



UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRIA EN MATEMATICA

EL MODELO DEL SEMIPLANO SUPERIOR DE LA GEOMETRIA HIPERBOLICA.
SU ENSEÑANZA CON LOS POSTULADOS DE BIRKHOFF.

GERMAN LUIS BEITIA

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS
PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIZACION EN MATEMATICA EDUCATIVA.

PANAMA, REPUBLICA DE PANAMA

1994

T^oM

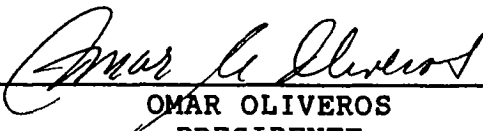


UNIVERSIDAD DE PANAMA

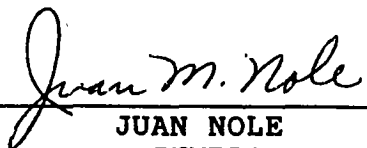
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

APROBADO:


OMAR OLIVEROS
PRESIDENTE


ANALIDA ARDILA
MIEMBRO


JUAN NOLE
MIEMBRO

FECHA; 26 DE AGOSTO DE 1994

SEP 16 1994

Obs. del autor

268752-

Ciudad Universitaria Octavio Méndez Pereira

Estafeta Universitaria

Panamá, Rép. de Panamá

DEDICATORIA

DEDICO EL PRESENTE TRABAJO A RUTH Y TATIANA, QUE
SON LA RAZON FUNDAMENTAL DE MI DESEO DE SUPERACION. POR
SER TAN COMPRENSIVAS Y PACIENTES CONMIGO.

A G R A D E C I M I E N T O S

Agradezco al profesor Omar Oliveros por aceptar dirigir este trabajo y más aún por sus atinadas observaciones y recomendaciones que han sido la razón fundamental en la culminación de esta investigación. También estoy muy agradecido a los profesores Analida Ardila y Juan M. Nole por sus acertados comentarios. Además quisiera agradecer a mis compañeros de promoción y al cuerpo de profesores del Programa Centroamericano de Maestría en Matemática, por toda la ayuda y apoyo que de manera incondicional me brindaron. A mi familia; mis padres y hermanos, a mis tios, por sus permanentes estímulos.

CONTENIDO

	página
INTRODUCCION	I
Capítulo I.	
MARCO TEORICO Y SUPUESTOS	
1.1 Introducción histórica del nacimiento de la geometría hiperbólica	1
1.2 Definición de geometría hiperbólica y conceptos básicos para deducir resultados que la caracterizan y que son distintos a la geometría euclídeana	5
1.2.1 Conceptos básicos de la geometría hiperbólica	8
1.2.2 Algunos resultados básicos de la geometría hiperbólica que son distintos a la geometría euclídeana	13
1.3 El problema de la consistencia de la geometría hiperbólica y el concepto general de interpretación de un sistema axiomático y modelo	27
1.3.1 Modelo del sistema axiomático	28
1.3.2 Consistencia y completitud del sistema axiomático	28
1.4 Conjunto de axiomas de la geometría hiperbólica plana	29
1.4.1 Axiomas de Birkhoff cuyo postulado central es el postulado de la regla	29

Capítulo II

DEMOSTRACION FORMAL Y CON HERRAMIENTAS ELEMENTALES
DE QUE EL SEMIPLANO SUPERIOR SATISFACE LOS AXIOMAS
DE BIRKHOFF.

2.1 Modelo del semiplano superior	32
2.1.1 Características	32
2.2 Modelo del semiplano superior a la luz de la geometría analítica y la trigonometría	34
2.2.1 El plano hiperbólico. El punto hiperbólico y la recta hiperbólica	34
2.2.1.1 Plano hiperbólico	35
2.2.1.2 Punto hiperbólico	36
2.2.1.3 Rectas hiperbólicas	36
2.2.2 Medida angular y distancia entre dos puntos	38
2.2.2.1 Medida angular	38
2.2.2.2 Distancia entre dos puntos	40
2.3 Los axiomas de Birkhoff en el modelo del semiplano superior	43

Capítulo III

IMPORTANCIA DEL MODELO. VENTAJAS Y LIMITACIONES.

3.1 Prueba que la consistencia de la geometría hiperbólica se sigue de la geometría euclídeana	74
--	----

	página
3.2 Independencia del quinto postulado de Euclides de la geometría neutra	74
3.3 Proporciona un método de demostración de resultados de la geometría euclideana	75
3.4 El Modelo sirve para mostrar como lucen algunas curvas características de la geometría hiperbólica	77
3.4.1 Haces en la geometría hiperbólica	77
3.4.2 Curvas características de la geometría hiperbólica	79
3.5 Importancia del modelo en la enseñanza	83
3.5.1 Fórmula de Lobachevski-Bolyai	83
3.5.2 Relaciones trigonométricas básicas de Lobachevski	86
3.6 La geometría hiperbólica en regiones infinitesimales	91
3.7 Prerrequisitos para la enseñanza de la geometría hiperbólica, haciendo uso del modelo del semiplano superior de Poincaré	92
3.8 Ventajas de enseñar geometría hiperbólica con el modelo del semiplano superior de Poincaré	94
3.9 Posibles aplicaciones de la geometría hiperbólica	95
3.10 Limitaciones	95

	Página
CONCLUSIONES	97
RECOMENDACIONES	98
BIBLIOGRAFIA	99

INTRODUCCION

Es de todos conocido, la grave crisis por la que atraviesa la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, atribuyéndosele en muchos casos la responsabilidad a los docentes que prefieren evitarla, en otros a la falta de propuestas metodológicas que permitan que nuestros estudiantes se hagan del conocimiento geométrico.

Sin embargo, nos preguntamos si en Nuestra Máxima Casa de Estudios Superiores estamos creando las condiciones para que los docentes cuenten con los conocimientos y las técnicas metodológicas que le permitan desarrollar un estudio de la geometría al nivel que se plantea en los programas del Ministerio de Educación.

En cuanto a las técnicas metodológicas, creemos que se hacen grandes esfuerzos por solucionar esta dificultad a través de los constantes Seminarios y Ciclos de Conferencias que se imparten en la Universidad de Panamá, además de los Congresos Nacionales e Internacionales que se han realizado en estos tres últimos años. Pero en lo que se refiere a los conocimientos que deben reunir nuestros egresados de la carrera de Licenciatura en Matemática, podemos señalar que existen dos opciones (Pura y Aplicada) que no contemplan siquiera un curso de geometría euclideana mucho menos algún curso de geometría no-euclideana, mientras que la otra opción (Educativa), lo contempla de manera optativa.

Nuestra propuesta pretende desarrollar desde el primer año de estudios de la especialidad, un curso de Geometría Hiperbólica que tendría como prerrequisito un curso de

Geometría Euclídeana, es decir en el primer semestre académico se desarrollaría el curso de Geometría Euclídeana y en el segundo semestre el de Geometría Hiperbólica.

Este curso de Geometría Hiperbólica se presentará usando el Modelo del Semiplano Superior de Poincaré como modelo euclídeano de la geometría hiperbólica y los axiomas de Birkhoff lo cual es posible, según el artículo "The Upper Half Plane Model for Hiperbolic Geometry" presentado por Richard S. Millman, en donde sostiene que se puede introducir desde los últimos años de escuela secundaria, dado que las herramientas matemáticas que se necesitan, como lo son la geometría euclídeana, la geometría analítica y la trigonometría se conocen previamente.

Nuestro trabajo está estructurado de la siguiente manera:

Un primer capítulo que corresponde al Marco teórico en donde se describen aspectos tales como los orígenes históricos de la geometría hiperbólica. Definimos geometría hiperbólica y los conceptos básicos que la caracterizan y que son distintos en la geometría euclídeana. Presentamos el problema de la consistencia de la geometría hiperbólica y el concepto general de interpretación de un sistema axiomático.

Finalmente se enumeran el conjunto de Axiomas de Birkhoff que serán la base postulacional del trabajo.

Un segundo capítulo que presenta las demostraciones de que los Axiomas de Birkhoff se satisfacen en el Modelo del Semiplano Superior de Poincaré, utilizando herramientas

elementales de la geometría euclídeana, geometría analítica y la trigonometría.

El tercer capítulo presenta la importancia del Modelo en lo concerniente a la enseñanza, en donde deducimos la famosa fórmula de Lobachevski-Bolyai, las relaciones trigonométricas básicas de Lobachevski y el comportamiento de la geometría hiperbólica en regiones infinitesimales; además de proporcionar un método de demostración de resultados de la geometría euclídeana. Presenta por otro lado, la forma tan peculiar como lucen algunas curvas características de la geometría hiperbólica en el Modelo. Finalmente describe los prerequisites que nuestros estudiantes necesitan para el estudio de la geometría hiperbólica, bajo este enfoque; además de presentar algunas de las limitaciones que se dieron al realizar este trabajo.

Creemos que se deja abierta la posibilidad de seguir investigando en torno a las aplicaciones que tiene la geometría hiperbólica en otras áreas de la ciencia como lo son: El análisis, la aritmética, la geometría diferencial, la teoría de la relatividad y otros, lo cual escapaba a los propósitos que motivaron nuestra investigación, que se centra en el aspecto del dual enseñanza-aprendizaje de la geometría.

Por último señalamos, nuestro interés en que la presente Propuesta Metodológica se ponga en práctica en la Licenciatura en Matemática, a fin de atender aspectos que se descuidan en la formación de nuestras estudiantes, cuyo único campo de trabajo está en las aulas de clases.

CAPITULO I

MARCO TEORICO Y SUPUESTOS

1.1 Introducción Histórica sobre el nacimiento de la Geometría Hiperbólica.

Es de todos conocidos la influencia que durante veintitres siglos se dió en el estudio de la Geometría, con la geometría euclideana presentada por Euclides (330-275 a. C), en su obra titulada "Los Elementos". En esta obra se presenta la primera organización de procesos deductivos de la cual se tiene conocimiento, dado que antes de ésta, el estudio de la geometría presentaba según Oliveros [Oliveros, Omar, 1992], características tales como:

- Una naturaleza Empírica
- Se aplicaba en la solución de problemas particulares.
- No se presentaba distinción entre resultados exactos y aproximados.
- No se distinguía entre conceptos aritméticos y geométricos⁽¹⁾.

Dentro del trabajo presentado por Euclides se tienen nueve axiomas que llamó "nociones comunes", los cuales son resultados que se verifican en cualquier rama científica y cinco postulados que se verifican

(1) Estas características corresponden a la geometría Pre-helénica, básicamente en los trabajos de los Babilonios y los Egipcios.

en su geometría (dado que responden a una ciencia en particular).

De los cinco postulados, el postulado más polémico es el quinto el cual dice:

"Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos que sumados son menores que dos rectos, entonces las dos rectas prolongadas se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos".

El carácter polémico de este postulado se da en función de que presenta ciertas características que lo diferencia del resto de los postulados entre las que podemos citar,

1. No cumplía el ideal griego de que lo que se postula sea evidente por si mismo.
2. Técnicamente es el recíproco de la proposición I.17⁽²⁾
3. Euclides evitó su uso en las primeras veintiocho proposiciones, a pesar de que algunas de estas proposiciones se demostraban de manera más sencilla usando el Quinto postulado.

Estas características provocaron que desde tiempos muy remotos, por ejemplo con Ptolomeo (siglo II d.C.), se intentara demostrar el quinto postulado, recurriendo o utilizando proposiciones equivalentes al quinto postulado de Euclides; Sin embargo, todos estos intentos resultaron

(2) La proposición I.17 en "Los Elementos" dice: "En todo triángulo dos ángulos, tomados en junto, son menores que dos rectos"

fallidos; pues suponían lo que había que demostrar. Lo que provocó que los matemáticos del siglo XIX que tenían perdida gran parte de la fe en demostrarlo utilizaran la técnica de Saccheri (1667-1733) de negar el quinto postulado para encontrarse con contradicciones. La técnica de Saccheri⁽⁸⁾ consistía en suponer las hipótesis del ángulo Obtuso y Agudo.

De esta forma si la hipótesis del ángulo agudo no conduce a contradicción alguna, entonces estamos frente a un postulado que complementado con los cuatro primeros de Euclides forman otra geometría tan consistente como la euclidea, que a partir de Felix Klein se llamó Geometría Hiperbólica, a la cual nos referiremos posteriormente..

Según Eves [Eves, Howard, 1985], el primero en llegar a la conclusión de que no existía contradicción al suponer la hipótesis del ángulo agudo fue Gauss (1777-1855), aunque no publicó nada, lo cual se atribuye a su temor a las críticas de los seguidores de la geometría euclidea. Aunque en 1831 se decide a redactar una "Geometría No Euclidea", convencido del rigor de sus resultados.

Otro de los matemáticos que trabajó en esta línea fue

(8) Saccheri usó su cuadrilátero (cuadrilátero isósceles cuyos ángulos de la base son rectos), y supuso que la suma de los ángulos que no son rectos es o mayor que dos rectos (hipótesis del ángulo obtuso) o menor que dos rectos (hipótesis del ángulo agudo). Sabía, Saccheri que la hipótesis del ángulo recto era equivalente al quinto postulado de Euclides.

Bolyai (1802-1860), quien publica un escrito en 1832, de 26 páginas aparecida en el apéndice de una obra didáctica de su padre. En esta obra expone lo que el llamó una geometría absoluta la cual es independiente del quinto postulado.

Finalmente tenemos a Lobachevski (1793-1856), quien presenta un escrito en 1829 el cual es un trabajo muy similar al de Bolyai pero más constructivo, en donde presenta un desarrollo geométrico analítico, sin figuras compuesta por teoremas, fórmulas, una trigonometría que el llamó "Imaginaria".

1.2 Definición de Geometría Hiperbólica y conceptos básicos para deducir resultados que la caracterizan y que son distintos a la geometría euclídeana.

Para dar una definición de geometría hiperbólica, primeramente vamos a establecer lo que se conoce como la geometría neutra.

La geometría neutra es aquella formada por los cuatro primeros postulados y las primeras veintiocho proposiciones del libro I de los Elementos de Euclides. Los postulados establecen:

1. La posibilidad de trazar una línea recta que pase por dos puntos dados.
2. La posibilidad de extender una línea recta finita continuamente sobre una línea recta.
3. La posibilidad de describir un círculo, dado cualquier centro y cualquier distancia (como radio).
4. La igualdad de todos los ángulos rectos.

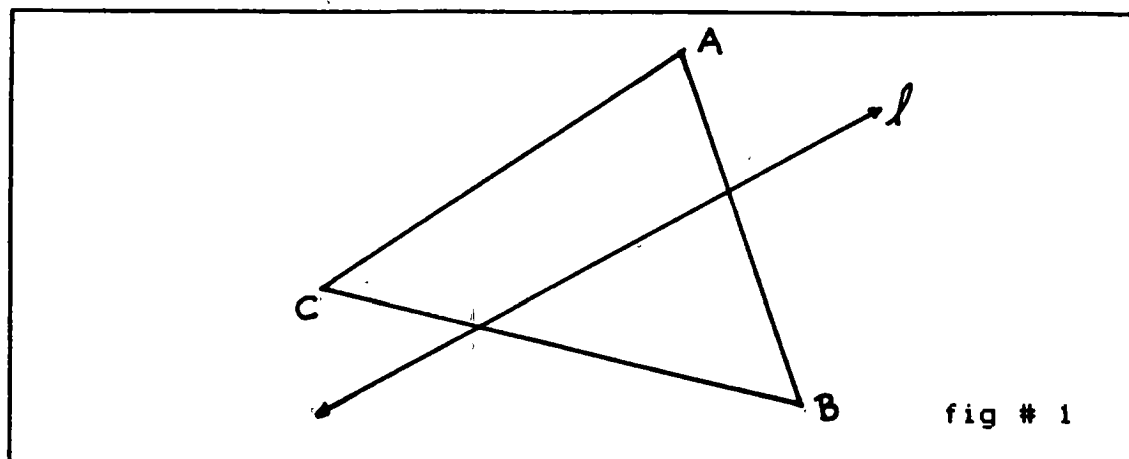
Las veintiocho primeras proposiciones del libro I de los elementos de Euclides son independientes del quinto postulado, es decir todas estas proposiciones pueden ser demostradas a partir de los primeros cuatro postulados, de esta forma podemos decir que la geometría neutra no utiliza el quinto postulado, ya que en ésta no se dice nada con relación a la existencia y unicidad de paralelas a una recta, respecto de un punto exterior (proposición equivalente al quinto postulado).

Por otro lado , dado que la geometría neutra con estos cuatro postulados no resulta completa para demostrar las proposiciones que forman parte de ella; debido a las fallas propias de ésta, entre la que podemos citar, el no postular la intersección entre rectas y usarlo libremente en sus proposiciones. Entonces tomaremos del moderno tratamiento postulacional de David Hilbert (1862-1943) los siguientes postulados que nos servirán de complemento, que era el propósito que había motivado a Hilbert .

Presentaremos un axioma que tiene que ver con la intersección de una recta dada y los lados de un triángulo, que es equivalente a uno de los axiomas presentados por Hilbert. Algunos autores presentan este axioma y no el presentado originalmente por Hilbert, por ejemplo Efimov, N. V. [Efimov, N. V., 1984] lo presenta como el cuarto axioma en el grupo de axiomas de orden.

Axioma de Pasch:

Dado un triángulo y una recta en el mismo plano, distinta de los lados del triángulo. Si la recta corta a un lado del triángulo sin pasar por sus vértices entonces corta a uno y sólo uno de los otros dos lados del triángulo (fig # 1)

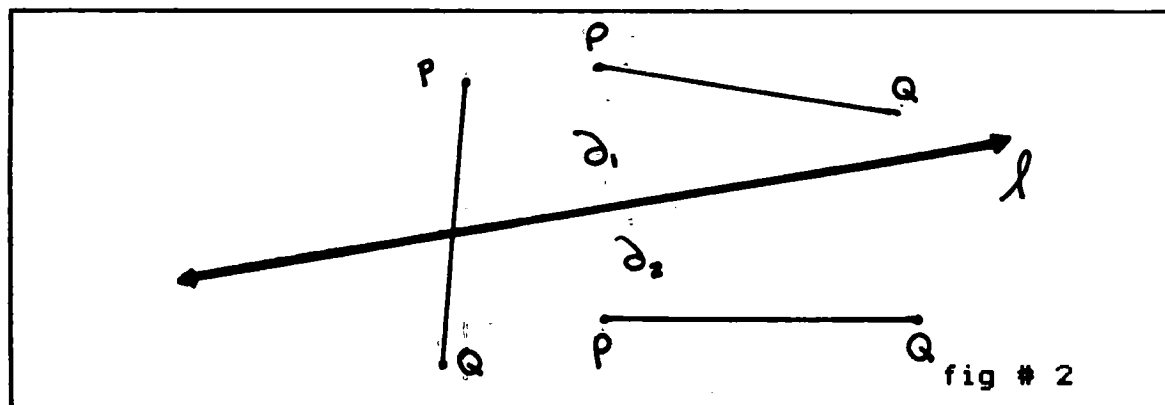


Otro axioma que será de mucha utilidad es el Axioma de Separación del Plano.

Axioma de Separación del plano:

Sea l una recta en el plano la cual lo divide en dos semiplanos disyuntos θ_1 y θ_2 . Sean P y Q dos puntos que no pertenezcan a l . Entonces ocurre que:

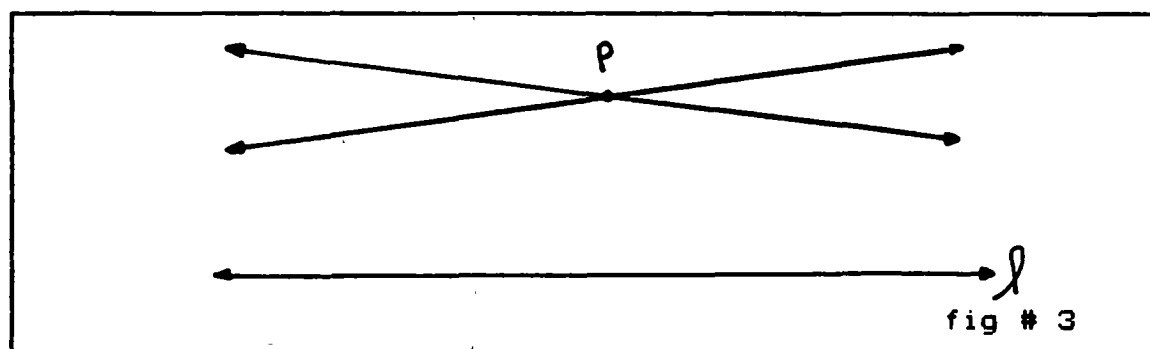
- i. Si $P \in \theta_1$ y $Q \in \theta_2$; El segmento PQ corta a l .
- ii. Si $P, Q \in \theta_1$ ó $P, Q \in \theta_2$; El segmento PQ no corta a l (fig # 2).



Consideremos por otro lado el siguiente postulado:

Postulado de las paralelas de Lobachevski:

Dada una recta l en el plano y un punto P que no pertenezca a l , pueden trazarse al menos dos rectas que pasan por P que no cortan a l (fig # 3).



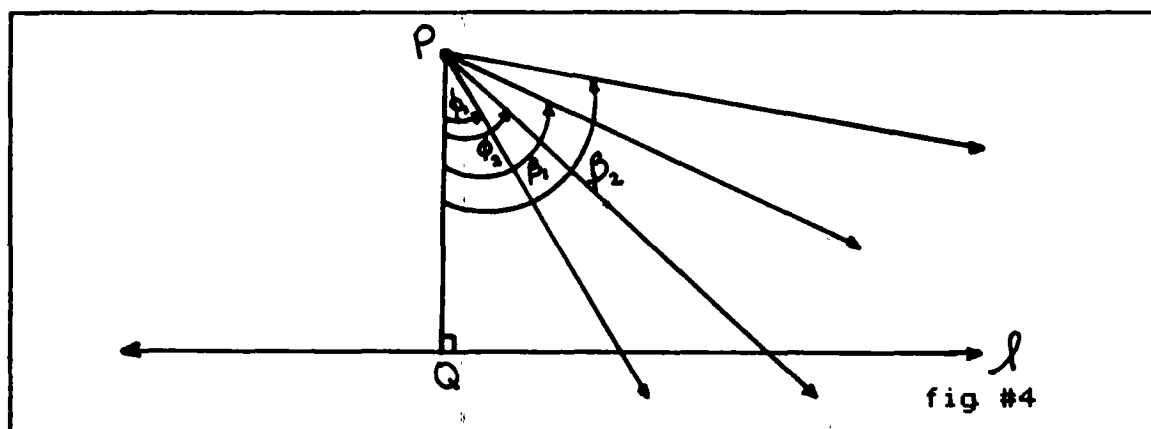
La teoría geométrica que se desarrolla a partir de la geometría neutra y este postulado, el cual es una negación (niega la unicidad de la paralela) del quinto de euclides [Moreno y Bromberg, 1987]; es lo que conocemos como geometría hiperbólica.

1.2.1 Conceptos básicos de la geometría hiperbólica:

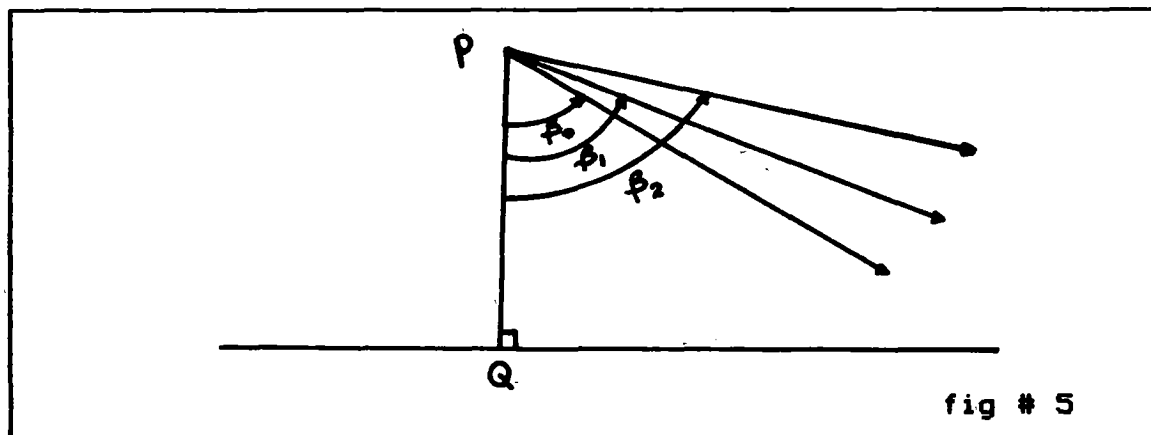
Angulo de paralelismo:

Consideremos una recta l y un punto P que no pertenezca a l . Desde P bajemos la perpendicular a l (lo cual es perfectamente posible ya que esta proposición es de la geometría neutra) y llamémosle Q al pie de la perpendicular. Ahora consideremos del lado derecho

de PQ (como se muestra en la figura # 4) dos conjuntos de rectas bien específicas; las rectas que pasan por P y que cortan a l , y el de las rectas que pasan por P y que no cortan a l lo cual es posible ya que el postulado de Lobachevski garantiza la existencia de al menos dos rectas que no cortan a l .



Le llamaremos ϕ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) a los ángulos que forman PQ con las rectas que pasan por P y que corta a l ; por otro lado llamaremos β_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) a los ángulos que forman PQ con las rectas que pasan por P y que no cortan a l (fig #5).



Definición:

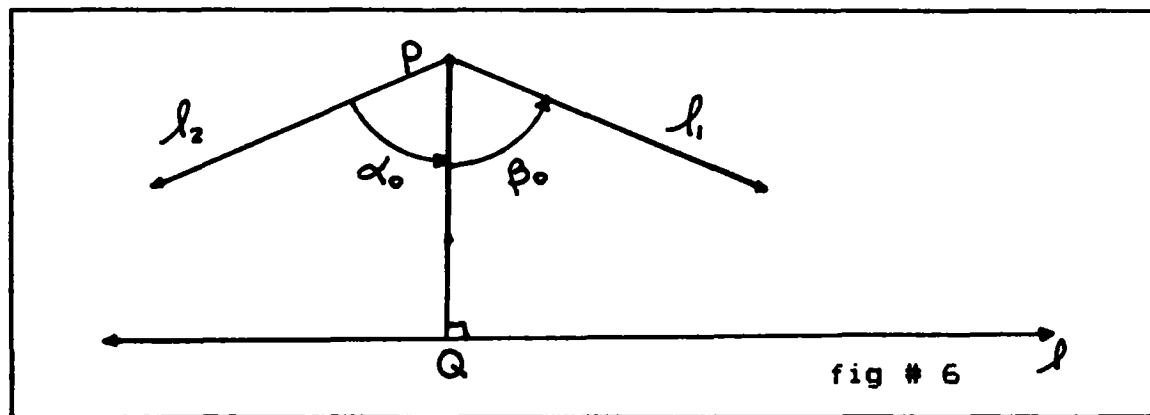
Llamaremos ángulo de paralelismo al menor de los ángulos que forman PQ con las rectas que pasan por P y que no cortan a l ; el cual denotaremos β_0 (fig # 5).

Esto es $\beta_0 = \min \{\beta_i / \beta_i \text{ es el ángulo que forma PQ con la recta que esta del lado derecho de PQ que pasa por P y que no corta a } l\}..$

β_0 existe ya que $\{\beta_i\}$ es un conjunto acotado inferiormente, dado que, $\beta_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots$

Definición:

Llamaremos paralela a derecha a la recta que pasando por P, corresponde al lado terminal del ángulo β_0 que tiene como lado inicial a PQ. La cual denotaremos l_1 (fig # 6).



De manera análoga, por simetría podemos construir el ángulo de paralelismo del lado izquierdo con las rectas que pasan por P y que no cortan a l , el cual llamaremos α_0 ; de igual forma tendremos la paralela a izquierda, la cual denotaremos l_2 (fig # 6).

