = e$  si y solo si  $n$  divide a  $k$ .

Demostración. Si se toma  $m = 0$  en el teorema 12. Entonces,  $a^k = a^0$  sí y solo si  $n$  divide a  $k - 0$ ; es decir,  $a^k = e$  si y solo si  $n$  divide a  $k$ . ■

**Teorema 15.** Sea  $a$  un elemento de orden  $n$  en un grupo  $G$  en grupo y  $k$  un entero positivo.

Entonces  $\langle a^k \rangle = \langle a^{\text{mcd}(n,k)} \rangle$  y  $|\langle a^k \rangle| = \frac{n}{\text{mcd}(n,k)}$ .

Demostración. Sea  $d = \text{mcd}(n, k)$ . Entonces  $k = dq$ , para algún entero  $q$ . Luego,  $a^k = (a^d)^q$ , lo que significa, por clausura, que  $\langle a^k \rangle \subseteq \langle a^d \rangle$ .

Por otro lado, de la identidad de Bézout se tiene que

$$d = nx + ky,$$

De modo que

$$a^d = a^{nx+ky} = (a^n)^x (a^k)^y = e(a^k)^y = (a^k)^y \in \langle a^k \rangle.$$

Por clausura,  $\langle a^d \rangle \subseteq \langle a^k \rangle$ . Así,  $\langle a^k \rangle = \langle a^d \rangle$ . Para la segunda parte del teorema, mostrando que  $|\langle a^d \rangle| = n/d$ . Se tiene,  $(a^d)^{n/d} = a^n = e$ , lo que implica, por el corolario 2, que  $|\langle a^d \rangle|$  divide  $n/d$ ; de donde,  $|\langle a^d \rangle| \leq n/d$ .

Por otro lado, si  $k$  es un entero positivo menor que  $n/d$ , entonces,  $dk < n$ . Luego, por definición de  $|a|$  se tiene  $a^{dk} \neq e$ ; es decir,  $(a^d)^k \neq e$ . Esto significa que  $\frac{n}{d}$  es el menor entero positivo  $m$  para el cual  $(a^d)^m = e$ . Por definición de orden de un elemento, se concluye que  $|\langle a^d \rangle| = n/d$ .

Por lo tanto,  $|\langle a^k \rangle| = |\langle a^d \rangle| = |\langle a^{\text{mcd}(n,k)} \rangle| = |\langle a^{\text{mcd}(n,k)} \rangle| = \frac{n}{\text{mcd}(n,k)}$ . ■

### Propiedades de los grupos cíclicos.

**Teorema 16.** Todo grupo cíclico es abeliano

Demostración. Sea  $G$  un grupo cíclico y sea  $a \in G$  un generador par  $G$ . Si  $g$  y  $h$  están en  $G$ , entonces pueden ser escritos como potencias de  $a$ , es decir  $g = a^r$  y  $h = a^s$ . Como

$$gh = a^r a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s a^r = hg \text{ luego, } G \text{ es abeliano. } \blacksquare$$

**Teorema 17** (Generadores de grupos cíclicos). Sea  $G = \langle a \rangle$  es un grupo cíclico, donde  $|a| = n$ . Entonces  $G = \langle a^k \rangle$  si y solo si  $\text{mcd}(k, n) = 1$ .

Demostración. Si  $G = \langle a^k \rangle$  entonces  $a = (a^k)^m$ , para algún entero  $m$ . Así,  $a^{1-km} = e$ , de modo que  $n$  divide a  $1 - km$  por el corolario 2. Entonces  $1 - km = nq$  para algún entero  $q$ ; esto es,  $1 = km + nq$ , lo cual implica, por la identidad de Bézout, que  $\text{mcd}(k, n) = 1$ .

Recíprocamente, si  $\text{mcd}(k, n) = 1$ , por el teorema 13,

$$\langle a^k \rangle = \langle a^{\text{mcd}(k, n)} \rangle = \langle a \rangle = G. \blacksquare$$

**Corolario 3** (Generadores de  $\mathbb{Z}_n$ ). Un entero  $k$  es un generador de  $(\mathbb{Z}_n, +)$  si y solo si  $\text{mcd}(k, n) = 1$

### Subgrupos de un grupo cíclico

**Teorema 18.** Todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico

Demostración. Si  $G = \langle g \rangle = \{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$  es cíclico y sea  $H$  un subgrupo de  $G$ . Si  $H = \{e\}$ , entonces  $H = \langle e \rangle$  es cíclico. De lo contrario, sea  $g^k \in H, k \neq 0$ . Como  $H$  es un subgrupo,  $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$ , por lo que es posible suponer que  $k > 0$ .

Por lo tanto, sea  $m$  el entero positivo más pequeño tal que  $g^m \in H$ . Por clausura,  $\langle g^m \rangle \subseteq H$ . Se prueba que  $H = \langle g^m \rangle$ .

Sea  $a^k \in H$ . Por el algoritmo de la división se tiene  $k = qm + r$ , donde,  $0 \leq r < m$ .

Si  $0 \leq r < m$  entonces,  $g^k = g^{mq+r} = g^{mq}g^r$ , de modo que  $g^r = g^k g^{-mq} = g^k (g^m)^{-q} \in H$ , lo que contradice la elección de  $m$  con el menor entero positivo con esta propiedad. Por lo tanto,  $r = 0$  y  $g^k = (g^m)^q \in \langle g^m \rangle$ ; es decir,  $H \subseteq \langle g^m \rangle$ . Esto prueba la igualdad  $H = \langle g^m \rangle$ . ■

**Teorema 19** (Teorema fundamental). Sea  $G = \langle a \rangle$  un grupo cíclico de orden  $n$ .

(1) Si  $H$  es un subgrupo de  $G$ , entonces  $H = \langle a^d \rangle$  para algún divisor  $d$  de  $n$

(2) Para cada divisor positivo  $k$  de  $n$ ,  $G$  tiene exactamente un subgrupo de orden  $k$ ; a saber,  $\langle a^{n/k} \rangle$ .

Demostración. Si  $H$  es un subgrupo de  $G$ . Por el teorema anterior, se sabe que  $H = \langle a^m \rangle$  para algún entero  $m$ . Del teorema 13,  $\langle a^m \rangle = \langle a^{mcd(m,n)} \rangle$ , donde  $d = mcd(m, n)$  es claramente un divisor de  $n$ .

Para 2), sea  $k$  un divisor positivo de  $n$ . Por el teorema 13,  $\langle a^{n/k} \rangle$  tiene orden  $\frac{n}{mcd(n, \frac{n}{k})}$ . Como  $mcd\left(n, \frac{n}{k}\right) = n/k$ , por lo que el orden de  $\langle a^{n/k} \rangle$  es  $\frac{n}{mcd(n, \frac{n}{k})} = k$ . Así,  $G$  tiene un subgrupo orden  $k$ ; a saber,  $\langle a^{n/k} \rangle$ .

Ahora se muestra que este es el único subgrupo de orden  $k$ :

Sea  $H$  un subgrupo de  $G$  de orden  $k$ . Por 1),  $H = \langle a^d \rangle$ , donde  $d$  es un divisor de  $n$ . Por el teorema 13, el orden de  $a^d$  es  $\frac{n}{mcd(n,d)}$  y como  $d$  divide a  $n$  se tiene  $mcd(d, n) = d$ , por lo que el orden de  $a^d$  es  $n/d$ ; así,  $k = |H| = |a^d| = n/d$ , lo que implica que  $H = \langle a^d \rangle = \langle a^{n/k} \rangle$ . ■

## 2.6 Grupo simétrico

**Definición.** Dado un conjunto  $X$ , definido por  $S_X$  el grupo de biyecciones de  $X$  en  $X$  con la composición. Si  $n \geq 1$  es un número natural,  $S_n$  denota el grupo de biyecciones del conjunto  $\{1, \dots, n\}$  sobre sí mismo. Las biyecciones que son elementos de  $S_n$  se denominarán permutaciones.

**Teorema 20.** El orden de  $S_n$  es  $n!$

Demostración. Para construir una permutación se debe elegir de  $X_n$ , los números  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$  de modo que todos sean distintos. Por lo tanto, existen  $n$  opciones para la elección de  $\sigma(1)$  y una vez que  $\sigma(1)$  ha sido determinado, existen  $n - 1$  posibilidades para

$\sigma(2)$ ; después de elegir  $\sigma(2)$ , existen  $n - 2$  posibilidades para  $\sigma(3)$ . Continuando de esta manera, se observa que  $S_n$  tiene  $n(n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$  elementos. ■

**Definición** (Ciclos disjuntos). Dos o más ciclos son disjuntos si no tienen enteros en común.

**Teorema 21.** Si  $\sigma$  y  $\tau$  son ciclos disjuntos, entonces  $\sigma\tau = \tau\sigma$ .

Demostración. Sean  $\sigma = (i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_m)$  y  $\tau = (j_1 \ j_2 \ \cdots \ j_k)$ ; se debe probar que  $\sigma\tau(i) = \tau\sigma(i)$ , para todo  $i \in X_n$ . Sean pues,  $i \in X_n$ . Hay tres casos a considerar:

Caso 1.  $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ . Entonces, por definición de ciclos, también  $\sigma(i) \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ , de modo que ni  $i$  ni  $\sigma(i)$  están en  $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ ; es decir, ambos quedan fijos por  $\tau$ . Así,

$$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(i) = \tau(\sigma(i)) = \tau\sigma(i).$$

Caso 2.  $i \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ . Este caso es análogo al caso 1.

Caso 3.  $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  e  $i \notin \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ . Entonces tanto  $\sigma$  como  $\tau$  fijan a  $i$ . Por lo tanto,  $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(i) = i = \tau(i) = \tau(\sigma(i)) = \tau\sigma(i)$ .

Esto completa la prueba. ■

**Teorema 22.** Toda permutación  $\alpha \in S_n$  es un ciclo o un producto de ciclos disjuntos.

Demostración. Por inducción sobre  $k$  de puntos movidos por  $\alpha$ . El paso base  $k = 0$  es cierto, porque ahora  $\alpha$  es la identidad, que es un 1-ciclo.

Si  $k > 0$ , sea  $i_1$  un punto movido por  $\alpha$ . Definir  $i_2 = \alpha(i_1), i_3 = \alpha(i_2), \dots, i_{r+1} = \alpha(i_r)$ , donde  $r$  es el entero más pequeño el cual  $i_{r+1} \in \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ . Se dice, entonces que  $\alpha(i_r) = i_1$  de lo contrario  $\alpha(i_r) = i_j$  para alguna  $j \geq 2$ ; pero  $\alpha(i_{j-1}) = i_j$ , y esto contradice la hipótesis de que  $\alpha$  es una inyección. Sea  $\sigma$  con  $r$ -ciclos  $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ . Si  $r = n$ , entonces  $\alpha = \sigma$ . Si  $r < n$ , entonces  $\sigma$  fija cada punto en  $Y$ , donde  $Y$  consta de los  $n - r$  puntos restantes, mientras  $\alpha(Y) = Y$ . Defina  $\alpha'$  como la permutación  $\alpha'(i) = \alpha(i)$  para  $i \in Y$  y que arregla todo  $i \notin Y$ , y tenga en cuenta que  $\alpha = \sigma\alpha'$ .

La hipótesis inductiva da  $\alpha' = \beta_1 \dots \beta_t$ , donde  $\beta_1 \dots \beta_t$  son ciclos disjuntos. Dados que  $\sigma$  y  $\alpha'$  son disjuntos,  $\alpha = \alpha\beta_1 \dots \beta_t$  es un producto de ciclos disjuntos.

**Teorema 23.** Toda permutación en  $S_n$ ,  $n > 1$ , es el producto de transposiciones.

Demostración. Sea  $\sigma \in S_n$ . Si  $\sigma = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_m)$ , se puede escribir

$$\tau = (i_1 \ i_2)(i_2 \ i_3) \dots (i_{m-1} \ i_m).$$

Note que  $\sigma$  y  $\tau$  fijan los mismos elementos. Y para los  $i_k$ , el efecto de  $\tau$  es mover  $i_k$  a  $i_{k+1}$ , cuando  $k < m$  y pasa  $k = m$ ,  $i_m \rightarrow i_{m-1} \rightarrow i_{m-2} \rightarrow \dots \rightarrow i_2 \rightarrow i_1$ . Este es el mismo efecto de  $\sigma$  sobre los  $i_k$ . Por lo tanto,  $\sigma = \tau$  y de este modo, se ha factorizado un ciclo en producto de transposiciones.

Si  $\sigma$  no es un ciclo, entonces  $\sigma$  es el producto de ciclos disjuntos, cada uno de los cuales se puede escribir como producto de transposiciones, por lo probado en el párrafo anterior. En cualquier caso,  $\sigma$  es el producto de transposiciones. ■

**Teorema 24** (Teorema de paridad). Si  $\sigma = \beta_1\beta_2 \dots \beta_r$  y  $\sigma = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_s$ , donde  $\beta$ 's y  $\gamma$ 's son transposiciones, entonces  $r$  y  $s$  son ambas pares o ambas impares.

Demostración. Obsérvese que  $\beta_1\beta_2 \dots \beta_r = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_s$  implica

$$\varepsilon = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_s\beta_r^{-1} \dots \beta_2^{-1}\beta_1^{-1} = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_s\beta_r \dots \beta_2\beta_1$$

Puesto que una transposición es su propia inversa. Así, por el lema,  $r + s$  es par. Se tiene entonces que  $r$  y  $s$  son ambos pares o ambos impares. ■

**Definición.** Una permutación  $\sigma \in S_n$  es una permutación impar si  $\sigma$  es el producto de un número impar de transposiciones, y es una permutación par si  $\sigma$  es el producto de un número par de transposiciones.

**Teorema 25.** Sea  $H$  un subgrupo de  $S_n$ . Entonces se verifica exactamente uno de los siguientes enunciados:

- (1)  $H$  solo contiene permutaciones pares
- (2)  $H$  contiene tantas permutaciones pares como impares.

Demostración. Si todos los elementos de  $H$  son pares, se obtiene (1). Así, supongamos que  $H$  contiene permutaciones impares. Entonces también contiene permutaciones pares, debido a que el producto de dos impares es par. Sean  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$  las permutaciones pares de  $H$  y  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s\}$  las permutaciones impares de  $H$ . Si se prueba que  $s = r$ .

En primer lugar, el conjunto  $\{\sigma_1\tau_1, \sigma_2\tau_2, \dots, \sigma_r\tau_r\}$  está compuesto de permutaciones impares de  $H$ . Además, todas son distintas, dado que  $\sigma_i\tau_i = \sigma_j\tau_j$  sí y solo si  $\sigma_i = \sigma_j$ . Por lo tanto,  $r \leq s$ .

Por otro lado, el conjunto  $\{\tau_1\tau_2, \tau_1\tau_2, \dots, \tau_1\tau_s\}$  solo contiene permutaciones pares de  $H$ , todas distintas (por el mismo razonamiento del párrafo anterior). Por lo tanto,  $s \leq r$ . ■

**Teorema 26** (de Cayley). Todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones

Demostración. Sea  $G$  un grupo, entonces un grupo de permutaciones  $\bar{G}$  que sea isomorfo a  $G$ .

Para cualquier  $g \in G$ , se define una función  $\lambda_g: G \rightarrow G$  como  $\lambda_g(a) = ga$ . Así, es posible afirmar que  $\lambda_g$  es una permutación de  $G$ . Para demostrar que  $\lambda_g$  es 1-1, si  $\lambda_g(a) = \lambda_g(b)$ .

Entonces  $ga = \lambda_g(a) = \lambda_g(b) = gb$ .

Luego,  $a = b$ . Para demostrar que  $\lambda_g$  es sobre, se debe demostrar que para cada  $a \in G$ , existe  $b$  tal que  $\lambda_g(b) = a$ . Sea  $b = g^{-1}a$ .

Así se está preparado para definir grupo  $\bar{G}$ . Sea

$$\bar{G} = \{\lambda_g: g \in G\}$$

Se debe mostrar que  $\bar{G}$  es un grupo con la operación de composición de funciones y encontrar un isomorfismo entre  $G$  y  $\bar{G}$ . Se tiene la clausura bajo composición de funciones pues

$$(\lambda_g \circ \lambda_h)(a) = \lambda_g(ha) = \lambda_{gh}(a)$$

Además,

$$\lambda_e(a) = ea = a$$

Y

$$(\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g)(a) = \lambda_{g^{-1}}(ga) = g^{-1}ga = a = \lambda_e(a).$$

Se puede definir un isomorfismo de  $G$  en  $\bar{G}$  como  $\phi: g \mapsto \lambda_g$ . La operación de grupo se preserva pues

$$\phi(gh) = \lambda_{gh} = \lambda_g \lambda_h = \phi(g)\phi(h)$$

Es 1-1, pues si  $\phi(g)(a) = \phi(h)(a)$ , entonces

$$ga = \lambda_g a = \lambda_h a = ha$$

Luego,  $g = h$ . Que  $\phi$  sea sobre sigue del hecho de que  $\phi(g) = \lambda_g$  para cualquier  $\lambda_g \in \bar{G}$ . ■

El teorema de Cayley tiene dos razones importantes: la primera permite representar un grupo abstracto de manera concreta y la segunda es que muestra que el conjunto actual de axiomas que se adoptaron para un grupo es la abstracción correcta de su antecesor mucho más antiguo: un grupo de permutaciones. Es decir que el teorema de Cayley afirma que los grupos abstractos no son diferentes de los grupos de permutaciones.

