UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y TECNOLOGÍA

PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

PROPUESTA DE RUTA OPTIMA PARA REPARACIONES TELEFÓNICAS

POR:

JOSÉ MURILLO

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOSPARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2004

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y TECNOLOGÍA

PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

PROPUESTA DE RUTA OPTIMA PARA REPARACIONES TELEFÓNICAS

POR:

JOSÉ MURILLO

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOSPARA OPTAR
POR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN
EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2004

TH

10 JUL 2006

APROBADO POR:

M.Sc. Eyda de Jiménez
PRESIDENTE

Dr. José del Rosario Garrido
MIEMBRO

Dra. Manuela Foster
MIEMBRO

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 30/7/04

14069

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a las personas que me han motivado e inspirado para lograr los principales objetivos trazados durante mi vida. Estos seres son mi esposa Alicia, mis padres José y Leocricia, mis hijos José, Ariel y David, mis nietos José, Jennifer, David, Kathia, Addys, Ana Lorena y Ariel, mis hermanos Marcos, Víctor, Julio, Héctor, Damaris, Cándida Rosa y Maristela.

AGRADECIMIENTO

Deseo mostrar mi eterna gratitud al Todopoderoso y a las personas, que de manera directa e indirecta, me hicieron posible obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Investigación de Operaciones.

De manera especial, el más sincero agradecimiento a mis profesores de la maestría José del Rosario Garrido, Manuela Foster, Elmir De Carvalho, Mayra de Lebrija, Eloy Rico, Aurora Mejía y Eyda Jiménez, esta última asesora de este trabajo.

A mis compañeros de la maestría por el privilegio de contar con su amistad, mi sincera gratitud y eterno recuerdo.

INDICE GENERAL

CAPITULO II

CAPITULO III

RESUMEN

El proyecto tiene como finalidad encontrar un método matemático que de solución al problema de la "Determinación de la Ruta Óptima de las Reparaciones Telefónicas en una empresa de telefonía de Panamá y de esta manera, ofrecer un mejor servicio y alcanzar bajar los costos. Se analizaron problemas asociados a los temas de optimización que más se aproximan al problema de seleccionar los mejores recorridos para las rutas de reparaciones telefónicas, con el consiguiente ahorro de combustible y aprovechamiento de la fuerza laboral. Al analizar los problemas asociados al tema de "Optimización de Redes", se concluyó que no brindan solución al problema de la ruta de las reparaciones telefónicas. De los problemas asociados al tema de "Rutas" que fueron analizados, los que determinan una ruta óptima son, el Problema del Viajero y el Problema de Secuenciación de Rutas, los que, combinados, fueron adoptados al "Problema de Rutas de Reparaciones Telefónicas".

Summary

The project tries to find a mathematic method that solve the problem about the "Determination of Optimal Routes for repairs in a Telephone Business in Panama", and so, give a better service at low costs. We analyzed some problems related to optimization topics, which are nearer to the problem of choosing the best path for the telephone repairs routes, that brings fuel saving and best results in labor fulfillments.

Analyzing problem regarding with "Networks Optimization", we concluded that they don't give solution for the telephone repairs routes.

About the problem related to "Routes" subject, we analyzed the elements, that determined an optimum route, which are: the Problem of the Traveler and the Problem of the Route Sequence. The two elements together were adapted to the Routes Problem in the Telephone Repairs.

INTRODUCCIÓN

En esta época de crisis energética internacional, es de suma importancia disminuir los recorridos de los vehículos

El objetivo de este trabajo es seleccionar un método de optimización apropiado, realizar las modificaciones necesarias al algoritmo correspondiente seleccionado y usarlo para determinar las rutas óptimas de las reparaciones telefónicas

Dada la existencia de una serie histórica de datos, se realizó un estudio del procedimiento que utilizaba la compañía INTEL, S A , para reparar las interrupciones telefónicas en la Planta Externa Esto sirvió de base para formular los objetivos y datos que se deben tener en cuenta para seleccionar un método matemático que optimice las rutas de reparaciones en cualquiera empresa que ofrezca servicios de teléfono

Al no contarse con un criterio de optimización para determinar la ruta de reparaciones de la Planta Exterior, la organización de las reparaciones reflejó que se recorría una distancia total mayor en forma innecesaria, originando de esta manera un gasto extra de combustible y el desaprovechamiento de la fuerza laboral

Los objetivos que se pretenden alcanzar al disminuir los recorridos, y al ofrecer así un mejor servicio a menor costo, son los siguientes

i) Mejorar la calidad del servicio de reparaciones

ii) Reducir los costos operativos de la empresa mediante la minimización del tiempo total de las reparaciones y el consumo de combustible

iii) Aumentar el número de reparaciones por unidad de tiempo

iv) Mejorar la imagen de la empresa de teléfonos, en lo relativo a su servicio de reparaciones