Es fácil probar que $\alpha_0 \cong \beta_0$. Además que $\beta_0 < 90^\circ$.

Veamos su demostración.

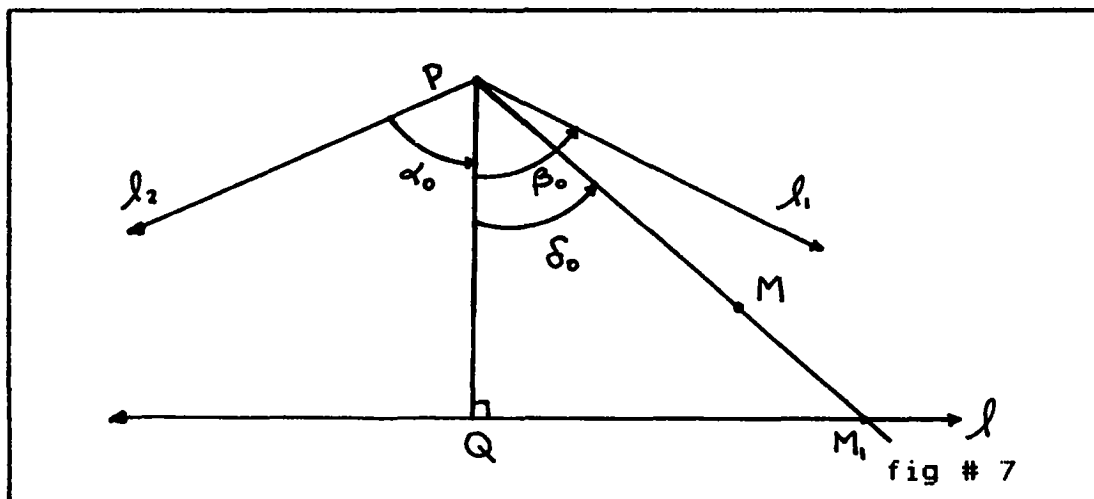
Demostración:

i. Supongamos que $\alpha_0 < \beta_0$ entonces existe un rayo PM en el interior de β_0 tal que $\alpha_0 \cong \delta_0$; con $\delta_0 = \angle QPM$. Así PM corta a l ($\delta_0 < \beta_0$) en un punto M_1 con lo cual se forma el triángulo PQM_1 .

Comparemos este triángulo con la figura formada por l_2 , PQ y l (fig# 7).

$$\begin{aligned} \delta_0 &\cong \alpha_0 && \text{(por construcción)} \\ PQ &\cong PQ && \text{(lado común)} \end{aligned}$$

Además $\angle PQM_1$ es congruente con el ángulo adyacente formado por PQ y l (en el lado opuesto de PQ). Así por el criterio de congruencia ángulo-lado-ángulo (que está en la geometría neutra) el triángulo PQM_1 es congruente con la figura formada por l_2 , PQ y l ; con lo cual l_2 y l se cortan, contradiciendo que l_2 es la paralela a izquierda de l .



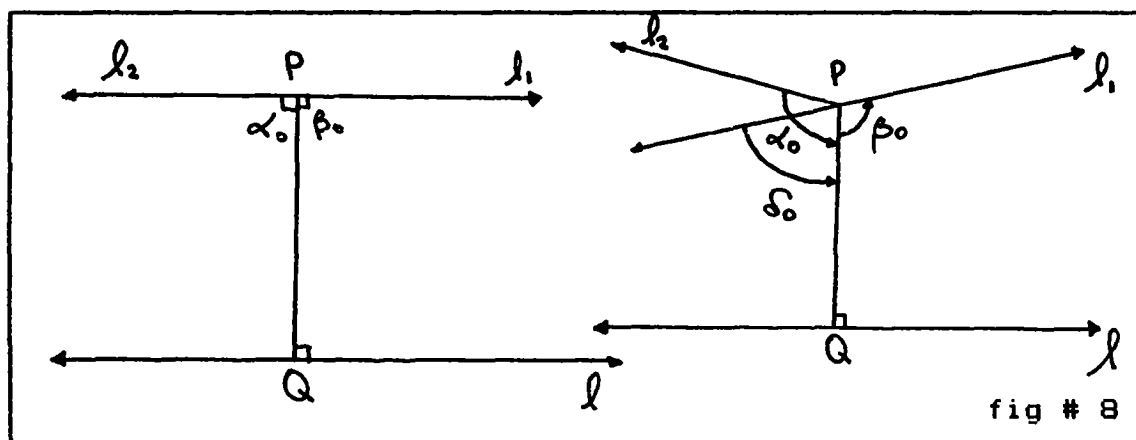
ii. Si suponemos que $\alpha_0 > \beta_0$ llegaremos a una contradicción similar. Así concluimos que $\alpha_0 \cong \beta_0$.

Probemos ahora que el ángulo de paralelismo es agudo (fig # 8)

i. Supongamos que β_0 es recto y como ya probamos que $\alpha_0 = \beta_0$ entonces l_1 y l_2 serían una misma recta dado que α_0 y β_0 son ángulos con un lado común y son suplementarios así los lados no comunes son semirectas opuestas. Veamos que es la única paralela; Para esto supongamos que existe otra paralela a l , ésta formaría con PQ un ángulo menor que α_0 ó menor que β_0 . Así esta recta cortaría a l . Lo cual contradice el Postulado de Lobachevski.

ii. Supongamos ahora que β_0 es obtuso. Llamémosle δ_0 al suplemento de β_0 respecto de PQ . De donde $\delta_0 < 90^\circ$ y l_1 no corta a l . Por otro lado como $\alpha_0 = \beta_0 > 90^\circ$, entonces $\alpha_0 > \delta_0$. Así l_2 corta a l lo cual es una contradicción.

De esta forma se concluye que β_0 es agudo.



1.2.2 Algunos resultados Básicos de la Geometría Hiperbólica que son distintos a la Geometría Euclideana.

A continuación vamos a presentar en un cuadro comparativo, algunos resultados que caracterizan a la geometría hiperbólica, con sus opuestos de la geometría euclideana; los cuales serán demostrados más adelante.

CUADRO COMPARATIVO	
G. EUCLIDEANA	G. HIPERBOLICA
Dada una recta y un punto exterior a la recta, existe una única recta que no corta a la dada.	Dada una recta y un punto exterior a la recta, existen al menos dos rectas que no cortan a la dada.
El ángulo de paralelismo no depende de la distancia entre las paralelas.	El ángulo de paralelismo depende de la distancia entre las paralelas.
La suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180° .	La suma de los ángulos internos de todo triángulo es menor de 180° .
La suma de los ángulos internos de todo cuadrilátero es 360° .	La suma de los ángulos internos de todo cuadrilátero es menor de 360° .

Consideremos los siguientes teoremas relacionados con el CUADRO COMPARATIVO que acabamos de presentar los cuales se referirán a resultados de la geometría hiperbólica.

Teorema # 1:

"Dado un triángulo y una recta que no contenga ningún lado del triángulo y que estén en el mismo plano. Si la recta corta un vértice (entrando) entonces corta al lado opuesto.

Demostración: Sea el triángulo ABC un triángulo cualquiera, sea l la recta que no contiene ningún lado del triángulo ABC. Supongamos sin pérdida de generalidad que l pasa por el vértice B, con lo cual AC es el lado opuesto (fig # 9).

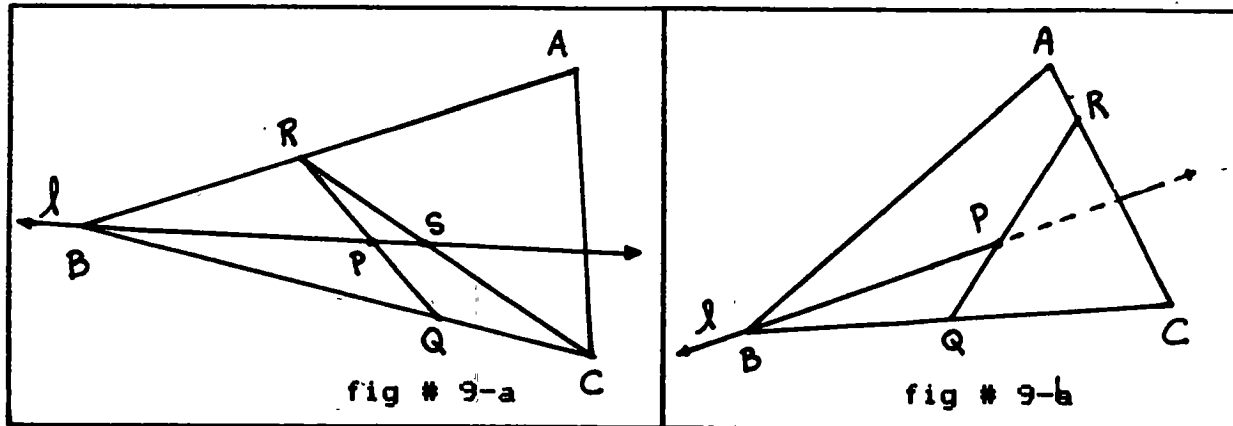
Sea P un punto de l en el interior del triángulo ABC, sea Q un punto de BC. Tracemos QP; de donde se dan las siguientes posibilidades (Por axioma de Pasch).

- QP corta a AB (fig # 9-a) ó
- QP corta a AC (fig # 9-b)

i) Supongamos que QP corta a AB, y llamémosle R a este punto. Tracemos ahora RC para formar los triángulos RQC y RAC. Como l corta a RQ y no puede cortar a QC (ya que si lo cortara por postulado #1 de euclides l y BC coinciden lo cual contradice la hipótesis), entonces corta a RC; llamémosle S al punto de l que corta a RC. De manera análoga en el triángulo RAC, como l corta a RC y no puede cortar a RA (ya que coincidirían l y AB), entonces corta a AC (que es el lado opuesto al vértice B).

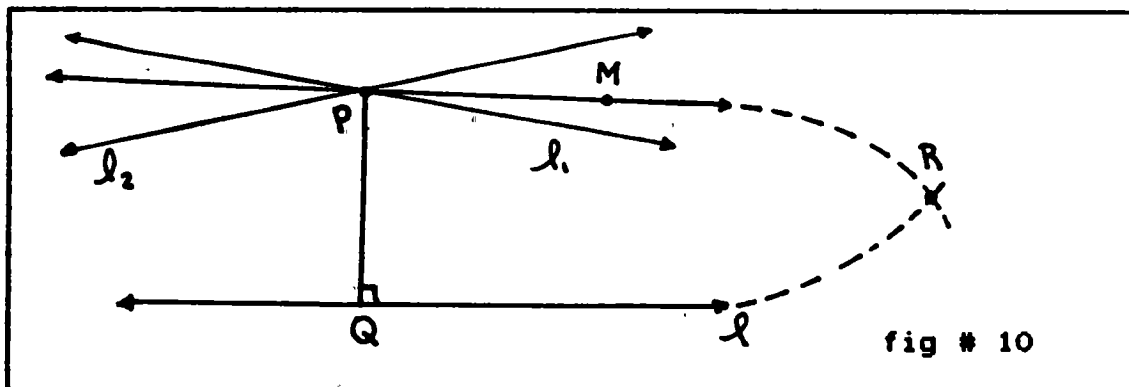
ii) Supongamos que QP corta a AC, llamémosle R al punto de AC donde se cortan. Consideremos el triángulo RQC y como l

corta a RQ (en el punto P) y como no puede cortar a QC (ya que coincidirían l y BC) entonces l corta a RC con lo cual l corta a AC como queríamos demostrar.



Teorema #2:

Dada una recta y un punto exterior a la misma, por el punto pasan infinitas rectas que no cortan a la recta dada (fig # 10).

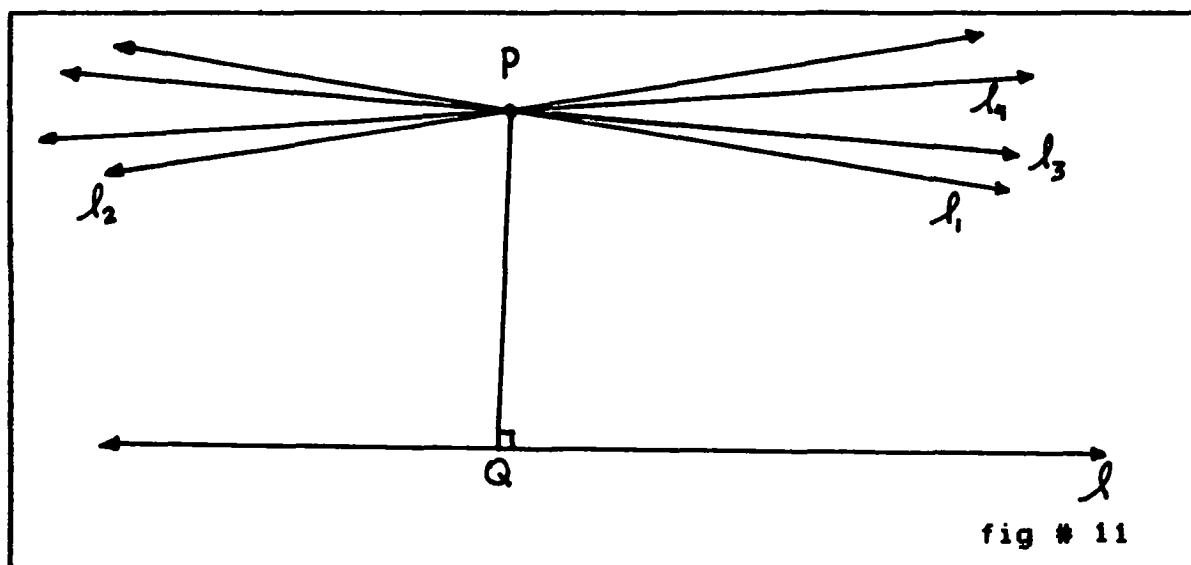


Demostración:

Sea l una recta y P un punto exterior a l . Sea Q el pie de la perpendicular a l que pasa por P . Por el postulado de Lobachevski, sean l_1 y l_2 las paralelas a l a derecha e izquierda respectivamente desde P . Sea PM una recta cualquiera entre l_1 y l_2 (la cual hace con PQ un ángulo mayor que el ángulo de paralelismo). Supongamos que PM corta a l y llamémosle R a este punto de intersección. Así se forma el triángulo PQR . Pero por el teorema # 1, como l_1 pasa por P entonces corta al lado opuesto, es decir a l ; lo cual contradice que l_1 es paralela a derecha a l . Con lo cual concluimos que PM no corta a l .

Definición:

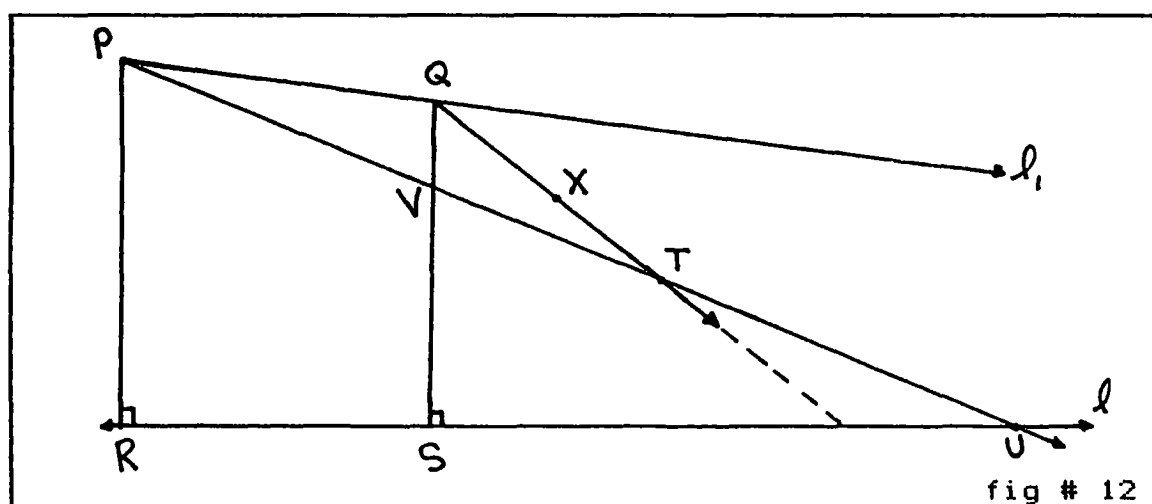
Llamaremos al conjunto de rectas no cortantes distintas de l_1 y l_2 , las hiperparalelas a l por P (fig # 11).



Teorema # 3: Sea l una recta, P un punto fuera de l . Sea l_1 la paralela en algunos de los sentidos a l por P . Si Q es otro punto de l_1 . Entonces l_1 es paralela a l por Q en el mismo sentido.

Demostración:

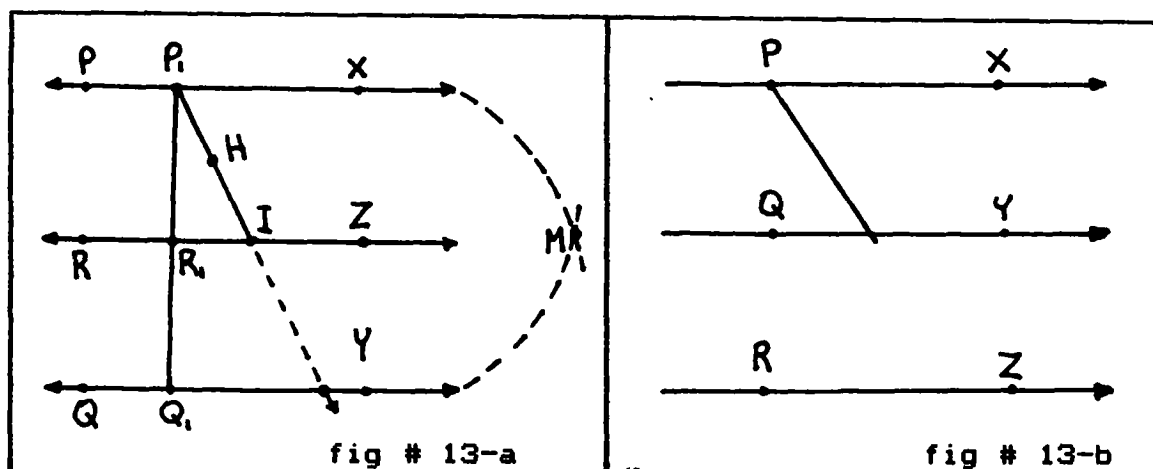
Sean R y S los pies de las alturas desde P y Q respectivamente a l , así PR y QS son perpendiculares a l . Como l_1 no corta a l , debemos probar que todo rayo con origen en Q y en el interior del ángulo que forman QS y l_1 , corta a l . Sea QX este rayo. Consideremos a T un punto en QX . Así el rayo PT corta a l en un punto que llamaremos U , ya que el rayo PT está en el interior del ángulo de paralelismo que se forma en P . De esta forma tenemos el triángulo PRU . Como QS corta a RU y no corta a PR (ya que si lo cortara, esto contradice la proposición 16 de la geometría neutra), entonces por el axioma de Pasch corta a PU en un punto que llamaremos V . De esta manera se forma el triángulo VSU . Como el rayo QX corta a VU en T y no puede cortar a VS (ya que si lo cortara QX y QS coincidirían por postulado 1, lo cual no puede ser), entonces por el axioma de Pasch corta a SU con lo cual QX corta a l (fig # 12).



El teorema anterior nos permite asegurar que dos rectas son paralelas en el mismo sentido, no importa desde que punto.

Teorema # 4:

Si dos rectas son paralelas a una tercera en el mismo sentido, entonces son paralelas entre sí .



Demostración:

Sea RZ una recta y sean PX, QY las rectas paralelas a la recta RZ en el mismo sentido. Consideremos los siguientes casos:

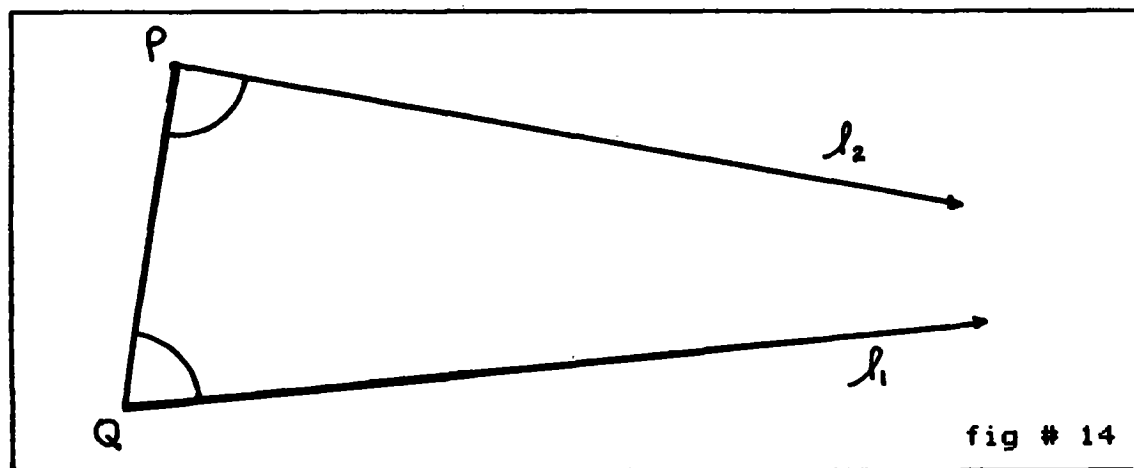
i. Supongamos que RZ está entre PX y QY (fig # 13-a) Consideremos un punto $P_1 \in PX$ y un punto $Q_1 \in QY$. Unamos P_1 y Q_1 . Por el axioma de separación del plano P_1Q_1 Corta a RZ en un punto que llamaremos R_1 . Sea P_1H un rayo en el interior del $\angle Q_1P_1X$. Ahora como PX es paralelo a RZ, entonces el rayo P_1H corta a RZ en un punto que llamaremos I. Como RZ es paralela a QY entonces al prolongar P_1I , el mismo corta a QY. Como PX y QY no se cortan, ya que si se cortaran le

llamaríamos M al punto de intersección y se formaría el triángulo P_1Q_1M y como RZ corta a P_1Q_1 en R_1 entonces por el axioma de Pasch RZ corta a PX ó corta a QY lo cual sería una contradicción. Así PX es paralela a QY .

ii. Supongamos ahora que PX y QY están del mismo lado de RZ . Sea PM la paralela a QY que pasa por $P \in PX$, luego por i) PM es la paralela a RZ pero PX también es la Paralela a RZ , así éstas coinciden con lo cual PX es paralela a QY (fig # 13-b).

Definición:

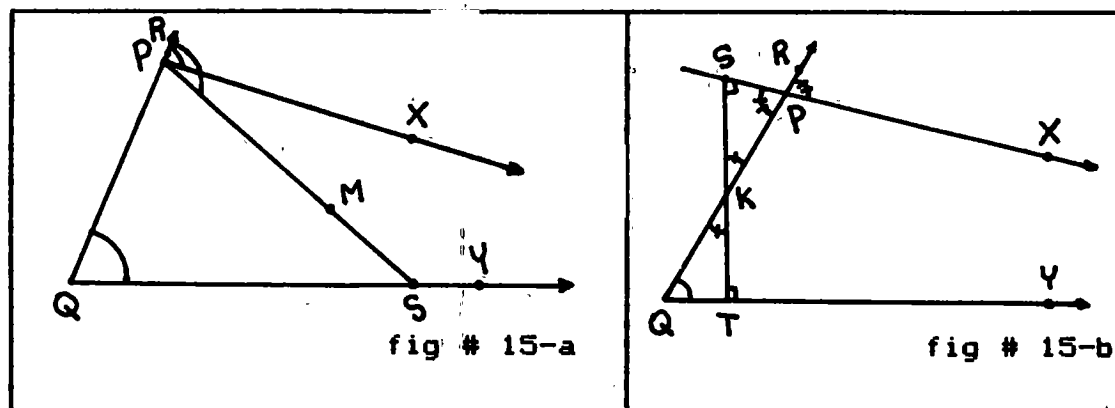
LLamaremos triángulo límite⁽⁴⁾ al formado por dos rayos paralelos (en el mismo sentido) y el segmento rectilíneo que une los extremos de los rayos al cual llamaremos lado finito del triángulo límite y los ángulos en los extremos los llamaremos ángulos del triángulo límite (fig # 14).



(4) El concepto de triángulo límite aparece en la obra de Eves, Howard "Estudio de las geometrías". UTEHA, México, 1985.

Teorema # 5:

Un ángulo exterior de un triángulo límite es mayor que el ángulo interior no adyacente.



Demostración:

Sean PX y QY las paralelas, sea PQ el lado finito. Sea $\angle RPX$ el ángulo exterior y $\angle RQY$ el interior no adyacente.

i. Supongamos que $\angle RPX < \angle RQY$ entonces existe un rayo PM en el interior del $\angle RPX$ tal que: $\angle RPM \cong \angle RQY$. Pero como PM esta en el interior de $\angle RPX$ entonces PM corta a QY en un punto que llamaremos S. Así se forma el triángulo PQS con $\angle RPM \cong \angle RQY$ lo cual contradice la proposición de la geometría neutra referente a que un ángulo exterior es mayor que los interiores no adyacentes (fig # 15-a).

ii. Supongamos que $\angle RPX \cong \angle RQY$. Sea K el punto medio de PQ,

desde K bajemos una perpendicular a PX y llamémosle S al pie de esta perpendicular. Prolonguemos SK hasta que intersecte a QY y llamémosle T a este punto. Así se forman los triángulos SPK y TKQ con las siguientes características:

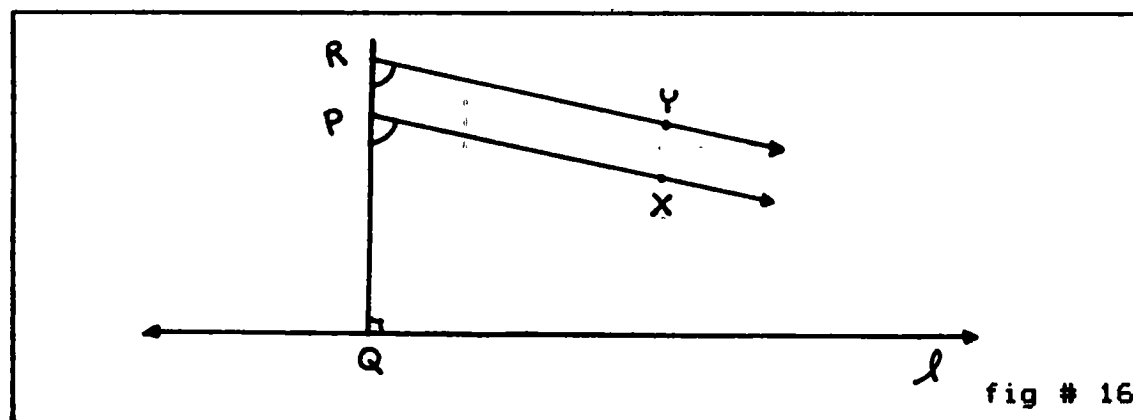
$$\begin{aligned} \angle SPK &\cong \angle TKQ & (\angle RPX &\cong \angle SPK) \\ PK &\cong QK & (K \text{ es punto medio de } PQ) \\ \angle SKP &\cong \angle TKQ & (\text{son opuestos por el vértice}) \end{aligned}$$

entonces los triángulos SPK y TKQ son congruentes por criterio ángulo-lado-ángulo luego $\angle QTK \cong \angle PSK$, pero $\angle PSK = 90^\circ$. Así $\angle QTK = 90^\circ$. Entonces $\angle PSK$ es el ángulo de paralelismo en S para la recta QY, lo cual es imposible ya que este ángulo debe ser agudo (fig # 15-b).

De esta forma se demuestra que $\angle RPX > \angle RQY$.

Teorema # 6:

Si la longitud de PQ (distancia de P a la recta l) aumenta, el ángulo de paralelismo disminuye (fig # 16).