### 2.6.1 Grupos alternantes

**Definición** (Grupo alternado de grado  $n$ ). El grupo de permutaciones pares de  $n$  símbolos se denota  $A_n$  y es llamado grupo alternante de grado  $n$ .

**Teorema 27.** Para  $n > 1$ ,  $A_n$  es un subgrupo normal de orden  $\frac{n!}{2}$ .

Demostración. Sea  $O_n$  el conjunto de permutaciones impares en  $S_n$ . Entonces  $S_n = O_n \cup A_n$  y el teorema de paridad garantiza que  $O_n \cap A_n = \emptyset$ .

Probemos que  $|A_n| = |O_n|$  exhibiendo una biyección  $f: A_n \rightarrow O_n$ . Sea  $\beta = (1 \ 2)$  y se define  $f$  por  $f(\sigma) = \beta\sigma$ , para todo  $\sigma \in A_n$ .

El hecho de que  $\beta^2 = \varepsilon$  implica que  $f$  es una biyección. En efecto,

- Si  $\beta\sigma = \beta\tau$  entonces  $\sigma = \beta^{-1}\beta\tau$ , así que  $f$  es inyectiva.
- Si  $\tau \in O_n$  entonces  $\sigma = \beta\tau \in A_n$  y

$$f(\sigma) = f(\beta\tau) = \beta\beta\tau = \beta^2\tau = \tau,$$

Así que  $f$  es sobreyectiva.

Por lo tanto,  $|A_n| = |O_n|$  y como  $|S_n| = n!/2$  entonces  $|A_n| = \frac{n!}{2}$ . ■

**Teorema 28.** El conjunto de las permutaciones pares es  $A_n$  es un subgrupo de  $S_n$ .

Demostración. Usando el teorema de caracterización de subgrupos (modulo 1).

(1) Elemento identidad: Como  $\varepsilon = (1 \ 2)(2 \ 1)$ , se tiene que  $\varepsilon$  es una permutación par.

(2) Clausura: Sean  $\sigma$  y  $\tau$  permutaciones pares y se escribe cada una como producto de transposiciones  $\sigma = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_r$  y  $\tau = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_s$ , donde  $r$  y  $s$  son pares. Entonces,

$$\sigma\tau = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_r\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_s$$

Es un producto de  $r + s$  transposiciones. Así,  $\sigma\tau$  es una permutación par.

(3) Inverso: Sea  $\sigma = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_r$  una permutación par y se escribe  $\mu = \beta_r \cdots \beta_2\beta_1$ . Como

$$\beta_i^2 = \varepsilon \text{ para cada } i, \text{ entonces } \sigma\mu = \varepsilon. \text{ Luego, } \sigma^{-1} = \sigma^{-1}\varepsilon = \sigma^{-1}\sigma\mu = \varepsilon\mu = \mu.$$

Además,  $\mu$  es una permutación par, dado que  $r$  es par. Esto significa que  $\sigma^{-1}$  es una permutación par, probando así el teorema. ■

**Lema 1.** El grupo alternante  $A_n$  es generado por 3-ciclos para  $n \geq 3$ .

Demostración. Sea cualquier par de producto de 3-ciclos, como  $(ab) = (ba)$ , todo par de transposiciones debe ser uno de los siguientes:

$$(ab)(ba) = id$$

$$(ab)(cd) = (acb)(acd)$$

$$(ad)(ac) = (acd). \blacksquare$$

## 2.7 Grupos Diedral

Son grupos de simetría que contienen  $n$  rotaciones alrededor de un punto fijo y  $n$  reflexiones en  $n$  lineales igualmente inclinadas unas de otras que pasan por dicho punto fijo.

**Definición.** Un polígono regular de  $n$  lados es un conjunto de  $n$  puntos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , llamados vértices, tales que  $|\gamma_i - \gamma_{i+1}|_p = |\gamma_{i+1} - \gamma_{i+2}|_p$  para todo  $i, 1 \leq i \leq n$ , entendiendo que  $\gamma_{n+1} = \gamma_1$ .

**Definición.** El conjunto de simetrías de un polígono regular de  $n$  lados es un grupo con la operación de composición

$$x * y = y \text{ seguido de } x.$$

Este grupo se denota por  $D_n$  y se llama grupo diedral. El orden de  $D_n$  es  $2n$ . Si  $n = 1$  ( $D_1$  de orden 2), se tiene el grupo diedral que contiene la identidad y una reflexión en una línea. Si  $n = 2$  ( $D_2$  de orden 4), se tiene el grupo diedral que contiene la identidad, dos reflexiones perpendiculares y una rotación de ángulo  $\pi$ , alrededor del punto fijo en el que líneas de reflexión se cortan. Cuando  $n$  es mayor o igual a 3,  $D_n$  es el grupo de simetría de un polígono regular de  $n$  lados. Finalmente, si  $n = \infty$ ,  $D_\infty$  contiene todas las rotaciones alrededor de un punto fijo y todas las reflexiones de líneas que pasen por dicho punto, es el grupo de simetría de un disco circular.

**Teorema 29.** Si  $n \geq 2$ , el grupo diedral  $D_n$  es el grupo de orden  $2n$  presentado de la siguiente manera

$$D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\},$$

Donde  $\sigma$  es un elemento de orden  $n$ ,  $\tau$  es un elemento de orden 2 y  $\sigma\tau\sigma = \tau$ . Esto se denota como  $D_n = \langle \sigma, \tau \mid |\sigma| = n, |\tau| = 2, \sigma\tau\sigma = \tau \rangle$ .

**Teorema 30.** Las simetrías de una figura con  $n$  vértices son un subgrupo de  $S_n$ .

Demostración. La permutación de la identidad claramente es una simetría. Si  $\sigma$  y  $\tau$  son simetrías, entonces para los vértices  $k$  y  $m$  se tiene

$$d[(\rho\tau)k, (\sigma\tau)m] = d[\sigma(\tau k), \sigma(\tau m)] = d(\tau k, \tau m) = d(k, m)$$

Por lo tanto  $\sigma\tau$  es una simetría. Finalmente,  $\sigma^{-1}k = k_1$  y  $\sigma^{-1}m = m_1$ . Entonces  $k = \sigma k_1$  y  $m = \sigma m_1$  entonces, como  $\sigma$  es una simetría,

$$d[(\sigma^{-1}k, \sigma^{-1}m)] = d(k_1, m_1) = d(\sigma k_1, \sigma m_1) = d(k, m)$$

Esto muestra que  $\sigma^{-1}$  es una simetría y así se completa la demostración. ■

**Teorema 31.** Cualquier grupo generado por un par de elementos de orden 2 es diédrico.

Demostración. Sea  $G$  un grupo generado por un par de elementos distintos de orden 2, tales como,  $a$  y  $b$ . Entonces, si se considera el orden de  $ab$ . Si  $|ab| = \infty$ ,  $G$  es infinito y satisface las relaciones de  $D_\infty$ . Por el teorema de Dyck,  $G$  es isomorfo a algún de factores de  $D_\infty$ , es decir,  $D_\infty/H$ . Si  $h \in H$  y  $h \neq e$ . Dado que cada elemento de  $D_\infty$  tiene una de las formas  $(ab)^i, (ba)^i, (ab)^i a$ , o  $(ba)^i b$ , mostrare que  $D_\infty/H$  satisface las relaciones para  $D_i$ . Como  $(ab)^i$  es  $H$ , se tiene

$$H = (ab)^i H = (abH)^i,$$

De modo que  $(abH)^{-1} = ((abH)^{i-1})^{-1}$ . Pero

$$(ab)^{-1}H = b^{-1}a^{-1}H = baH$$

Y se sigue que

$$aHabHaH = a^2HbHaH = eHbaH = baH = (abH)^{-1}.$$

De esa forma

$$\frac{D_\infty}{H} = \langle aH, bH \rangle = \langle aH, abH \rangle$$

Y  $D_\infty/H$  satisface las relaciones definatorias para  $D_i$ . En particular,  $G$  es finito una imposibilidad.

Si  $h = (ab)^i a$ , entonces

$$H = (ab)^i aH = (ab)^i HaH,$$

Y, por tanto

$$(abH)^i = (ab)^i H = (aH)^{-1} = a^{-1}H = aH$$

Resulta que

$$\langle aH, bH \rangle = \langle aH, abH \rangle \subseteq \langle abH \rangle.$$

Sin embargo,  $(abH)^{2i} = (aH)^2 = a^2H = H$ ,

Por lo que  $D_\infty/H$  es de nuevo finito. Esta contradicción obliga a  $H = \{e\}$  y  $G$  a ser isomorfo a  $D_\infty$ .

Finalmente, si  $\langle ab \rangle = n$ . Como  $G = \langle a, b \rangle = \langle a, ab \rangle$ , es posible mostrar que  $G$  es isomorfo a  $D_n$  demostrando que  $b(ab)b = (ab)^{-1}$ , que es lo mismo que  $ba = (ab)^{-1}$ . Pero  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$ , dado que  $a$  y  $b$  tienen orden 2. ■

## 2.8 Grupo de movimiento

**Definición.** Una isometría del espacio  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  es una función sobre  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^n$  que conserva la distancia.

**Definición** (Grupo de simetría de una figura en  $\mathbb{R}^n$ ). Sea  $F$  un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^n$ ; así el grupo de simetría de  $F$  en  $\mathbb{R}^n$  es el conjunto de todas las isometrías de  $\mathbb{R}^n$  que llevan sobre este.

La operación de grupo es la composición de funciones.

## Clasificación de grupos de simetrías de planos finitos

**Teorema 32.** Los únicos grupos de simetría plana son  $C_n$  y  $D_n$

Demostración. Sea  $G$  un grupo de simetría de plano finito de alguna figura, de esta manera  $G$  no puede contener una traslación o un deslizamiento-reflexión, dado que en ambos casos  $G$  sería infinito. Como la composición de dos reflejos conserva la orientación, es conocido que tal composición es una traslación o rotación. Cuando los dos reflejos tienen ejes de reflexión paralelos, no hay punto fijo, por lo que la composición es una traslación. Así, cada dos reflexiones en  $G$  tienen ejes de reflexión que se cortan en algún punto; se dice que todas las reflexiones se cortan el mismo punto.

Si  $F$  y  $F'$  son dos reflejos distintos en  $G$ . Entonces, como  $FF'$  conserva la orientación,  $FF'$  es una rotación; puesto que un grupo finito de rotaciones debe tener un centro común,  $P$ . Esto significa que dos reflexiones cualesquiera deber intersectarse en un punto  $P$ . Así, se logra demostrar que todos los elementos de  $G$  tienen el punto fijo común  $P$ .

Por conveniencia, se denota una rotación alrededor de  $P$  de  $\sigma$  grado por  $R_\sigma$ . Ahora, entre todas las rotaciones en  $G$ , sea  $\beta$  el ángulo de rotación positivo más pequeño. Es posible afirmar que cada rotación en  $G$  es una potencia de  $R_\beta$ . Supóngase que  $R_\sigma$  esta en  $G$ . Se puede suponer que  $0^\circ < \sigma \leq 360^\circ$ . Entonces  $\beta \leq \sigma$  y existe algún entero  $t$  tal que  $t\beta \leq \sigma < (t+1)\beta$ . Entonces  $R_{\sigma-t\beta} = R_\sigma(R_\beta)^{-t}$  esta en  $G$  y  $0 \leq \sigma - t\beta < \beta$ . Como  $\beta$  representa el ángulo de rotación positivo más pequeño entre los elementos de  $G$ , se debe tener  $\sigma - t\beta = 0$ , y, por lo tanto,  $R_\sigma = (R_\beta)^t$ .

Por conveniencia, se afirma que  $|R_\beta| = n$ . Ahora, si  $G$  no tiene reflejos, probando que  $G = \langle R_\beta \rangle \approx Z_n$ . Si  $G$  tiene al menos un reflejo, se afirma  $f$ , entonces  $f, f(R_\beta)^2, \dots, f(R_\beta)^{n-1}$  son

reflejos. Además, este es el conjunto completo de reflexiones de  $G$ . Porque si  $g$  es cualquier reflexión en  $G$ , entonces  $fg = (R_\beta)^k$  para alguna  $k$ . Así  $g = f^{-1}(R_\beta)^k = f(R_\beta)^k$ . Entonces

$$G = \{R_0, R_\beta, (R_\beta)^2, \dots, (R_\beta)^{n-1}, f, fR_\beta, f(R_\beta)^2, \dots, f(R_\beta)^{n-1}\},$$

Y  $G$  es generado por el par de reflexiones  $f$  y  $fR_\beta$ . Por lo tanto, según la caracterización propuesta en el presente trabajo sobre los grupos diédricos,  $G$  es un grupo diédrico  $D_n$ . ■

## 2.9 Grupos de simetría infinita de una figura

A continuación, se analizarán los grupos de simetría infinita que surgen de diseños periódicos en el plano. Hay dos tipos de tales grupos: los grupos de frisos que son los grupos de patrones de simetría plana cuyo subgrupo de traslaciones son isomorfos a  $\mathbb{Z}$ . Este tipo de diseños se utilizan para tiras decorativas y para patrones en joyería. Hay exactamente siete tipos de patrones de frisos y luego están los grupos de frisos discretos. El segundo grupo son los finitos de simetrías descriptos anteriormente y dejan un punto fijo, sin embargo, los de tipos infinitos no dejan punto fijo, sino una recta invariante.

### 2.9.1 Grupos de frisos

**Definición** (friso). Un friso es un diseño cuyo grupo de simetrías tiene una traslación  $T_{\vec{v}}$  con la misma dirección. Además, todas las traslaciones del grupo de simetría son potencias de la traslación  $T_{\vec{v}}$  o de su inverso  $T_{-\vec{v}}$ . Dicho de otro modo, un friso es una figura (infinita) de modo que las traslaciones del grupo de simetrías son  $T_{m\vec{v}}$  donde  $m \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

Los grupos de frisos discretos son los grupos de patrones de simetría plana cuyos subgrupos de traslaciones son isomorfos a  $\mathbb{Z}$ .

**Teorema 33.** Existen 7 grupos de simetrías de frisos

Demostración. Si  $G$  es un grupo discreto de isometrías del plano que no deja punto fijo, pero deja una recta invariante, los elementos de  $G$  solo pueden ser traslaciones en una dirección, la cual puede ser horizontal con una rotación de  $180^\circ$ , reflexiones en recta horizontales o verticales y pasos.

- I. Las traslaciones en  $G$  están generadas por la traslación más corta, que se nombrarán  $T$ .
- II. Si  $G$  tiene pasos, y  $P$  es el paso más corto, entonces  $P^2$  es una traslación, así que  $P^2 = T^n$  para alguna  $n$  en  $\mathbb{Z}$ . Si  $n \neq \pm 1$  entonces  $T$  sería más corta que  $P$  así que  $T^{\pm 1}P$  sería un paso más corto que  $P$ . Así que  $P^2 = T^{\pm 1}$ , y todas las traslaciones y paso están generado por el paso más corto.
- III. Si  $G$  tiene una rotación  $R$  con centro en el punto  $x$ , entonces  $TRT^{-1}$  es una rotación con centro en el punto  $T_x$  y  $TR$  es una rotación con centro en el punto medio de  $x$  y  $T_x$ . Como la composición de dos rotaciones es una traslación por el doble de la distancia entre sus centros, no puede haber rotaciones más cercanas que  $R$  y  $TR$ .
- IV. Si  $G$  tiene una reflexión  $R$  es una recta vertical  $r$ , entonces  $TRT^{-1}$  es una reflexión en la recta vertical  $T_r$  y  $TR$  es una reflexión en la mediatriz de  $r$  y  $Tr$ . Debido a que la composición de dos traslaciones es recta vertical es una traslación horizontal por el doble de la distancia entre esas rectas, no puede haber reflexiones más cercanas que  $R$  y  $TR$ .
- V. Si  $G$  contiene una rotación  $R$  es un punto  $x$  y una reflexión  $K$  es una recta vertical  $k$  que no pasa por  $x$ , entonces  $KRk^{-1}$  es una rotación,  $RKR^{-1}$  es una reflexión

en una recta vertical y  $KR$  es un paso (por el doble de la distancia entre  $x$  y  $k$ ).

Así que  $R$  y  $K$  son la rotación y la reflexión más cercanas.