En la búsqueda de la selección del método matemático que dé solución al "Problema de la Determinación de la Ruta Óptima de las Reparaciones Telefónicas", se estudiaron los libros de Investigación de Operaciones que estuvieron al alcance, y se revisaron los temas de "Optimización de Redes y los Problemas de Secuenciación de Vehículos" Al analizar el tema de "Optimización de Redes" mediante el estudio de los Problemas de Flujo Máximo, del Camino Mínimo o Ruta más corta y el del Arbol de Mínima Expansión, se concluyó que el "Tema de Optimización de Redes" no brindaba solución al problema de la determinación de la ruta óptima Los "Problemas de Secuenciación de Vehículos", del Agente Viajero y el de Secuenciación de Rutas, combinados y adaptados al problema de ruta de reparaciones telefónicas, fueron los adecuados para determinar una ruta óptima

El presente trabajo se divide en tres capítulos titulados Procesos de Reparación de Interrupciones Telefónicas en la Planta Externa, Análisis de algunos Métodos

Matemáticos y Algoritmo para Resolver el Problema de la Ruta Óptima de Reparaciones Telefónicas

El Capítulo I está dedicado a explicar mediante definiciones y una representación gráfica, los elementos constitutivos de la Planta Externa Además, se expone, de la forma más simple, para beneficio de las personas que tienen poco o ningún conocimiento sobre el tema, el proceso de reparación de las interrupciones en la Planta Externa

El Capítulo II contiene el análisis de los temas "Optimización de Redes" y "Secuenciación de Vehículos", los cuales son los que más se aproximan a las características y objetivos deseados en la determinación de la ruta óptima de las reparaciones telefónicas Además se introducen algunos términos que se utilizan al analizar dichos temas y sus problemas asociados

En el Capítulo III se hace la formulación matemática del problema y se formula el algoritmo que determina la "Ruta Óptima de las Reparaciones Telefónicas" Se concluye con la aplicación del algoritmo en la determinación de las rutas a utilizar en la reparación de una determinada cantidad de interrupciones en la Planta Externa

CAPITULO I

PROCESO DE REPARACIÓN DE INTERRUPCIONES TELEFÓNICAS EN LA PLANTA EXTERNA

En esta sección se abordará el procedimiento utilizado para reparar interrupciones telefónicas en la planta externa Es necesario tener una visión de la estructura general de la planta externa y consideraciones generales para su diseño, para luego tratar el proceso de reparación de sus interrupciones

1. PLANTA EXTERNA

La planta externa, conocida como red, interconecta a cada abonado con la Central Telefónica

Los elementos constitutivos de la planta externa son principalmente los siguientes

Red primaria

Red secundaria

Red de dispersión

Aparato telefónico

Red intercentral

a **Red primaria:**

La red primaria enlaza el distribuidor general con los armarios de distribución o distritos

El distribuidor general es el punto central de distribución de los abonados y constituye la interfase entre la central telefónica local y la planta externa

Los armarios de distribución son puntos de flexibilidad de la red y constituyen la interfase entre la red primaria y la red secundaria

b **Red secundaria:**

La red secundaria tiene como función enlazar a los armarios de distribución con las cajas de dispersión, las cuales también constituyen puntos de flexibilidad de la red y son la interfase entre la red secundaria y la red de dispersión

c **Red de dispersión:**

La red de dispersión enlaza las cajas de dispersión o terminales con el aparato telefónico d **Aparato telefónico**

El aparato telefónico tiene como función básica enviar a la central el número deseado del abonado, y convertir las señales acústicas en señales eléctricas y viceversa

e. **Red intercentral:**

La red intercentral o red de enlace tiene como función enlazar a las diferentes centrales locales en un área multicentral

2 CONSIDERACIONES GENERALES PARA EL DISEÑO DE LA PLANTA EXTERNA

La planta externa es uno de los elementos más caros de un sistema telefónico Considerando los aspectos técnicos y económicos, resulta extremadamente importante diseñar la red lo mejor posible Desde el punto de vista de los usuarios, un diseño óptimo es necesario, ya que la red está expuesta a mayores perturbaciones o fallas que el resto de los equipos

Lograr una diseño perfecto es difícil, ya que se requiere de profundos conocimientos de Redes, Conmutación, Transmisión, etc , y del sitio o localidad en la cual se realiza el diseño Por lo tanto se mencionarán únicamente algunos puntos de vista generales sobre los aspectos más importantes que deben tomarse en cuenta para la elaboración eficiente de un diseño

Un requisito importante que exige una red moderna, es que el número de averías por abonado por año no sobrepase un cierto valor Al diseñar la red, además de la inversión inicial, debe tomarse muy en cuenta el valor presente de los gastos de operación y mantenimiento durante toda la vida útil de proyecto, teniendo como un objetivo que la red sea totalmente subterránea

Las investigaciones preliminares y los pronósticos de la demanda son necesarios para el diseño de la planta externa Para realizar un diseño óptimo es necesario conocer a profundidad la zona y su demanda de servicio a corto, mediano y largo plazo (cinco, diez, y veinte años) Estos pronósticos sirven de base para proyectar la instalación de nuevas centrales, construcción de canalizaciones, de la red primaria, de la red secundaria y de la red intercentral

a) **Ubicación de una Central Telefónica:**

El problema de la ubicación de una central telefónica, después de tener los resultados del pronóstico a mediano plazo y el tamaño de la zona, se reduce a encontrar un punto tal que la suma de las distancias a todos los abonados sea la más pequeña posible