Demostración:

Sea l una recta, P un punto en el exterior de l , sea Q el pie de la perpendicular de P a l . Sea R un punto en la prolongación de QP tal que $QP < QR$. Sean PX y RY las paralelas a l en P y R respectivamente por demostrar que:
 $\angle QRY < \angle QPX$.

Pero como RY y PX son paralelas a l entonces RY y PX son paralelas entre sí (por teorema #2), con lo cual se tiene el triángulo límite formado por PR y las paralelas RY y PX en donde $\angle QPX$ es un ángulo exterior y $\angle QRY$ es el interior no adyacente. Así por el teorema anterior $\angle QRY < \angle QPX$.

A continuación veremos algunos resultados relacionados con los cuadriláteros no-euclidianos, los cuales definiremos a continuación.

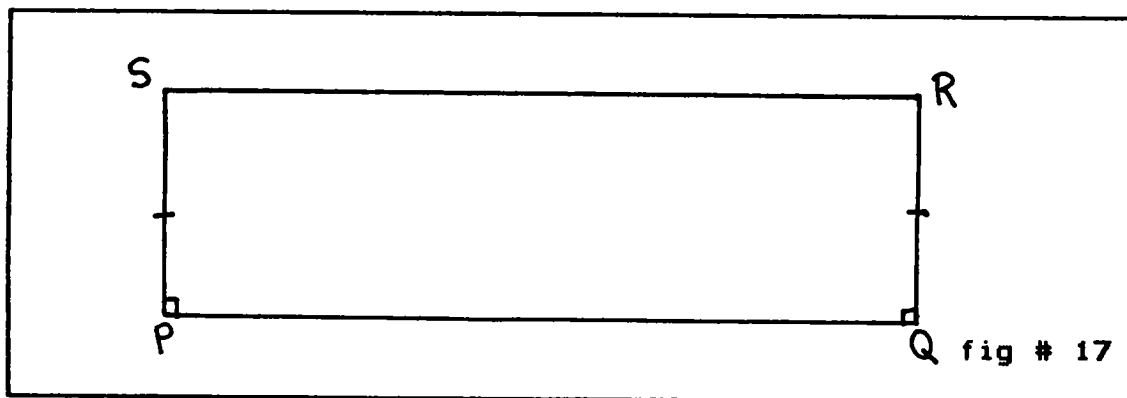
Definición:

Se llama cuadrilátero de Saccheri al cuadrilátero $PQRS$ que cumple las siguientes condiciones:

i. $\angle P \cong \angle Q = 90^\circ$, y

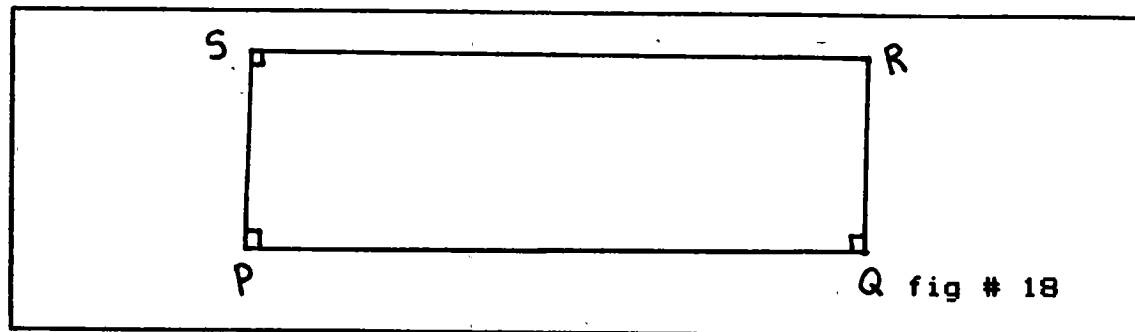
ii. $PS \cong QR$

(fig # 17)



Definición:

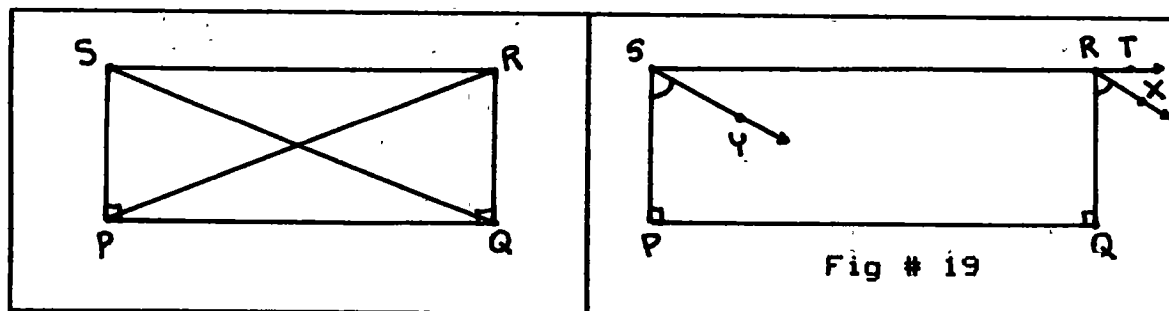
Se llama cuadrilátero de Lambert al cuadrilátero PQRS que cumple que $\angle P \cong \angle Q \cong \angle S = 90^\circ$ (fig # 18).



Pasaremos a demostrar algunos resultados relacionados con los cuadriláteros antes definidos.

Teorema # 7:

Sea el cuadrilátero PQRS un cuadrilátero de Saccheri. Entonces $\angle R \cong \angle S < 90^\circ$. (fig # 19).



Demostración:

Sea PQRS un cuadrilátero de Saccheri y tracemos las diagonales PR y QS con lo que se forman los triángulos PQR y QPS los cuales tienen:

$$\begin{array}{ll} PS \cong QR & \text{(por ser de Saccheri)} \\ \triangle SPQ \cong \triangle RQP & \text{(por ser de Saccheri)} \\ PQ \cong PQ & \text{(lado común)} \end{array}$$

entonces $SPQ \cong RQP$ (criterio L-A-L)
 luego $SQ \cong RP$ (lados correspondientes de triángulos congruentes).

Por otro lado tenemos los triángulos PSR y QRS los cuales tienen:

$$\begin{array}{ll} SQ \cong RP & \text{(por la congruencia anterior).} \\ PS \cong QR & \text{(por ser de Saccheri).} \\ SR \cong SR & \text{(lado común).} \end{array}$$

entonces $SPR \cong RQS$ (criterio L-L-L).

luego $\angle S \cong \angle R$ (ángulos correspondientes de triángulos congruentes).

Nos faltaría probar que $\angle R < 90^\circ$. Para esto consideremos SY y RX las Paralelas por S y R a PQ en el mismo sentido. Luego SY y RX son paralelas entre sí (por Teorema #2). Así tenemos el triángulo límite formado por RS y las paralelas RX y SY. Sea T un punto en la prolongación de SR.

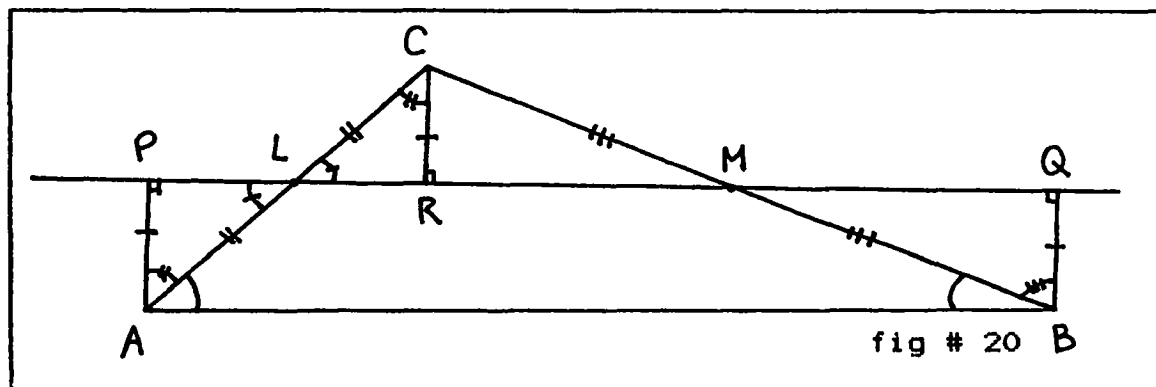
Luego: $\angle TRX > \angle RSY$ (por teorema #3).
 además $\triangle QRX \cong \triangle PSY$ (por teorema #6 ya que $QR \cong PS$)
 así $\angle TRX + \angle QRX > \angle RSY + \angle PSY$ (sumando)
 entonces $\angle RST > \angle PSR$ (adición de ángulos)
 pero $\triangle SRQ \cong \triangle PSR$ ($\angle R \cong \angle S$)
 luego $\angle RST > \angle PSR \cong \angle SRQ$
 entonces $\angle RST > \angle SRQ$, pero además $\angle RST + \angle SRQ = 180^\circ$.
 así $\angle SRQ < 90^\circ$. Como se quería probar.

Con este teorema se ha demostrado que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero en la geometría hiperbólica es estrictamente menor de 360° ya que en este cuadrilátero tenemos dos ángulos rectos y dos ángulos agudos. Más adelante probaremos que este resultado es cierto para cualquier cuadrilátero. Este resultado como sabemos se opone a la geometría euclideana la cual afirma que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360° .

Ahora vamos a probar otro resultado de gran trascendencia en la geometría hiperbólica, relacionado con la suma de los ángulos internos de todo triángulo.

Teorema # 8:

Sea ABC un triángulo cualquiera. Entonces la suma de los ángulos internos es menor de 180° (fig # 20)



Demostración:

Sea ABC un triángulo cualquiera. Sean M y L los puntos medios de los lados BC y AC respectivamente. Sean AP, BQ y CR las perpendiculares desde cada vértice a ML. Con lo cual :

$$\begin{array}{ll} \angle APL \cong \angle CRL & \text{(Son rectos por construcción)} \\ AL \cong CL & \text{(L es punto medio de AC)} \\ \angle ALP \cong \angle CLR & \text{(Son opuestos por el vértice)} \end{array}$$

entonces los triángulos APL y CRL son congruentes por criterio Angulo-Angulo-Lado (proposición 26 de la Geometría neutra). De donde $\angle PAL \cong \angle RCL$ (ángulos correspondientes de triángulos congruentes). Análogamente ocurre que $\angle QBM \cong \angle RCM$.

Con lo que $AP \cong CR \cong BQ$. (de las dos congruencias). Así el cuadrilátero ABQP es de Saccheri, entonces:

$$\angle PAB + \angle QBA < 180^\circ \quad \text{(son los ángulos agudos).}$$

$$\text{entonces } \angle PAL + \angle LAB + \angle ABM + \angle QBM < 180^\circ \quad (\angle PAB = \angle PAL + \angle LAB \text{ y } \angle QBA = \angle QBM + \angle MBA).$$

$$\text{luego } \angle LAB + \angle ABM + \angle RCL + \angle RCM < 180^\circ \quad (\angle PAL \cong \angle RCL \text{ y } \angle QBM \cong \angle RCM).$$

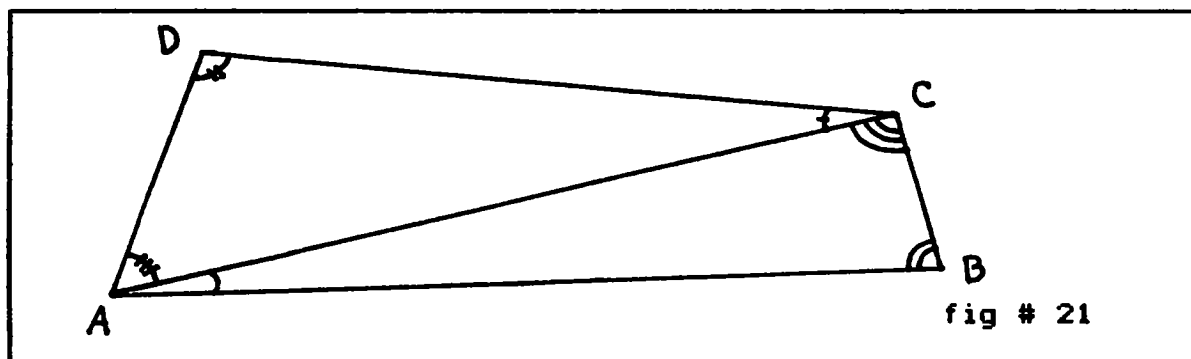
$$\text{Así } \angle LAB + \angle ABM + \angle ACB < 180^\circ. \quad (\angle ACB = \angle RCL + \angle RCM).$$

Que era lo que queríamos probar.

Finalmente probaremos que la suma de los ángulos internos de cualquier cuadrilátero convexo es menor de 360° .

Teorema #9:

La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo es menor que 360° (fig # 21).



Demostración:

Sea ABCD un cuadrilátero convexo cualquiera. Tracemos la diagonal AC. De donde se forman los triángulos ABC y ACD. Así:

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB < 180^\circ \quad (\text{Teorema anterior})$$

$$\angle ACD + \angle CDA + \angle DAC < 180^\circ \quad (\text{Teorema anterior})$$

luego sumando estas dos desigualdades se da:

$$\angle B + (\angle BCA + \angle ACD) + \angle D + (\angle CAB + \angle DAC) < 360^\circ$$

Así $\angle B + \angle C + \angle D + \angle A < 360^\circ$. Como se deseaba probar.

1.3 El problema de la consistencia de la geometría hiperbólica y El concepto general de interpretación de un sistema Axiomático y Modelo.

Para analizar el concepto de interpretación de un sistema axiomático es necesario comprender que es un sistema axiomático.

Según Jorge López [López, 1989] todo sistema axiomático consiste de términos indefinidos, postulados y reglas de inferencia.

En el caso de la geometría neutra los términos indefinidos serán; el punto, la línea y el plano. Los postulados serán las proposiciones que se admiten sin demostración; es decir, los cuatro primeros postulados. Finalmente las reglas de inferencia del sistema axiomático, corresponde a los principios característicos de la lógica Aristotélica.

Las aseveraciones que se pueden obtener a partir de los postulados usando las reglas de inferencia se llaman teoremas.

1.3.1 Modelo del Sistema axiomático:

Cuando los términos indefinidos se pueden interpretar (darles significado), y el conjunto de axiomas con que se desarrolla la geometría se pueden verificar, entonces estaremos frente a un modelo geométrico.

Así por ejemplo uno de los modelos más conocidos de la geometría euclidea, lo es el modelo del plano cartesiano, el cual interpreta:

- Al punto, como una pareja de coordenadas (X, Y)
- A la recta, con las ecuaciones $Y = mX + b$ ó $X = c$.
- Al plano, como el plano cartesiano.

Es fácilmente demostrable que en este modelo se cumple el quinto postulado de Euclides.

Sin embargo en nuestro trabajo nos ocuparemos de un modelo de la geometría hiperbólica, como lo es el modelo del Semiplano Superior de Poincaré.

1.3.2 Consistencia y Completitud de un Modelo Axiomático.

i) Consistencia de un Sistema Axiomático:

Un sistema axiomático es consistente si y sólo si existe un modelo que lo interprete. Esto es equivalente a decir que en el sistema axiomático es imposible deducir una proposición y su negación.

ii) Completitud de un Sistema axiomático:

Un sistema axiomático es completo si todo enunciado verdadero (respecto a un modelo), es un teorema; es decir, se puede demostrar a partir de los postulados.

1.4 Conjunto de Axiomas de la Geometría Hiperbólica Plana.

El conjunto de axiomas que presentaremos, fueron tomados del trabajo de F. Allen y otros [Frank Allen, E. Douglas, D. Richmond, C. Rickart, H. Swain y R. Walker. 1963.] "Matemática para la Escuela Secundaria", los cuales serán la base postulacional del trabajo que presentamos.

1.4.1 Axiomas de Birkhoff cuyo postulado central es el Postulado de la Regla.

Las definiciones que aparecen de forma caracterizada, serán dadas de manera explícita en el desarrollo del segundo capítulo de este trabajo.

POSTULADOS DE BIRKHOFF CUYO POSTULADO CENTRAL ES EL POSTULADO DE LA REGLA

Postulado 1: Dados dos puntos distintos, existe una única recta que los contiene.

Postulado 2: Dados dos puntos distintos, a estos le corresponde un único número real positivo.

Definición: (De distancia entre dos puntos).

Postulado 3: (Postulado de la Regla)

Es posible establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales tal que :

- (i) A cada punto de la recta le corresponda un número real.
- (ii) A cada número real corresponda exactamente un punto de la recta, y
- (iii) La distancia entre dos puntos es un número real mayor o igual que cero.

Postulado 4: Dados dos puntos podemos escoger un sistema de coordenadas tal que la coordenadas de el primero sea el cero y la coordenadas del segundo sea un número real positivo.

Definición: (Relación de estar entre).

Definición: (De segmento).

Definición: (De conjuntos convexos).

Postulado 5: Dada una recta en el plano. Los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos convexos y tales que si un punto está en un conjunto y el otro punto está en el otro conjunto, entonces el segmento que estos determinan corta a la recta.

Definición: (De semiplano).

Postulado 6: A cada ángulo le corresponde un número real entre 0 y 180.

Definición: (De medida angular).

Definición: (De rayo).

Postulado 7: Dado un rayo y uno de los semiplanos en que se divide el plano por este rayo. Para cada número r entre 0 y 180 existe un único rayo en el semiplano tal que la medida del ángulo formado por estos rayos es igual a r .

Postulado 8: Si P es un punto en el interior de $\angle ABC$ entonces:

$$\angle ABC = \angle ABP + \angle PBC.$$

Definición: (De rayos opuestos).

Definición: (De par lineal).

Definición: (De ángulos suplementarios).

Postulado 9: Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

CAPITULO II

**DEMOSTRACION FORMAL Y CON HERRAMIENTAS ELEMENTALES DE QUE EL
SEMIPLANO SUPERIOR SATISFACE LOS AXIOMAS DE BIRKHOFF.**

Con la aparición de la geometría hiperbólica el problema de considerar la consistencia o verdad lógica, que no se tenía con la geometría euclídeana cobra gran importancia ya que no tenía sentido preguntarse si era consistente la geometría euclídeana, dado que era la ciencia del espacio físico y por ello no despertaba dudas acerca de si era o no consistente puesto que aceptamos que el espacio físico está libre de contradicciones.

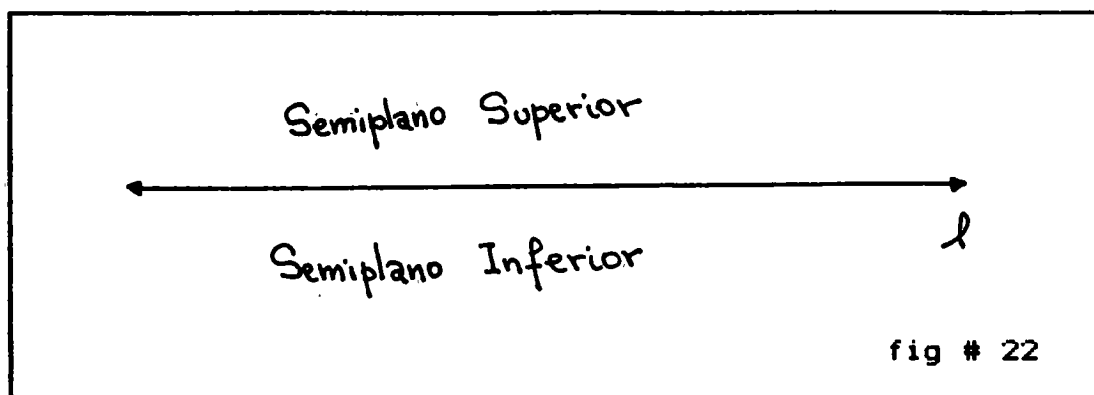
A continuación presentaremos el Modelo del Semiplano Superior de Poincaré que como tal, viene a salvar el problema de la geometría hiperbólica con respecto a su consistencia, es decir, el estar libre de contradicciones. Para este propósito se toman objetos de esta geometría y se les da una interpretación en este caso, como de objetos euclídeanos. Así decimos que este modelo es un Modelo Euclídeano de la Geometría No-Euclídeana. Verificaremos además que en éste, se satisface los Axiomas de Birkhoff que presentamos al final del primer capítulo.

2.1 Modelo del Semiplano Superior.

2.1.1 Características.

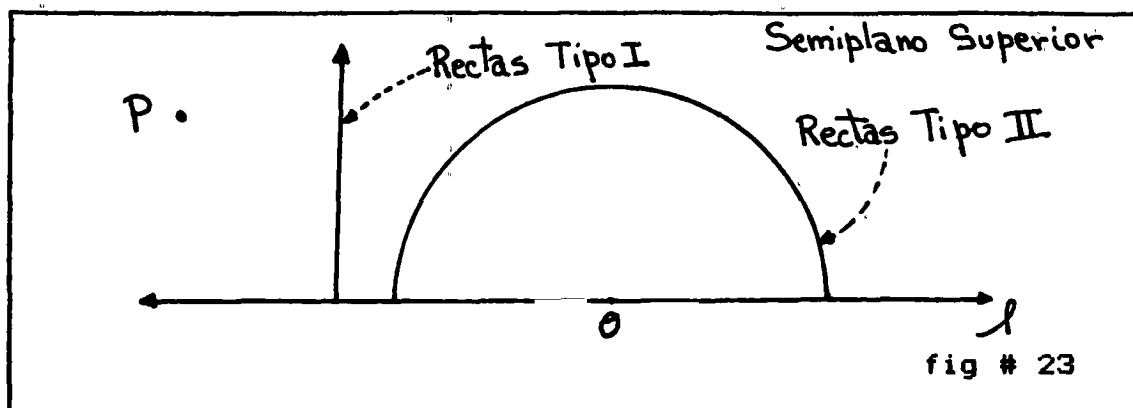
Consideremos una recta l , la que sin pérdida de generalidad, la tomaremos horizontal (esto lo hacemos con el propósito de hacer más simples los cálculos que aparecerán posteriormente, aunque l puede ser cualquier recta en el plano); la cual divide al plano euclídeano en dos semiplanos disyuntos. Estos semiplanos serán el semiplano superior y el

semitano inferior (fig # 22). Sin pérdida de generalidad tomaremos el semiplano superior.



De esta forma:

- i. El Plano Hiperbólico en este modelo corresponderá al semiplano superior (fig # 23).
- ii. El punto hiperbólico corresponderá a un punto cualquiera en el semiplano superior.
- iii. Las rectas hiperbólicas serán de dos tipos, estas son:
 - rectas tipo I: Las rectas euclidianas perpendiculares a la recta l que están en el semiplano superior.
 - rectas tipo II: Las semicircunferencias euclidianas de centro en l y contenidas en el semiplano superior (fig # 23)

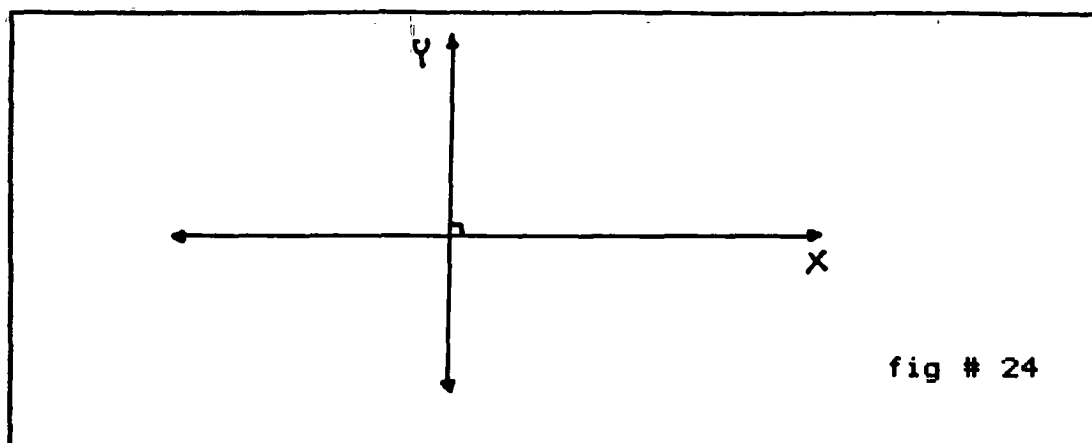


2.2 Modelo del Semiplano Superior a la luz de la Geometría Analítica y la trigonometría.

2.2.1 El Plano Hiperbólico, El punto Hiperbólico y la Recta Hiperbólica.

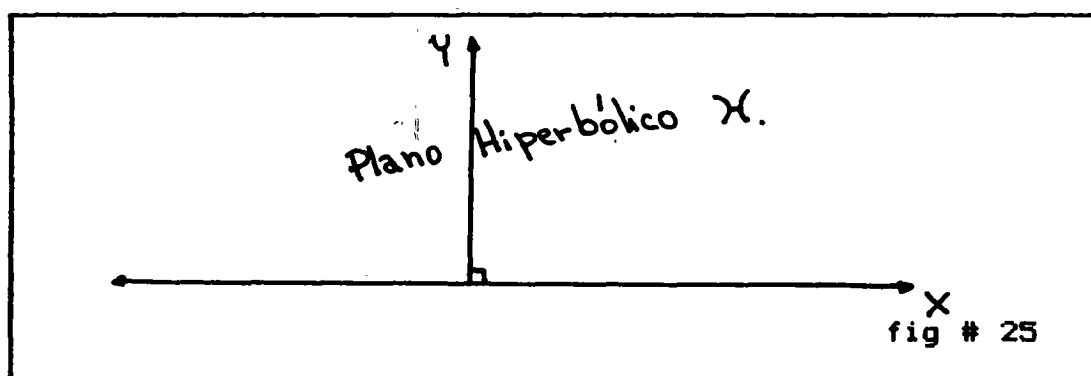
Si consideramos un Sistema de Coordenadas Cartesianas, de eje x ó eje de las abscisas el cual tomaremos sin pérdida de generalidad como horizontal y perpendicular a éste, el eje y ó eje de las ordenadas. Como origen de coordenadas el punto de intersección del eje x y el eje y (fig # 24). A este conjunto que llamaremos Plano Cartesiano lo denotaremos:

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\} \quad (\text{fig \# 24})$$



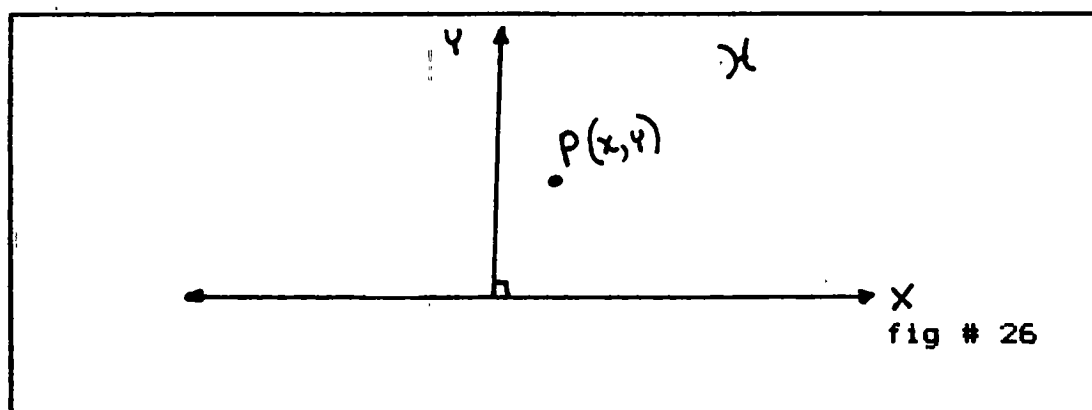
2.2.1.1 Plano Hiperbólico.

De esta forma, si consideramos la recta l del plano Cartesiano Euclideano como el eje de las abscisas; así podemos considerar el Plano Hiperbólico como el conjunto de puntos del plano Cartesiano cuyas ordenadas sean positiva, es decir, el Plano Hiperbólico, como el conjunto $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ (fig # 25). Resulta importante hacer notar que el eje de las abscisas no pertenece al conjunto H y pueden considerarse como puntos al infinito.