- VI. Si  $G$  contiene a la reflexión  $V$  es la recta horizontal, entonces  $VT$  es un paso, si hay rotación  $R$  entonces  $VR$  es una reflexión en una recta vertical (que pasa por el centro de  $R$ ), y si hay una reflexión  $K$  en una recta vertical entonces  $VK$  es una rotación de  $180^\circ$  (Con centro en la recta de reflexión).

Las observaciones anteriores indican cómo se pueden combinar las distintas isometrías para formar un grupo  $G$ :

Si  $G$  no contiene la reflexión en la recta horizontal:

- (1) Si  $G$  solo contiene reflexiones  $\rightarrow G$  está generado por la traslación más corta
- (2) Si  $G$  solo contiene traslaciones y paso  $\rightarrow G$  está generado por el paso más corto.
- (3) Si  $G$  solo contiene traslaciones y rotaciones  $\rightarrow G$  está generado por dos rotaciones a distancia mínima (o por una rotación y la traslación más corta).
- (4) Si  $G$  contiene reflexiones en rectas verticales, pero no rotaciones  $\rightarrow G$  está generado por dos reflexiones a distancia mínima.
- (5) Si  $G$  contiene rotaciones y reflexiones en rectas verticales, estas no pasan por el centro de rotaciones  $\rightarrow G$  está generado por rotación y una reflexión a distancia mínima.

Si  $G$  contiene a la reflexión en la recta horizontal, entonces  $G$  contiene pasos.

- (6) Si  $G$  no contiene reflexiones en rectas verticales entonces  $G$  no contiene rotaciones y solo contiene traslaciones, pasos y la reflexión en la recta horizontal  $\rightarrow G$  está generado por la traslación más corta y la reflexión en la recta horizontal.

(7) Si  $G$  contiene reflexiones en rectas verticales  $\rightarrow G$  está generado por la reflexión en la recta horizontal y dos reflexiones en rectas verticales a distancia mínima.

Lo anterior dice que hay 7 posibilidades para los grupos de simetrías de un friso. ■

## 2.9.2 Grupos cristalográficos planos

**Definición.** Es un grupo de simetrías de un diseño en un plano tal que las traslaciones que contiene forman el siguiente subgrupo:

$$T = \{n_1 t_1 + n_2 t_2; n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Donde  $t_1$  y  $t_2$  son dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  linealmente independientes. Comúnmente se le denomina mosaico, lo cual es una composición con losetas que reproduce un paisaje o una figura. Estas losetas llenan un plano de forma periódica a través de cuatro estrategias definidas en el anterior capítulo, las cuales son conocidas como traslación, rotación, reflexión, simetría con deslizamiento.

Este grupo de simetría fue demostrado por el matemático Fedorov en 1891, quien probó que no hay más de 17 estructuras básicas para las infinitas decoraciones en el plano. Los 17 grupos cristalográfico-planos se pueden clasificar según la naturaleza de sus giros, de la siguiente manera:

- Grupos de simetría sin giros: 4 grupos de simetrías
- Grupos de simetría con giros de  $180^\circ$ : 5 grupos de simetrías
- Grupos de simetría con giros de  $120^\circ$ : 3 grupos de simetrías
- Grupos de simetría con giros  $90^\circ$ : 3 grupos de simetrías
- Grupos de simetría con giros de  $60^\circ$ : 2 grupos de simetrías

Los grupos cristalográficos son expresados de la siguiente manera:  
*p1, p2, p3, p4, p6, pm, pmm, pmg, cmm, p31m, p3m1, p4g, p4m, p6m, cm, pg, pgg.*

En anexos en la Tabla 2.2 se describen estos 17 grupos de manera gráfica para su mejor comprensión visual.

## Capítulo 3

### Simetría y sus aplicaciones

Este apartado contiene todo lo relacionado con la aplicación de los grupos de simetría dentro del arte y la naturaleza, donde no solo se enfoca en la parte visual, sino en su parte algebraica y su grupo de simetría al que corresponde a través de su tabla de grupo.

Para ello, se iniciará con dos de los ejemplos más utilizados dentro del álgebra: el triángulo y el cuadrado, polígonos regulares de  $n$  lados que son el conjunto generador de los grupos diedral como se explicó en el capítulo anterior. El primer ejemplo corresponde al triángulo equilátero que se caracteriza por tener sus tres lados iguales. A diferencia de otros tipos de triángulo, este comprende dos movimientos isométricos que llevan a la posición original. Estos movimientos son la rotación y la reflexión como se puede observar en la Figura 3.1, a través del triángulo  $\Delta ABC$ .

De las cuales, la parte izquierda muestra cómo la rotación deja el triángulo invariante fijando un punto en el centro del triángulo y girándolo en sentido antihorario a través de su ángulo central de  $120^\circ$ , esto se puede observar por medio de generadores de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
 e & r_1 & r_2 \\
 A \mapsto A & A \mapsto B & A \mapsto C \\
 B \mapsto B & B \mapsto C & B \mapsto A \\
 C \mapsto C & C \mapsto A & C \mapsto B
 \end{array}$$

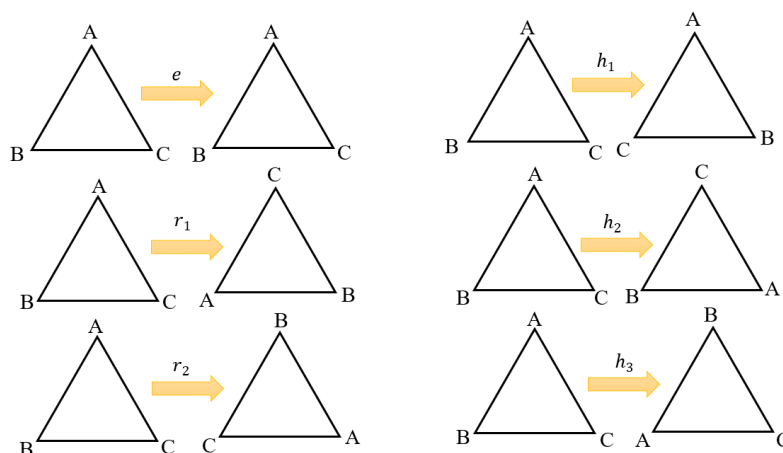
De lo cual  $e$  corresponde la rotación de  $0^\circ$ ,  $r_1$  rotación a  $120^\circ$ ,  $r_2$  rotación a  $240^\circ$ . Para las reflexiones se obtiene a través de los ejes marcados en los vértices del triángulo:

$$\begin{array}{ccc}
 h_1 & h_2 & h_3 \\
 A \mapsto A & A \mapsto C & A \mapsto B \\
 B \mapsto C & B \mapsto B & B \mapsto A \\
 C \mapsto B & C \mapsto A & C \mapsto C
 \end{array}$$

En donde,  $h_1$  corresponde la reflexión del vértice A,  $h_2$  corresponde a la reflexión del vértice B y  $h_3$  corresponde a la reflexión en el vértice C. Por lo tanto, las simetrías del triángulo equilátero comprenden 3 simetrías de rotación y 3 de reflexión.

Figura 0.1

*Simetría del triángulo equilátero*

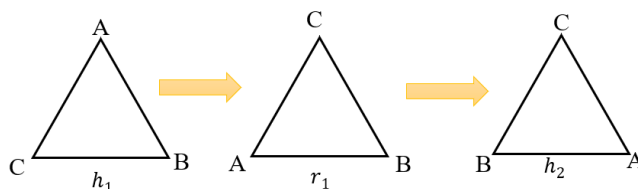


Cuando se componen dos simetrías el resultado es otra simetría. Por lo tanto, si  $G = \{e, r_1, r_2, h_1, h_2, h_3\}$  y  $*$  representa la composición de dos operaciones, entonces  $(G, *)$  es un grupo. Si se define la operación composición  $*$  como:  $m_i * m_j = m_k$

De esta manera, al combinar dos movimientos sin importar el resultado es siempre otro movimiento del conjunto. Por ejemplo, si se toman los elementos  $h_1$  y  $r_1$  y se opera con la operación composición establecida se obtiene:

$$h_1 * r_1 = h_2,$$

visualmente se tiene:



Realizando el mismo proceso para los demás movimientos, se tiene la siguiente tabla de grupo, donde  $m_i$  corresponde a la primera fila y  $m_j$  a la primera columna.

Tabla 0.1

*Tabla de grupo de la simetría del triángulo equilátero*

*	$e$	$r_1$	$r_2$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
$e$	$e$	$r_1$	$r_2$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
$r_1$	$r_1$	$r_2$	$e$	$h_2$	$h_3$	$h_1$
$r_2$	$r_2$	$e$	$r_1$	$h_3$	$h_1$	$h_2$
$h_1$	$h_1$	$h_3$	$h_2$	$e$	$r_2$	$r_1$
$h_2$	$h_2$	$h_1$	$h_3$	$r_1$	$e$	$r_2$
$h_3$	$h_3$	$h_2$	$h_1$	$r_2$	$r_1$	$e$

La tabla muestra:

- (1) Cualquier composición de los elementos da como resultado uno de los elementos definidos, cumpliendo la propiedad de la clausura.
- (2)  $e$  es el elemento identidad
- (3) Cada elemento tiene su inverso
- (4) Nótese, además que  $r_2 * h_1 = h_3$  y  $h_1 * r_2 = h_2$ , es decir que la operación  $*$  no es conmutativa

Este grupo  $G$  se conoce como grupo diedral y se denota por  $D_3$ , dado que comprende las simetrías de tipo rotacional y de reflexión de los polígonos regulares.

Continuando con el segundo ejemplo que corresponde al cuadrado, la principal característica es tener todo sus lados y ángulos iguales. Por lo tanto, dado un cuadrado formado por los vértices  $A, B, C, D$  se obtienen ocho simetrías entre rotaciones y reflexiones que preservan la estructura del cuadrado, las cuales se pueden observar en la Figura 3.3, donde el primer movimiento

corresponde a “ $e$ ” que se caracteriza por no tener ningún cambio que es la rotación  $0^\circ$ , el que sigue es una rotación de  $90^\circ$  en el sentido antihorario, luego una rotación de  $180^\circ$  seguido de una rotación de  $270^\circ$ .

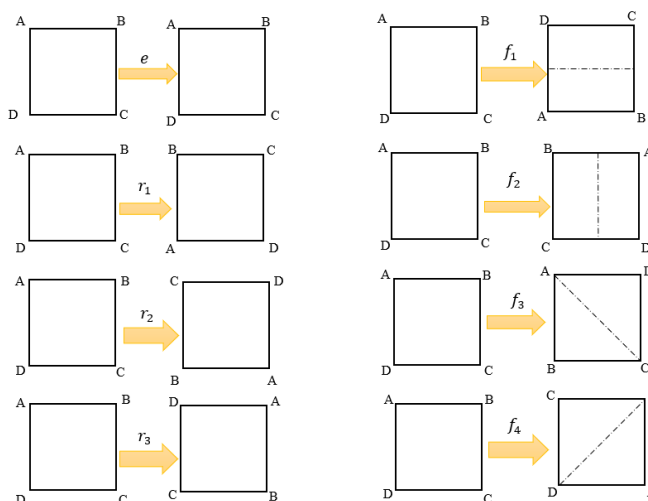
$e$	$r_1$	$r_2$	$r_3$
$A \mapsto A$	$A \mapsto D$	$A \mapsto C$	$A \mapsto B$
$B \mapsto B$	$B \mapsto A$	$B \mapsto D$	$B \mapsto C$
$C \mapsto C$	$C \mapsto B$	$C \mapsto A$	$C \mapsto D$
$D \mapsto D$	$D \mapsto C$	$D \mapsto B$	$D \mapsto A$

En cuanto a las reflexiones son las siguientes:  $f_1$  es una reflexión horizontal,  $f_2$  una reflexión vertical,  $f_3$  y  $f_4$  son reflexiones diagonales. Por medio de generadores se obtiene lo siguiente:

$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$A \mapsto D$	$A \mapsto B$	$A \mapsto A$	$A \mapsto C$
$B \mapsto C$	$B \mapsto A$	$B \mapsto D$	$B \mapsto B$
$C \mapsto B$	$C \mapsto D$	$C \mapsto C$	$C \mapsto A$
$D \mapsto A$	$D \mapsto C$	$D \mapsto B$	$D \mapsto D$

Figura 0.2

### *Simetría del cuadrado*



La composición de dos simetrías del cuadrado da como resultado otra simetría, por lo tanto, considerando el conjunto  $G = \{e, r_1, r_2, r_3, r_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$  y sea  $*$  como la operación composición se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 0.2

*Tabla de grupo de la simetría del cuadrado*

*	$e$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$e$	$e$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$r_1$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$e$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_1$
$r_2$	$r_2$	$r_3$	$e$	$r_1$	$f_3$	$f_4$	$f_1$	$f_2$
$r_3$	$r_3$	$e$	$r_1$	$r_2$	$f_4$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	$f_1$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$e$	$r_3$	$r_2$	$r_1$
$f_2$	$f_2$	$f_1$	$f_4$	$f_3$	$r_1$	$e$	$r_3$	$r_2$
$f_3$	$f_3$	$f_2$	$f_1$	$f_4$	$r_2$	$r_1$	$e$	$r_3$
$f_4$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$	$r_3$	$r_2$	$r_1$	$e$

Este grupo  $G$  que describe las ochos simetrías del cuadrado, forman un grupo llamado diédrico y se expresa como  $D_4$ .

A partir de estos ejemplos y usando las mismas técnicas, determinando todas las transformaciones que dejan el objeto a estudiar invariante y luego realizar la composición de dos simetrías se aplicará a ejemplos concretos de la naturaleza y el arte para encontrar su grupo ya sea cíclico o diédrico.

### 3.1 Aplicación de grupos cíclicos

#### 3.1.1 Caso 1. Alhambra de Granada

La Alhambra es un monumento localizado sobre una colina rocosa cerca del río Darro, en Granada. Su construcción data del siglo IX y se extendió durante todo el reinado de los sultanes de la dinastía nazarí, dominado por el Reino de Granada. Este palacio es un referente de la

arquitectura hispano-islámica, el cual fue declarado por la UNESCO en 1984 como Patrimonio de la Humanidad por su valor histórico y artístico.

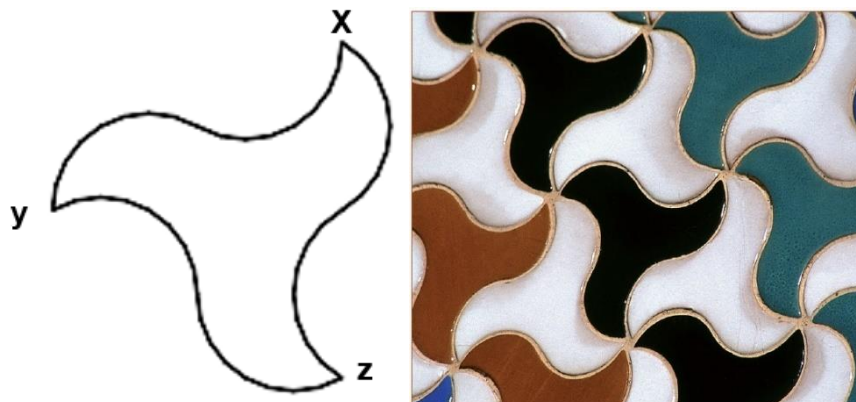
En 1891, el matemático Fedorov (1853-1919) demostró los 17 grupos de simetría que teselan un plano euclidiano, donde además todos estos grupos se encuentran en la Alhambra de Granada que se visualiza en los mosaicos y en adornos ubicados en el suelo y en las paredes, lo que se logra a partir de los movimientos rígidos.

Por otra parte, es importante señalar que la religión del islam prohíbe utilizar la figura de Alá o de su profeta Mahoma en sus pinturas o esculturas, al igual que la representación figurativa de personas o animales en lugares sagrados. Por ello, sus expresiones artísticas se apoyan en la geometría para decorar espacios interiores, a través de los movimientos isométricos. Este arte de llenar el plano con figuras repetidas alcanzó su máximo apogeo en la España con la dinastía Nazarí.

Los mosaicos nazaríes, como también son conocidos, se derivan de los polígonos regulares, pero empleando la técnica de deformación de sus lados. Las cuatro baldosas más repetidas en los mosaicos de la Alhambra se llaman el hueso, el pez volador, el avión y la pajarita. Las tres primeras formas se obtienen a partir de un cuadrado y la última a partir del triángulo.

En la Figura 3.3 se presenta uno de los motivos que recubren el plano denominado como pajarita. Esta figura sin rellenar conserva simetrías rotacionales, no presenta reflexiones debido a que si se traza una línea ya sea vertical u horizontal sobre la figura no se obtiene una coincidencia exacta.