La ubicación de las centrales, el área de cobertura de cada una de ellas y el dimensionamiento de la red intercentral es un problema complejo, que requiere la utilización de programas especializados de informática, programación dinámica y otras técnicas muy sofisticadas de investigación de operaciones Sin embargo, el enfoque conceptual es el siguiente

Mientras más centrales existan, el costo de documentación será mayor por cuanto se requiere más terrenos, más edificaciones, más equipos de fuerza, etc es decir, que el costo de los sistemas de conmutación es una función creciente del número de centrales Por el contrario, el costo del sistema de planta externa es una función decreciente del número de centrales, ya que al existir más centrales, la longitud de la red desde la central hasta el abonado será más corta

3 PROCEDIMIENTO DE REPARACION

Las centrales telefónicas del área metropolitana están agrupadas en Zonas A su vez los armarios de distribución o distritos de cada central telefónica se agrupan en cuadrantes

En la Compañía INTEL, S A , los reportes de daños telefónicos eran recibidos a través del Sistema Automático 888 Los listados de números reportados eran enviados al

Centro de Pruebas para las pruebas previas, codificación de resultados e inclusión en el Sistema Tecnasa (Sistema de datos)

El Sistema Automático de Despacho de Daños (S A D D) interactuaba con el Sistema Tecnasa para accesar los datos que requería Así se obtenían los listados de daños pendientes de reparación

Cada Zona de Reparación de Suscriptores tiene una terminal remota que recibe sus respectivos daños desde el S A D D La impresión de las boletas de daños se realiza a las 6 00 a m y a las 12 00 p m

Las boletas de daños distribuidos por cuadrante, con un técnico y vehículo asignado, se entregaban a los supervisores Estas boletas eran recibidas por el personal técnico antes de las 7 45 a m A la 1 00 p m los supervisores, conociendo la ubicación de su personal, les entregaban las boletas de daños adicionales

a) **Procedimiento del Técnico:**

El técnico después de tener las boletas de daños procede de la siguiente manera

i) A las 7 45 a m se dirige hacia su cuadrante o cuadrantes asignados

ii) Atiende con prioridad los daños con cita, luego los más antiguos de 48 horas o más Una vez atendidos estos tipos de daños, atenderá los restantes según el orden con que salen despachadas las boletas

iii) Cada vez que realizaba una reparación llamaba al 885 desde el número reparado Dicta el número del teléfono reparado y la clave con la que desea cerrar el reporte

b) **<u>Procedimiento del Operario del 885:</u>**

El operario del 885 procedía de la siguiente manera

i) Verifica si el número de teléfono coincide con el que aparece en el identificador de código de su posición

ii) Si los números no coinciden, indicará ese hecho al técnico, anotará el número en un formato especial y no cerrará el reporte de reparación

iii) Si los números coinciden, solicitará al técnico la información necesaria para cerrar el reporte de reparación La información es la siguiente