2.2.1.2 Punto Hiperbólico.

El punto Hiperbólico P corresponderá a una pareja ordenada que pertenezca al Plano Hiperbólico, es decir, la pareja $(x,y) \in H$ (fig # 26).

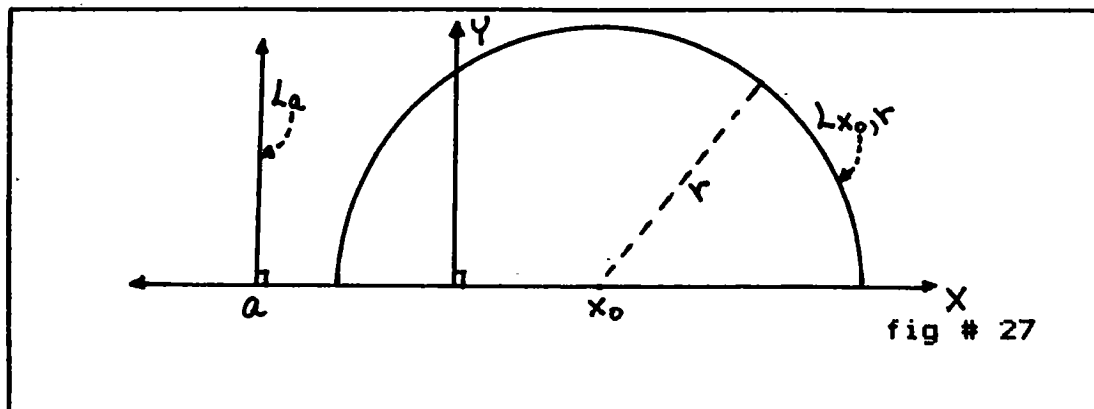


2.2.1.3 Rectas Hiperbólicas.

Como existen rectas de dos tipos, las mismas se clasificarán de la siguiente forma:

- i. Rectas Tipo I: Serán las semirrectas verticales o perpendiculares al eje x que tengan ordenada positiva, es decir, las rectas $L_a = \{(a,y) \in H / a \text{ es constante}\}$ (fig #27).
- ii. Rectas Tipo II: Serán las semicircunferencias de centro en el eje x , que tengan ordenada positiva, es decir, las rectas $L_{x_0,r} = \{(x,y) \in H / (x-x_0)^2 + y^2 = r^2\}$ (fig # 27).

De esta forma las rectas que denotaremos simplemente L pueden ser $L = L_a$ ó bien $L = L_{x_0, r}$.

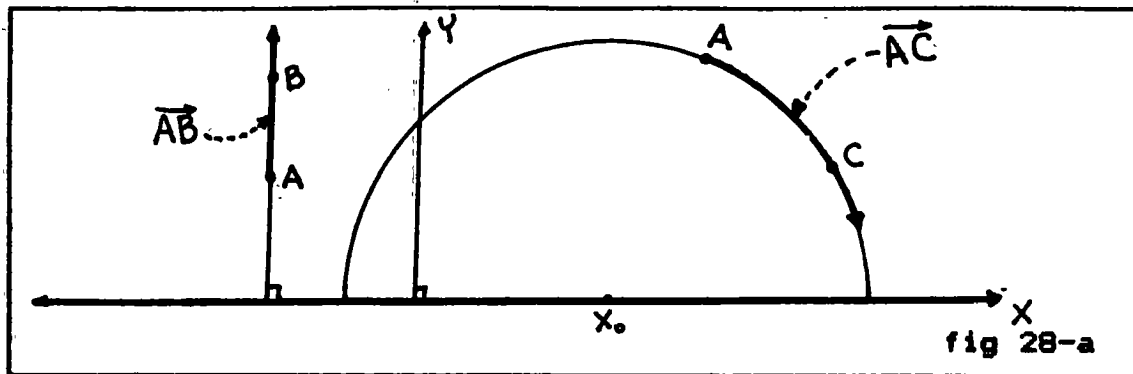


Así, podemos definir ahora el concepto de rayo en el Modelo del Semiplano Superior de la siguiente forma.

Definición:

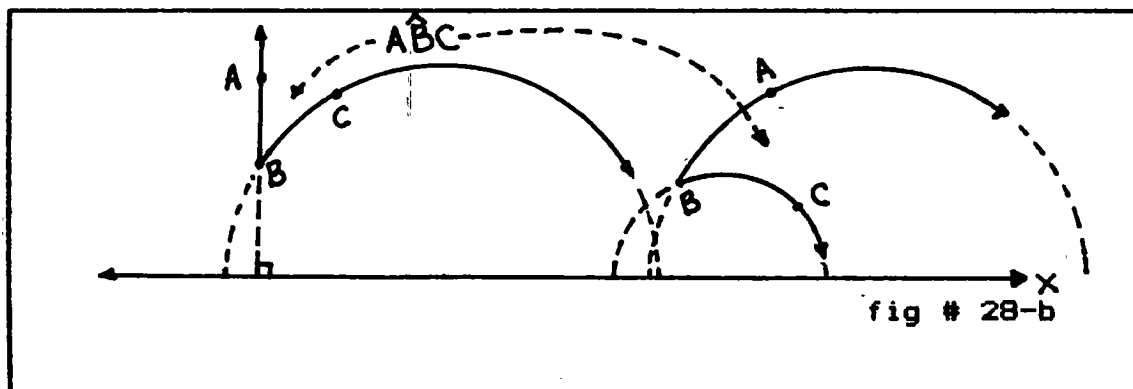
Llamaremos rayo en el Modelo del Semiplano Superior a la porción de recta hiperbólica que tiene un origen común y se extiende indefinidamente sobre las dos orientaciones (entendiendo por orientaciones, las determinadas por la recta hiperbólica que lo contiene).

En la figura # 28-a se ilustra el caso de las rectas hiperbólicas tipo I y tipo II, los rayos AB y AC respectivamente.



Definición:

Llamaremos ángulo en el Modelo del Semiplano superior a la unión de dos rayos hiperbólicos que tienen el mismo punto inicial (fig # 28-b)



2.2.2 Medida Angular y Distancia entre dos Puntos.

2.2.2.1 Medida Angular:

Antes de dar la definición de la medida angular

en el Modelo del Semiplano Superior presentaremos la noción de ángulo horizontal de un rayo AB.

Definición:

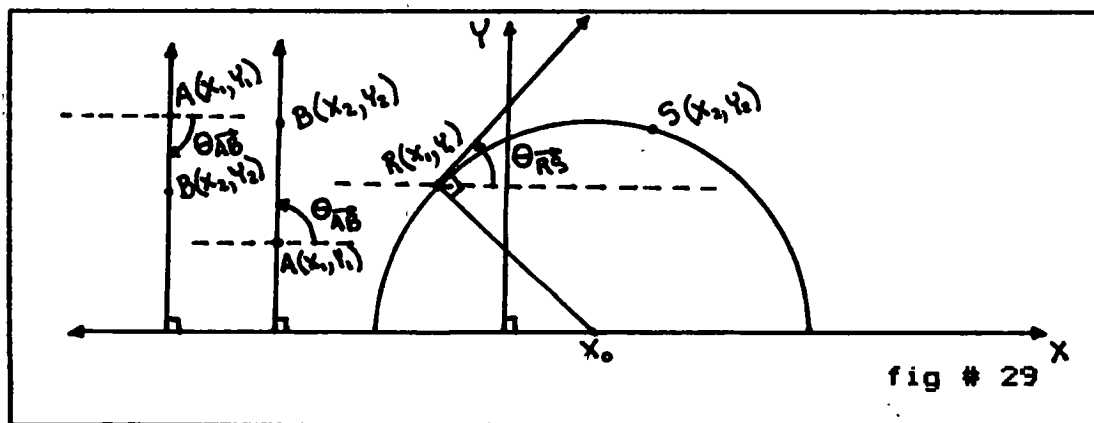
Llamaremos ángulo horizontal $\theta_{\overline{AB}}$ de un rayo AB a:

$$i) \quad \theta_{\overline{AB}} = \begin{cases} 90 & \text{si } y_2 > y_1 \\ -90 & \text{si } y_1 > y_2 \end{cases}$$

Si $A(x_2, y_2)$ y $B(x_1, y_1)$ pertenecen a una recta tipo I, I_a (fig # 29).

$$ii) \quad \theta_{\overline{AB}} = \arctan [-(x_1 - x_0)/y_1], \quad \text{donde } -90 < \theta_{\overline{AB}} < 90.$$

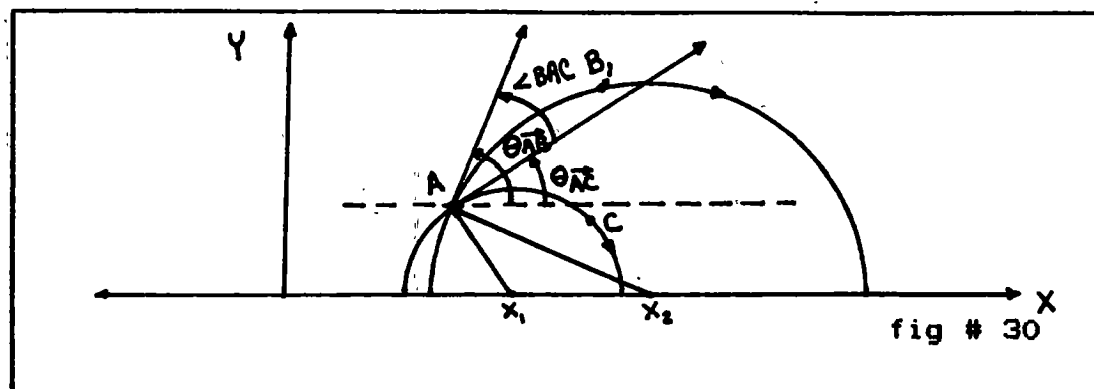
Si A y B pertenecen a una recta tipo II, $I_{x_0, r}$ (fig # 29)



Definición:

Sean AB y AC dos rayos en el Modelo del Semiplano Superior entonces la medida hiperbólica de $\angle BAC$ está dada por:

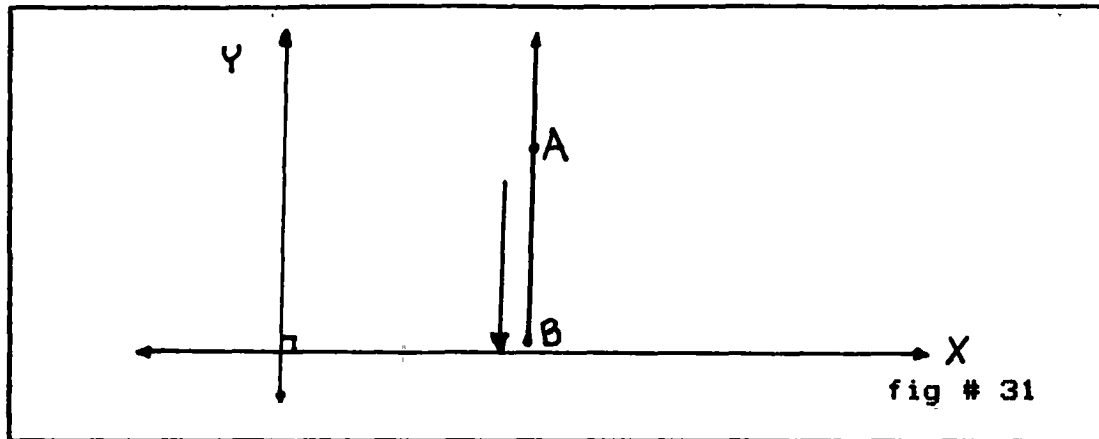
$$\angle BAC = \left| \theta_{\vec{AB}} - \theta_{\vec{AC}} \right| \quad (\text{fig \# 30})$$



La medida angular en el Modelo del Semiplano Superior corresponde a la medida euclidea entre las tangentes a las rectas hiperbólicas (fig # 30).

2.2.2.2 Distancia entre dos puntos.

Una de las dificultades que podríamos tener en el Modelo es el hecho de que cuando pensamos en la distancia entre puntos se nos ocurre de manera natural que ésta se hace tan grande como se quiera al fijar uno de ellos y alejar el otro. Haciéndolo en cualquier dirección, sin embargo surge la pregunta: Qué ocurre cuando se fija un punto sobre una recta hiperbólica y el otro se aleja. ¿Este se acerca al eje x? (fig # 31).



Así, lo antes citado nos lleva al convencimiento de que la distancia hiperbólica en este Modelo no puede ser medida como se mide la distancia euclídeana. Es por esto que definiremos la distancia hiperbólica de la siguiente forma.

Definición:

Dados dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ que están sobre una recta hiperbólica, definimos la distancia hiperbólica como;

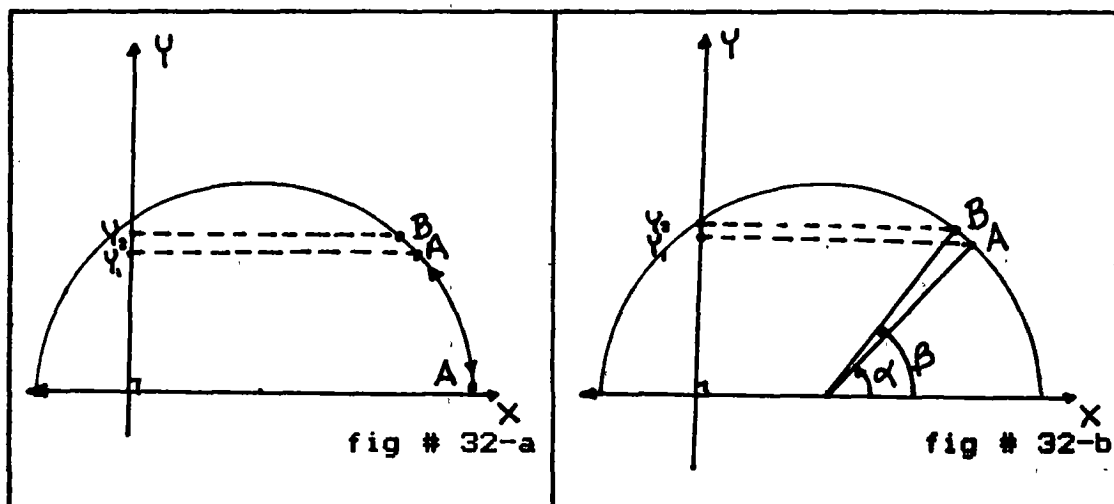
$$d(A, B) = \begin{cases} \ln (y_2 / y_1) & , \text{ si } x_1 = x_2 \text{ y } y_2 \geq y_1 \\ \ln \left| \frac{(x_2 - x_0 + r)/y_2}{(x_1 - x_0 + r)/y_1} \right| & , \text{ si } A, B \in L_{x_0, r} \\ & (x_1 \neq x_2) \end{cases}$$

Nótese que en la definición la segunda expresión está bien definida ya que $|x_i - x_0| < r$, $i = 1, 2$. Además, si fijamos el punto B y el punto A lo acercamos al eje x tanto como se quiera, esto es que si y_1 se acerca a 0, la distancia así definida se hace tan grande como se quiera; es decir,

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} d(A, B) = +\infty. \quad (\text{fig \# 32-a})$$

Por otro lado si y_1 se acerca a y_2 tanto como se quiera, la distancia así definida se acerca a 0; es decir,

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_2} d(A, B) = 0. \quad (\text{fig \# 32-a}).$$



Cabe señalar que otros autores definen la distancia hiperbólica de una forma equivalente a al que presentamos anteriormente; por ejemplo Boone [Boone, James, 1994], la define así:

$$d(A, B) = \begin{cases} \ln (y_2 / y_1) & , \text{ si } x_1 = x_2 \text{ y } y_2 \geq y_1 \\ \ln [(csc\beta - cot\beta) / (csc\alpha - cot\alpha)] & , \text{ si } A, B \in L_{x_0, r} \\ & (x_1 \neq x_2) \end{cases}$$

Los ángulos α y β son los formados por los radios euclidianos de los puntos A y B respectivamente y el eje x (fig # 32-b).

2.3 Los Axiomas de Birkhoff en el Modelo del Semiplano Superior.

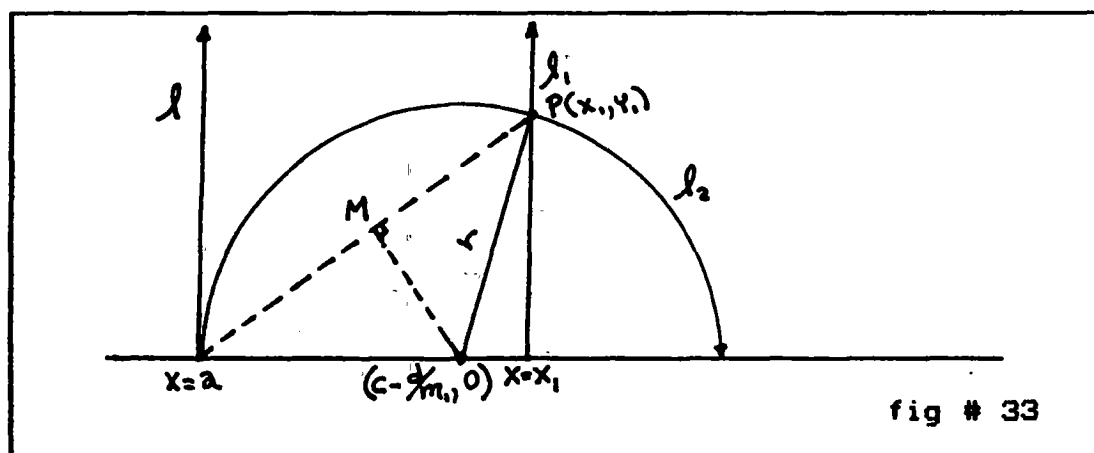
A continuación verificaremos que los Axiomas de Birkhoff cuyo Postulado central es el Postulado de la Regla y que presentamos en el capítulo anterior, se satisfacen en el Modelo del Semiplano Superior. Además verificaremos que el Postulado de Lobachevski se cumple en el Modelo entonces resultará que las proposiciones de la geometría hiperbólica se verifican en el mismo.

Primeramente verificaremos que el Postulado de Lobachevski se cumple en el Modelo del Semiplano Superior.

Sea l una recta y $P(x_1, y_1)$ un punto cualquiera que no pertenezca a l . Verifiquemos que por P pasan al menos dos rectas que no cortan a l .

Para esto supongamos que:

i. La recta l es una recta hiperbólica tipo I. Por ejemplo: $x = a$, con $a \in \mathbb{R}$ (fig # 33).



Como P no pertenece a l entonces $x_1 \neq a$, dado que si $x_1 = a$, entonces x_1 de esta forma satisface la ecuación de la recta l y con esto $P \in l$; así la recta de ecuación $x = x_1$ es una de las rectas que no corta a l , llamémosle l_1 (esta recta es del tipo I).

Por otro lado consideremos el punto medio euclideo entre los puntos P y $(a,0)$ que llamaremos M (fig #33) con coordenadas $(c,d) = ((x_1 + a)/2, y_1/2)$. Sea además m la pendiente de la recta euclidea, que pasa por P y $(a,0)$, es decir;

$m = y_1/(x_1 - a)$, luego consideremos la pendiente $m_1 = -1/m$ (la pendiente m_1 corresponde a la de la recta euclidea perpendicular a la recta euclidea que pasa por P y $(a,0)$) y tomemos la recta euclidea de ecuación $y = m_1(x - c) + d$ que corresponde a la recta euclidea mediatriz del segmento euclideo entre los puntos P y $(a,0)$. Finalmente al resolver el sistema de ecuaciones lineales:

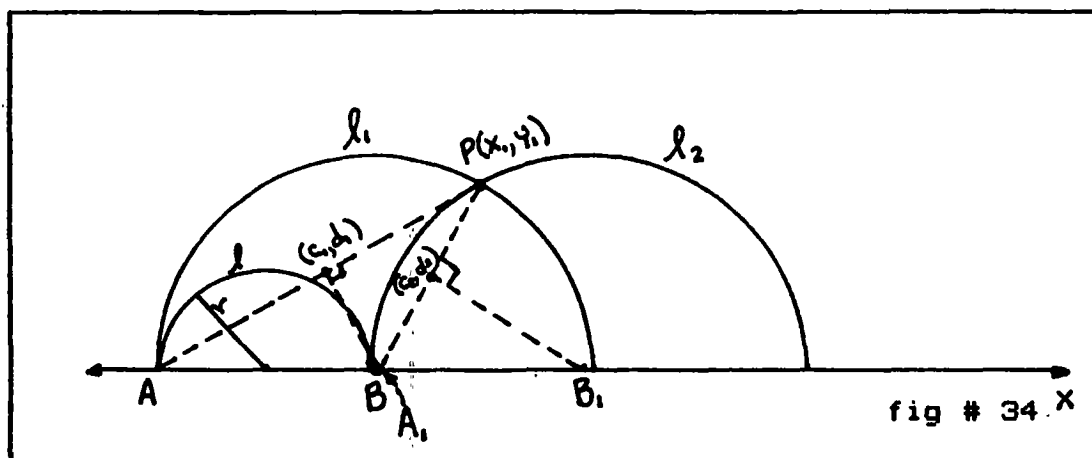
$$y = 0$$

$$y = m_1(x - c) + d$$

resulta como solución la pareja $(x_2, y_2) = (c - d/m_1, 0)$, que corresponde al centro euclideo de la recta hiperbólica tipo II, cuyo radio es la distancia euclidea entre los puntos P y (x_2, y_2) . Siendo esta recta hiperbólica otra de las rectas que no corta a l . Llamémosle l_2 .

Así hemos determinado la existencia de al menos dos rectas hiperbólicas l_1 y l_2 que no cortan l . Con lo cual se verifica para este caso el Postulado de Lobachevski.

ii. La recta hiperbólica I es del tipo II. Por ejemplo la recta de ecuación $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ (fig # 34). Llamémosle $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ a los puntos de intersección del eje x con la recta hiperbólica I . Consideremos por un lado la recta



mediatriz euclideana entre los puntos P y A que tendrá por ecuación:

$$y = m_1(x - c_1) + d_1 \quad (*)$$

donde $m_1 = -1/m$ (con $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$);

y el punto $(c_1, d_1) = ((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$.

Luego determinemos el punto solución del sistema formado por la ecuación (*) y el eje x ; al cual llamaremos A_1 con coordenadas $(c_1 - d_1/m_1, 0)$ que corresponde al centro euclidiano de una de las rectas hiperbólicas que no corta a I ; de radio la distancia euclideana entre los puntos P y A_1 . Llamémosle I_1 a esta recta hiperbólica.

De manera análoga consideremos la recta mediatriz euclideana entre los puntos P y B con ecuación:

$$y = m_2(x - c_2) + d_2 \quad (**)$$

donde $m_2 = -1/m$ (con $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$)
 y el punto $(c_2, d_2) = ((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$.

Luego determinemos el punto solución del sistema formado por la ecuación (**) y el eje x ($y = 0$); el cual llamaremos B_1 con coordenadas $(c_2 - d_2/m_2, 0)$, que corresponde al centro euclideo de otra recta hiperbólica que no corta a l , de radio la distancia euclidea entre los puntos P y B_1 . Llamémosle l_2 a esta recta hiperbólica.

De esta forma hemos determinado las rectas hiperbólicas l_1 y l_2 que no cortan a l , verificándose así el Postulado de Lobachevski en el Modelo del Semiplano Superior.

Ahora nos propondremos verificar que los Axiomas de Birkhoff se satisfacen en el Modelo del Semiplano Superior. Convendremos considerar como equivalentes los conceptos postulado y axioma.

Antes de la prueba del conjunto de Postulado de Birkhoff, vamos a considerar sin pérdida de generalidad que si se dan dos puntos por ejemplo $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$; entonces $x_1 < x_2$ y que $y_1 < y_2$, ya que los otros casos se harán de manera análoga.

Postulado 1:

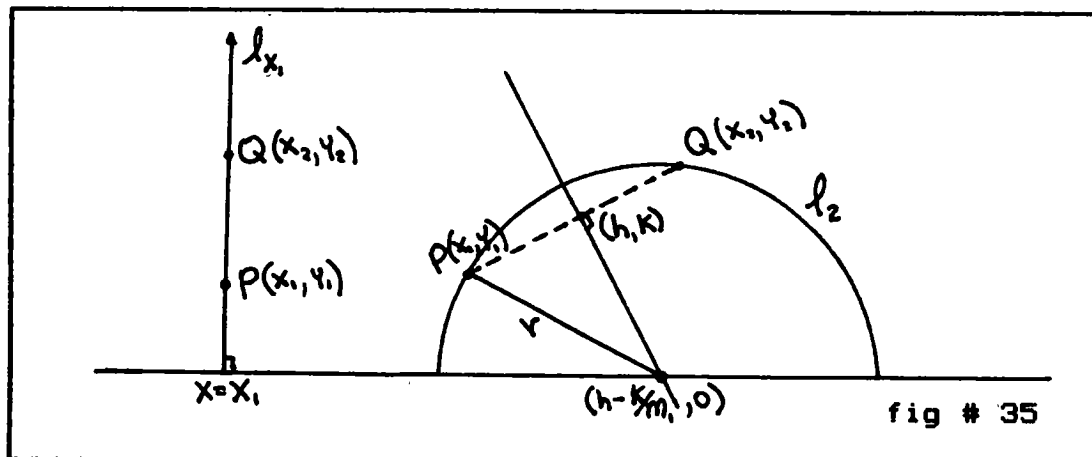
Dados dos puntos distintos, existe una única recta que los contiene.

Prueba:

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos distintos de H . De donde se dan las siguientes posibilidades :

i. Si $x_1 = x_2$, entonces la única recta hiperbólica que los contiene es la de ecuación $x = x_1$, la cual es del tipo I, dado que ésta queda determinada por el valor de x_1 .

Llamémosle l_{x_1} (fig # 35).



ii. Si $x_1 \neq x_2$, entonces consideremos la mediatriz euclidiana (fig # 39) entre los puntos P y Q de ecuación :

$$y = m_1(x - h) + k \quad (*)$$

donde $m_1 = -1/m$ (con $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$)

y el punto $(h, k) = ((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$.

Luego determinemos el punto solución del sistema formado por (*) y el eje x ($y = 0$), el cual tiene coordenadas $(h - k/m_1, 0)$ que corresponde al centro euclidiano de la recta hiperbólica que pasa por P y Q. Siendo ésta del tipo II. Llamémosle l_2 a esta recta. La unicidad de l_2 viene dada por su centro $(h - k/m_1, 0)$ y su radio que están determinados de forma única por x_1, y_1, x_2, y_2 .

Así hemos verificado que el Postulado 1 se cumple.

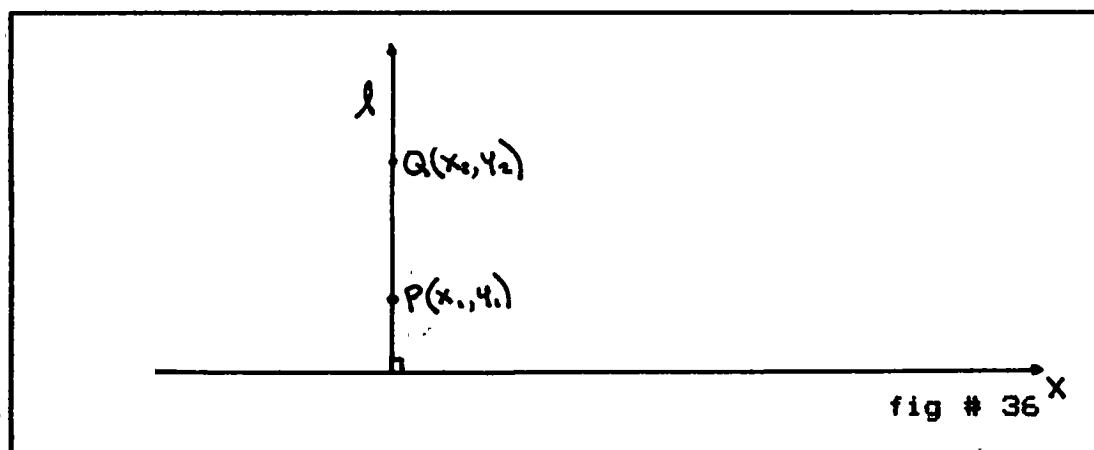
Postulado 2: (Postulado de la Distancia).