Figura 0.3

*Pajarita*

*Nota.* Tomada de *La geometría de las formas* por Casals

[https://www.blinklearning.com/useruploads/ctx/a/39174539/r/s/9468659/939f41ce6e627f47cc041027e959e2e5.j  
pg?idcurso=442749](https://www.blinklearning.com/useruploads/ctx/a/39174539/r/s/9468659/939f41ce6e627f47cc041027e959e2e5.jpg?idcurso=442749)

Las simetrías rotacionales se obtienen al establecer cada punta de la figura con las letras  $x, y, z$  para luego realizar los giros en el centro con mismo ángulo central del triángulo que corresponde a  $120^\circ$ , obteniéndose los siguientes datos:

$$e = \text{rotación de } 0^\circ$$

$$g_1 = \text{rotación } 120^\circ$$

$$g_2 = \text{rotación } 240^\circ$$

Por lo tanto, sea  $G$  el conjunto de todas las simetrías de la pajarita que se puede expresar como

$G = \{e, g_1, g_2\}$  y sea  $*$  la operación composición se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 0.3

*Tabla de grupo de la simetría la pajarita*

$*$	$e$	$g_1$	$g_2$
$e$	$e$	$r_1$	$r_2$
$g_1$	$r_1$	$r_2$	$e$
$g_2$	$r_2$	$e$	$r_1$

Por lo tanto, la figura de la pajarita de nazarí solo corresponde a la transformación de tipo rotacional, y este grupo  $G$  pertenece al grupo cíclico denominado por  $C_3$  que es un subgrupo de la simetría del triángulo.

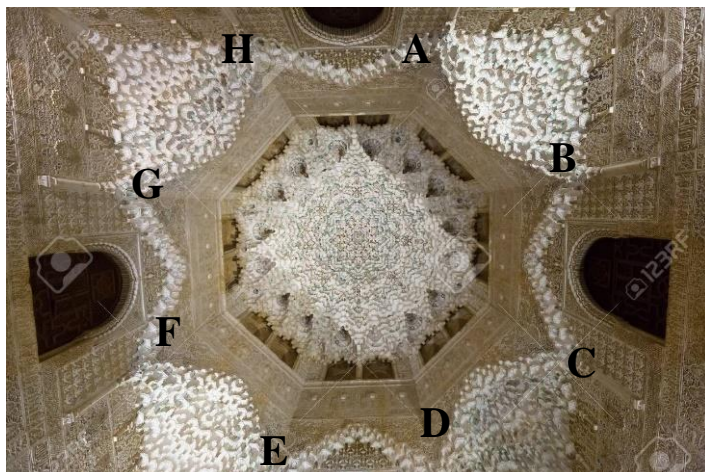
Por otra parte, si se considera todo el mosaico de la pajarita que rellena al plano, se lleva a un grupo infinito que corresponde a los grupos cristalográficos planos denominado  $p1$ , por solo corresponder al movimiento de traslación.

Otro caso que se encuentra en la Alhambra de Granada es un mocárabe que es un tipo diseño decorativo utilizado en ciertos tipos de arquitectura islámica y que se extendió por todo el mundo en el siglo XII. Esta consiste en una serie de primas verticales que se asemejan a estalactitas, construido principalmente a base de madera. La técnica arquitectónica está presente en la Alhambra de Granada específicamente en la zona denominada como la sala de las Dos hermanas, que alberga una de las cúpulas de mocárabes más espectaculares del arte nazarí.

Mirando hacia el techo, un espectador se encuentra frente a una gran estrella, efecto que es obtenido por el conjunto de mocárabes que allí se encuentran y, en consecuencia, un efecto de movimiento que simboliza el universo giratorio, lleno de luz divina para los musulmanes.

Figura 0.4

*Cúpula de la Sala de las dos Hermanas, Alhambra*



*Nota.* Tomado de *Cúpula de la Sala de las dos Hermanas*, por Previews, s.f., <https://previews.123rf.com/images/jackf/jackf1701/jackf170103256/69517866-c%C3%BApula-de-la-sala-de-las-dos-hermanas-sala-de-las-dos-hermanas-en-la-alhambra-granada-esp%C3%B1a.jpg>

La estrella central que se visualiza dentro de la cúpula está formada por 8 puntas, presentando simetría de tipo rotacional denominándolas con las letras *A, B, C, D, E, F, G* y *H*, y realizando el giro a través de un punto fijo *O* con ángulo central de  $45^\circ$  por ser una estrella octogonal; se obtiene los siguientes resultados:

$$e = \text{rotación de } 0^\circ$$

$$\varphi_1 = \text{rotación de } 45^\circ$$

$$\varphi_2 = \text{rotación de } 90^\circ$$

$$\varphi_3 = \text{rotación de } 135^\circ$$

$$\varphi_4 = \text{rotación de } 180^\circ$$

$$\varphi_5 = \text{rotación de } 225^\circ$$

$$\varphi_6 = \text{rotación de } 270^\circ$$

$$\varphi_7 = \text{rotación de } 315^\circ$$

Por lo tanto,  $G = \{e, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7\}$  es el conjunto de simetrías rotacionales de la estrella formada por el conjunto de mocárabe y \* es la operación composición de dos simetrías el resultado de la tabla es el siguiente:

Tabla 0.4

*Tabla de Grupo de simetría la Cúpula de Mocárabe*

*	$e$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_7$
$e$	$e$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_7$
$\varphi_1$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_7$	$e$
$\varphi_2$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_7$	$e$	$\varphi_1$
$\varphi_3$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_7$	$e$	$\varphi_1$	$\varphi_2$
$\varphi_4$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_7$	$e$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$
$\varphi_5$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_7$	$e$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$
$\varphi_6$	$\varphi_6$	$\varphi_7$	$e$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
$\varphi_7$	$\varphi_7$	$e$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$

Esta figura pertenece al grupo denominado  $C_8$  dado que su movimiento de rotación pertenece al grupo cíclico. Es además un subgrupo del grupo diédrico  $D_8$  formado por el conjunto de simetrías rotacionales y reflexivas, del octágono regular.

### 3.1.2 Caso 2. Cerámica de Panamá

La cerámica es un arte en el cual una persona confecciona un objeto con arcilla, y los utiliza para almacenar y transportar productos, especialmente líquidos. Este tipo de utensilios está íntimamente relacionado con la evolución humana puesto que aporta datos sobre un pueblo determinado acerca de sus costumbres, economía, religión, o como testimonio sobre su cultura. En 1930, el sitio Conte ubicado en Coclé, fue uno de los primeros sitios de Panamá en recibir estudio de campo realizando diversas excavaciones donde se encontraron 59 tumbas que contenían un gran número de objetos de oro y cerámica policromas. El arte del sitio Conte se basa en representaciones abstractas de animales y otras parecen a naturaleza teriomórfica.

En la Figura 3.5 se puede apreciar uno de esos tantos objetos encontrados; es un plato decorado con una imagen que asemeja un animal y que, además, se repite por medio de giros. A simple vista se puede apreciar que solo comprende simetría rotacional, por lo tanto, esta cerámica corresponde al grupo cíclico.

Figura 0.5

*Cerámica de Panamá*

*Nota.* Tomada de *Plate*, por Cleveland, s.f.,  
[https://www.clevelandart.org/art/1952.453?collection\\_search\\_views\\_fulltextycollection\\_search\\_views\\_artist\\_full\\_nameyfield\\_images\\_field\\_large\\_image\\_url=Allyfield\\_highlight\\_museum=Allypage=3yf%5B0%5D=field\\_collection%3A827#](https://www.clevelandart.org/art/1952.453?collection_search_views_fulltextycollection_search_views_artist_full_nameyfield_images_field_large_image_url=Allyfield_highlight_museum=Allypage=3yf%5B0%5D=field_collection%3A827#)

Denominando cada figura en cada división como las letras *A*, *B*, *C* y *D* sucesivamente, para luego realizar giros alrededor de su centro en sentido antihorario se obtiene los siguientes resultados:

$$e = \text{Rotación } 0^\circ$$

$$R_1 = \text{Rotación a } 90^\circ$$

$$R_2 = \text{Rotación a } 180^\circ$$

$$R_3 = \text{Rotación a } 270^\circ$$

Por lo tanto, el conjunto de simetrías de la cerámica en observación se puede denominar como  $G = \{e, R_1, R_2, R_3\}$  y sea  $*$  como la operación composición, se obtiene la siguiente tabla de grupo.

Tabla 0.5

*Tabla de grupo de la simetría la cerámica*

*	$e$	$R_1$	$R_2$	$R_3$
$e$	$e$	$R_1$	$R_2$	$R_3$
$R_1$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$e$
$R_2$	$R_2$	$R_3$	$e$	$R_1$
$R_3$	$R_3$	$e$	$R_1$	$R_2$

El grupo  $G$  que se conocerá como el conjunto de simetría de la cerámica corresponde al grupo cíclico  $C_4$ .

### 3.1.3 Caso 3. Tembleque

Los tembleques son adornos muy llamativos que forman parte del tocado de la cabeza en el vestido típico panameño. En sus inicios se utilizaban flores naturales, pero debido a su poca durabilidad, con el paso del tiempo fueron reemplazados con diferentes materiales. Estos adornos imitan las formas florales como sus hojas y pétalos; también incluyen formas de animales dándole una estructura vistosa en la empollerada.

Existen diversos tipos de tembleques como la tapa moño, alacranes, penquitas, pavos reales, mosquetas y como los que se muestran en la imagen, los cuales son conocidos como tapa oreja; cada una de ellas tiene su lugar en el tocado de la cabeza, es por ello por lo que se designan con distintos nombres. En la Figura 3.6 se puede observar un diseño floral conformado por siete pétalos.

Figura 0.6

*Tembleques panameños*

*Nota.* Tomada de *Cultura y crafts*, por Rangel, 2020, <https://disenoblogcom.files.wordpress.com/2020/11/5-6.jpg?w=1024>

Denominando cada pétalo con las letras de A - G en sentido antihorario y sucesivamente y aplicando rotación en ese mismo sentido con un ángulo  $51.43^\circ$ , se obtuvo los siguientes datos:

$$e = \text{rotación } 0^\circ$$

$$L_1 = \text{rotación a } 51.43^\circ$$

$$L_2 = \text{rotación a } 102.86^\circ$$

$$L_3 = \text{rotación a } 154.29^\circ$$

$$L_4 = \text{rotación a } 205.72^\circ$$

$$L_5 = \text{rotación a } 257.15^\circ$$

$$L_6 = \text{rotación a } 308.58^\circ$$

El conjunto de todas las simetrías del tembleque seleccionado se puede denominar el conjunto  $G = \{e, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\}$  y  $*$  como la operación y composición de dos simetrías que se muestran en la siguiente tabla de grupo:

Tabla 0.6

*Tabla de grupo de la simetría del tembleque (Tapa oreja)*

*	$e$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$
$e$	$e$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$
$L_1$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$e$
$L_2$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$e$	$L_1$
$L_3$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$e$	$L_1$	$L_2$
$L_4$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$e$	$L_1$	$L_2$	$L_3$
$L_5$	$L_5$	$L_6$	$e$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$
$L_6$	$L_6$	$e$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$

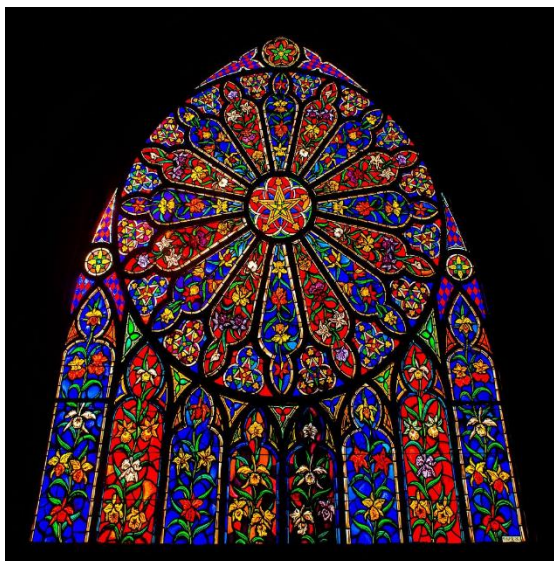
Este grupo corresponde al grupo cíclico denominado por  $C_7$ .

### 3.1.4 Caso 4. Rosetón de la iglesia del Carmen en Panamá

La definición de un rosetón es una distribución regular de un dibujo alrededor de un punto fijo central, y se caracterizan por presentar dos clases de rosetones: el primero solo usa una rotación del grupo cíclico y el segundo presenta tanto rotaciones como reflexiones que pertenecen al grupo diédrico.

En las iglesias es común observar vidriera circular con distintas formas y colores, estas estructuras se llaman rosetón. Su desarrollo se encuentra desde la arquitectura romana antigua, pero, a mediados del siglo XII, con el desarrollo de la arquitectura gótica en Francia, los rosetones presentaron más auge; extendiéndose a muchos lugares de Europa, especialmente en España e Inglaterra. En Panamá se encuentra la iglesia del Nuestra Señora del Carmen, la cual inició su construcción en el año 1947. En la actualidad está adornada por 18 vitrales de los cuales uno es un rosetón ubicado en la fachada de la iglesia como se observa en la Figura 3.7 vista desde su interior.

Figura 0.7

*Rosetón de la Iglesia del Carmen*

*Nota.* Tomada de *Archivo:Vitrail posterior de Iglesia del Carmen*, por Wikipedia, s.f., [https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Vitrail\\_posterior\\_de\\_Iglesia\\_del\\_Carmen.jpg](https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Vitrail_posterior_de_Iglesia_del_Carmen.jpg)

Este rosetón tiene una forma de flor con 16 pétalos, realizando un giro en sentido antihorario alrededor del punto fijo ubicado en el centro y con ángulo central de  $22.5^\circ$ , se obtiene las siguientes simetrías:

$$e = \text{rotación de } 0^\circ$$

$$A = \text{rotación de } 22.5^\circ$$

$$B = \text{rotación de } 45^\circ$$

$$C = \text{rotación de } 67.5^\circ$$

$$D = \text{rotación de } 90^\circ$$

$$E = \text{rotación de } 112.5^\circ$$

$$F = \text{rotación de } 135^\circ$$

$$G = \text{rotación de } 157.5^\circ$$

$H = \text{rotación de } 180^\circ$

$I = \text{rotación de } 202.5^\circ$

$J = \text{rotación de } 225^\circ$

$K = \text{rotación de } 247.5^\circ$

$L = \text{rotación de } 270^\circ$

$M = \text{rotación de } 292.5^\circ$

$N = \text{rotación de } 315^\circ$

$O = \text{rotación de } 337.5^\circ$

Por lo tanto, las simetrías del rosetón comprenden el siguiente grupo que se puede expresar como  $G = \{e, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O\}$  considerado \* como la operación y composición de dos simetrías a partir de lo que se obtuvo la siguiente tabla:

Tabla 0.7

Tabla de grupo de la simetría del rosetón de la Iglesia del Carmen

*	E	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
E	E	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	e
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	e	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	e	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	e	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	e	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	E	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	E	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	E	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	e	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	e	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	e	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	E	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	E	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	e	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	e	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N

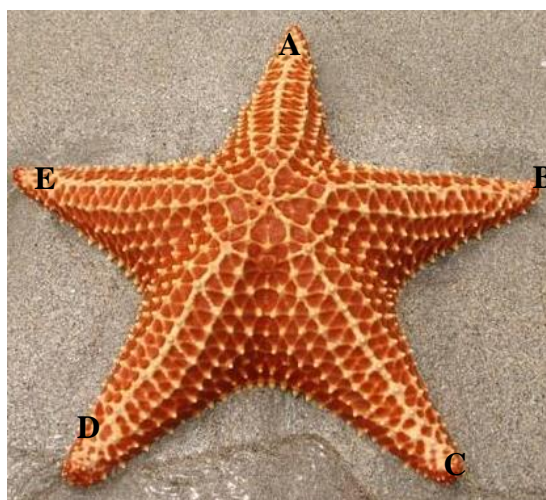
El grupo de simetría del rosetón de la figura es un grupo cíclico que se denomina como  $C_{16}$ .

### 3.1.5 Caso 5. Estrella de Mar

Las estrellas de mar son equinodermos que se caracterizan por su gran variedad de colores, tamaños y formas donde, por lo regular, comparten su forma estrellada. En la zoología se le denomina a su simetría radial como de tipo pentámera dado su cuerpo aplanado formado por un disco pentagonal con cinco brazos o más, dependiendo de su especie.