Número de vehículo

Clave de reparación

Número de empleado A y B

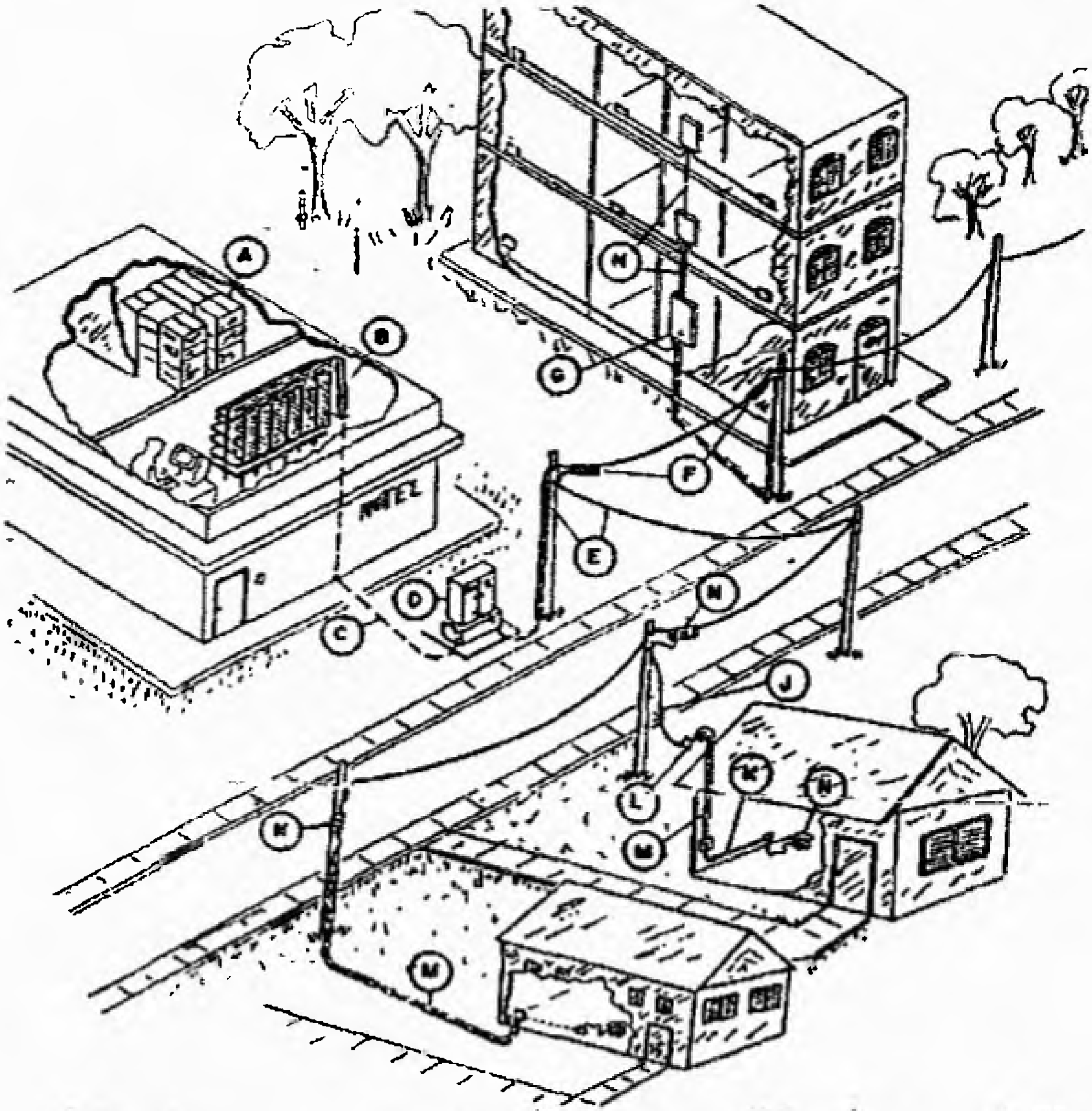
Tiempo de transporte

Tiempo de encargo

Breve comentario

Después que el operario del 885 cierra el reporte, el técnico procedía a efectuar la siguiente reparación Cuando el técnico cierra la última reparación del día, regresa al punto de partida

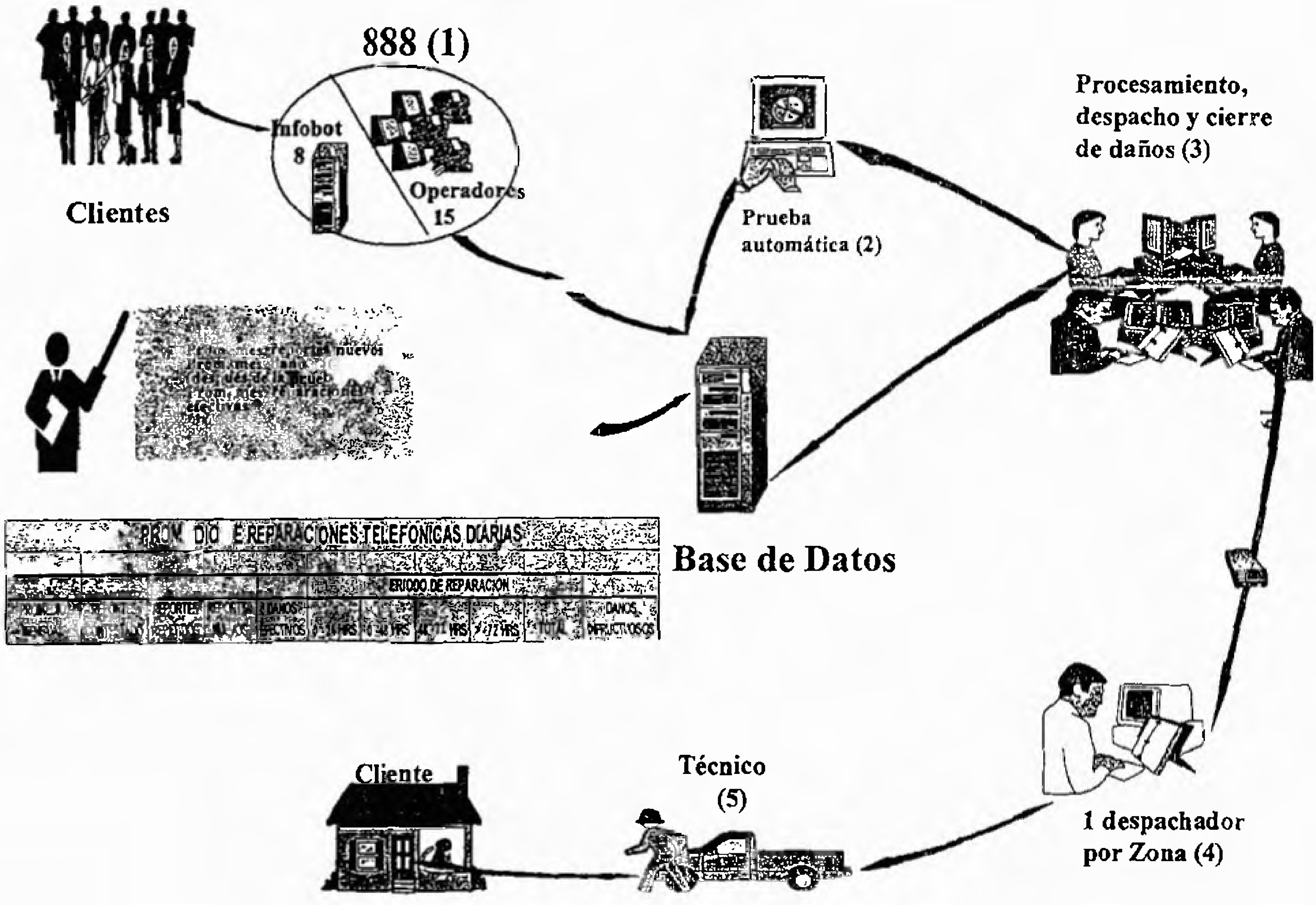
En las siguientes páginas se muestran un diagrama, en el que se observa, la manera en que la planta externa, conocida como red, interconecta a cada abonado con la central telefónica, además de los puntos en los que ocurren los daños telefónicos y un esquema del sistema automático de reportes y despacho de daños, que describe el procedimiento de reparación de las averías telefónicas