Dados dos puntos distintos a estos corresponde un único número real positivo.

Prueba:

Es consecuencia inmediata de la definición de distancia en el Modelo; esto es, si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos en H y :

i. Si la recta hiperbólica que contiene los puntos P y Q es del tipo I. Entonces $d(P, Q) = \ln(y_2/y_1)$, con $0 < y_1 < y_2$ (fig # 36). Dado que la función \ln es una función biyectiva entonces $d(P, Q)$ es única y queda determinada por y_1 y y_2 . Y como $y_1 < y_2$, entonces $y_2/y_1 > 1$ y con esto $\ln(y_2/y_1) > 0$. Así $d(P, Q) > 0$.



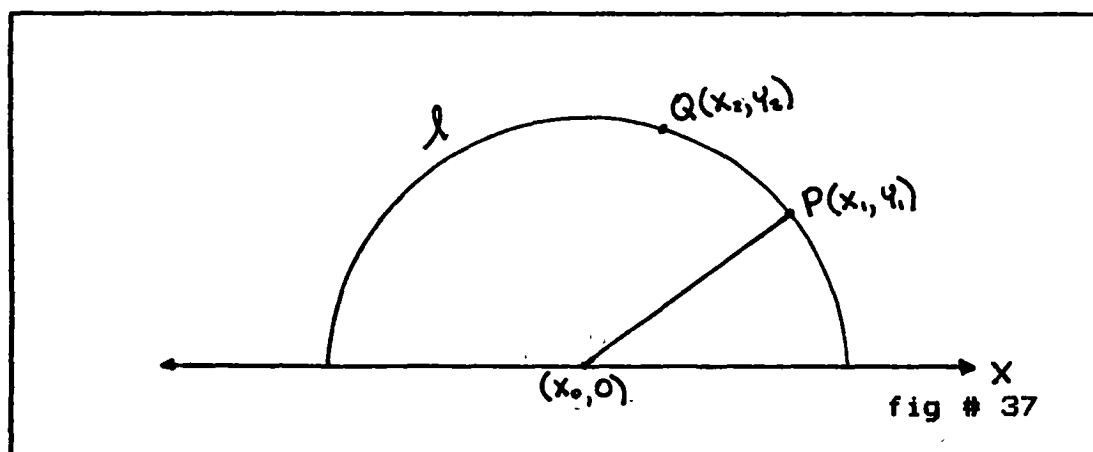
ii. Si la recta hiperbólica que contiene a P y Q es del tipo II (fig # 37) entonces la distancia hiperbólica entre estos puntos viene dada por:

$$d(P,Q) = \left| \ln \frac{(x_2 - x_0 + r)/y_2}{(x_1 - x_0 + r)/y_1} \right|$$

donde $(x_0, 0)$ es el centro euclideo de la recta hiperbólica tipo II. Y r es el radio, el cual corresponde a la distancia euclidea entre P y $(x_0, 0)$.

La unicidad de $d(P,Q)$ viene dada por la biyectividad de la función \ln , y queda determinada por P y Q, ya que x_0 y r quedan determinados por P y Q.

El hecho de que $d(P,Q) > 0$ se da en función del valor absoluto en la definición de la distancia hiperbólica y que $P \neq Q$.



Ahora nos proponemos verificar que el Postulado de la Regla se cumple en H .

Definición:

La distancia entre dos puntos es el número positivo obtenido en el postulado de la distancia. La distancia entre dos puntos A y B la denotaremos AB.

Postulado 3: (De la Regla)

Es posible establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales tal que:

- (i) A cada punto de la recta le corresponda un número real.
- (ii) A cada número real le corresponda exactamente un punto de la recta, y
- (iii) La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

Prueba:

El Postulado de la Regla habla en sus partes (i) y (ii) de que dada una recta L, existe una aplicación biyectiva;

$f: L \leftrightarrow R$ (entre puntos de la recta y números reales).

Y en (iii) dice que para cualesquiera puntos P, Q $\in H$,

$$d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|.$$

Así, si L es una recta hiperbólica tipo I, por ejemplo $L = I_a$ entonces resulta sencillo verificar que f definida por $f(a, y) = \ln y$, satisface (iii) del Postulado de la regla y que f es biyectiva.

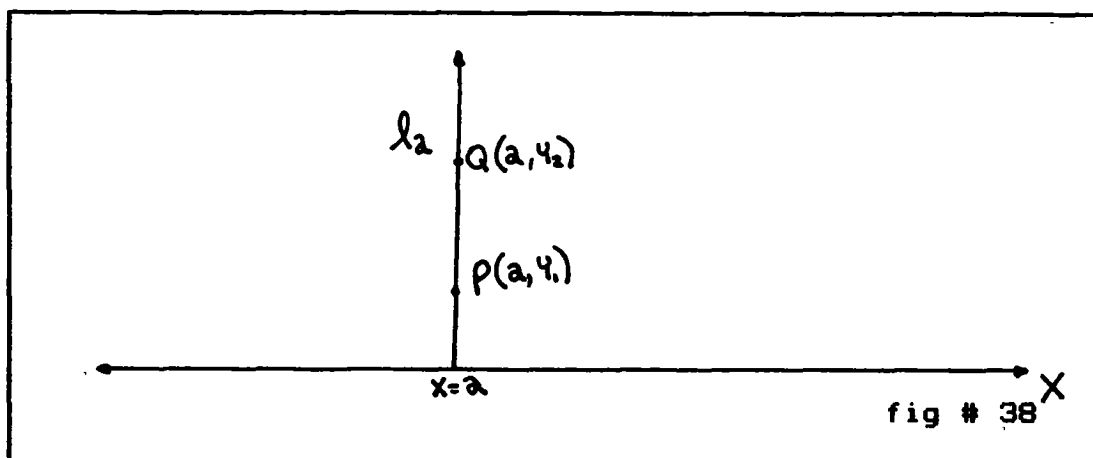
Veamos que satisface (iii). Para esto sean $P(a, y_1)$ y $Q(a, y_2)$ en H, con $y_2 > y_1$ (fig # 38); entonces:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \left| \ln(y_2/y_1) \right| && (\ln(y_2/y_1) > 0 \text{ ya que } y_2/y_1 > 1) \\ &= \left| \ln y_2 - \ln y_1 \right| && (\text{prop. de } \ln) \\ &= \left| \ln y_1 - \ln y_2 \right| \end{aligned}$$

$$d(P,Q) = \left| f(a,y_1) - f(a,y_2) \right|$$

$$d(P,Q) = \left| f(P) - f(Q) \right|$$

Además $d(P,Q) = 0$, si $P = Q$, ya que si $P = Q$ entonces $y_2 = y_1$ y $\ln(y_2/y_1) = \ln 1 = 0$.



Faltaría probar que $f : I_a \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P(a,y) \longrightarrow f(P) = f(a,y) = \ln y$$

es biyectiva:

- f es inyectiva si y sólo si $\forall P_1(a,y_1), P_2(a,y_2) \in I_a$ si $P_1 \neq P_2$ entonces $f(P_1) \neq f(P_2)$

Supongamos que $f(P_1) = f(P_2)$

$$\rightarrow f(a,y_1) = f(a,y_2)$$

$$\rightarrow \ln y_1 = \ln y_2$$

$$\rightarrow y_1 = y_2 \quad (\ln \text{ es biyectiva})$$

$$\rightarrow (a,y_1) = (a,y_2)$$

$$\rightarrow P_1 = P_2$$

Así f es inyectiva.

- f es suryectiva si y sólo si $\forall k \in \mathbb{R}$, existe $P(a,y_1) \in I_a$

tal que $f(P) = k$.

$$\begin{aligned} f(P) &= k \\ \Rightarrow f(a, y_1) &= k \\ \Rightarrow \ln y_1 &= k \\ \Rightarrow y_1 &= e^k. \end{aligned}$$

Así existe $(a, e^k) \in I_a$ tal que $f(P) = k$. Así f es suryectiva .

Con esto f es biyectiva.

Si L es una recta hiperbólica tipo II por ejemplo $L = I_{x_0, r}$ entonces definimos $f(P) = f(x, y) = \ln(x - x_0 + r)/y$ de manera similar los puntos $P, Q \in H$ satisfacen (iii) del Postulado de la regla, esto es que:

$$\begin{aligned} \forall P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \in H, d(P, Q) &= |f(P) - f(Q)|. \text{ Veamos,} \\ d(P, Q) &= \left| \ln \frac{(x_2 - x_0 + r)/y_2}{(x_1 - x_0 + r)/y_1} \right| \\ d(P, Q) &= \left| \ln \frac{(x_2 - x_0 + r)/y_2}{(x_1 - x_0 + r)/y_1} - \ln \frac{(x_1 - x_0 + r)/y_1}{(x_2 - x_0 + r)/y_2} \right| \\ d(P, Q) &= \left| \ln \frac{(x_2 - x_0 + r)/y_2}{(x_1 - x_0 + r)/y_1} - \ln \frac{(x_1 - x_0 + r)/y_1}{(x_2 - x_0 + r)/y_2} \right| \\ d(P, Q) &= \left| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right| \\ d(P, Q) &= \left| f(P) - f(Q) \right| \end{aligned}$$

Lo que faltaría probar es que f así definida es biyectiva (la prueba de *i* y *ii*).

Veamos primero que f es suryectiva:

Esto es que $f: L \rightarrow R$;

f es suryectiva si y sólo si:

$$\forall k \in R, \text{ existe } P(x_1, y_1) \in L \text{ tal que } f(P) = k$$

$$f(P) = k$$

$$\ln (x_1 - x_0 + r)/y_1 = k$$

$$(x_1 - x_0 + r)/y_1 = e^k$$

sea $s = e^k$, pero $e^k > 0$ entonces,

$$(x_1 - x_0 + r)/y_1 = s \quad (*)$$

tiene una solución, para cada $s > 0$.

Si hacemos $z = x_1 - x_0$, resulta que :

$$y_1 = \sqrt{r^2 - z^2} \quad (\text{fig \#39})$$

Así sustituyendo en la ecuación (*) resulta:

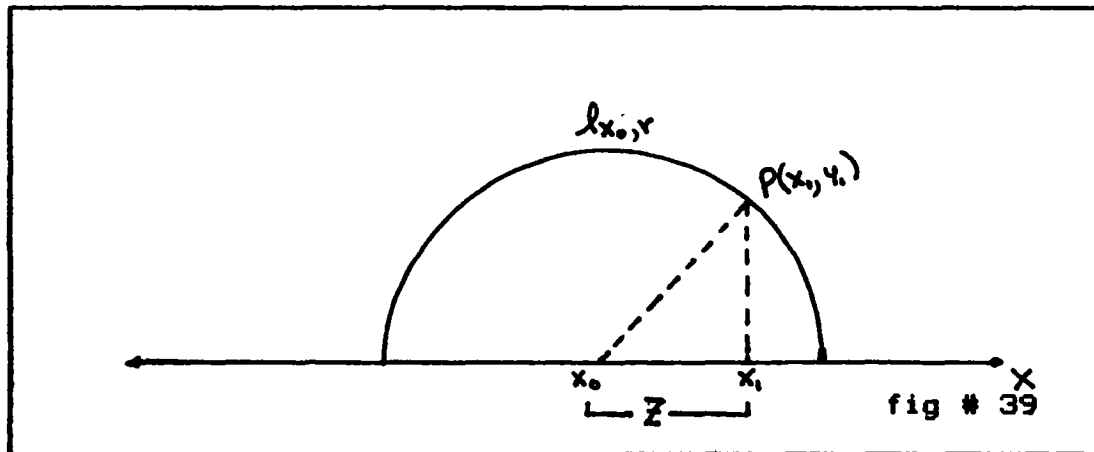
$$(z + r) / \sqrt{r^2 - z^2} = s$$

Trasponiendo términos y elevando al cuadrado tenemos:

$$z^2 + 2rz + r^2 = s^2(r^2 - z^2)$$

que al factorizarlo es:

$$(1 + s^2)z^2 + 2rz + (1 - s^2)r^2 = 0 \quad (**)$$



Resolviendo la ecuación cuadrática (**), resultan como soluciones en z :

$$z = -r \quad \text{ó} \quad z = r((s^2 - 1)/(s^2 + 1)) \quad (***)$$

Si consideramos la segunda solución de (**), $P(x,y)$ es una solución de $f(P) = k$, para cada $k \in \mathbb{R}$, donde:

$$x_1 = x_0 + r((s^2 - 1)/(s^2 + 1))$$

es decir $x_1 = x_0 + r((e^{2k} - 1)/(e^{2k} + 1))$
 y como $\tanh(k) = (e^{2k} - 1)/(e^{2k} + 1)$

entonces $x_1 = x_0 + r \tanh(k)$ (&)

Por otro lado, como $y_1 = \sqrt{r^2 - z^2}$
 luego $y_1 = \sqrt{r^2 - r^2 \tanh^2(k)}$
 entonces $y_1 = r \operatorname{sech}(k)$ (&&)

De esta forma se prueba que f es suryectiva.

Para la prueba de la inyectividad, es suficiente analizar las soluciones de (**), dado que si f no fuera inyectiva (**) tendría al menos dos soluciones posibles para algún $s > 0$.

Pero la solución $z = -r$ de (***) no es posible ya que entonces $y_1 = 0$, lo cual no es posible que ocurra en (*).

Así f es inyectiva. Luego f es biyectiva.

Postulado 4:

Dados dos puntos podemos escoger un sistema de coordenadas tal que la coordenadas del primero le corresponda el cero y a la coordenadas del segundo un número real positivo.

Prueba:

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos distintos en H . Consideremos además la aplicación:

$$\begin{aligned} \phi: R \times R^+ &\longrightarrow R^+ \cup \{0\}. \\ A &\longrightarrow \phi(A) = d(P, A) \end{aligned}$$

La aplicación ϕ está bien definida ya que d está bien definida.

Así, si consideramos el punto $P(x_1, y_1)$, a éste le corresponde:

$$\begin{aligned} \phi(P) &= d(P, P) \\ &= \left| f(P) - f(P) \right|, \text{ (donde } f \text{ es la aplicación} \\ &\quad \text{que aparece en el Postulado 3)} \\ \phi(P) &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos el punto $Q(x_2, y_2)$, a éste le corresponde: $\phi(Q) = d(P, Q)$, que como ya probamos en el Postulado de la regla es un número mayor que cero, dado que P y Q son dos puntos distintos.

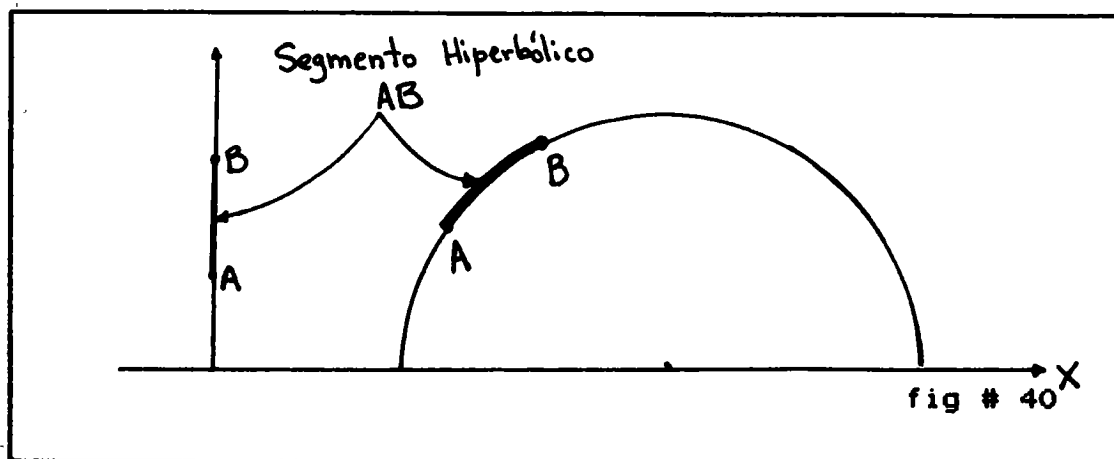
Definición:

Llamaremos segmento hiperbólico a la porción de una recta hiperbólica limitada por dos puntos, que llamaremos extremos del segmento hiperbólico (fig # 40).

Definición:

C está entre A y B si:

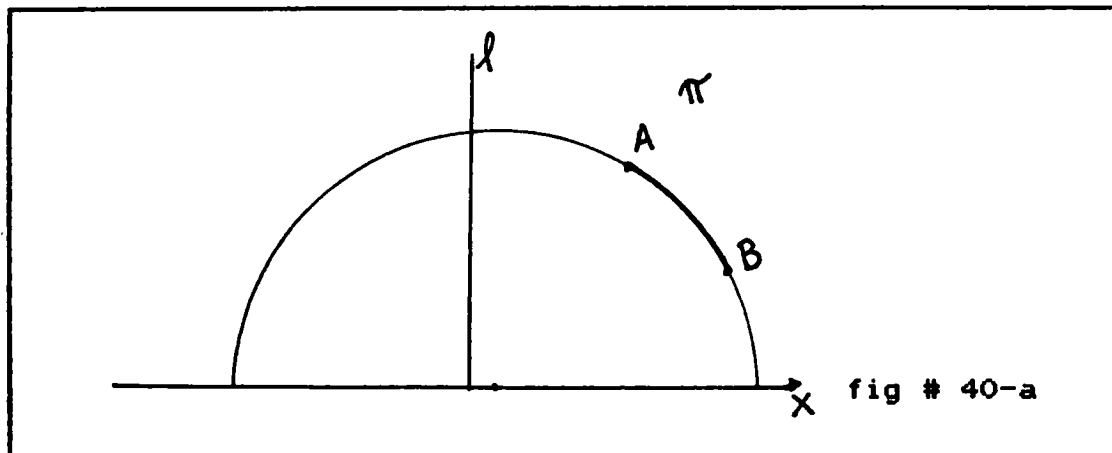
- i) A, C y B son puntos distintos de la misma recta y
- ii) $AC + CB = AB$.



Definición:

Un conjunto π se llama convexo si para cada dos puntos A y B de π , todo el segmento AB está en π .

Las dos últimas definiciones las podemos adaptar a nuestro Modelo con tan sólo considerar las rectas hiperbólicas como las rectas de la que habla la definición, al igual que los segmentos hiperbólicos como los segmentos (fig # 40-a).



Postulado 5:

Dada una recta en el plano. Los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos convexos y tales que si un punto está en un conjunto y el otro punto está en el otro conjunto, entonces el segmento que estos determinan corta a la recta.

Prueba:

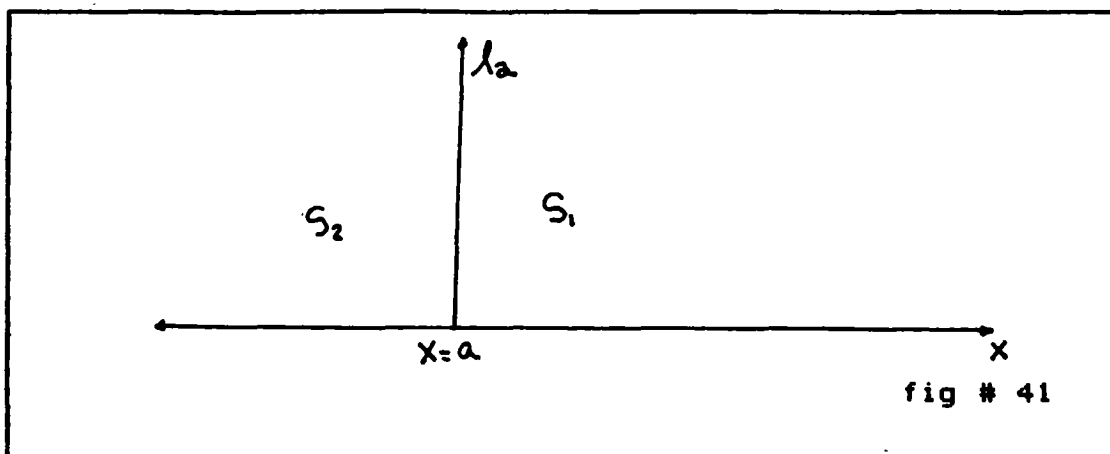
Sea L una recta en el plano hiperbólico H .

i. Si L es una recta hiperbólica del tipo I, por ejemplo $L = l_a$ (fig # 41), entonces los puntos que no están en L forman dos conjuntos, a saber:

$$S_1 = \{(x,y) \in H / x > a\}$$

y

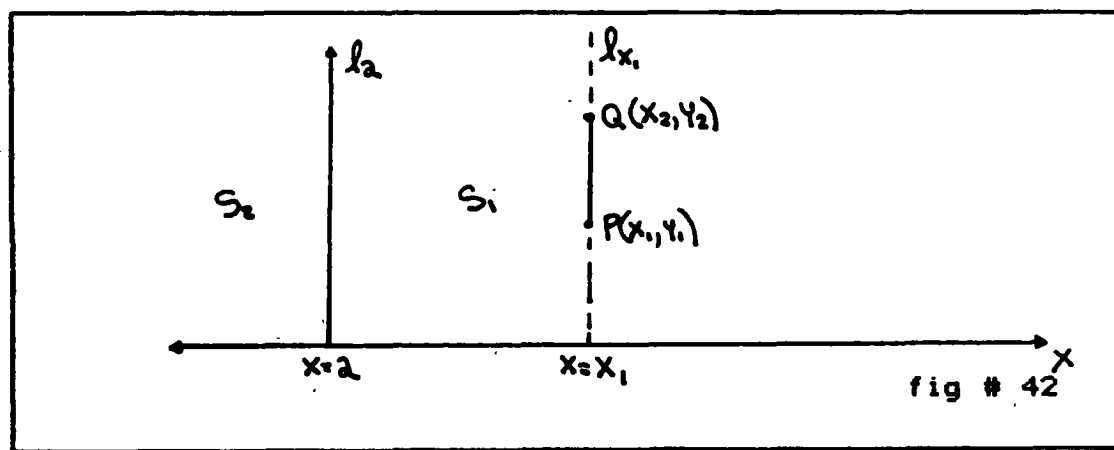
$$S_2 = \{(x,y) \in H / x < a\}$$



Primeramente probemos que estos conjuntos son convexos.

Probemos que S_1 es convexo.

Consideremos a $P(x_1, y_1) \in S_1$ y $Q(x_2, y_2) \in S_1$; por demostrar que el segmento $PQ \subseteq S_1$ (fig # 42).



i.1. Si $x_1 = x_2$ (fig # 42), entonces el segmento hiperbólico PQ es una porción de la recta hiperbólica tipo I, I_{x_1} ($x = x_1$).

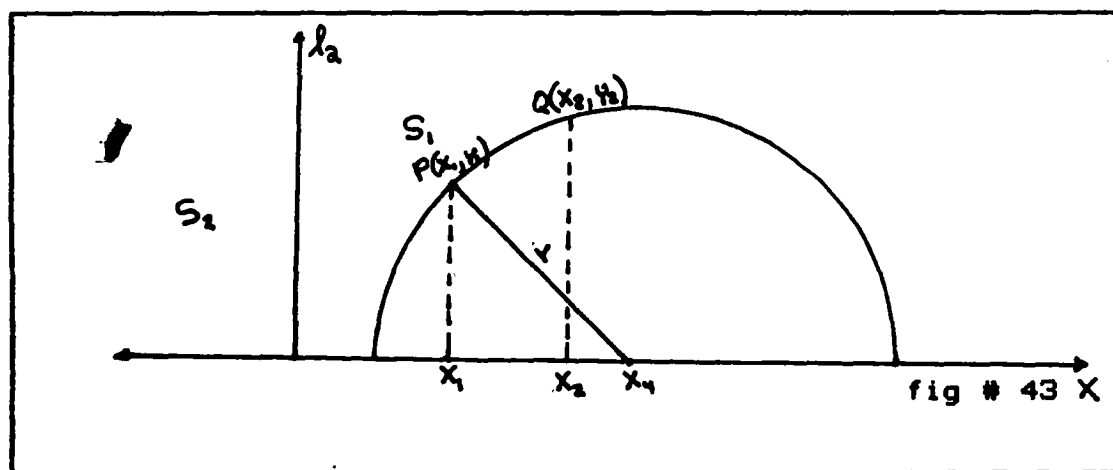
Sea $R(x_3, y_3) \in PQ$ ($x_3 = x_1$). Por demostrar, que $R \in S_1$.

Pero como $R \in PQ$ entonces $x_3 = x_1$, $\forall y > 0$ y como $P \in S_1$ entonces $x_1 > a$ así $x_3 > a$, con lo cual $R \in S_1$.

De esta forma S_1 es convexo.

i.2. Si $x_1 \neq x_2$ (fig # 43), entonces el segmento hiperbólico PQ es una porción de la recta hiperbólica tipo II, $I_{x_4, r}$ con centro en $(x_4, 0)$; $x_4 = c - d/m$ (donde $c = (x_1 + x_2)/2$; $d = (y_1 + y_2)/2$ y $m = (x_1 - x_2)/(y_2 - y_1)$); y radio, la distancia euclídeana entre los puntos P y $(x_4, 0)$.

Las abscisas $x \in PQ$ son tales que si $x_1 < x_2$ entonces $x_1 \leq x \leq x_2$.



Sea $R(x_3, y_3) \in PQ$. Por demostrar que $R \in S_1$.

Como $R \in PQ$ y si $x_1 < x_2$ entonces $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ y como $P \in S_1$ entonces $x_1 > a$ de esta forma $x_3 > a$; luego $R \in S_1$.

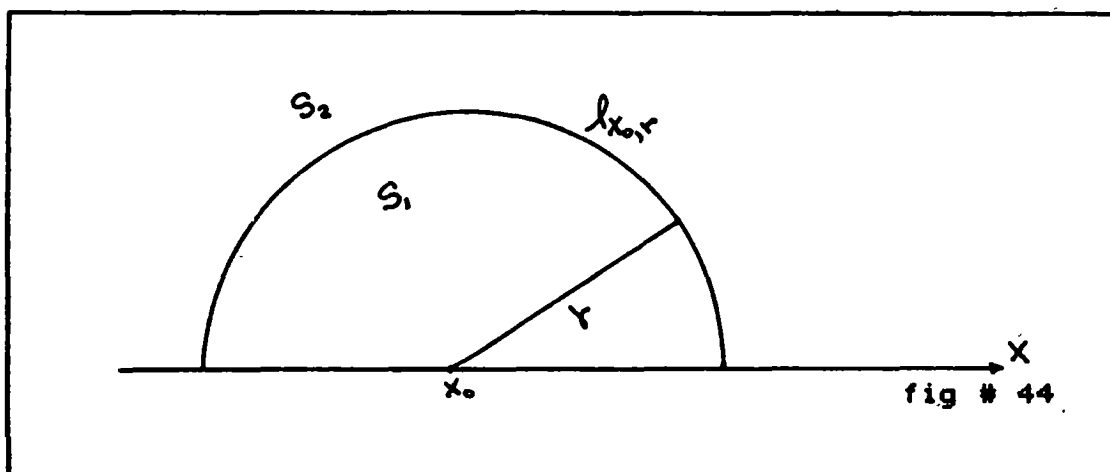
Así S_1 es convexo.