Tabla 0.8

*Estrella de Mar*



*Nota.* Tomada de *Estrella de Mar: características, hábitat y su comportamiento*, por Infomarina, s.f., <https://infomarina.net/estrellas-de-mar/>

En la figura 3.7 se puede apreciar que la estrella de mar comprende un tipo de movimiento en el cual deja invariantes el animal, el cual es la rotación, por tanto, si se denomina cada brazo de la estrella de mar de la siguiente manera:  $A = \text{Brazo 1}$ ,  $B = \text{Brazo 2}$ ,  $C = \text{Brazo 3}$ ,  $D = \text{Brazo 4}$ ,  $E = \text{Brazo 5}$ , se obtiene los siguientes resultados:

$$e = \text{identidad}$$

$$G_1 = \text{rotación a } 72^\circ$$

$$G_2 = \text{rotación a } 144^\circ$$

$$G_3 = \text{rotación a } 216^\circ$$

$$G_4 = \text{rotación a } 288^\circ$$

Por lo tanto, todos los elementos que corresponden a las simetrías rotacionales de la estrella de Mar se pueden denominar como  $G = \{e, G_1, G_2, G_3, G_4\}$  y además sea  $*$  la operación composición se obtiene el siguiente resultado:

Tabla 0.9

*Tabla de grupo de la simetría de la Estrella de Mar*

$*$	$e$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$
$e$	$e$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$
$G_1$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$e$
$G_2$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$e$	$G_1$
$G_3$	$G_3$	$G_4$	$e$	$G_1$	$G_2$
$G_4$	$G_4$	$e$	$G_1$	$G_2$	$G_3$

Su grupo de simetría pertenece al grupo cíclico denominado por  $C_5$

## 3.2 Aplicación de grupos diédricos

### 3.2.1 Caso 1. Mariposa ojo de búho

Desde el principio de los tiempos, las mariposas han fascinado a las personas por sus increíbles colores y patrones en sus alas. La especie ojo de búho se caracteriza por tener colores pocos llamativos y es conocida como insectos grandes que viven en América del Sur y se caracterizan por ser de color marrón y de amarillo manchadas. Uno de sus rasgos más curiosos, como indica su nombre, es poseer ojos que parecen de lechuga; esta característica les permite esconderse de muchos depredadores durante el día.

Figura 0.9

*Mariposa ojo de búho*



*Nota.* Tomada de *Caligo memnon*, por Istockphoto, s.f., <https://media.istockphoto.com/photos/caligo-memnonpictureid104249175?k=20ym=104249175ys=612x612yw=0yh=FONHZY3aFLC83975m-Ts9M0ed5LBBXAc148Epq6aEII=>

En general, independiente de su especie, la simetría de las mariposas es denominada como bilateral, debido a que si se traza una línea recta vertical entre medio de las alas el resultado es que tanto el lado izquierdo como el derecho son siempre iguales, por lo tanto, la figura de la mariposa queda inalterada. Por el contrario, el resultado de trazar una recta horizontal no es el mismo resultado porque es asimétrica.

El ejemplo presentado puede agruparse en dos elementos de un grupo  $G$ , los cuales son la rotación de  $0^\circ$  que es el elemento identidad del grupo y un eje de reflexión que no es más que la reflexión sobre el eje  $y$ ; de esta manera se forman los siguientes datos:

$$e = \text{rotación a } 0^\circ$$

$$\rho_y = \text{reflexión en el eje } y$$

Con estos dos datos y denominando  $*$  como la operación composición, se obtiene la siguiente tabla de grupo:

Tabla 0.10

*Tabla de grupo de simetría de la mariposa ojo de búho*

$*$	$e$	$\rho_y$
$e$	$e$	$\rho_y$
$\rho_y$	$\rho_y$	$e$

Este grupo se denomina como  $D_1 = \{e, \rho_y\}$ , es un grupo diédrico que incluyen la reflexión y rotación. Si bien es cierto, este grupo comprende el estudio de los polígonos regulares de  $n$  lados, para  $n > 2$ , este grupo se le puede considerar un caso especial de los grupos diedral.

En los animales generalmente se conocen dos tipos de simetría: de tipo bilateral y radial. Aquellos organismos que tienen simetría bilateral se le conocen como grupo bilateral como es el caso de la mariposa, dicha característica no es única de las mariposas, sino de cualquier otro tipo de animal puesto que involucra la correcta clasificación de los seres vivos de acuerdo con sus niveles taxonómicos.

### **3.2.2 Caso 2. Mezquita-Catedral de Córdoba**

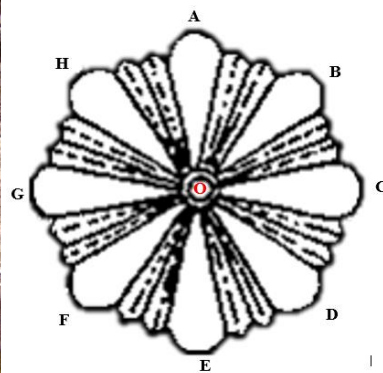
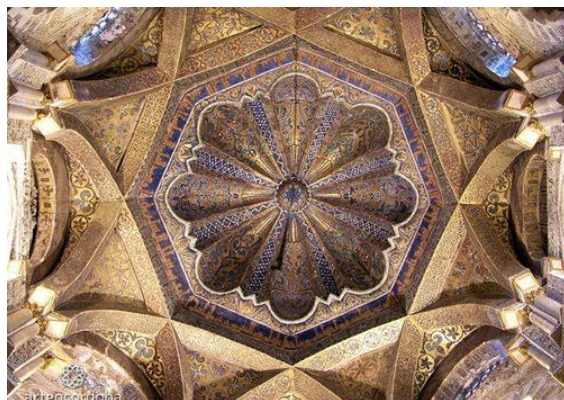
La mezquita-Catedral de Córdoba es un monumento de los más importantes del Occidente islámico y uno de los más asombrosos del mundo. Fue construida originalmente en el año 785 por Abdar-Rahman y se considera un importante monumento de la arquitectura islámica, y

además, es patrimonio de la Humanidad de la UNESCO desde 1984. La Mezquita de Córdoba se convirtió en catedral, por primera vez, en 1236 con la conquista de Córdoba por los cristianos. La mezquita es un lugar de oración para la fe en el islam; donde su propósito es servir de lugar para la reunión de los musulmanes.

La maqsura es uno de los espacios más importantes dentro de la mezquita de Córdoba. Esta cubierta presenta elementos muy interesantes desde un punto de vista arquitectónico y decorativo de la Mezquita. Inscribiéndose dentro de un esquema octogonal de seis metros de diámetro, ocho arcos de finas nervaduras salientes se entrecruzan para sostener una cúpula de gajos. (Ver figura 3.10)

Figura 0.10

*La cúpula de la Maqsura de la Mezquita de Córdoba*



*Nota.* Tomado de Homer , por Mireserva on Line, s.f., [https://cloud.mireservaonline.es/fotosServicios/7/0/0/qmjimqljqilimnjqpmohhqljxsxjoqkhhioj\\_3.jpg](https://cloud.mireservaonline.es/fotosServicios/7/0/0/qmjimqljqilimnjqpmohhqljxsxjoqkhhioj_3.jpg)

De esta manera su simetría se presenta de manera rotacional y de reflexión. En cuanto a la simetría rotacional, esta se obtiene a través del punto  $O$  que es el punto fijo y el ángulo central de  $45^\circ$ , obteniéndose lo siguientes resultados:

$$e = \text{rotación } 0^\circ$$

$$H_1 = \text{rotación } 45^\circ$$

$$H_2 = \text{rotación } 90^\circ$$

$$H_3 = \text{rotación } 135^\circ$$

$$H_4 = \text{rotación } 180^\circ$$

$$H_5 = \text{rotación } 225^\circ$$

$$H_6 = \text{rotación } 270^\circ$$

$$H_7 = \text{rotación } 315^\circ$$

Por otra parte, sus simetrías de reflexión también conocidas como ejes de simetrías, comprende ocho ejes de simetrías que se puede denominar de la siguiente forma:

$$\beta_1 = \text{reflexión en el punto } A$$

$$\beta_2 = \text{reflexión en el punto } B$$

$$\beta_3 = \text{reflexión en el punto } C$$

$$\beta_4 = \text{reflexión en el punto } D$$

$$\beta_5 = \text{reflexión en el punto } E$$

$$\beta_6 = \text{reflexión en el punto } F$$

$$\beta_7 = \text{reflexión en el punto } G$$

$$\beta_8 = \text{reflexión en el punto } H$$

Por lo tanto,  $G = \{e, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8\}$  contiene todas las simetrías de la Maqsura de la Mezquita de Córdoba y sea \* la operación composición se obtiene su siguiente tabla de grupo:

Tabla 0.11

Tabla de grupo de la simetría Maqsura de la Mezquita de Córdoba

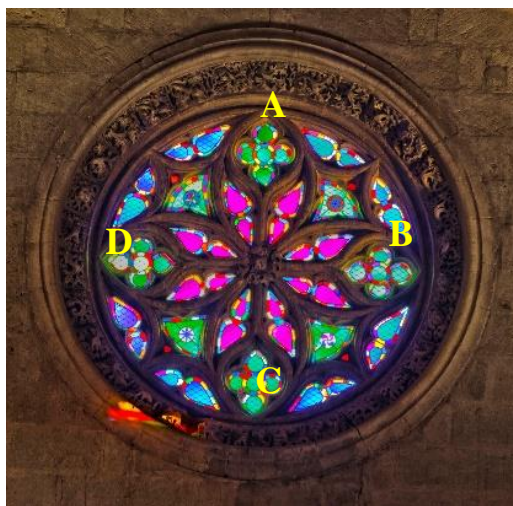
*	$e$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$
$e$	$e$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$
$H_1$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$	$e$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_1$
$H_2$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$	$e$	$H_1$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_1$	$\beta_2$
$H_3$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$	$e$	$H_1$	$H_2$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$H_4$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$H_7$	$e$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
$H_5$	$H_5$	$H_6$	$H_7$	$e$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$
$H_6$	$H_6$	$H_7$	$e$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
$H_7$	$H_7$	$e$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$	$\beta_8$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$
$\beta_1$	$\beta_1$	$\beta_8$	$\beta_7$	$\beta_6$	$\beta_5$	$\beta_4$	$\beta_3$	$\beta_2$	$e$	$H_7$	$H_6$	$H_5$	$H_4$	$H_3$	$H_2$	$H_1$
$\beta_2$	$\beta_2$	$\beta_1$	$\beta_8$	$\beta_7$	$\beta_6$	$\beta_5$	$\beta_4$	$\beta_3$	$H_1$	$e$	$H_7$	$H_6$	$H_5$	$H_4$	$H_3$	$H_2$
$\beta_3$	$\beta_3$	$\beta_2$	$\beta_1$	$\beta_8$	$\beta_7$	$\beta_6$	$\beta_5$	$\beta_4$	$H_2$	$H_1$	$e$	$H_7$	$H_6$	$H_5$	$H_4$	$H_3$
$\beta_4$	$\beta_4$	$\beta_3$	$\beta_2$	$\beta_1$	$\beta_8$	$\beta_7$	$\beta_6$	$\beta_5$	$H_3$	$H_2$	$H_1$	$e$	$H_7$	$H_6$	$H_5$	$H_4$
$\beta_5$	$\beta_5$	$\beta_4$	$\beta_3$	$\beta_2$	$\beta_1$	$\beta_8$	$\beta_7$	$\beta_6$	$H_4$	$H_3$	$H_2$	$H_1$	$e$	$H_7$	$H_6$	$H_5$
$\beta_6$	$\beta_6$	$\beta_5$	$\beta_4$	$\beta_3$	$\beta_2$	$\beta_1$	$\beta_8$	$\beta_7$	$H_5$	$H_4$	$H_3$	$H_2$	$H_1$	$e$	$H_7$	$H_6$
$\beta_7$	$\beta_7$	$\beta_6$	$\beta_5$	$\beta_4$	$\beta_3$	$\beta_2$	$\beta_1$	$\beta_8$	$H_6$	$H_5$	$H_4$	$H_3$	$H_2$	$H_1$	$e$	$H_7$
$\beta_8$	$\beta_8$	$\beta_7$	$\beta_6$	$\beta_5$	$\beta_4$	$\beta_3$	$\beta_2$	$\beta_1$	$H_7$	$H_6$	$H_5$	$H_4$	$H_3$	$H_2$	$H_1$	$e$

La simetría establecida en el grupo G corresponde al grupo diédrico expresado como  $D_8$ .

La mezquita de Córdoba también presenta rosetones como el caso expuesto sobre la Iglesia del Carmen en Panamá. En la Figura 3.12, se aprecia un rosetón con distintos colores y con forma floral. El ejemplo que se muestra en la figura es de tipo diédrico.

Figura 0.12

Vitral de la Mezquita de Córdoba



*Nota.* Tomado de *Home*, por Diócesis de Córdoba, 2015, [https://www.diocesisdecordoba.es/media/2015/11/ntra\\_sra\\_villaviciosa\\_12.jpg](https://www.diocesisdecordoba.es/media/2015/11/ntra_sra_villaviciosa_12.jpg)

Al señalar cada punto de la figura de forma floral al rosetón con las letras  $A, B, C, D$  y a su vez aplicarle un giro al alrededor del punto fijo  $O$  en un ángulo central de  $90^\circ$ , se obtienen los siguientes datos:

$$e = \text{rotación a } 0^\circ$$

$$\sigma_1 = \text{rotación a } 90^\circ$$

$$\sigma_2 = \text{rotación a } 180^\circ$$

$$\sigma_3 = \text{rotación a } 270^\circ$$

Para las reflexiones aplicadas en cada punto de la figura, se obtienen los siguientes cuatro ejes de reflexión o simetría:

$$\tau_1 = \text{reflexión en el punto } A$$

$$\tau_2 = \text{reflexión en el punto } B$$

$$\tau_3 = \text{reflexión en el punto } C$$

$$\tau_4 = \text{reflexión en el punto } D$$

Por lo tanto,  $G = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$  es el conjunto de todas las simetrías de este rosetón considerando \* como la operación composición, se obtiene la siguiente tabla.

Tabla 0.12

*Tabla de grupo de la simetría del rosetón de la Mezquita de Córdoba*

*	$e$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$
$e$	$e$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$
$\sigma_1$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$e$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_1$
$\sigma_2$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$e$	$\sigma_1$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_1$	$\tau_2$
$\sigma_3$	$\sigma_3$	$e$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\tau_4$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
$\tau_1$	$\tau_1$	$\tau_4$	$\tau_3$	$\tau_2$	$e$	$\sigma_3$	$\sigma_2$	$\sigma_1$
$\tau_2$	$\tau_2$	$\tau_1$	$\tau_4$	$\tau_3$	$\sigma_1$	$e$	$\sigma_3$	$\sigma_2$
$\tau_3$	$\tau_3$	$\tau_2$	$\tau_1$	$\tau_4$	$\sigma_2$	$\sigma_1$	$e$	$\sigma_3$
$\tau_4$	$\tau_4$	$\tau_3$	$\tau_2$	$\tau_1$	$\sigma_3$	$\sigma_2$	$\sigma_1$	$e$

El grupo del rosetón de la Mezquita corresponde al grupo diedral denominado  $D_4$  mismo que corresponde al grupo de cuadrado. Por lo tanto, se establece que estos grupos son grupos isomorfos.

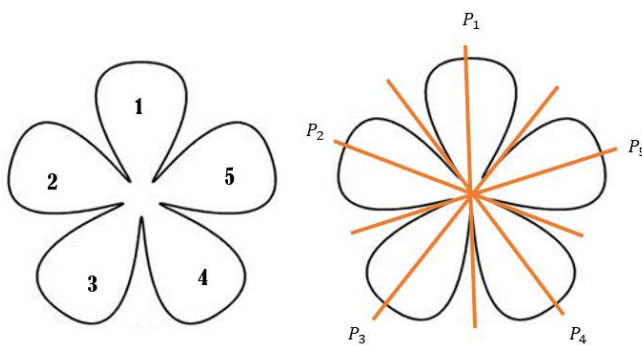
### 3.2.3 Caso 3. Flor de 5 pétalos

La flor es la parte de la planta que se encarga de la reproducción. Su estructura contempla un tallo corto y un cúmulo de hojas modificadas que protege a las células sexuales y asegura la formación de nuevas semillas. La mayoría de las flores tienen simetría radial, con excepción de las orquídeas, que presentan simetría bilateral, y un pequeño grupo no presentan simetría. Además de ser estéticamente agradable, la simetría en las flores aumenta la probabilidad de visitas de polinizadores porque es un signo de salud de la planta y, en consecuencia, de un mayor suministro de néctar, polen y fragancia.

Para estudiar la simetría de las flores, se tomó como muestra la planta *Catharanthus roseus*, comúnmente conocida como chabelita, misma que comprende diversas especies que se caracterizan por tener hojas opuestas enteras, flores con cinco pétalos y de variados colores. (Ver Figura 3.13).