LETRA	CLAVE	DESCRIPCION	LETRA	CLAVE	DESCRIPCION
A	4000	CENTRAL TELEFONICA	*I	5300	CABLE LOCAL EXPUESTO
B	6200	FUSIBLE Y/O PROTECTORES		5301	CABLE LOCAL EN TUBERIA
	6800	ALAMBRE EN EL D.G.	J	6400	DAÑO EN DROP
*C	5300	CABLE PRIMARIO	K	6100	CABLEADO INTERNO EXPUESTO (INSIDE)
D	5400	CABLE PRIMARIO Y SECUNDARIO	L	6301	PUNTO DE CONEXION USUARIO - DROP
	6701	DAÑO EN GABINETE (DISTRITO)	M	9055	CABLEADO INTERNO EN TUBERIA
E	5700	CABLE SECUNDARIO	N	*6303	EMPALME EN TERMINAL AEREO DE FACIL ACCESO
F	6300	EMPALME AEREO DE FACIL ACCESO		6702	DAÑO EN TERMINAL AEREO DE FACIL ACCESO O HERMETICO
		EMPALME HERMETICO	O	9004	APARATO TELEFONICO
G	[redacted]	DAÑO EN TERMINAL LOCAL O INTERNO			
	6302	PUNTO EMPALME EN TERMINAL INTERNO			

* FUTURAS CLAVES

SISTEMA AUTOMATICO DE REPORTES Y DESPACHO DE DAÑOS



CAPÍTULO II

ANÁLISIS DE ALGUNOS MÉTODOS MATEMÁTICOS

Para dar solución al problema de la determinación de la ruta óptima de las reparaciones telefónicas se analizaron los temas y problemas asociados que más se aproximan al caso y de los métodos matemáticos correspondientes Estos temas son el de "Optimización de Redes" y el de "Secuenciación de Vehículos"

1 CARACTERÍSTICAS DEL MÉTODO MATEMÁTICO APROPIADO

El hecho de que INTEL, S A no utilizara un criterio de optimización para determinar la ruta de las reparaciones de la planta exterior, trajo como consecuencias que se recorrieran distancias totales mayores en forma innecesaria, se originara un gasto extra de combustible y se desaprovechara la fuerza laboral Por consiguiente, para alcanzar metas que corrigieran estas deficiencias, se propuso seleccionar un método que lograra lo siguiente

i) Minimizar el tiempo total de reparaciones

ii) Limitar el consumo de combustible a 40 kilómetros por galón

iii) Qué el número de reparaciones diarias no fuera menor de ocho

Unos aspectos importantes que se analizaron en la búsqueda del método matemático apropiado fueron, la necesidad de predefinir una ruta de reparación para cada vehículo y que se debía contar con los siguientes datos

i) La distancia entre los puntos de interrupción

ii) El tiempo que demora la reparación

iii) El tiempo de la jornada laboral

2 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN DE REDES

Del tema "Optimización de Redes" se analizaron el Problema de Flujo Máximo, el Problema de Flujo a Costo Mínimo, el Problema del Camino Mínimo o Ruta más Corta y el Problema del Arbol Parcial de Valor Total Mínimo Se revisaron algoritmos que brindan solución a cada uno de estos problemas, llegándose a la conclusión que el tema "Optimización de Redes" no soluciona el Problema de Determinación de Ruta Optima de las Reparaciones Telefónicas Se hará referencia al análisis de cada uno de ellos y varios términos relacionados con redes

a) Terminología

Es necesario mencionar los términos que se utilizarán en este capítulo para analizar los temas de "Optimización de Redes" y "Secuenciación de Vehículos"

a 1 Para grafos orientados

i) Grafo de orden n

Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto numerable de puntos y Γ una aplicación multívoca de los elementos de X en sí mismo. Al par $G = (X, \Gamma)$ se le denomina "grafo dirigido de orden n"

ii) Vértice

Cada elemento que es representado en el grafo como un punto, recibe el nombre de vértice del grafo