Analogamente se prueba que S_2 es convexo.

ii. Si L es una recta hiperbólica del tipo II, por ejemplo $L = I_{x_0, r}$ (fig # 44), entonces los puntos que no están en L , forman dos conjuntos, a saber:

$$S_1 = \{(x, y) \in H / (x - x_0)^2 + y^2 < r^2\}$$

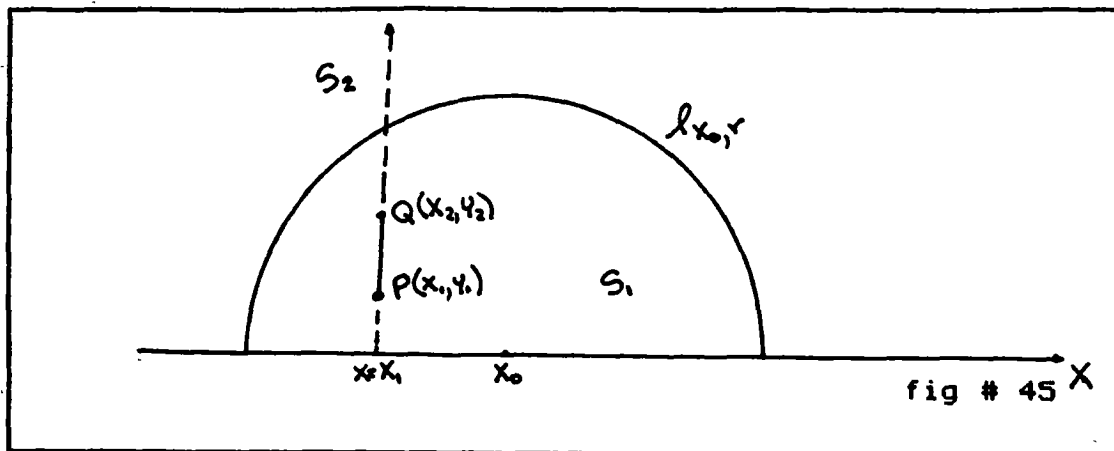
$$\text{y } S_2 = \{(x, y) \in H / (x - x_0)^2 + y^2 > r^2\}$$



Debemos probar que estos conjuntos son convexos.

Probemos que S_1 es convexo.

Consideremos a $P(x_1, y_1) \in S_1$ y $Q(x_2, y_2) \in S_1$; por demostrar que el segmento $PQ \subseteq S_1$ (fig # 44).



ii.1. Si $x_1 = x_2$ (fig # 45), entonces el segmento hiperbólico PQ es una porción de la recta hiperbólica tipo I, lx_1 ($x = x_1$).

Sea $R(x_3, y_3) \in PQ$ (de donde $x_3 = x_2$, y si $y_1 < y_2$ entonces $0 < y_1 \leq y_3 \leq y_2$). Por demostrar que $R \in S_1$.

Como $R \in PQ$, entonces $x_2 = x_3$
 $\rightarrow x_2 - x_0 = x_3 - x_0$
 $\rightarrow (x_2 - x_0)^2 = (x_3 - x_0)^2$
 $\rightarrow (x_2 - x_0)^2 + y_2^2 \geq (x_3 - x_0)^2 + y_3^2$; ($y_2^2 \geq y_3^2$)
 y como $Q \in S_1$ entonces $(x_2 - x_0)^2 + y_2^2 < r^2$
 $\rightarrow (x_3 - x_0)^2 + y_3^2 < r^2$.

Entonces $R \in S_1$.

Así S_1 es convexo.

ii.2. Si $x_1 \neq x_2$ (fig # 46), entonces el segmento hiperbólico PQ es una porción de la recta hiperbólica tipo II, lx_4k_1 con centro en $(x_4, 0)$; $x_4 = c_1 - d_1/m$ (donde

$c_1 = (x_1 + x_2)/2$; $d_1 = (y_1 + y_2)/2$ y $m = (x_1 - x_2)/(y_2 - y_1)$; y radio r_1 , la distancia euclídeana entre los puntos P y $(x_1, 0)$.

Las abscisas $x \in PQ$ son tales que si $x_1 < x_2$ entonces $x_1 \leq x \leq x_2$; y las ordenadas son tales que si $0 < y_1 < y_2$ entonces $0 < y_1 \leq y \leq y_2$.

Así, sea $R(x_3, y_3) \in PQ$ y si $x_1 < x_2$ y $0 < y_1 < y_2$ entonces $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ y $0 < y_1 \leq y_3 \leq y_2$.

De esta forma $x_1 - x_0 \leq x_3 - x_0$

- Ahora si $0 \leq x_3 - x_0 \leq x_2 - x_0$ entonces

$$(x_3 - x_0)^2 \leq (x_2 - x_0)^2$$

y como $0 < y_3 \leq y_2$ entonces $y_3^2 \leq y_2^2$

$$\text{Así } (x_2 - x_0)^2 + y_2^2 \geq (x_3 - x_0)^2 + y_3^2$$

Luego $(x_3 - x_0)^2 + y_3^2 \leq r^2$. Entonces $R \in S_1$.

- Los casos donde:

$x_1 - x_0 \leq x_3 - x_0 < 0$ y $x_3 - x_0 \leq x_2 - x_0 < 0$, se resuelven de manera similar.

Así S_1 es convexo.

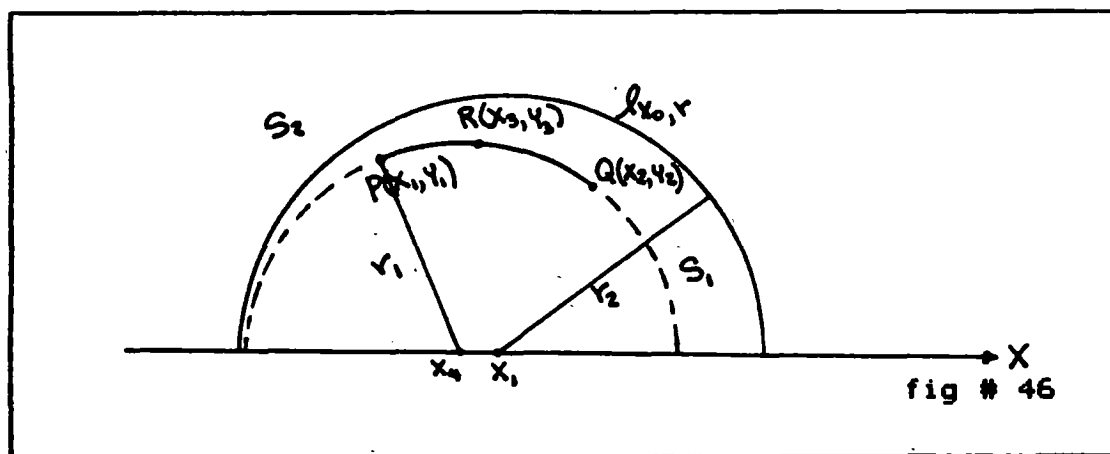


fig # 46

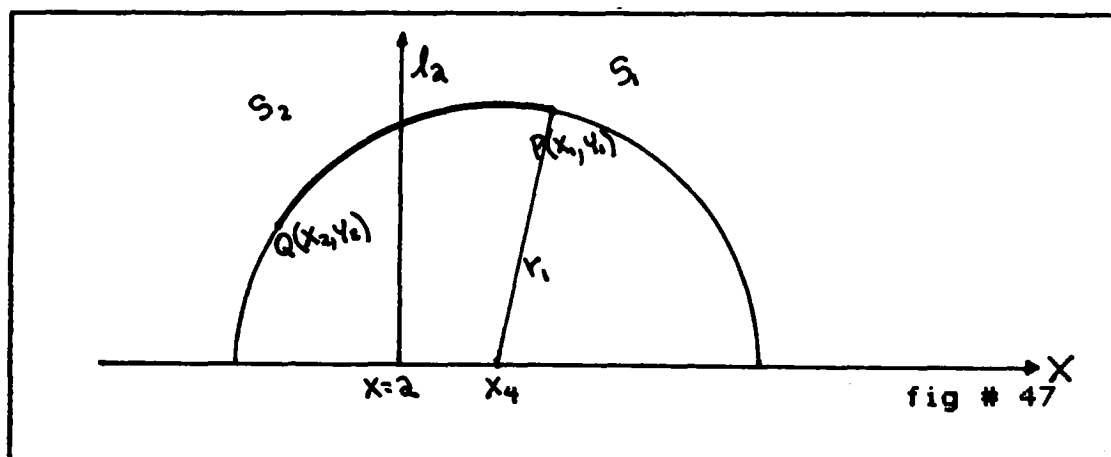
Veamos ahora la segunda parte de la prueba. Esto es que si tomamos un punto $P(x_1, y_1) \in S_1$ y otro punto $Q(x_2, y_2) \in S_2$ entonces el segmento que los une corta a L .

Supongamos que L es una recta hiperbólica tipo I, por ejemplo $l_a (x = a)$. Así los puntos que no están en L forman dos conjuntos (fig # 47), a saber:

$$S_1 = \{(x, y) \in H / x > a\}$$

y

$$S_2 = \{(x, y) \in H / x < a\}$$



Es importante señalar que el segmento hiperbólico que formen P con Q no puede ser una porción de una recta hiperbólica tipo I; porque si así fuera, entonces $x_1 = x_2$ y de esta forma $x_1 < a$ y $x_1 > a$, lo cual no es posible.

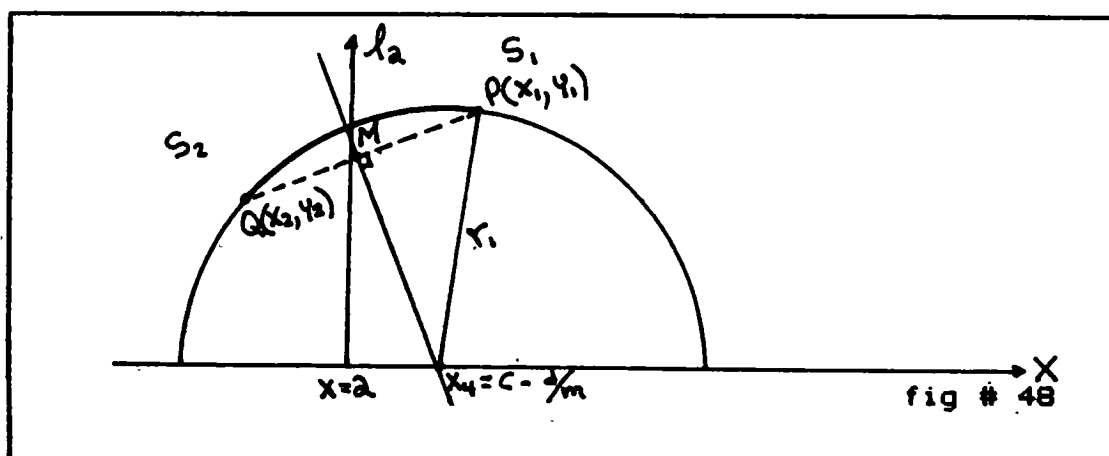
Así el segmento hiperbólico que forma P con Q es del tipo II, por ejemplo l_{x_4, r_1} (fig # 48). Procedamos a determinar el centro euclideo x_4 y el radio euclideo r_1 de dicha recta hiperbólica.

Sea $M(c,d)$ el punto medio euclideo entre P y Q , y sea $m = (x_1 - x_2)/(y_2 - y_1)$ la pendiente de la recta mediatriz euclidea de PQ .

Así el centro euclideo de la recta hiperbólica tipo II, I_{x_4, r_1} , que pasa por P y Q es $(x_4, 0)$, con $x_4 = c - d/m$ y radio $r_1 = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + y_1^2}$.
Luego $I_{x_4, r_1} = \{(x, y) \in H / (x - x_4)^2 + y^2 = r_1^2\}$
Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} (x - x_4)^2 + y^2 &= r_1^2 \\ x &= a \end{aligned}$$

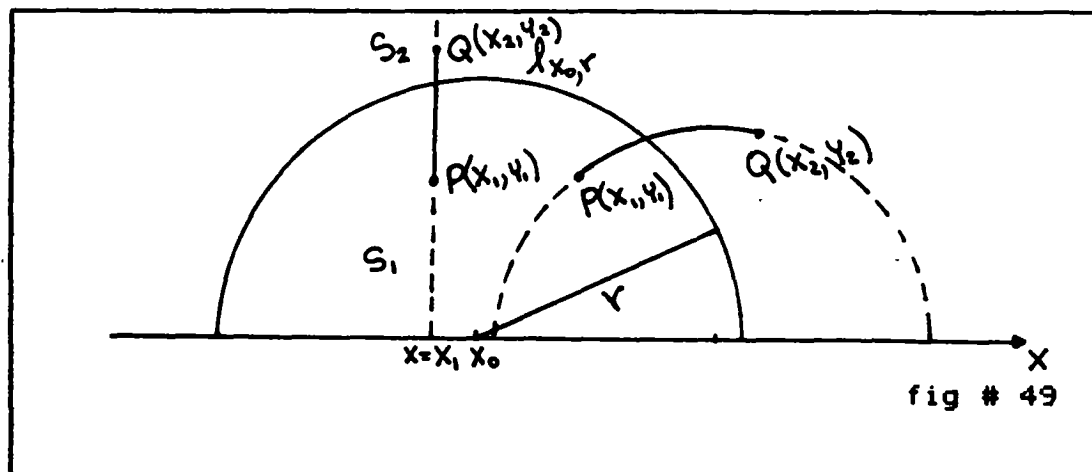
resulta $x = a$ y $y = \sqrt{r_1^2 - (a - x_4)^2}$
el cual es el punto donde se cortan l_a y I_{x_4, r_1} .



De manera análoga se sigue para el caso en donde L es una recta hiperbólica del tipo II. Esto es:

i. Si $x_1 = x_2$, el segmento hiperbólico PQ es una porción de una recta hiperbólica tipo I (fig # 49).

ii. Si $x_1 \neq x_2$, el segmento hiperbólico PQ es una porción de una recta hiperbólica tipo II (fig # 49).



Definición:

Llamaremos semiplanos a los conjuntos convexos de los que habla el postulado S, y la recta se llamará arista de cada semiplano.

Nos proponemos ahora verificar que los Axiomas relacionados con medida angular se verifican en el Modelo del Semiplano Superior.

Postulado 6:

A cada ángulo le corresponde un número real entre 0 y 180.

Prueba:

Es consecuencia inmediata de la definición de medida angular en el Modelo: esto es, si $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$ son tres puntos distintos en H y :

i. El rayo hiperbólico PQ está contenido en una recta hiperbólica del tipo I, mientras que el rayo hiperbólico PR está contenido en una recta hiperbólica tipo II y además,

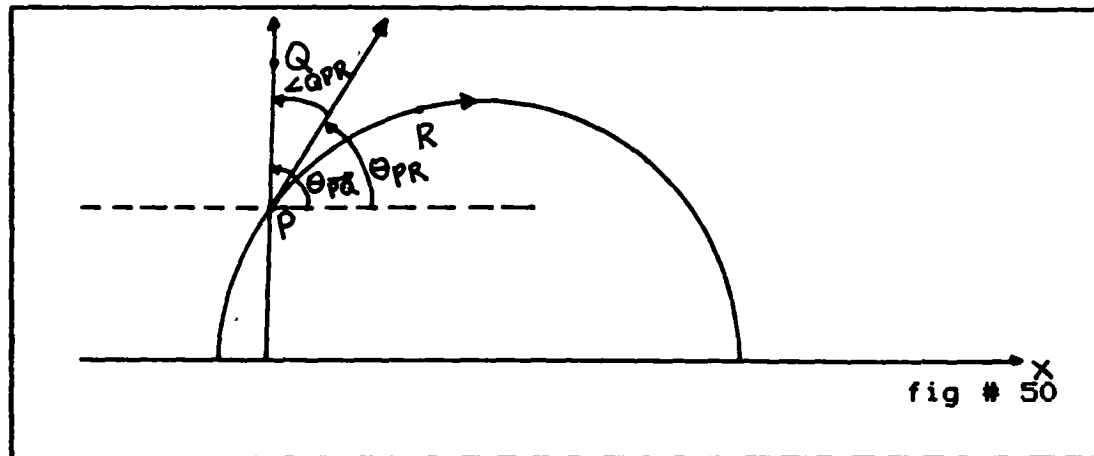
-En el rayo PQ $y_2 > y_1$ (fig # 50).

Entonces:

$$\begin{aligned} \angle QPR &= \left| \theta_{\vec{PQ}} - \theta_{\vec{PR}} \right| \\ \angle QPR &= \left| 90 - \theta_{\vec{PR}} \right|, \text{ pero } -90 < \theta_{\vec{PR}} < 90, \end{aligned}$$

entonces

$$0 < \angle QPR < 180$$



-Si en el rayo PQ, $y_1 > y_2$ (fig # 51).

Entonces:

$$\begin{aligned} \angle QPR &= \left| \theta_{\vec{PQ}} - \theta_{\vec{PR}} \right| \\ \angle QPR &= \left| -90 - \theta_{\vec{PR}} \right|, \text{ pero } -90 < \theta_{\vec{PR}} < 90, \end{aligned}$$

entonces

$$0 < \angle QPR < 180$$

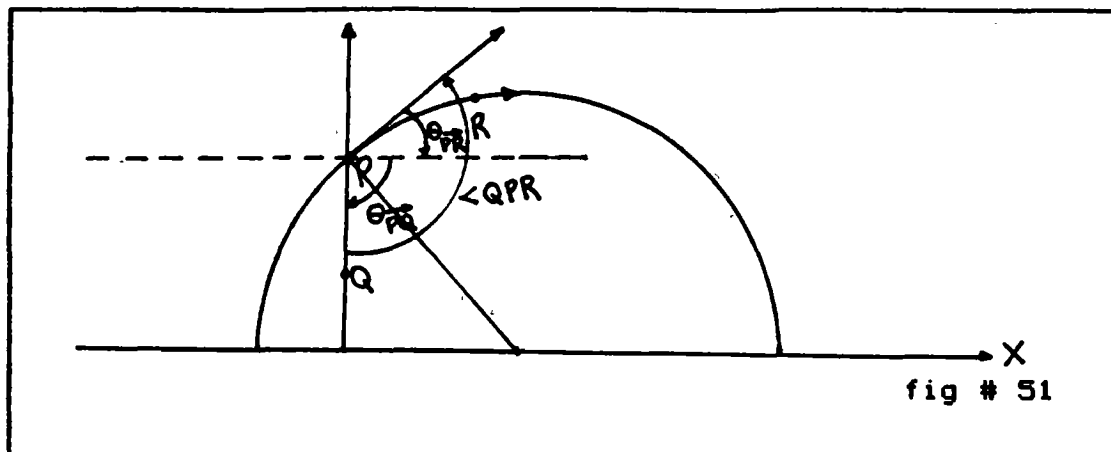


fig # 51

ii. Si el rayo hiperbólico PQ está contenido en una recta hiperbólica del tipo II, y el rayo hiperbólico PR está contenido en una recta hiperbólica tipo II (fig # 52),

Entonces:

$$\begin{array}{l}
 -90 < \theta_{PQ} < 90 \quad \rightarrow \quad \left| \theta_{PQ} \right| < 90 \\
 \text{y} \quad -90 < \theta_{PR} < 90 \quad \rightarrow \quad \left| \theta_{PR} \right| < 90
 \end{array}$$

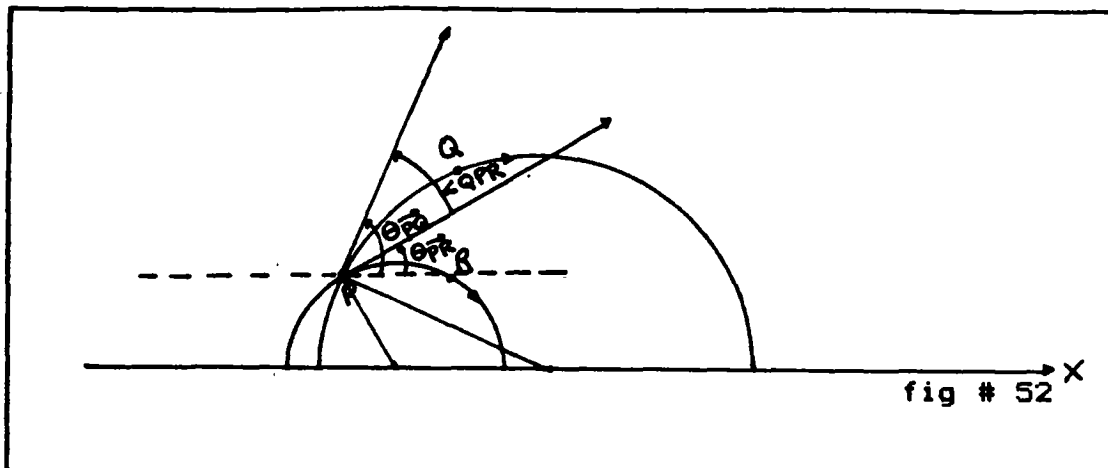
luego

$$0 < \left| \theta_{PQ} - \theta_{PR} \right| < \left| \theta_{PQ} \right| + \left| \theta_{PR} \right| \quad (\text{por propiedades del valor absoluto}).$$

$$\text{así} \quad 0 < \left| \theta_{PQ} - \theta_{PR} \right| < 90 + 90$$

entonces

$$0 < \angle QPR < 180 \quad (\text{donde } \angle QPR = \left| \theta_{PQ} - \theta_{PR} \right|).$$



Definición:

Al número especificado es el postulado 6 se llama la medida del ángulo y se escribe $\angle BAC$.

Definición:

Llamaremos rayo a la porción de recta que tiene en uno de sus sentidos un punto inicial y que en el otro sentido es ilimitado.

Postulado 7:

Dado un rayo y uno de los semiplanos en que se divide el plano por este rayo. Para cada número real r entre 0 y 180, existe un único rayo en el semiplano tal que la medida del ángulo formado por estos rayos es igual a r .

Pruebas:

Sean $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ dos puntos distintos en H y i . Si el rayo hiperbólico PQ está contenido en una recta hiperbólica del tipo I, por ejemplo i_a y sea :
 $S_1 = \{(x, y) \in H / x > a\}$ uno de los semiplanos en que PQ divide

el plano hiperbólico y sea $0 < r < 180$ un ángulo dado. Por demostrar, existe un único rayo $PR \subseteq S_1$ tal que $\angle QPR = r$.

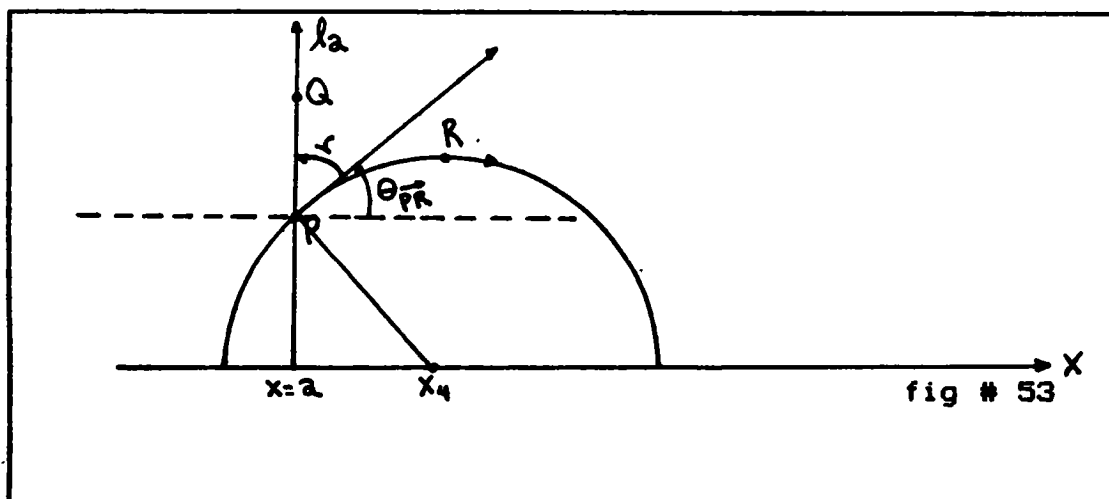
Para determinar el rayo PR con $\theta_{\overrightarrow{PR}} = 90 - r$ (fig # 53), debemos encontrar el centro de la recta hiperbólica tipo II (x_4, r) , que contiene a PR .

Como $\theta_{\overrightarrow{PR}} = 90 - r$

entonces $-(x_4 - x_1)/y_1 = \tan(90 - r)$ con $y_2 > y_1$.

así $x_4 = x_1 + y_1 \tan(90 - r)$ (*)

La existencia de PR están dados por la ecuación (*) y su unicidad, dado que x_4 sólo dependen de x_1, y_1 y del número dado r , entonces se da en función de la ecuación (*).



ii. Si el rayo hiperbólico PQ está contenido en una recta hiperbólica del tipo II, y sea :

$S_1 = \{(x, y) \in H / (x - x_0)^2 + y^2 > r^2\}$ uno de los semiplanos en que PQ divide el plano hiperbólico y sea $0 < r < 180$ un ángulo dado. Por demostrar que existe un único rayo $PR \subseteq S_1$ tal que $\angle QPR = r$.

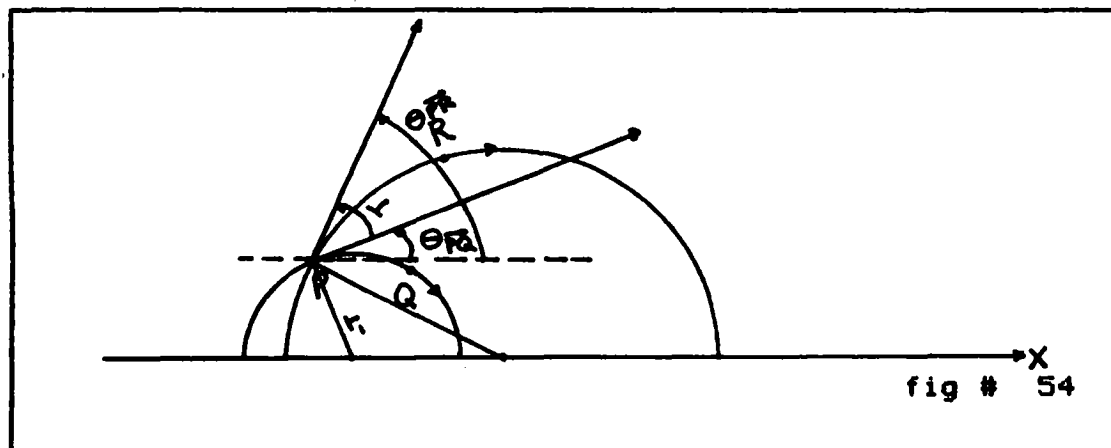
Para determinar el rayo PR con $\theta_{PR} = r + \theta_{PQ}$ (fig # 54), debemos encontrar el centro de la recta hiperbólica tipo II (x_4, r) , que contiene a PR.

Como $\theta_{PR} = r + \theta_{PQ}$
entonces $-(x_4 - x_1)/y_1 = \tan(r + \theta_{PQ})$

$$\text{así } x_4 = x_1 + y_1 \tan(r + \theta_{PQ}) \quad (**)$$

La existencia y unicidad de PR están dados por la ecuación (**)

El considerar el otro semiplano en que el rayo PQ divide al plano hiperbólico se hace de manera análoga.



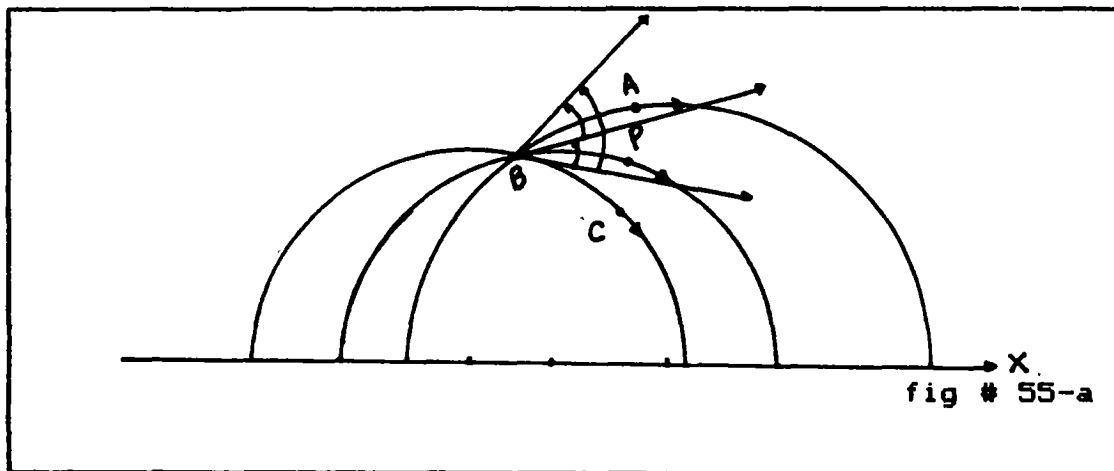
Postulado 8:

Si P es un punto en el interior de $\angle ABC$ entonces:

$$\angle ABC = \angle ABP + \angle PBC.$$

Prueba:

Sea $\angle ABC$ un ángulo hiperbólico dado, con $B(x_1, y_1)$ y sea $P(x_2, y_2)$ un punto en el interior de $\angle ABC$ (fig # 55-a).