Figura 0.13

*Chabelita*



*Nota.* Elaboración propia

Para determinar su grupo de simetría se enumeraron los pétalos del 1 al 5, los cuales corresponden a la cantidad de pétalos que tiene. Esto permite aplicarle una rotación, tomando el centro como su punto de giro y obteniendo los siguientes resultados:

$$e = \textit{identidad}$$

$$K_1 = \textit{rotación a } 72^\circ$$

$$K_2 = \textit{rotación a } 144^\circ$$

$$K_3 = \textit{rotación a } 216^\circ$$

$$K_4 = \textit{rotación a } 288^\circ$$

Por otra parte, al aplicarle un movimiento de reflexión, se obtienen cinco ejes de reflexiones con los siguientes resultados:

$$P_1 = \textit{reflexión en el pétalo 1}$$

$$P_2 = \textit{reflexión en el pétalo 2}$$

$$P_3 = \textit{reflexión en el pétalo 3}$$

$$P_4 = \textit{reflexión en el pétalo 4}$$

$$P_5 = \textit{reflexión en el pétalo 5}$$

Por lo tanto, el grupo  $G$  corresponde a todos sus simetrías y se pueden expresar como  $G = \{e, K_1, K_2, K_3, K_4, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$  luego sea  $*$  como la operación composición se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 0.13

Tabla de grupo de simetría de la planta chabelita

*	$e$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$e$	$e$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$K_1$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$e$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_1$
$K_2$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$e$	$K_1$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_1$	$P_2$
$K_3$	$K_3$	$K_4$	$e$	$K_1$	$K_2$	$P_4$	$P_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$K_4$	$K_4$	$e$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$P_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$P_1$	$P_1$	$P_5$	$P_4$	$P_3$	$P_2$	$e$	$K_4$	$K_3$	$K_2$	$K_1$
$P_2$	$P_2$	$P_1$	$P_5$	$P_4$	$P_3$	$K_1$	$e$	$K_4$	$K_3$	$K_2$
$P_3$	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_5$	$P_4$	$K_2$	$K_1$	$e$	$K_4$	$K_3$
$P_4$	$P_4$	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_5$	$K_3$	$K_2$	$K_1$	$e$	$K_4$
$P_5$	$P_5$	$P_4$	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$K_4$	$K_3$	$K_2$	$K_1$	$e$

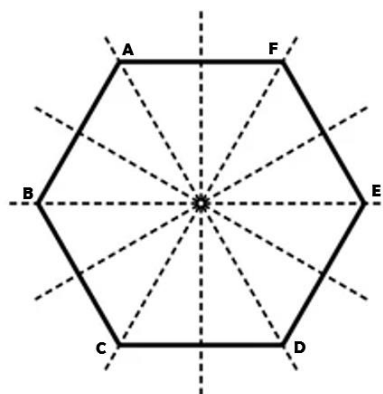
El grupo de simetría de la chabelita pertenece al grupo diedral denominado como  $D_5$ .

### 3.2.4 Caso 4. Las abejas y su panal

Las abejas viven en grupos formados por individuos de una misma familia, es decir, viven en colonia. Estas criaturas crean continuamente una gran cantidad de celdas de forma hexagonal para almacenar la miel y colocar sus huevos. Las celdas hexagonales están hechas de cera y propóleo.

Figura 0.14

Panal de abeja



Nota. Tomada de *Abejas trabajan en panal*, por Deposito Photos, s.f.,

<https://sp.depositphotos.com/13153512/stock-photo-bees-work-on-honeycomb.html>

La forma de cada celda tiene forma de un hexágono regular, y es un polígono convexo con seis lados y ángulos iguales, en el que se denomina cada vértice con las letras  $A - F$ , sucesivamente.

A esta figura geométrica se le puede aplicar una rotación alrededor de su centro en un ángulo central de  $60^\circ$ , obteniéndose los siguientes resultados:

$$e = \textit{identidad}$$

$$r_1 = \textit{rotación a } 60^\circ$$

$$r_2 = \textit{rotación a } 120^\circ$$

$$r_3 = \textit{rotación a } 180^\circ$$

$$r_4 = \textit{rotación a } 240^\circ$$

$$r_5 = \textit{rotación a } 300^\circ$$

Por otro lado, para las reflexiones comprende seis ejes de reflexión:

$$P_1 = \textit{reflexión en el vértice } A$$

$$P_2 = \textit{reflexión en el vértice } B$$

$$P_3 = \textit{reflexión en el vértice } C$$

$$P_4 = \textit{reflexión en el vértice } D$$

$$P_5 = \textit{reflexión en el vértice } E$$

$$P_6 = \textit{reflexión en el vértice } F$$

Sea  $G = \{e, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$  el conjunto de todas las simetrías del hexágono

y \* la operación composición se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 0.14

*Tabla de grupo de la simetría del hexágono que tiene un panal de abeja*

*	$e$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$e$	$e$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$r_1$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$e$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_1$
$r_2$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$e$	$r_1$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_1$	$P_2$
$r_3$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$e$	$r_1$	$r_2$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$r_4$	$r_4$	$r_5$	$e$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$P_5$	$P_6$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$r_5$	$r_5$	$e$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$P_6$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$P_1$	$P_1$	$P_6$	$P_5$	$P_4$	$P_3$	$P_2$	$e$	$r_5$	$r_4$	$r_3$	$r_2$	$r_1$
$P_2$	$P_2$	$P_1$	$P_6$	$P_5$	$P_4$	$P_3$	$r_1$	$e$	$r_5$	$r_4$	$r_3$	$r_2$
$P_3$	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_6$	$P_5$	$P_4$	$r_2$	$r_1$	$e$	$r_5$	$r_4$	$r_3$
$P_4$	$P_4$	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_6$	$P_5$	$r_3$	$r_2$	$r_1$	$e$	$r_5$	$r_4$
$P_5$	$P_5$	$P_4$	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_6$	$r_4$	$r_3$	$r_2$	$r_1$	$e$	$r_5$
$P_6$	$P_6$	$P_5$	$P_4$	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$r_5$	$r_4$	$r_3$	$r_2$	$r_1$	$e$

Este grupo de simetrías corresponde al grupo diédrico de orden 6 denominado por  $D_6$ .

Es importante mencionar que el panal de abeja es un empaquetado de hexágono que llena un espacio. En otras palabras, es una teselación a espacios de mayor dimensión. Así, es preciso afirmar que en un plano existen solo tres tipos de mosaicos regulares que se pueden utilizar para rellenarlo sin que quede un espacio, estos son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono; siempre acompañado de una traslación.

### 3.2.5 Caso 3. Cristal de nieve

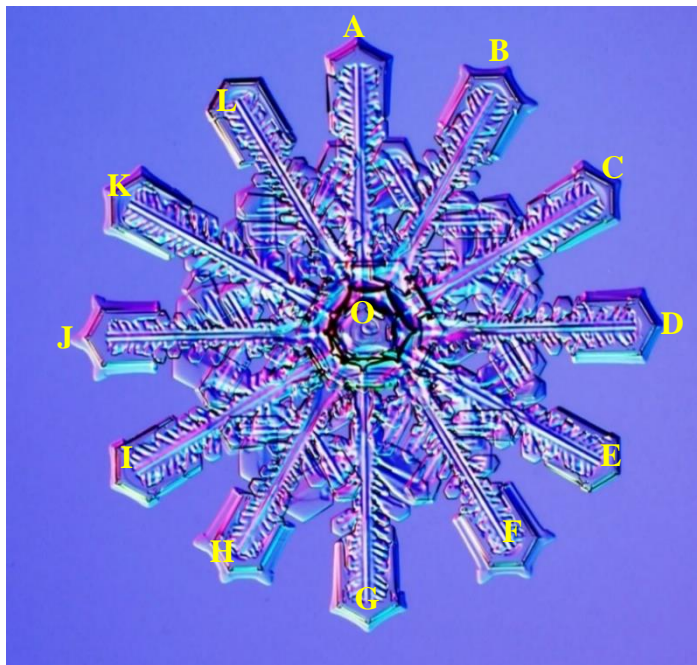
La principal característica distintiva de los cristales de hielo es la simetría. Con respecto a algunas operaciones sencillas, como la rotación y la reflexión, esta manifestación natural exhibe una invarianza con respecto a estos dos tipos de movimientos. Por lo general, un cristal de nieve tiene seis puntas y diferentes patrones en sus ramas que, sus distintos diseños pueden variar: algunos con estilo bordeadas, otras que parecen ramas de helechos. Sin embargo, esta característica no es única en los cristales de nieve, puesto que existen algunas que tienen forma triangular, columnas rematas por su forma de rueda, polvo de diamante por ser muy diminutos,

cristales de 12 ramas, como se muestra en la Figura 3.15, entre otras. Esto ocurre debido al ambiente en donde se desarrolla.

Finalmente, el último ejemplo mencionado ocurre cuando dos pequeños cristales en forma hexagonal chocan en el aire y se unen para convertirse en un cristal de 12 ramificaciones.

Figura 0.15

*Copo de Nieve de 12 ramas*



*Nota.* Tomada de *Snow Crystals*, por K. Libbrecht, s.f., <http://www.snowcrystals.com/guide/twelve.jpg>

El cristal de nieve que se muestra en la figura 3.12 es de 12 puntas, denominando a cada punto con una enumeración de A-L se puede girar en un punto fijo con su ángulo central de  $22.5^\circ$ , obteniéndose los siguientes resultados:

$$e = \text{rotación de } 0^\circ$$

$$x_1 = \text{rotación de } 30^\circ$$

$$x_2 = \text{rotación de } 60^\circ$$

$x_3 = \text{rotación de } 90^\circ$

$x_4 = \text{rotación de } 120^\circ$

$x_5 = \text{rotación de } 150^\circ$

$x_6 = \text{rotación de } 180^\circ$

$x_7 = \text{rotación de } 210^\circ$

$x_8 = \text{rotación de } 240^\circ$

$x_9 = \text{rotación de } 270^\circ$

$x_{10} = \text{rotación de } 300^\circ$

$x_{11} = \text{rotación de } 330^\circ$

Por otro lado, en cuanto a su reflexión cuenta con 12 ejes de simetría:

$y_1 = \text{reflexión en el punto } A$

$y_2 = \text{reflexión en el punto } B$

$y_3 = \text{reflexión en el punto } C$

$y_4 = \text{reflexión en el punto } D$

$y_5 = \text{reflexión en el punto } E$

$y_6 = \text{reflexión en el punto } F$

$y_7 = \text{reflexión en el punto } G$

$y_8 = \text{reflexión en el punto } H$

$y_9 = \text{reflexión en el punto } I$

$y_{10} = \text{reflexión en el punto } J$

$y_{11} = \text{reflexión en el punto } K$

$y_{12} = \text{reflexión en el punto } L$

Por lo tanto,

$$G = \{e, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\}$$

Es el grupo de todas las simetrías de este copo de nieve y si se considera \* como la operación composición se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 0.15

*Tabla de grupo de la simetría de un cristal de nieve de 12 puntas*

*	e	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>
e	e	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>
x <sub>1</sub>	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	e	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>
x <sub>2</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	e	r <sub>1</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>
x <sub>3</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	e	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>
x <sub>4</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	e	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>
x <sub>5</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	e	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>
x <sub>6</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	e	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>
x <sub>7</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	e	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>
x <sub>8</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	e	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>
x <sub>9</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	e	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>
x <sub>10</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>11</sub>	e	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>
x <sub>11</sub>	x <sub>11</sub>	e	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>10</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>11</sub>
y <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	e	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>	r <sub>5</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>1</sub>
y <sub>2</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	x <sub>1</sub>	e	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>	r <sub>5</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>3</sub>	r <sub>2</sub>
y <sub>3</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	e	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>	r <sub>5</sub>	r <sub>4</sub>	r <sub>3</sub>
y <sub>4</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	e	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>	r <sub>5</sub>	r <sub>4</sub>
y <sub>5</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	e	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>	r <sub>5</sub>
y <sub>6</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	e	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>
y <sub>7</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	e	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>
y <sub>8</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	e	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>
y <sub>9</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	e	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>
y <sub>10</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	e	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>
y <sub>11</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>12</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	e	x <sub>11</sub>
y <sub>12</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>10</sub>	y <sub>9</sub>	y <sub>8</sub>	y <sub>7</sub>	y <sub>6</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	x <sub>11</sub>	x <sub>10</sub>	x <sub>9</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	e

Por lo tanto, el grupo de simetría corresponde al del polígono regular del dodecágono que comprende 12 lados específicamente de un tipo estrellado. Por lo tanto, su grupo se denomina grupo diedral de orden 12 y se expresa como  $D_{12}$ .

## Conclusiones

Al finalizar este trabajo, retomando las ideas expuestas, es importante tener en consideración la trayectoria de la simetría en el tiempo y su evolución en el estudio formal de ella. Partiendo de la geometría hasta álgebra formal. Es por ello por lo que se han obtenido las siguientes conclusiones:

- I. Inicialmente, la simetría era una característica importante para asentar la belleza, principalmente en la civilización griega al observar su naturaleza.
- II. El concepto de simetría dentro de la geometría se define como aquellas transformaciones que sufre un objeto y que lo dejan invariante.
- III. La simetría se puede clasificar de acuerdo con un punto, una recta, un plano y simetría helicoidal en el espacio. De los cuales, los principales movimientos isométricos que conlleva son la rotación, reflexión y traslación.
- IV. La semejanza y las simetrías tienen como fin dar lugar a otro tipo de simetría denominada simetría homotética en donde el objeto cambia de tamaño, pero mantiene su forma.
- V. Los poliedros regulares son figuras tridimensionales que fueron estudiadas por Platón, las cuales revelan propiedades de las formas geométricas que se relaciona con la armonía de la naturaleza.
- VI. Évariste Galois, a través de su trabajo para dar soluciones a las ecuaciones, fundamentó el estudio de las álgebras modernas por medio de la noción formal de grupo.
- VII. El programa de Erlanger creado por Félix Klein fue la base de la intersección entre el álgebra y la geometría, dado que estudia las propiedades que no cambian al

aplicarse cierto tipo de transformaciones, estas propiedades se le denomina invariantes y el conjunto de las transformaciones que no hacen cambiar a una invariante tiene estructura de grupo bajo la composición de funciones.

- VIII. El teorema de Cayley establece que cualquier grupo se puede representar como un grupo de permutaciones, debido a que son isomorfos.
- IX. Los grupos de simetría infinita utilizan todos los movimientos en el plano mientras que el grupo de los frisos lo utilizan en una recta y los cristalográficos rellenan todo el plano.
- X. Se encontró que muchos ejemplos tanto en la naturaleza como en el arte son grupos isomorfos, por la que su estructura algebraica es idéntica.
- XI. Las transformaciones que comprenden los grupos cíclicos son las rotaciones y, para los grupos diedral, son tanto las rotaciones como las reflexiones.
- XII. Las flores de las plantas son ricas en simetrías a través de sus pétalos que dan lugar a distintas simetrías donde la mayoría comprende movimientos como reflexiones y rotaciones y, por tanto, pertenecen a los grupos diedral; en el ejemplo de la chabelita por tener 5 pétalos su grupo es  $D_5$ , y este a su vez es isomorfo al grupo de la estrella de Mar. Para considerar a qué grupo pertenece una flor determinada se debe tener en cuenta la cantidad de pétalos y su estructura para determinar su grupo de simetría.
- XIII. En la Alhambra de Granada están presente los 17 grupos cristalográficos planos, puesto que en ella cada representación de una figura geométrica prevalecen los movimientos las isometrías siendo unos de los monumentos más significativos para describir simetría.
- XIV. La mayoría de los animales vertebrados e invertebrados tienen simetría bilateral. Es decir, el cuerpo del animal solo tiene un plano que lo divida en dos mitades iguales,

por lo tanto, se le denomina grupo diedral  $D_1$ , mismo que corresponde al caso de la mariposa ojo de búho. Sin embargo, hay un porcentaje pequeño que difiere de esta característica como son las estrellas de mar que pertenece al grupo  $C_5$ , que son de simetría radial.

- XV. Los rosetones que se observan en las iglesias con distintos colores y formas pertenecen a los grupos diédrico y cíclicos dependiendo de su forma. Algunas solo poseen rotaciones y otras a diferencia poseen tanto rotaciones como reflexiones.

### **Comentario final**

A través de este estudio se logró el objetivo de visualizar la aplicación de la teoría de grupos a ejemplos concretos de la naturaleza y el arte. Sin embargo, existen ejemplos mucho más complejos que es mejor que sean interpretados a través de métodos computacionales. Es por ello por lo que se recomienda a otros investigadores incursionar en esta parte de la teoría de grupo.