iii) Arco

Sea $x_j \in \Gamma x_i$, cada línea con orientación que va del vértice x_i, al vértice $x_j \in X$ representa un arco. Al arco que va del vértice x_i al vértice x_j se le denota $u = (x_i, x_j)$, x_i y x_j son respectivamente el extremo inicial y el extremo terminal del arco. El conjunto de los arcos se denotará por U y un grafo se designará indistintamente mediante el par (X, Γ) o el par (X, U). A todo arco $u = (x_i, x_j)$ se le asocia un número $v(u) \geq 0$, llamado, valor de u. Los arcos solo se pueden recorrer en la dirección que señalan

iv) Grafo completo

Un grafo es completo si

$\forall x_i, \forall x_j \ (x_i, x_j) \notin U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U$

v) <u>Camino</u>

Un camino es una secuencia (u_1, u_2,) de arcos, tal que el extremo terminal de cada uno coincida con el extremo inicial del siguiente Un camino puede ser finito o infinito Un camino también se puede representar por sus vértices sucesivos [x_{i1}, x_{i2},]

vi) <u>Camino elemental</u>

Un camino elemental es aquel que no utiliza dos veces el mismo vértice

vii) <u>Circuito</u>

Un circuito es un camino finito (u_1, u_2, ,u_n), en el cual el vértice inicial u_1 es el mismo que el vértice terminal u_n

viii) <u>Circuito elemental</u>

Un circuito elemental es aquel que no utiliza dos veces el mismo vértice, a excepción del inicial y el terminal que coinciden

ix) <u>Longitud de un camino</u>

Dado un camino μ = (u_1,u_2, u_n), su longitud, denotada por $l(\mu)$, es el número de arcos que contiene

x) Camino hamiltoniano

Sea $G = (X, U)$ un grafo y $\mu = [x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}]$, un camino en G, se dice que μ es camino hamiltoniano si utiliza una y solo una vez, cada vértice del grafo. Si el grafo es de orden n, la longitud del camino hamiltoniano, en caso de existir, es $l(\mu) = n-1$

xii) Circuito hamiltoniano

Para el grafo $G = (X,U)$ se dice que $\mu = [x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i1}]$, es circuito hamiltoniano si utiliza una vez y una vez solo cada vértice excepción de x_{i1}. Si el grafo tiene n vértices, la longitud del circuito hamiltoniano es $l(\mu) = n$

xiii) Grafo simétrico

Un grafo $G = (X,U)$ es simétrico si

$\forall x_i, \forall x_j \ (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U$

vix) Grafo fuertemente conexo

Un grafo $G = (X,U)$ es fuertemente conexo si

$\forall x_i, \forall x_j$ si $(x_i \neq x_j)$ entonces existe un camino que va de x_i a x_j

xv) Grafo parcial.

Sea Δ una aplicación multívoca en X

Se dice que (X, Δ) es un grafo parcial de (X, Γ) si

$\forall x_i, \in X, \Delta x_i \subset \Gamma x_i$

a 2. Para grafos no orientados

Un grafo no dirigido es aquel que no toma en consideración cualquier orientación de las líneas que unen sus vértices

xvi) Aristas

Sea un grafo G = (X, U), a cada par de vértices distintos $x_i, x_j \in X$ tales que $(x_i, x_j) \in U$ y/o $(x_j, x_i) \in U$, se les llama arista y se denotará

$$\bar{u} = \overline{(x_i x_j)}$$

Se representa por $\overline{U}$ al conjunto de aristas del grafo

xvii) Cadena

Una cadena es una secuencia $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \quad \bar{u}_n)$ de aristas, tal que el extremo terminal de una coincida con el extremo inicial del siguiente

xviii) Cadena elemental

Una cadena elemental es aquella que no utiliza dos veces el mismo vértice

xix) Ciclo.

Un ciclo es una cadena finita $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \quad \bar{u}_n)$ en la cual el vértice inicial de $\bar{u}_1$

es el mismo que el vértice terminal de $\bar{u}_n$

xx) Ciclo elemental

Un ciclo elemental es aquel que no utiliza más de una vez el mismo vértice, a excepción del inicial y terminal que coinciden

xix) Grafo conexo

Un grafo $G = (X, \bar{U})$ es conexo, si $\forall x_i$ y $\forall x_j$ ($x_i \neq x_j$) existe una cadena que los une

xx) Arbol

Se llama árbol a un grafo finito conexo sin ciclo y que tiene cuando menos dos vértices

xxi) Arbol parcial

Un grafo parcial que es un árbol se llamará árbol parcial

b) Problema de Flujo Máximo y Problema de Flujo a Costo Mínimo.