Como P está en el interior de $\angle ABC$ entonces:

$$\angle ABC = |e_{BA} - e_{BC}|; \angle PBC = |e_{BP} - e_{BC}| \text{ y } \angle ABP = |e_{BA} - e_{BP}|$$

$$\text{Así } \angle ABC = |e_{BA} - e_{BC}|$$

$$\angle ABC = |e_{BA} - e_{BP}| + |e_{BP} - e_{BC}|$$

$$\angle ABC = \angle ABP + \angle PBC \text{ como queríamos demostrar.}$$

Definición:

Dos rayos se llaman opuestos si tienen el punto inicial común y pertenecen a una misma recta.

Definición:

Si AB y AC son rayos opuestos y AD es otro rayo, entonces $\angle BAD$ y $\angle DAC$ forman un par lineal. También se dice que estos ángulos son adyacentes.

Definición:

El ángulo formado por dos rayos opuesto suma dos ángulos rectos.

Definición:

Si la suma de la medida de dos ángulos es dos rectos entonces decimos que los ángulos son suplementarios.

Postulado 9: (del suplemento)

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

Pruebas:

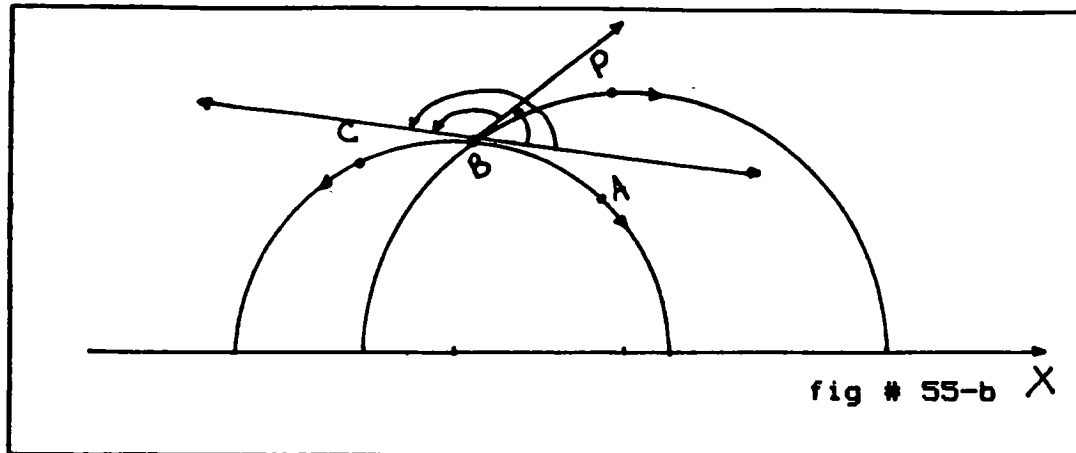
Sean $\angle ABP$ y $\angle PBC$ dos ángulos que formen un par lineal (fig# 55-b). Así el ángulo $\angle ABC$ está formado por dos rayos opuestos entonces $\angle ABC = 180^\circ$ (1)

$$\text{Además } \angle ABP = |e_{\overrightarrow{BA}} - e_{\overrightarrow{BP}}|; \angle PBC = |e_{\overrightarrow{BP}} - e_{\overrightarrow{BC}}|$$

$$\text{y } \angle ABC = |e_{\overrightarrow{BA}} - e_{\overrightarrow{BC}}|$$

entonces:

$$\begin{aligned} \angle ABP + \angle PBC &= e_{\overrightarrow{BA}} - e_{\overrightarrow{BP}} + e_{\overrightarrow{BP}} - e_{\overrightarrow{BC}} \\ &= |e_{\overrightarrow{BA}} - e_{\overrightarrow{BC}}| \\ &= \angle ABC \\ &= 180^\circ. \quad (\text{por 1}) \end{aligned}$$



De esta forma hemos verificado que el conjunto de Postulados de Birkhoff, cuyo postulado central es el de la regla se satisfacen en el Modelo del Semiplano Superior de Poincaré.

Con lo cual podemos concluir que este Modelo, utilizando los postulados de Birkhoff, es un Modelo de la Geometría Hiperbólica. Así los resultados que se cumplen en esta geometría, se cumplen también en el Modelo, lo que nos resultará de gran utilidad en el desarrollo del siguiente capítulo.

CAPITULO III

IMPORTANCIA DEL MODELO. VENTAJAS Y LIMITACIONES

3.1 Prueba de que la Consistencia de la Geometría Hiperbólica se sigue de la Geometría Euclidea.

Como habíamos señalado en el capítulo I, la consistencia de un sistema axiomático se sigue de la existencia de un Modelo que lo interprete.

De esta forma, podemos concluir que la geometría hiperbólica es consistente, ya que hemos encontrado que existe el Modelo del Semiplano Superior de Poincaré que interpreta los objetos hiperbólicos.

Como los objetos con que se demuestran las proposiciones de la geometría hiperbólica en el Modelo, son euclidianos (puntos, rectas perpendiculares al eje x , semicircunferencias ortogonales al eje x) entonces la consistencia de la geometría hiperbólica se sigue de la consistencia de la geometría euclidea; la cual no se duda que sea consistente. Con lo que la geometría hiperbólica es tan consistente como la geometría euclidea.

3.2 Independencia del Quinto Postulado de Euclides de los de la Geometría Neutra.

Por otro lado un postulado dentro de un sistema axiomático es independiente de los otros postulados en el sistema axiomático si y sólo si al sistema axiomático le quitamos el postulado y le agregamos su negación y el nuevo sistema axiomático es consistente. Así el quinto postulado es independiente de los cuatro primeros ya que el sistema

axiomático formado por los cuatro primeros postulados de Euclides y el postulado de Lobachevski es consistente como hemos mostrado previamente haciendo uso del Modelo del Semiplano Superior.

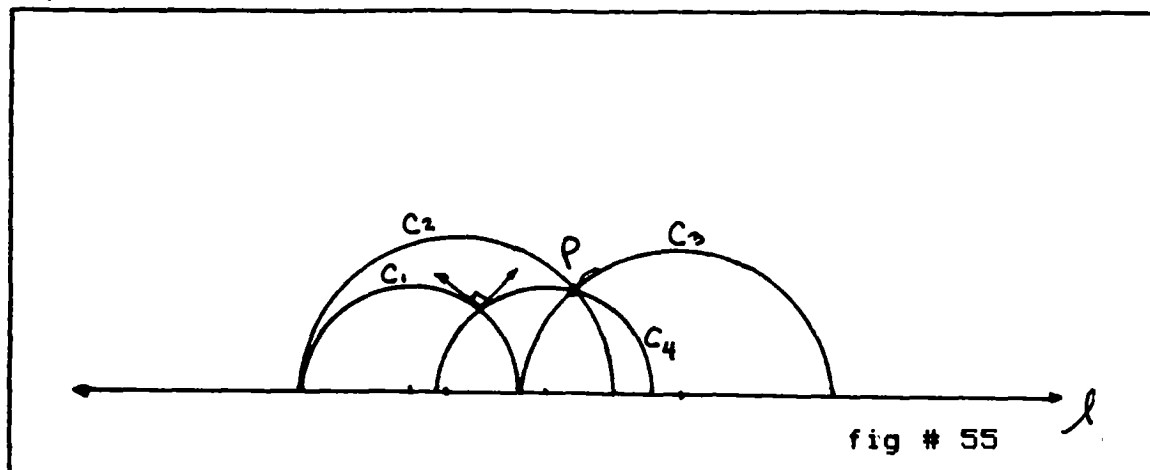
3.3 Proporciona un Método de Demostración de Resultados de la Geometría Euclideana.

Una de las aplicaciones que tiene la geometría hiperbólica a través del modelo del semiplano superior de Poincaré es la de poder interpretar resultados de ella para resolver problemas de la geometría euclideana; que resultarían posiblemente muy complicados de solucionar, sin esta herramienta. Esta forma de interpretar los resultados nos proporciona un método de demostración de algunos teoremas de la geometría euclideana.

Veamos algunos de estos resultados:

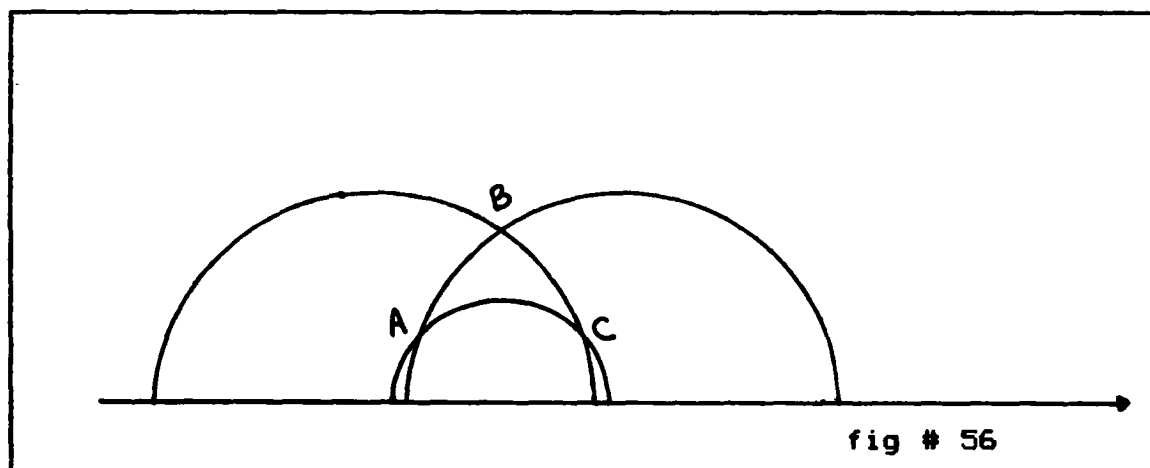
Teoremas:

Sea l una recta, C_1 una circunferencia con centro en l . Sea P un punto exterior a C_1 . Sean C_2 y C_3 dos circunferencias tangentes a C_1 con centros en l y tales que pasen por P ; y sea C_4 una circunferencia ortogonal a C_1 con centro en l que pasa por P . Entonces el ángulo formado por C_2 y C_4 y el formado por C_3 y C_4 en P son iguales (fig # 55).



Teoremas:

Sea ABC la figura formada por arcos de circunferencia cuyos centros pasan por alguna recta l dada. Entonces la suma de los ángulos internos de ABC es menor que dos rectos (fig # 56).



La demostración de estos teoremas resultarían algo complicado, si utilizáramos las propiedades de las

circunferencias tangentes y ortogonales, en el caso de un enfoque sintético o si nos apoyáramos en la geometría analítica. Sin embargo, estos resultados corresponden en el Modelo del Semiplano Superior de Poincaré; el primero, a los ángulos de paralelismos a izquierda y a derecha, que como demostramos en el capítulo I, son iguales; por otro lado el segundo, a la suma de los ángulos internos de todo triángulo que como también demostramos en el capítulo I, suman menos de dos rectos.

3.4 El Modelo sirve para Mostrar como lucen Algunas Curvas Características de la Geometría Hiperbólica.

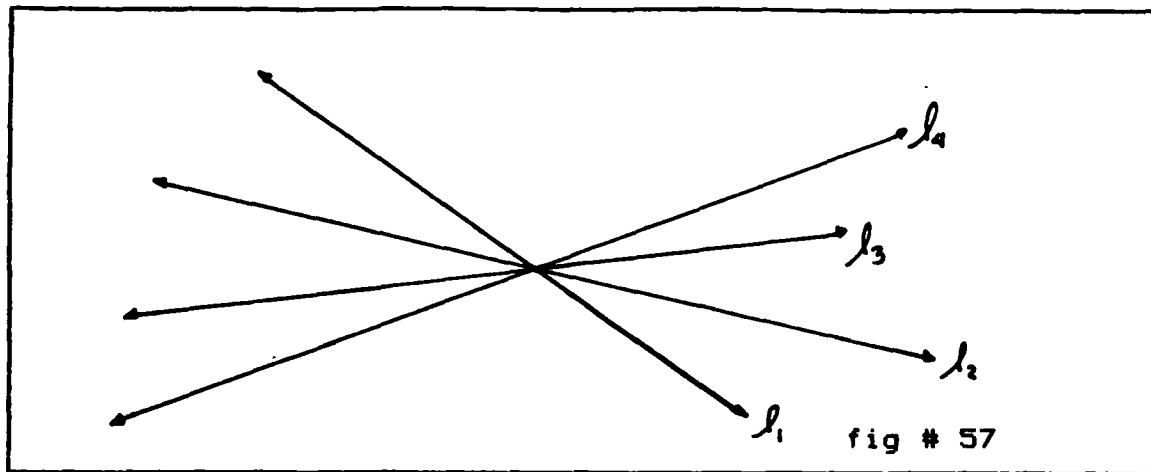
Resulta interesante analizar y ver como lucen algunas curvas particulares de la geometría hiperbólica, en el Modelo del Semiplano Superior; las cuales siguen trayectorias ortogonales. Entre las cuales podemos señalar: Las circunferencias no euclideanas, las equidistantes y los oriciclos. Las cuales definiremos más adelante.

3.4.1 Haces en la Geometría Hiperbólica.

A continuación definiremos los tipos de haces que se presentan en la geometría hiperbólica.

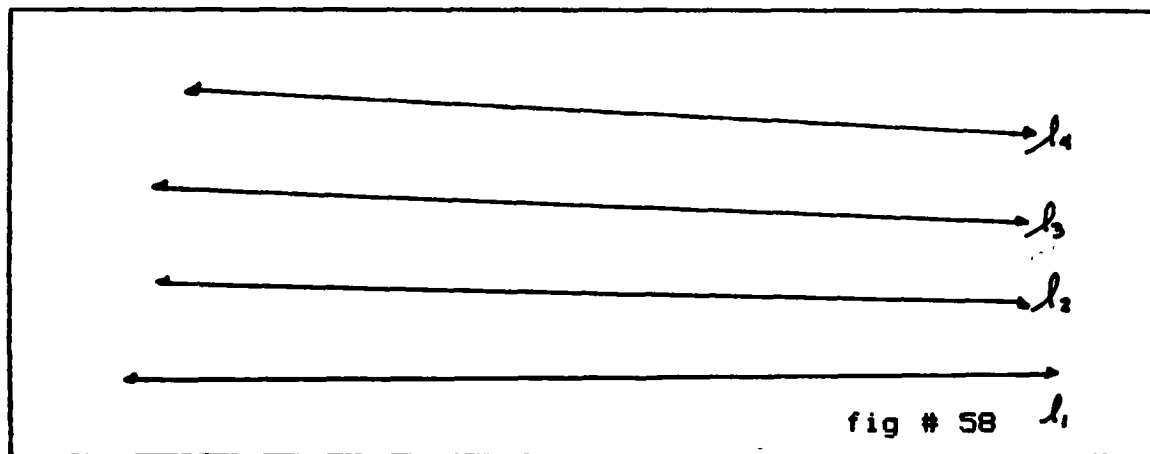
Definición:

Al conjunto de rectas que pasan por un mismo punto, las llamaremos haz elíptico (fig # 57).



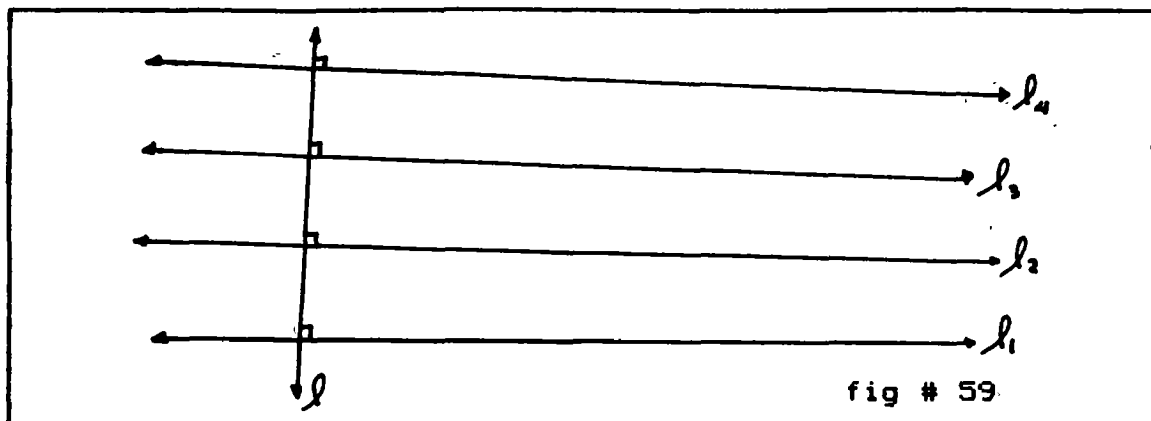
Definición:

Al conjunto de rectas paralelas entre sí, en una dirección determinada las llamaremos haz parabólico (fig # 58).



Definición:

Al conjunto de rectas perpendiculares a alguna recta dada, las llamaremos haz hiperbólico (fig # 59).

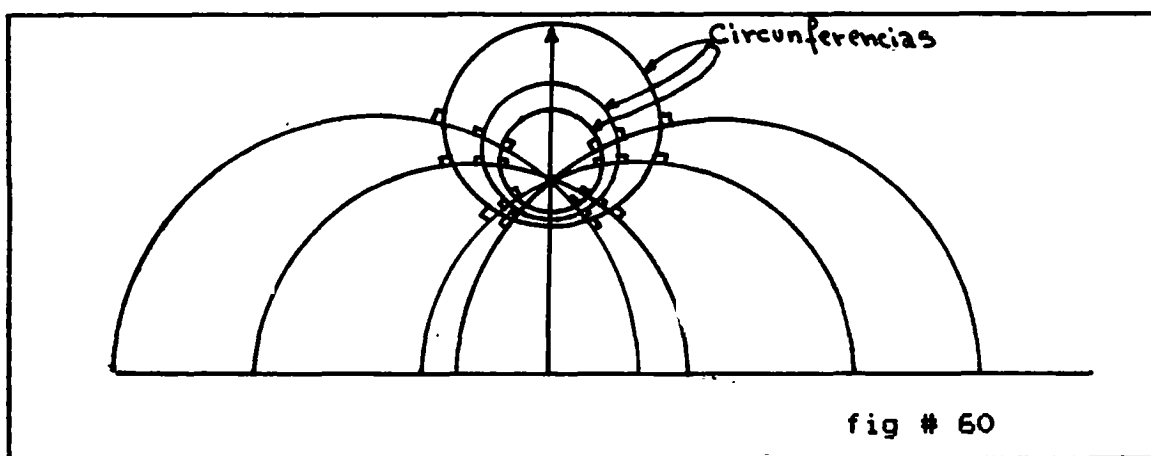


3.4.2 Curvas Características de la Geometría Hiperbólica.

Ahora, definiremos algunas curvas hiperbólicas, e ilustraremos la forma como lucen en el Modelo del Semiplano Superior de Poincaré.

Definición:

Llamaremos circunferencias en la geometría hiperbólica a las trayectorias ortogonales de haces elípticos (fig # 60).



Notemos algunas características de las circunferencias no euclidianas:

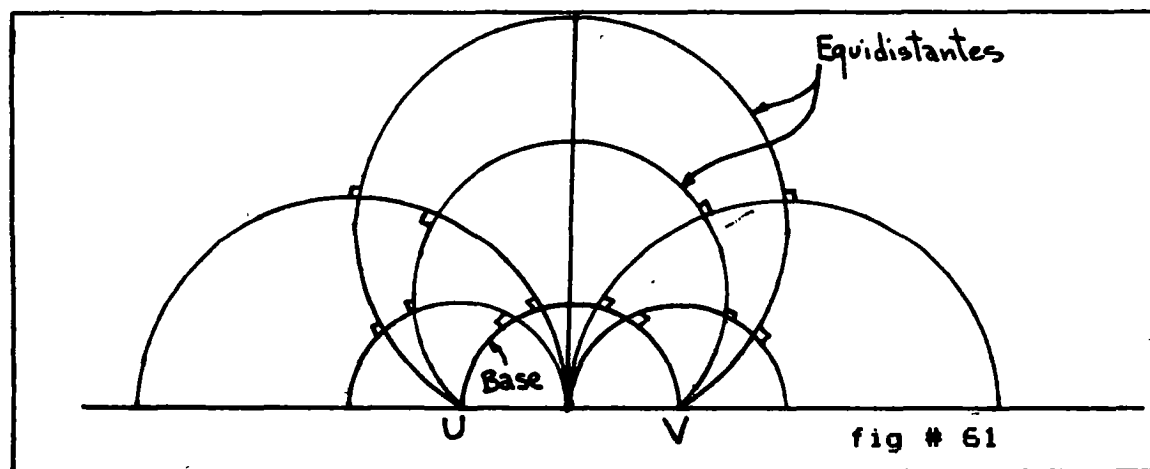
- Observemos que las circunferencias en la geometría hiperbólica, en el Modelo, lucen igual que las circunferencias euclidianas. Sin embargo sus centros no coinciden.

- Se cumple la propiedad de formar ángulos rectos con cada uno de sus radios; que es una propiedad de todas las circunferencias.

- Las circunferencias no euclidianas corresponden al lugar geométrico de los puntos que equidistan de su centro.

Definición:

Llamaremos Equidistantes a las trayectorias ortogonales de haces hiperbólicos (fig # 61).



Notemos algunas características de las equidistantes:

- Las equidistantes también se pueden definir como el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de una recta hiperbólica que se llama Base de las equidistantes

- Si tenemos una recta l hiperbólica tipo II en el Modelo del Semiplano Superior con puntos frontera U y V (fig # 61) entonces las equidistantes a la recta l es un arco circular Euclideano que pasa por U y V .

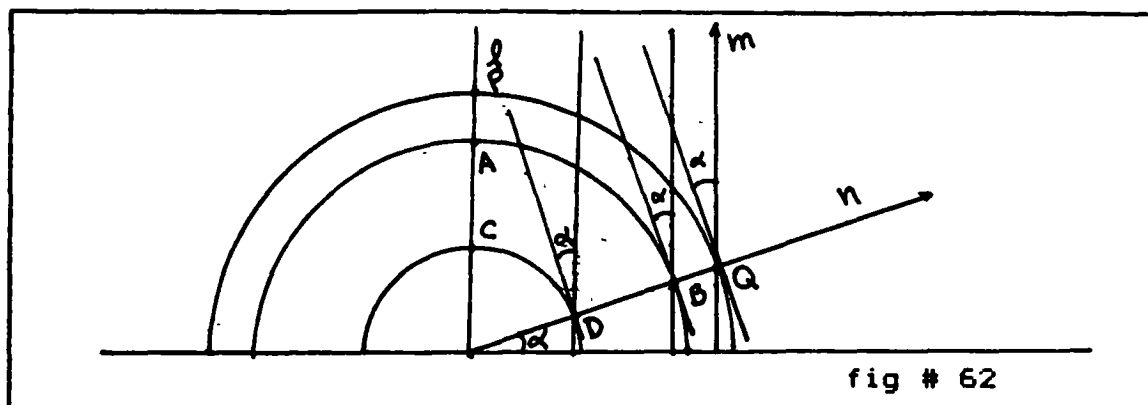
- Además el siguiente teorema muestra que segmentos hiperbólicos congruentes pueden diferir de manera radical en su longitud euclideana.

Teorema:

Toda recta euclideana en el Modelo del Semiplano Superior que no sea ni paralela, ni perpendicular al eje de las x es una recta de equidistancia.

Demostración:

Sea η la recta euclideana que corta al eje x en un punto $(a,0)$. Construyamos la recta hiperbólica l del tipo I que pase por $(a,0)$. Sea P un punto sobre l (fig #62). Tracemos la recta hiperbólica tipo II que pasa por P y de centro $(a,0)$, que llamaremos l' (que es perpendicular a l), la cual corta a η en un punto que llamaremos Q . Construyamos la paralela a l que pasa por Q y llamémosle μ . Así el ángulo de paralelismo que llamaremos α , es igual al ángulo que forma η con el eje x , ya que el eje x es perpendicular a μ ; y μ es perpendicular a la tangente a l' en el punto Q , los cuales son los lados del

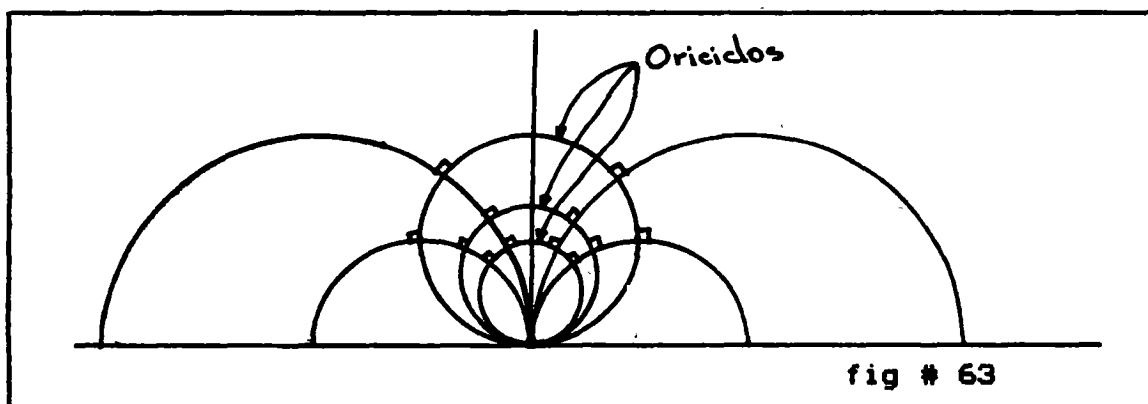


ángulo de paralelismo. De esta forma, todos los segmentos hiperbólicos que están entre n y l (los cuales serán del tipo II) tienen el mismo ángulo de paralelismo, luego son iguales. Así todos los puntos de l equidistan de los puntos de n .

Hemos demostrado que los segmentos hiperbólicos PQ , AB , CD , etc; tienen igual longitud. Pero euclideanamente sabemos que esas mismas longitudes de arco, son diferentes.

Definición:

Llamaremos Oriciclos a las trayectorias ortogonales de haces parabólicos (fig # 63).

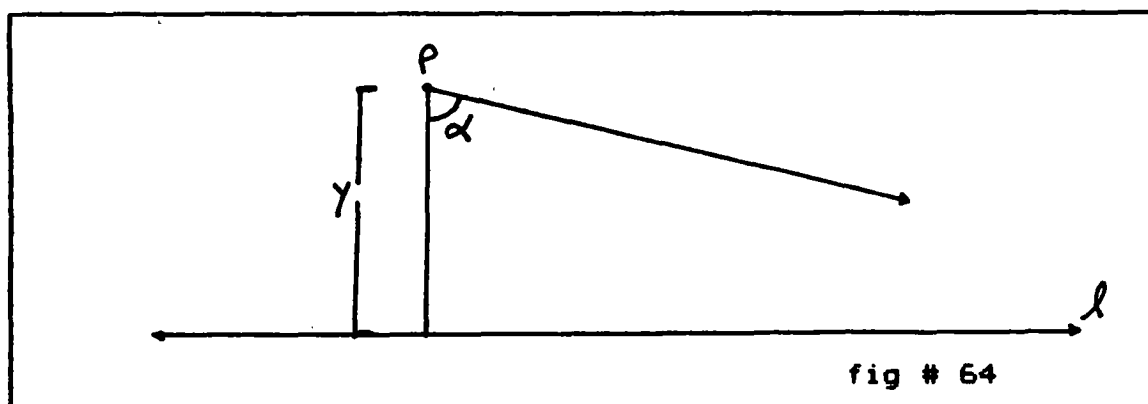


3.5. Importancia del Modelo en la Enseñanza.

Resultan interesantes, muchos de los resultados que se desarrollan en la geometría hiperbólica, algunos ya vistos en los capítulos precedentes, los cuales se oponen a la geometría euclídeana. Pero existen otros resultados que son muy interesantes como por ejemplo, las relaciones trigonométricas básicas y la famosa fórmula de Lobachevski-Bolyai que algunos matemáticos destacados la llaman La fórmula más importante en Matemática; las cuales analizaremos a continuación.