### Referencia bibliográfica

- Castro, S. (2018). *Historia de las matemáticas del cero al infinito*. Galobart. Cleveland. (s.f.). *Plate*. Obtenido de [https://www.clevelandart.org/art/1952.453?collection\\_search\\_views\\_fulltextycollection\\_search\\_views\\_artist\\_full\\_nameyfield\\_images\\_field\\_large\\_image\\_url=Allyfield\\_high\\_light\\_museum=Allypage=3yf%5B0%5D=field\\_collection%3A827#](https://www.clevelandart.org/art/1952.453?collection_search_views_fulltextycollection_search_views_artist_full_nameyfield_images_field_large_image_url=Allyfield_high_light_museum=Allypage=3yf%5B0%5D=field_collection%3A827#)
- Costa, A. (2015). *Una introducción a la simetría*. Obtenido de Universidad Nacional de Educación a Distancia. : <https://elibro.net/pt/lc/upanama/titulos/48821>
- Cruz, J. (1968). *Simetría, Estructura y dinamismo*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Navarra.
- Cruz, M. (2018). *Análisis de diseños: Reconocimiento de Isometrías* . Obtenido de <https://docplayer.es/23457477-Analisis-de-disenos-reconocimiento-de-isometrias.html>
- del Amo, E. (2021). *La Alhambra a través de los ojos de una arquitecta*. Obtenido de <https://images.hola.com/imagenes/viajes/20211020198120/granada-alhambra-visitas-guiadas-arquitecta/1-9-883/panoramica-de-la-alhambra-de-granada-en-otono-t.jpg>
- Deposito Photos . (s.f.). *Abejas trabajan en panal*. Obtenido de <https://sp.depositphotos.com/13153512/stock-photo-bees-work-on-honeycomb.html>
- Díaz, J., & Canino, C. (2012). Heurística de los poliedros regulares para la investigación. *Revista Cubana de Ingeniería*, 2, 59-69. <https://rci.cujae.edu.cu/index.php/rci/article/view/68/pdf>.
- Diocesis de Cordoba. (2015). *Home*. Obtenido de [https://www.diocesisdecordoba.es/media/2015/11/ntra\\_sra\\_villaviciosa\\_12.jpg](https://www.diocesisdecordoba.es/media/2015/11/ntra_sra_villaviciosa_12.jpg)

- Freepik. (s.f.). *Espiral de metal, vector realista de escalera helicoidal*. Obtenido de [https://www.freepik.es/vector-gratis/espiral-metal-vector-realista-escalera-helicoidal\\_5902350.htm](https://www.freepik.es/vector-gratis/espiral-metal-vector-realista-escalera-helicoidal_5902350.htm)
- Fundación Polar. (2016). *Matemática Maravillosa*. Obtenido de [https://issuu.com/danielfelipegarciapulgarin6/docs/matematica\\_maravillosa\\_-\\_fundacion\\_](https://issuu.com/danielfelipegarciapulgarin6/docs/matematica_maravillosa_-_fundacion_)
- Gallian, J. (2015). *Contemporary Abstract Algebra*. CENGAGE Learning Custom Publishing.
- Guerrero, D. (2015). *Semejanza y homotecia (II)*. Obtenido de <https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/11042/2167/Cap.%208%20II.pdf?sequence=1>
- Herstein, I. (1988). *Álgebra Abstracta*. Grupo editorial Iberoamericano.
- Homotecia del Colegio Santa María de Maipú. (2020). *Guía matemática*. Obtenido de [https://www.colegiosantamariademaipu.cl/wp-content/uploads/2020/06/Matem%C3%A1tica\\_Gu%C3%ADaN%C2%B010\\_IV%C2%B0ELECTIVO.docx](https://www.colegiosantamariademaipu.cl/wp-content/uploads/2020/06/Matem%C3%A1tica_Gu%C3%ADaN%C2%B010_IV%C2%B0ELECTIVO.docx)
- Infomarina. (s.f.). *Estrella de Mar: características, hábitat y su comportamiento*. Obtenido de <https://infomarina.net/estrellas-de-mar/>
- Istockphoto. (s.f.). *Caligo mennón*. Obtenido de <https://media.istockphoto.com/photos/caligo-memnon-picture-id104249175?k=20ym=104249175ys=612x612yw=0yh=FONHZY3aFLC83975m-Ts9M0ed5LBBXAc148Eppq6aEII=>
- La Escuela en Casa. (s.f.). *Semejanza y escalas*. Obtenido de <https://laescuelaencasa.com/matematicas-2/proporcionalidad-y-semejanza/clase-6-semejanza-y-escalas/>

Libbrecht, K. (s.f.). *Snow Crystals*. Obtenido de <http://www.snowcrystals.com/guide/twelve.jpg>

Mireserva on Line. (s.f.). *Home*. Obtenido de [https://cloud.mireservaonline.es/fotosServicios/7/0/0/qmjimqljqilimnjqpmohhqljsxjoqk khioj\\_3.jpg](https://cloud.mireservaonline.es/fotosServicios/7/0/0/qmjimqljqilimnjqpmohhqljsxjoqk khioj_3.jpg)

Navarro, J. (2010). *Al otro lado del espejo: La simetría en matemáticas*. RBA.

Olkhovaia, E. (2008). Las simetrías rotas. *Franciscanum. Revista de las ciencias del espíritu*, (146), 83-95. [redalyc.org/pdf/3435/343529897005.pdf](http://redalyc.org/pdf/3435/343529897005.pdf).

Previews. (s.f.). *Cúpula de la Sala de las dos Hermanas*. Obtenido de <https://previews.123rf.com/images/jackf/jackf1701/jackf170103256/69517866-c%C3%BApula-de-la-sala-de-las-dos-hermanas-sala-de-las-dos-hermanas-en-la-alhambra-granada-espa%C3%B1a.jpg>

Rangel, G. (2020). *Cultura y crafts*. Obtenido de <https://disenoblogcom.files.wordpress.com/2020/11/5-6.jpg?w=1024>

Salvador, A., & Morelo, M. (2018). *Movimientos en el plano y el espacio*. Obtenido de <https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2018/10/movimientos-en-el-plano-3eso.pdf>

Scribd. (s.f.). *Simetría en El Espacio*. Obtenido de <https://www.scribd.com/document/402448741/simetria-en-El-eEspacio-1>. Scribd

Sitios de España. (s.f.). *Mezquita-Catedral de Córdoba*. Obtenido de <https://www.sitiosdeespana.es/articulo/mezquita-catedral-de-cordoba>

Stewart, I. (2008). *Belleza y Verdad. Una historia de la simetría*. Crítica.

Super Prof. (s.f.). *Home*. Obtenido de <https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/analitica/traslaciones.html>

Super Prof. (s.f.). *Qué significa simetría central en Matemáticas*. Obtenido de <https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/analitica/simetria-central.html>

Valencia Oviedo, J. A. (1989). *La simetría en la cerámica pintada de la región central de Panamá*. Panamá : Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de maestro en ciencias con especialización en matemática .

Westreicher, G. (s.f.). *Poliedro regular*. Obtenido de <https://economipedia.com/definiciones/poliedro-regular.html#referencia>

Wikipedia Inc. (s.f.). *Reflexión deslizada*. Obtenido de [https://es.m.wikipedia.org/wiki/reflexi%C3%B3n\\_deslizada](https://es.m.wikipedia.org/wiki/reflexi%C3%B3n_deslizada).

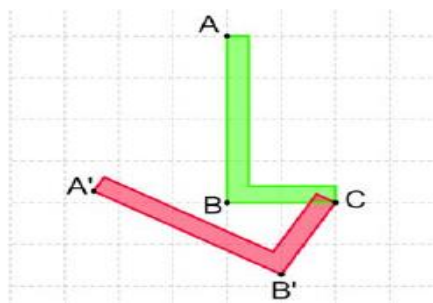
Wikipedia. (s.f.). *Archivo:Vitrail posterior de Iglesia del Carmen*. Obtenido de [https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Vitrail\\_posterior\\_de\\_Iglesia\\_del\\_Carmen.jpg](https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Vitrail_posterior_de_Iglesia_del_Carmen.jpg)

## Anexos

### Anexo 1

Figura 1

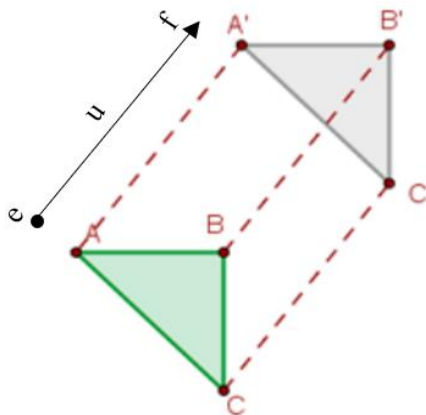
*Rotación de la letra L en el plano*



*Nota.* Tomada de *Movimientos en el plano y el espacio*, por A. Salvador y M. Morelo, 2018, <https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2018/10/movimientos-en-el-plano-3eso.pdf>

Figura 2

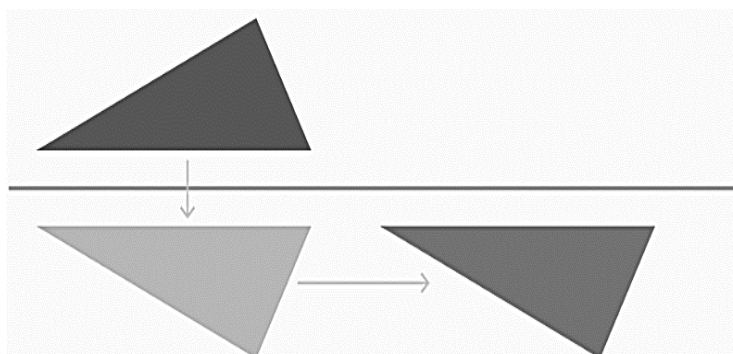
*Traslación del  $\triangle ABC$*



*Nota.* El punto  $A'$  es punto trasladado de  $A$ , de igual forma los otros puntos. Tomada de (homer, por Super Prof, s.f., <https://www.superprof.es/diccionario/matemáticas/analítica/traslaciones.html>

Figura 3

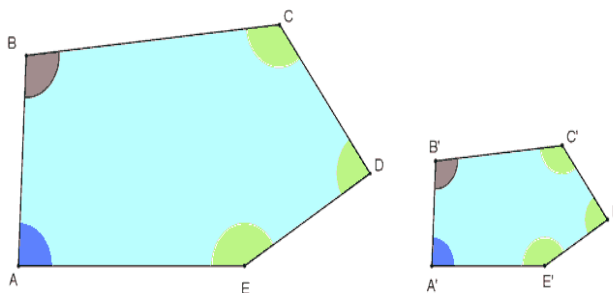
*Reflexión con desplazamiento de un triángulo*



*Nota.* Adaptada de *Reflexión deslizada*, por Wikipedia Inc., s.f., [https://es.m.wikipedia.org/wiki/reflexi%C3%B3n\\_deslizada](https://es.m.wikipedia.org/wiki/reflexi%C3%B3n_deslizada)).

Figura 4

*Polígono semejante*



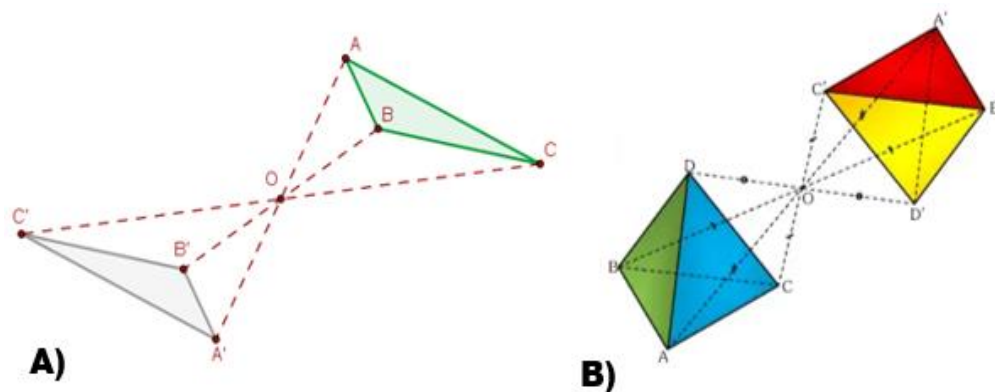
$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{C} = \hat{C}' \quad \hat{D} = \hat{D}' \quad \hat{E} = \hat{E}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

*Nota.* Tomado de *Semejanza y escalas*, por La Escuela en Casa, s.f., <https://laescuelaencasa.com/matematicas-2/proporcionalidad-y-semejanza/clase-6-semejanza-y-escalas/>

Figura 5

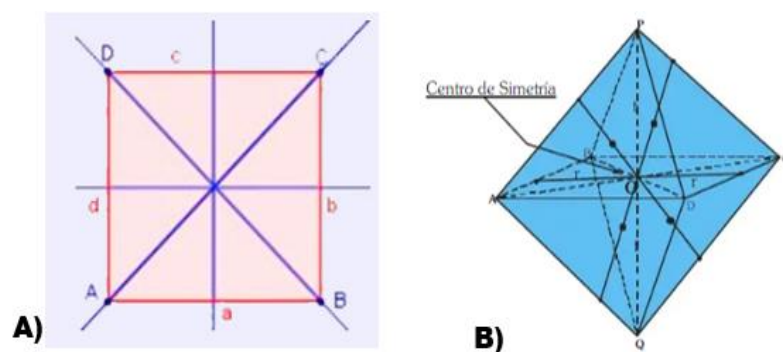
Simetría respecto a un punto en el plano y en el espacio



*Nota.* A) que es simetría central en matemáticas, superprof. B) Simetría en el espacio. Tomado de *Qué significa simetría central en Matemáticas*, por Super Prof, s.f., <https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/analitica/simetria-central.html>

Figura 6

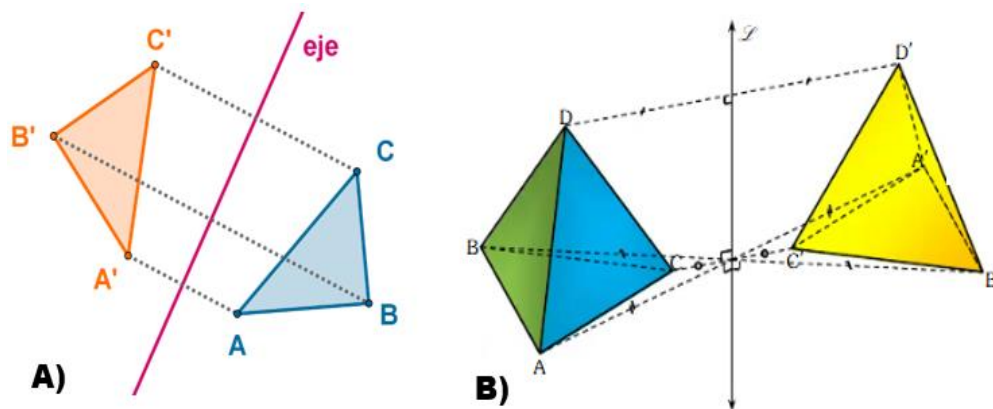
Simetría respecto a un punto de una figura



*Nota.* Adaptada a) de *¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado?* B) Simetría en el espacio. Tomado de *¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado?*, por Calcu World, s.f., <https://es.calcuworld.com/cuantos/cuantos-ejes-de-simetria-tiene-un-cuadrado/>.