El objetivo principal del Problema de Flujo Máximo es encontrar un flujo maximal o de valor máximo, el del Problema de Flujo a Costo Mínimo es determinar el o los flujos que tengan el mínimo costo total de circulación Los datos del Problema de la

Ruta de las Interrupciones Telefónicas no se pueden adaptar a ninguno de estos dos problemas, por lo que ambos se descartan

c) Problemas del Camino Mínimo

Sea un grafo $G = (X,U)$ A cada $(x_i,x_j) \in U$, $x_i \neq x_j$, se asocia un número $v(u) \geq 0$, el cual puede representar distancia, costo o tiempo Dados dos vértices x_m, x_n, el Problema de Camino Mínimo busca determinar un camino μ que vaya del vértice $x_m \in X$ llamado origen al otro vértice $x_n \in X$ llamado destino tal que su valor total

$l(\mu) = \sum_{u \in \mu} v(u)$ sea mínimo

Para resolver este problema existen varios métodos Uno de ellos es el algoritmo de Ford que a continuación se describe

Sean x_n, $x_m \in X$, $\forall (x_i, x_j) \in U$ existe el valor $v(x_i, x_j) \geq 0$

Encontrar el camino de valor mínimo de x_m a x_n

i) Hacer corresponder a cada x_i un número λ_i

Inicialmente se tiene

$\lambda_m = 0$

$\lambda_i = \infty$, si $i \neq m$

ii) Para cualquier $x_i / (x_m, x_i) \in U$, se hace $\lambda_i = v(x_m, x_i)$ y siempre que existan arcos $(x_j, x_k) / \lambda_k - \lambda_i > v(x_j, x_k)$ Se continúa reemplazando a λ_k por $\lambda_k' = \lambda_j + v(x_j, x_k)$ hasta que ningún arco permita la disminución de los números λ

iii) Existe, al menos, el arco (x_α, x_n) que ha determinado la última disminución de λ_n y se tiene que $\lambda_n - \lambda_\alpha = v(x_\alpha, x_n)$ Igualmente existe al menos un arco (x_{α^1}, x_α)

que conduce a la última disminución de λ_α, luego $\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha^1} = v(x_{\alpha^1}, x_\alpha)$ etc. La serie $\lambda_n, \lambda_\alpha, \lambda_{\alpha^1}, \lambda_{\alpha^{11}}, \ldots$ siendo decreciente, se alcanza en modo necesario a la $\lambda_{x_{k+1}} = 0 = \lambda_m$ Entonces el camino $\mu_n^m = [X_m, X_{\alpha^k}, X_{\alpha^{(k-1)}}, \ldots, X_{\alpha^{11}}, X_{\alpha^1}, X_\alpha, X_n]$ es el buscado y su valor es λ_n

En efecto, $l(\mu_n^m) = v(x_m, x_{\alpha^k}) + v(x_{\alpha^k}, x_{\alpha^{(k-1)}}) + \ldots + v(x_{\alpha^{11}}, x_{\alpha^1}) + v(x_{\alpha^1}, x_\alpha) + v(x_\alpha, x_n)$

y a lo largo de cualquier camino $\mu_n^m = [x_m, x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta s}, x_n]$ se tiene

$$l(\mu_n^m) = v(x_m, x_{\beta_1}) + v(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}) + \ldots + v(x_{\beta s}, x_n) \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} pero \quad & \lambda_n - \lambda_{\beta s} \le v(x_{\beta s}, x_n) \\ & \lambda_{\beta s} - \lambda_{\beta s-1} \le v(x_{\beta s-1}, x_{\beta s}) \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & \lambda_{\beta_1} - \lambda_m \le v(x_m, x_{\beta_1}) \end{aligned}$$

Es decir, sumando y teniendo en cuenta (2)

$$\lambda_n - \lambda_m \le l(\mu_n^m)$$

Así que $l(\mu_n^m) = \lambda_n$

En el problema de Rutas de Reparaciones Telefónicas, el Centro Telefónico es el origen y los puntos de interrupciones telefónicas los destinos Haciendo una analogía del problema de Rutas de Reparaciones y el Problema de Camino Mínimo se tiene que x_m (origen) representa el Centro Telefónico y los vértices $x_i \in X$ a los puntos de interrupción

Al aplicar el algoritmo de Ford se encuentra la secuencia de los puntos de interrupción del servicio telefónico desde el origen x_m al destino señalado x_n, que hacen que el valor del camino de x_m a x_n sea mínimo

En nuestro caso, encuentra la ruta de las reparaciones a realizar partiendo desde el Centro Telefónico hasta llegar al punto de interrupción señalado como destino, que hace la distancia mínima. El Problema de Camino Mínimo no soluciona el Problema de las Rutas de Reparaciones debido a que no se tiene en cuenta el tiempo de reparación de una interrupción determinada Por otro lado, de acuerdo al tiempo de la jornada laboral y a la velocidad media utilizada por el vehículo de reparación, se tendría que decidir la cantidad de interrupciones a considerar pero aún así no se contaría con el tiempo de reparación

d.) Problema de Arbol Parcial de Valor Total Mínimo

Dado un grafo conexo G = (X, $\overline{U}$), con un valor real v($\bar{u}$) asociado a cada arista $\bar{u} \in \overline{U}$, el objetivo del Problema del Arbol Parcial de Valor Total Mínimo es determinar las aristas necesarias para que exista conexión entre todos los vértices $x_i \in X$ y que el valor total

$$S = \sum_{\bar{u} \in \bar{U}_{n-1}} v(\bar{u})$$ del árbol parcial $(X, \bar{U}_{n-1})$ sea mínimo

El algoritmo de Kruskal determina la o las soluciones del problema

"Entre las aristas que no han partido aún del árbol, escoger la de menor valor y que no forme un ciclo con las aristas ya seleccionadas"