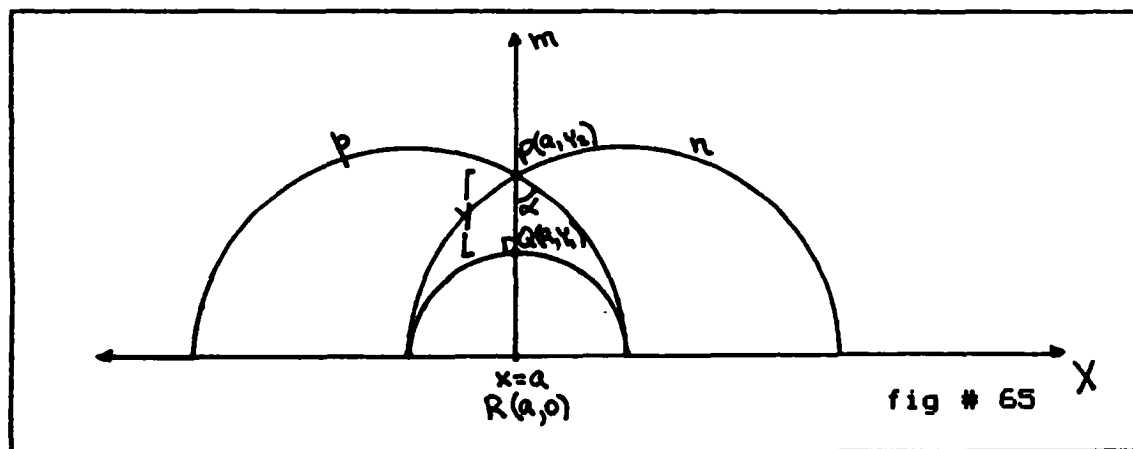
3.5.1 Fórmula de Lobachevski-Bolyai.

La fórmula de Lobachevski-Bolyai nos permite encontrar la relación entre el ángulo de paralelismo (que llamaremos α) y la longitud de la perpendicular a la recta l (que llamaremos y), trazada desde un punto P que no pertenece a l (fig # 64).



Para determinar la fórmula de Lobachevski-Bolyai, haremos uso del Modelo de Poincaré del Semiplano Superior.

Sea $\alpha = \pi(y)$ el ángulo de paralelismo correspondiente a una longitud y , que como sabemos por el contrareciproco del teorema # 6 (del capítulo I), no depende de la posición en que esté. Sea m una recta hiperbólica tipo I (de abscisa a), sea l una recta hiperbólica tipo II cuyo centro euclideo sea el pie de la recta m intersectada con el eje x (llamémosle R , el cual tendrá coordenadas $(a,0)$) y cuyo radio sea la unidad. Así m y l son perpendiculares, llamémosle $Q(a, y_1)$ al punto de intersección de m y l . Sea $P(a, y_2)$ un punto de m que esté en el exterior de l . Sean n y p las paralelas a l que pasan por P . Así llamémosle y a la longitud no-euclidea PQ y con esto, sea $\alpha = \pi(y)$ el ángulo de paralelismo de las rectas l y p por P , en uno de los sentidos (fig # 65).



Sea h la distancia euclidea entre los puntos P y R (fig # 66).

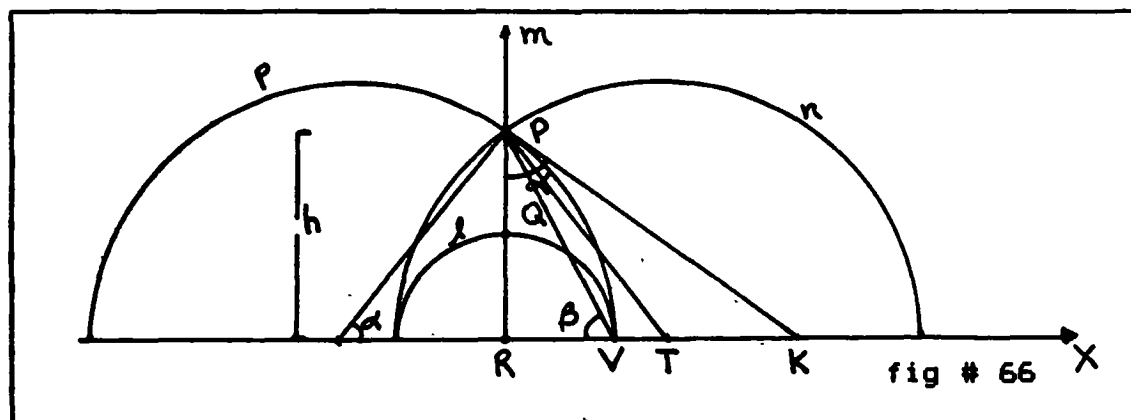
Así $h = y_2$, mientras que $y_1 = 1$, ya que la distancia euclídeana entre R y Q es la unidad, dado que corresponde al radio euclídeano de la recta hiperbólica l .

Como n es del tipo I, entonces:

$$\begin{aligned} y &= \ln (y_2/y_1), & \text{donde } x_1 &= x_2 = a. \\ y &= \ln (y_2) & (y_1 &= 1) \end{aligned} \quad (1)$$

Sean S y T los centros euclídeanos de las rectas hiperbólicas p y n respectivamente, sea PK la tangente a p en P, de donde $ST \perp TP$, dado que corresponden a radio y tangentes euclídeanas de p . De esta forma, considerando los triángulos

SPT y PRT, los cuales tienen el ángulo PTS en común y $\angle SPT \cong \angle PRT$ (ángulo recto), entonces $\angle PST \cong \angle RPK = \alpha$ (ángulo de paralelismo a derecha). Sea V el punto de intersección de l con el eje x cuya distancia euclídeana a S sea igual al radio de la recta hiperbólica p . Construyamos el segmento euclídeano PV, con lo cual, el triángulo SPV es isósceles ($SP \cong SV$). Sea $\beta = \angle PVS$, así en el triángulo SPV: $\alpha + 2\beta = \pi$ luego $\beta = (\pi - \alpha)/2$.



Del triángulo PRV resulta:

$$\begin{aligned} & RP/RV = \tan\beta \\ \text{entonces } & h/1 = \tan\beta \quad (h = RP \text{ y } RV = 1) \\ \text{entonces } & y_2 = \tan\beta \quad (h = y_2) \\ \text{entonces } & y_2 = \cot(\alpha/2) \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) y (2) se sigue que:

$$\begin{aligned} & y = \ln \cot(\alpha/2) \\ \text{entonces } & e^y = \cot(\alpha/2) \\ & e^{-y} = \tan(\alpha/2) \\ \text{así } & \arctan e^{-y} = \alpha/2 \\ \text{entonces } & \alpha = 2 \arctan e^{-y} \\ \text{de donde } & \pi(y) = 2 \arctan e^{-y} \end{aligned}$$

Que corresponde a la fórmula de Lobachevski-Bolyai, la cual presenta al ángulo de paralelismo dependiente únicamente de la longitud del segmento hiperbólico y .

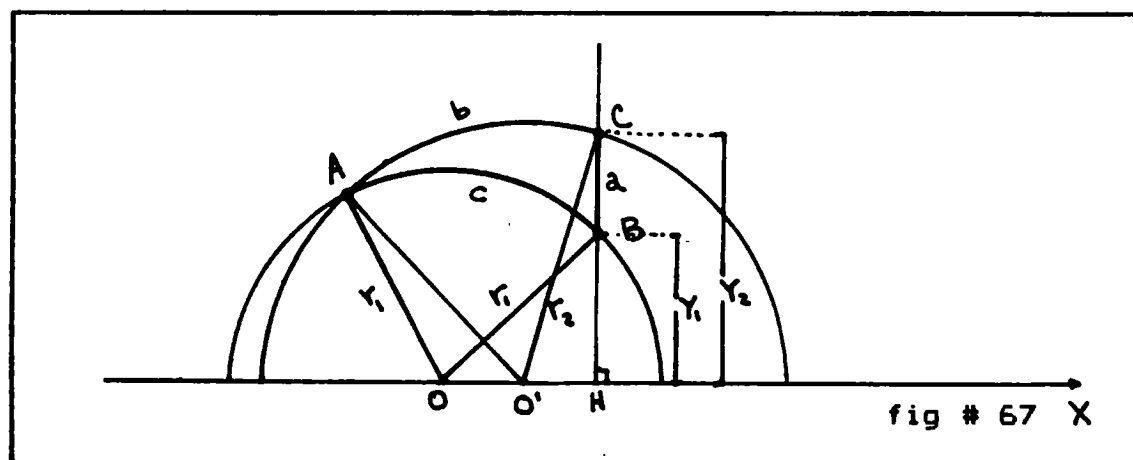
3.5.2 Relaciones Trigonómicas Básicas de Lobachevski.

Haciendo uso del Modelo del Semiplano Superior de Poincaré, presentaremos las relaciones trigonométricas hiperbólicas básicas que se verifican en la trigonometría Lobachevskiana.

Empecemos por deducir la fórmula trigonométrica Lobachevskiana que expresa un lado de un triángulo en función de sus ángulos internos; lo que indica que en la geometría de Lobachevski, la longitud de los lados de un triángulo queda determinada por sus ángulos internos, situación ésta, que no ocurre en la geometría Euclidea. Este planteamiento, trae

consigo, el hecho de que en la geometría de Lobachevski no existen triángulos semejantes. Veamos ese resultado:

Sea ABC un triángulo cualquiera, en el Modelo del Semiplano Superior de Poincaré, sean α, β, γ las medidas de los ángulos internos de A, B, C y sean a, b, c las longitudes no euclidianas de los lados opuestos a α, β, γ respectivamente, el cual, a través de un desplazamiento congruente, hacemos coincidir, sin pérdida de generalidad, el lado BC con un segmento no euclideo que esté contenido en una recta hiperbólica tipo I (fig # 67).



Como a es un segmento hiperbólico tipo I. Entonces

$$a = \ln (y_2/y_1) \quad (1)$$

$$\text{Así } \cosh a = (e^{\ln y_2/y_1} + e^{-\ln y_2/y_1})/2$$

$$\text{entonces } \cosh a = (y_2/y_1 + y_1/y_2)/2$$

$$\text{entonces } \cosh a = (y_2^2 + y_1^2)/2y_1y_2 \quad (2)$$

$$\text{pero } y_1^2 = r_1^2 - OH^2 \quad (\text{por teorema de pitágoras})$$

$$\text{así } y_1^2 = OA^2 - OH^2 \quad (r_1 = OA) \quad (3)$$

$$\text{analogamente } y_2^2 = O'A^2 - O'H^2 \quad (4)$$

Sumando (3) y (4) resulta:

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 &= OA^2 + O'A^2 - (OH^2 + O'H^2) \\ &= OO'^2 + 2 OA O'A \cos \angle DAO' - [(OH-O'H)^2 + 2 OH O'H] \\ &= OO'^2 + 2 OA O'A \cos \angle DAO' - OO'^2 - 2 OH O'H \\ &= 2 OB O'C \cos \angle DAO' - 2 OH O'H \quad (5) \end{aligned}$$

De (2) y (5) resulta:

$$\text{cosha} = (OB)/y_1 (O'C)/y_2 \cos \angle DAO' - (OH)/y_1 (O'H)/y_2 \quad (6)$$

Pero $(OB)/y_1 = 1/\text{sen}\beta$ (porque $\angle BOH = \beta$) . (Ver fig # 68).

$(O'C)/y_2 = 1/\text{sen}\gamma$ (porque $\angle CO'H = \pi - \gamma$
y $\text{sen}(\pi - \gamma) = \text{sen}\gamma$)

$\cos \angle DAO' = \text{cosa}$ (porque α es el ángulo comprendido
entre las tangente, luego es igual
al comprendido entre los
respectivos radios)

$$(OH)/y_1 = \text{cot}\beta$$

$$(O'H)/y_2 = -\text{cot}\gamma \quad (\text{porque } \text{cot}(\pi - \gamma) = -\text{cot}\gamma)$$

Sustituyendo en (6) resulta:

$$\text{cosha} = 1/\text{sen}\beta \cdot 1/\text{sen}\gamma \cdot \text{cosa} + \text{cot}\beta \cdot \text{cot}\gamma$$

de donde

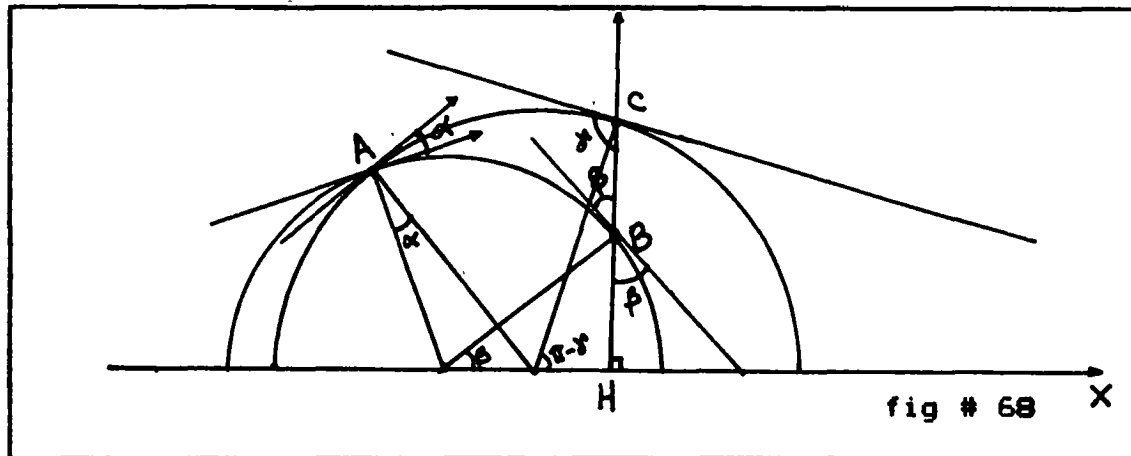
$$\text{cosha} = (\text{cosa} + \text{cos}\beta \text{cos}\gamma) / \text{sen}\beta \text{sen}\gamma \quad (7)$$

La fórmula (7) nos proporciona la longitud no euclideana del lado a en función única y exclusivamente de sus ángulos internos.

De manera análoga podemos determinar la longitud de los otros lados en función de α , β , γ ; esto es:

$$\text{cosh } b = (\cos \beta + \cos \gamma \cos \alpha) / \text{sen } \gamma \text{ sen } \alpha \quad (8) \quad \text{y}$$

$$\text{cosh } c = (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) / \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \quad (9)$$



Pasemos ahora a deducir la fórmula que presenta la relación entre los lados y los ángulos no euclidianos.

$$\begin{aligned} \text{sen } h / \text{sen } \alpha &= \sqrt{\text{cosh}^2 a - 1} / \text{sen } \alpha && (\text{senh}^2 a = \text{cosh}^2 a - 1) \\ &= \sqrt{(\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)^2 - \text{sen}^2 \beta \text{sen}^2 \gamma} / \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma \end{aligned}$$

Haciendo

$$P = \sqrt{(\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)^2 - \text{sen}^2 \beta \text{sen}^2 \gamma}$$

Resulta:

$$\text{sen } h / \text{sen } \alpha = \sqrt{P} / \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma$$

Análogamente,

$$\text{sen } h / \text{sen } \beta = \sqrt{P} / \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma$$

$$\text{y } \text{sen } h / \text{sen } \gamma = \sqrt{P} / \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma$$

Así,

$$\text{senha}/\text{sen}\alpha = \text{senhb}/\text{sen}\beta = \text{senhc}/\text{sen}\gamma = \sqrt{P}/\text{sen}\alpha \text{ sen}\beta \text{ sen}\gamma \quad (10)$$

La relación (10) nos proporciona la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo no euclideo.

Por otro lado, considerando (8) y (9) , multiplicando resulta:

$$\begin{aligned} & \text{coshb coshc} \\ & = (\text{cos}\beta + \text{cos}\gamma \text{ cosa})(\text{cos}\gamma + \text{cosa cos}\beta)/\text{sen}^2\alpha \text{ sen}\beta \text{ sen}\gamma \end{aligned}$$

y por otro lado:

$$\text{senhb senhc cosa} = P \text{ cosa}/\text{sen}^2\alpha \text{ sen}\beta \text{ sen}\gamma$$

De donde haciendo las respectivas simplificaciones resulta que:

$$\begin{aligned} & \text{coshb coshc} - \text{senhb senhc cosa} \\ & = (\text{cosa} + \text{cos}\beta \text{ cos}\gamma)/\text{sen}\beta \text{ sen}\gamma \\ & = \text{cosha}. \end{aligned}$$

Despejando cosa se tiene:

$$\text{cosa} = (\text{coshb coshc} - \text{cosha})/\text{senhb senhc}; \quad (11)$$

que proporciona el valor de un ángulo en relación a los lados del triángulo no euclideo.

De esta forma hemos deducido las fórmulas trigonométricas básicas de la geometría Hiperbólica haciendo uso del Modelo del Semiplano Superior de Poincaré. En donde hemos determinado la interdependencia que existe entre los lados y los ángulos internos de un triángulo en la geometría Hiperbólica; resultados que no ocurren en la geometría Euclidea, lo cual permite decir que son resultados que se oponen, como esperábamos que ocurriera.

3.6 La Geometría Hiperbólica en Regiones Infinitesimales.

Veamos ahora el comportamiento de la geometría hiperbólica en regiones infinitesimales.

Para esto, consideremos segmentos hiperbólicos cuya longitud no sea mayor que y_0 , con y_0 positivo.

Luego haciendo:

$$\alpha_0 = 2 \operatorname{arc} \tan e^{-y_0}$$

de donde, si $y \leq y_0$, entonces:

$$\alpha_0 \leq \pi(y) \leq \pi/2$$

Pero α_0 se puede hacer tan próxima a $\pi/2$ como se desee, haciendo que y_0 se haga tan pequeño como se quiera. De esta forma para todos los segmentos hiperbólicos $y \leq y_0$ el ángulo de paralelismo $\pi(y)$ se hace tan próximo a $\pi/2$. Esto demuestra que en regiones muy pequeñas o infinitesimales, la geometría hiperbólica se comporta como la geometría euclídeana.

3.7 Prerequisitos para la Enseñanza de la Geometría Hiperbólica, haciendo uso del Modelo del Semiplano Superior de Poincaré.

En el presente trabajo se desarrollan los tópicos elementales de la Geometría Hiperbólica en el Modelo del Semiplano Superior de Poincaré utilizando los postulados de Birkhoff, los cuales se consideran una gran contribución al mejor entendimiento de la geometría, como lo señala E. Moise y F. Downs [Moise, E. y Downs, F., 1972], cuando dicen " Durante varios siglos, el concepto de medida , tanto para segmentos como para ángulos, ha sido una idea central en geometría. Los Postulados de Birkhoff introducen este concepto desde el principio; describen los métodos que todo el mundo emplea. Así, aun cuando los postulados de Birkhoff no están entre sus grandes contribuciones al conocimiento matemático, ellos no obstante, contribuyeron grandemente a un entendimiento mejor de la geometría."

Por otro lado, como nuestra propuesta está orientada a estudiantes de la carrera en Matemática, consideramos que los conocimientos previos a este estudio, utilizando el enfoque antes señalado, son manejados por éstos.

A continuación presentamos la lista de conceptos, de acuerdo a áreas de estudio de la matemática, que corresponden a los requisitos:

- Geometría Euclídeana: (se desarrolla en primer ciclo).
- 1. Términos indefinidos: punto, línea y plano.
- 2. Relaciones de Incidencia.
- 3. Relaciones de Orden.

4. Congruencia: De segmentos, de ángulos y triángulos.

- Trigonometría: (se desarrolla en quinto año de escuela secundaria en el Bachiller en Ciencias y en Bachiller Industrial).

1. Funciones Trigonómicas Básicas.
2. Funciones trigonométricas Inversas.
3. Funciones Trigonómicas Hiperbólicas.
4. La Función Exponencial y la Función Logaritmo Natural. Además de la relación que existe entre ellas.

- Geometría Analítica: (se desarrolla en Sexto año de escuela secundaria en el Bachiller en Ciencias y en Bachiller Industrial).

1. Sistema de Coordenadas Cartesianas.
2. Lugares geométricos.
3. Punto medio de un segmento.
4. Distancia entre dos puntos.
5. Pendiente de una recta y la relación de perpendicularidad y paralelismo de dos rectas respecto a las pendientes.
6. Ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.
7. Ángulo entre dos rectas.
8. Ecuación de la circunferencia en su forma canónica.
9. Intersección entre rectas, entre circunferencias o intersección entre rectas y circunferencias.

3.8 Ventajas de Enseñar Geometría Hiperbólica con el Modelo del Semiplano Superior de Poincaré.

Como nuestro interés en el trabajo está orientado hacia la enseñanza de la Geometría Hiperbólica, consideramos que lo accesible de la propuesta, permitirá que nuestros estudiantes de la Licenciatura en Matemática, empiecen desde muy temprano (desde su primer año de Licenciatura), a atender aspectos tales como:

1. La existencia de Geometrías No-Euclidianas: Que en muchos casos, en la actualidad, se gradúan y no las conocen.
2. Postulado es aquello que se acepta sin demostración y no aquello que resulta evidente por lo cual no se demuestra (como señalan algunos textos de enseñanza media).
3. El uso de Modelos Geométricos, que en muchos casos facilitan demostraciones.
4. Conocer en que consiste la Consistencia de un Sistema Postulacional.
5. Conocer en que consiste la Completitud de un Sistema Postulacional.
6. Comprender que el Quinto Postulado de Euclides es independiente de los cuatro primeros en la geometría Euclideana.

3.9 Posibles Aplicaciones de la Geometría Hiperbólica.

A pesar de que nuestra propuesta se centra en lo relacionado con la enseñanza, cabe señalar que existen múltiples aplicaciones de la geometría hiperbólica en otras áreas del saber. Como lo indica M. Berger [Berger, Geometry II], cuando dice: "La geometría Hiperbólica es usada en análisis, en aritmética, en geometría diferencial, en la teoría de la relatividad y otros".

Así se deja abierta la posibilidad de nuevos estudios y trabajos de graduación que centren su atención en lo que señala M. Berger, lo cual sería de gran importancia en el estudio de la Geometría Hiperbólica.

3.10 Limitaciones.

Una de las limitaciones que se presentará en el uso de la Propuesta que presentamos, es el hecho de no contar con la certeza de que nuestros estudiantes hayan recibido un curso de geometría euclídeana en sus primeros años de escuela secundaria como está estipulado en los contenidos programáticos del Ministerio de Educación, dado que en muchos colegios (principalmente públicos) no se cumple con éste. Sin embargo esta limitación puede ser evitada si se desarrolla un curso de geometría euclídeana antes del curso de geometría no-euclídeana usando el Modelo.

Otra de las limitaciones está relacionada con la falta de bibliografía tanto para desarrollar el trabajo, como para poner en práctica el uso de la Propuesta Metodológica,

resultando ser muy complicado el desarrollo de investigaciones que ayuden a nuestros docentes y estudiantes en la búsqueda de soluciones a los graves problemas por los que atraviesa la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y en particular, la geometría.

C O N C L U S I O N E S

1. SE HAN PRESENTADO ALGUNAS CARACTERISTICAS QUE DIFERENCIAN A LA GEOMETRIA HIPERBOLICA DE LA GEOMETRIA EUCLIDEANA.

2. PROBAMOS QUE LOS AXIOMAS DE BIRKHOFF CUYO POSTULADO CENTRAL ES EL DE LA REGLA, SE VERIFICAN EN EL MODELO DEL SEMIPLANO SUPERIOR DE POINCARÉ.

3. EL USO DE HERRAMIENTAS MATEMATICAS ELEMENTALES RESULTO SER CARACTERISTICO EN EL PRESENTE TRABAJO, LO QUE PERMITE MANIFESTAR QUE RESULTA SENCILLO PARA ESTUDIANTES QUE MANEJEN RESULTADOS DE LA GEOMETRIA EUCLIDEANA, GEOMETRIA ANALITICA Y LA TRIGONOMETRIA.

4. SE DESTACARON LOS ASPECTOS RELACIONADOS CON LA CONSISTENCIA, LA COMPLETITUD Y LA INDEPENDENCIA DE UN SISTEMA AXIOMATICO.

5. SE PRESENTO LA IMPORTANCIA DEL MODELO COMO POR EJEMPLO: PROPORCIONANDO UNA HERRAMIENTA QUE PERMITE DEMOSTRAR RESULTADOS DE LA GEOMETRIA EUCLIDEANA, COMO LUCEN ALGUNAS CURVAS HIPERBOLICAS Y EN LA DEDUCCION DE LA FORMULA DE LOBACHEVSKI-BOLYAL ENTRE OTROS.

RECOMENDACIONES

1. DESARROLLAR LA PRESENTE PROPUESTA, PRESENTANDO PRIMERAMENTE ALGUNOS OBJETOS HIPERBOLICOS DE MANERA VISUAL, LUEGO A UN NIVEL DE CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS Y FINALMENTE LA PARTE FORMAL DESARROLLADA EN EL TRABAJO.

2. PROPONEMOS QUE SE DESARROLLE LA PROPUESTA QUE PRESENTAMOS, CON ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMATICA, UNA VEZ, QUE HALLAN TOMADO UN CURSO DE GEOMETRIA EUCLIDEANA.

3. DESARROLLAR UN ESTUDIO DE ALGUNAS APLICACIONES DE LA GEOMETRIA HIPERBOLICA, EN OTRAS AREAS DE LAS CIENCIAS EXACTAS.

B I B L I O G R A F I A

Acuña, Claudia (1992). Memoria de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Panorámica sobre algunos factores que afectan el aprendizaje de la demostración en geometría elemental. México.

Allen, Frank , Douglas, Edwin , Rickart, Charles , Richmond, Donald y Swain, Henry (1963). Matemática para la Escuela Secundaria, Geometría I y II. Grupo de Estudio de la Matemática Escolar. U.S.A..

Beitía, Germán L. (1993). Memoria de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Una Experiencia del uso de las Ilustraciones Gráficas en las Demostraciones en Geometría. Panamá.

Berger, Marcel Geometry II. Springer-Verlag.

Blumenthal, Leonard (1980). A Modern View of Geometry. Dover Publications, Inc. New York.

Bonola, Roberto (1955). Non-Euclidean Geometry. Dover Publications, Inc. New York.

Boone, James (1994). Memoria de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores en Matemática Educativa. Costa Rica.

Efimov, N. V. (1984). Geometría Superior. Editorial Mir. Moscú.

Eves, Howard (1985). Estudio de las Geometrías. Tomo I y II. Editorial Hispano-Americana S.A. México.

Luque, Alberto (1989). Elementos de Geometría Euclideana. Editorial Limusa. México.

López, Jorge (1989). Revista Arista 2. La Geometría primera parte. Puerto Rico.

Moise, Edwin (1962). Elementos de Geometría Superior. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. U.S.A..

Moise, Edwin y Downs, Floyd (1972). Serie Matemática Moderna. Geometría. Editorial Norma. Bogotá.

Moreno, Luis y Bromberg, Shirley (1987). Fundamentos de la Geometría de Euclides a Hilbert. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV I.P.N. México.

Oliveros, Omar (1992). Apuntes sobre el curso de Geometría. Maestría Centroamericana y del Caribe en Matemática Educativa. Panamá, 1992.