Figura 7

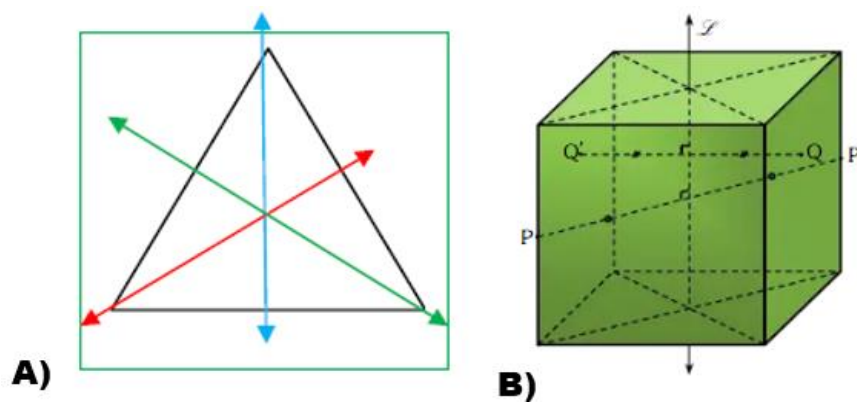
*Simetría respecto a una recta de dos figuras*



*Nota.* Adaptado a) Geometría plana de la ESO con Geogebra: Movimientos en el plano. b) Simetría en el espacio. Tomado de *Simetría en El Espacio*, por Scribd, s.f., <https://www.scribd.com/document/402448741/simetria-en-El-eEspacio-1>. Scribd

Figura 8

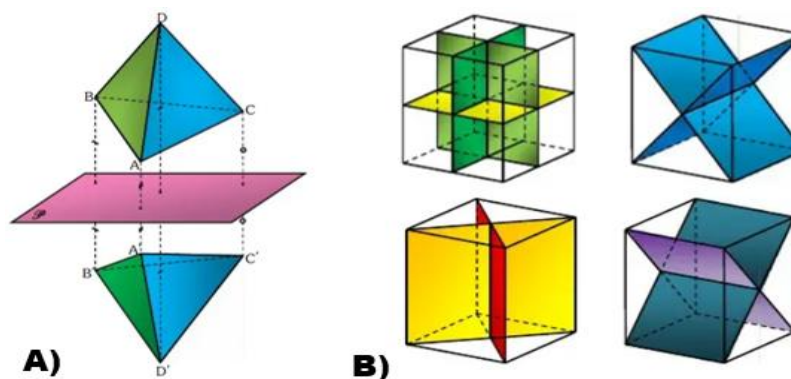
*Simetría axial de una figura*



*Nota.* Adapto a) Capítulo 8: Movimientos en el plano y el espacio. B) Simetría en el espacio. Tomado de *Simetría en El Espacio*, por Scribd, s.f., <https://www.scribd.com/document/402448741/simetria-en-El-eEspacio-1>. Scribd

Figura 9

*Simetría respecto a un plano*



*Nota.* Tomado de *Simetría en El Espacio*, por Scribd, s.f.,  
<https://www.scribd.com/document/402448741/simetria-en-El-eEspacio-1>. Scribd

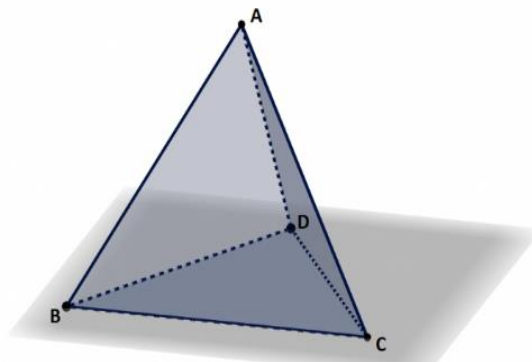
Figura 10

*Escalera helicoidal*



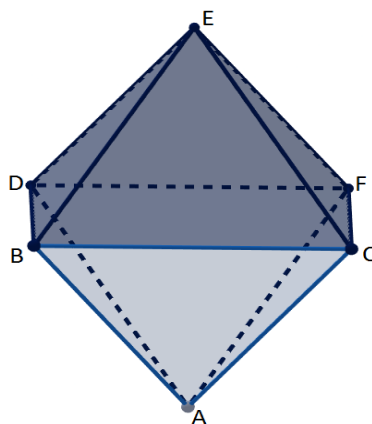
*Nota.* Tomado de *Espiral de metal, vector realista de escalera helicoidal*, por Freepik, s.f.,  
[https://www.freepik.es/vector-gratis/espiral-metal-vector-realista-escalera-helicoidal\\_5902350.htm](https://www.freepik.es/vector-gratis/espiral-metal-vector-realista-escalera-helicoidal_5902350.htm)

Figura 11

*Tetraedro*

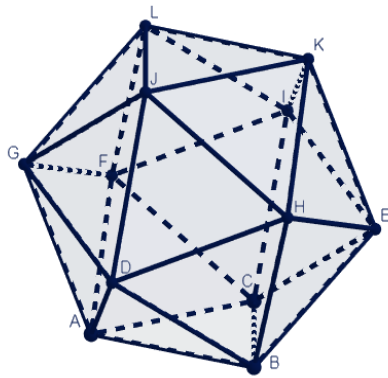
Nota. Tomado de *Poliedro regular*, por Westreicher, s.f.,  
<https://economipedia.com/definiciones/poliedro-regular.html#referencia>

Figura 12

*Octaedro*

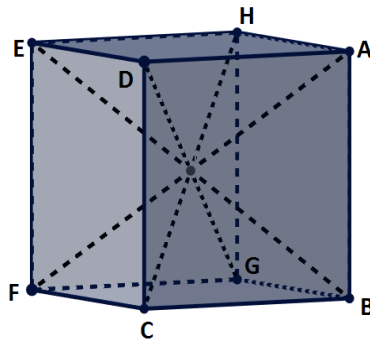
Nota. Tomado de *Poliedro regular*, por Westreicher, s.f.,  
<https://economipedia.com/definiciones/poliedro-regular.html#referencia>

Figura 13

*Icosaedro*

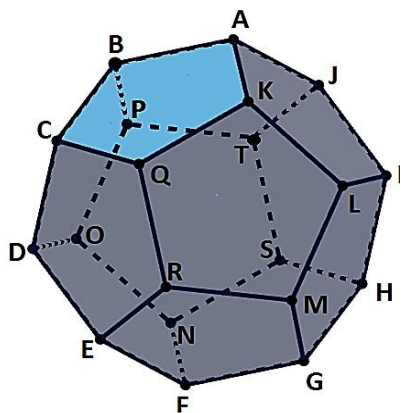
*Nota.* Tomado de *Poliedro regular*, por Westreicher, s.f.,  
<https://economipedia.com/definiciones/poliedro-regular.html#referencia>

Figura 14

*Hexaedro Regular*

*Nota.* Tomado de *Poliedro regular*, por Westreicher, s.f.,  
<https://economipedia.com/definiciones/poliedro-regular.html#referencia>

Figura 15

*Dodecaedro*

*Nota.* Tomado de *Poliedro regular*, por Westreicher, s.f.,  
<https://economipedia.com/definiciones/poliedro-regular.html#referencia>

Figura 16

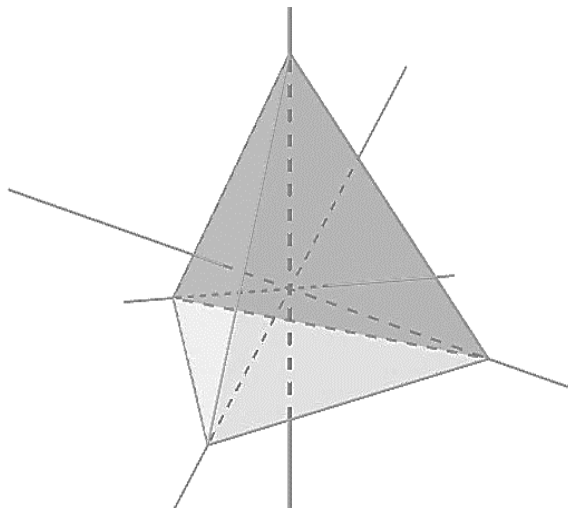
*Tetraedro con distintos ejes simétricos*

Figura 17

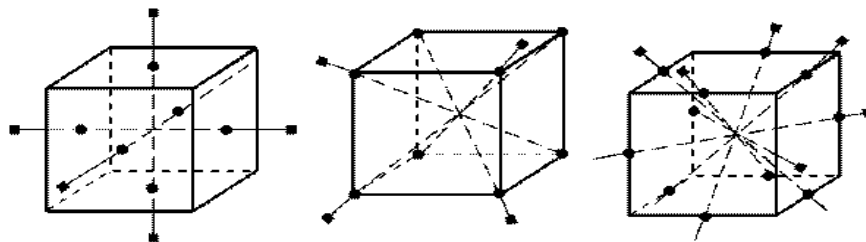
*Ejes de simetría del cubo*

Figura 18

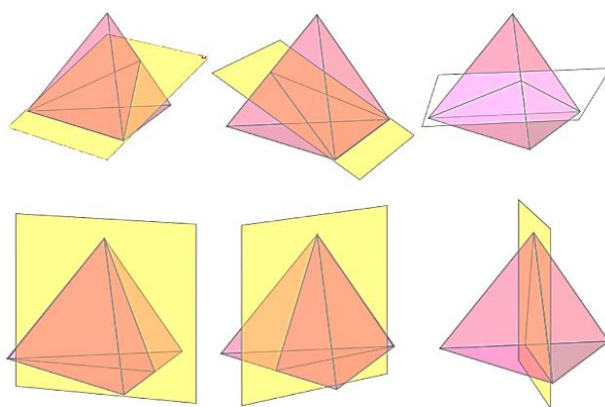
*Tetraedro con sus distintos planos simétricos*

Figura 19

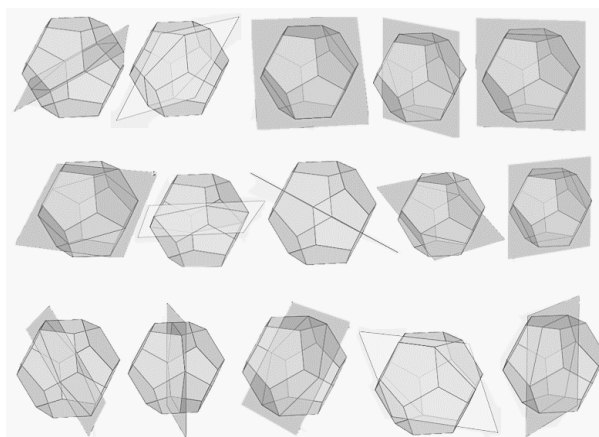
*Planos de simetría de octaedro*

Figura 20

*Planos de simetría del dodecaedro*

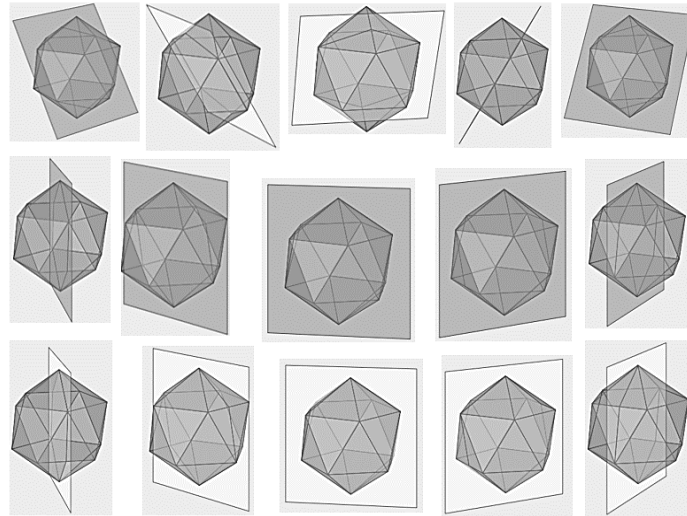
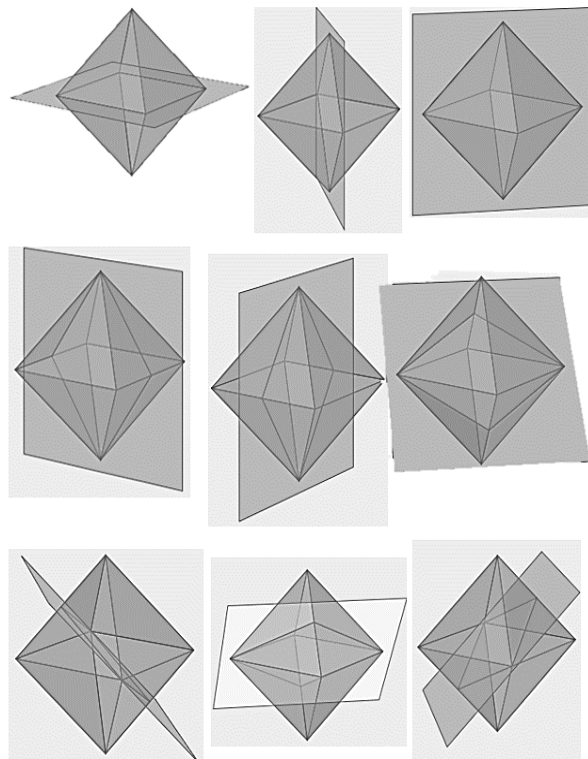


Figura 21

*Planos de simetría del icosaedro*



## Anexo 2.

Tabla 2.1

*Grupos de simetría de los frisos*


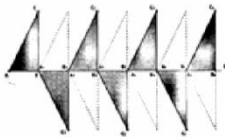
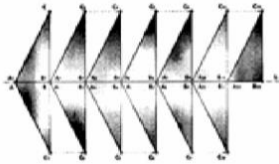
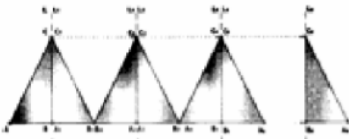
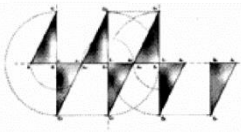
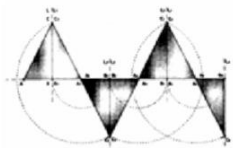
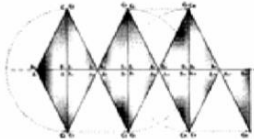
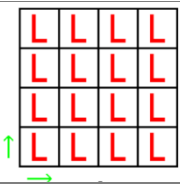
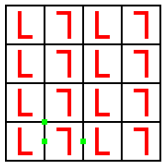
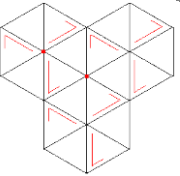
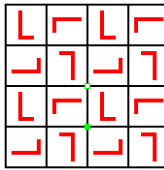
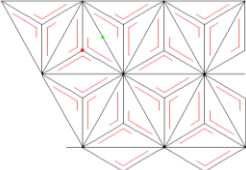
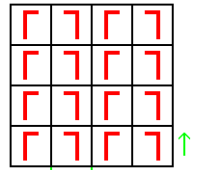
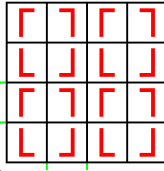
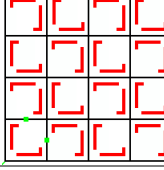
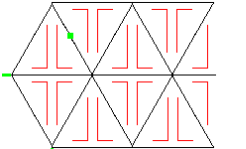
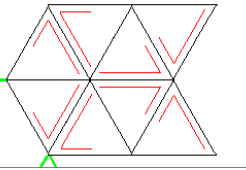
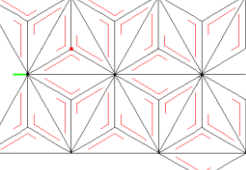
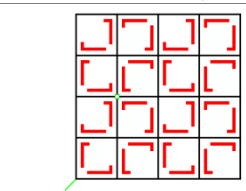
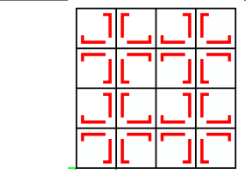
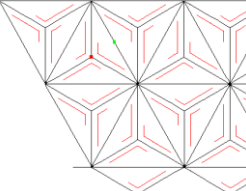
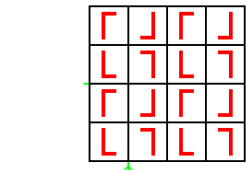
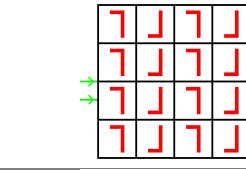
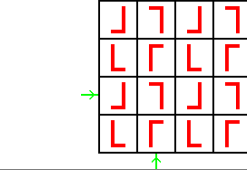
<b>Grupos de simetría de los frisos</b>	
Friso 1. Traslaciones	
Friso 2. Deslizamientos y simetrías horizontal	
Friso 3. Traslaciones y simetría horizontal	
Friso 4. Traslaciones y simetría vertical	
Friso 5. Traslaciones y giro en 180° o simetría central	
Friso 6. Giro en 180° o simetría central, simetría vertical y traslaciones	
Friso 7. Compuesto por traslaciones, giro en 180° y simetría central	

Tabla 2.2

*Grupos cristalográficos*

17 grupos cristalográficos planos	
p1: Dos traslaciones	
p2: Tres simetrías centrales (o giros de 180°)	
p3: Dos giros de 120°	
p4: Una simetría central (o giro de 180°) y un giro de 90°	
p6: Una simetría central y un giro de 120°	
pm: Dos simetrías axiales y una traslación	
pmm: Cuatro simetrías axiales en los lados de un rectángulo	
pmg: Una simetría axial y dos simetrías centrales	

cmm: Dos simetrías axiales perpendiculares y una simetría central	
p31m: Una simetría axial y un giro de $120^\circ$	
p3m1: Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo equilátero	
p4g: Una simetría axial y un giro de $90^\circ$	
p4m: Tres simetrías axiales en los lados de ángulos 45-45-90	
p6m: Tres simetrías axiales y una simetría con deslizamiento perpendicular	
cm: Una simetría axial y una simetría con deslizamiento perpendicular	
pg: Dos simetrías con deslizamiento paralelas	
pgg: Dos simetrías con deslizamiento perpendiculares	

**Anexo 3**

Figura 2

*Alhambra de Granada*

*Nota.* Tomado de *La Alhambra a través de los ojos de una arquitecta*, por A.del Amo, 2021, <https://images.hola.com/imagenes/viajes/20211020198120/granada-alhambra-visitas-guiadas-arquitecta/1-9-883/panoramica-de-la-alhambra-de-granada-en-otono-t.jpg>

Figura 2

*Mezquita-Catedral de Córdoba*

*Nota.* Tomada de Mezquita-Catedral de Córdoba, por Sitios de España, s.f., <https://www.sitiosdeespana.es/articulo/mezquita-catedral-de-cordoba>