De esta manera, se llega a seleccionar un conjunto $\bar{U}_{n-1} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \bar{u}_{n-1}\}$ de n-1 aristas y el grafo $(X, \bar{U}_{n-1})$ es un árbol de valor mínimo

Ejemplo Sean 6 clientes numerados del 2 al 7, un depósito de vehículos representado con el número 1 y una matriz $C = \|C_{ij}\|$ de distancias entre los clientes y el depósito Se desea determinar el árbol parcial de valor total mínimo

Figura 1

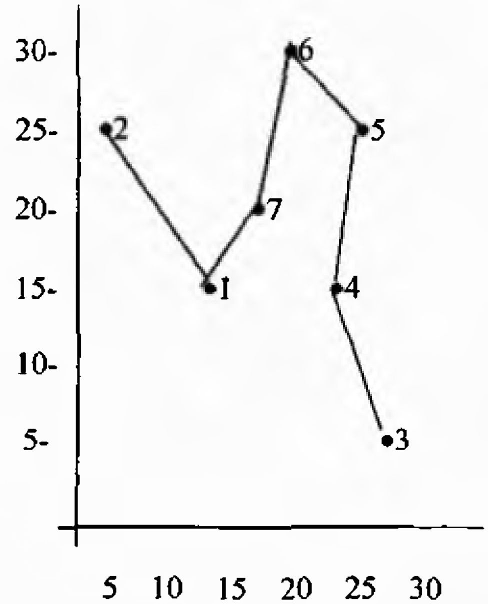


Tabla 1

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	13	18	10	17	17	7
2	13	-	31	21	25	21	15
3	18	31	-	11	18	24	18
4	10	21	11	-	10	14	7
5	17	25	18	10	-	8	9
6	17	21	24	14	8	-	9
7	7	15	18	7	9	9	-

i) Se busca en la matriz (formada por las entradas de la Tabla), la arista con valor más pequeño $C_{17} = C_{47} = 7$, que es el valor mínimo de la matriz Se parte de (1,7) y se forma (4,7) porque no forma ciclo

ii) Se elige $C_{56} = 8$ Se forma (5,6) porque no forma ciclo

iii) Se elige $C_{67} = C_{57} = 9$, se forma (6,7) y se descarta (5,7) porque forma ciclo

iv) Se elige $C_{14} = C_{45} = 10$ (1,4) y (4,5) se descartan porque forman ciclos

v) Se elige $C_{34} = 11$ Se forma (3,4) porque no forma ciclo

vi) Se elige $C_{12} = 13$ Se forma (1,2) porque no forma ciclo

El árbol (figura 1) tiene una distancia total de

7+7+8+9+11+13 = 55 que es mínima

Al igual que el Problema de Camino Mínimo, no se contempla el tiempo de reparación de una interrupción determinada Además no se puede encontrar una ruta continua que parta de un lugar, vaya a otros y regrese al punto de partida, como ocurre en las rutas de reparaciones Por lo tanto el Problema del Arbol Parcial de Valor Total Mínimo tampoco permite dar solución al Problema de la Determinación de la Ruta Óptima de las Reparaciones Telefónicas

3 PROBLEMA DE SECUENCIACIÓN DE VEHÍCULOS.

Este problema está relacionado a un conjunto de clientes con una dirección definida que demandan el servicio de un sólo producto Son servidos desde un sólo punto, de donde se despachan una serie de vehículos Las direcciones de los clientes son puntos conocidos en un sistema coordenado en el espacio euclideano de dos dimensiones

El problema consiste en diseñar rutas de costo mínimo para los vehículos, basados en las siguientes restricciones

i) La demanda de servicio por unidad de tiempo de cada cliente debe ser satisfecha

ii) No se puede exceder la capacidad de carga de los vehículos

iii) El tiempo total de servicio o bien la distancia total de recorrido, no debe exceder una cantidad prefijada Ocurre cuando se tienen restricciones de tipo legal o sindical

iv) Existe un rango de tiempo en el cual el cliente debe ser atendido

En los problemas de esta naturaleza se tiene que

i) Si la flota de vehículos consiste en un sólo vehículo con capacidad de carga grande, tal que se puedan ignorar las restricciones ii, iii y iv, el problema se convierte en el problema de Agente Viajero

ii) Si se ignoran las restricciones iii y iv, tratando de encontrar el número mínimo de vehículos que cumplan con los requisitos i y ii, entonces se tiene un problema con la estructura Mochila

iii) Dado un número fijo de vehículos que cumplan con las restricciones i, ii, iii y iv, se requiere diseñar la secuencia de vehículos que darán origen a rutas de costos mínimos A este tipo de problema se les denominan Secuenciación de Rutas

a) Problema del Agente Viajero

Se tiene n+1 ciudades y la matriz $C = ||C_{ij}||$ de distancia entre las ciudades Si el agente viajero parte de la ciudad A, debe recorrer todas las ciudades una a una y regresar a la ciudad A El problema consiste en determinar en qué orden es necesario recorrer las ciudades, para que el camino total recorrido sea mínimo La resolución del problema mediante la ayuda de la computadora se hace utilizando un método especial llamado "ramificación y acotación"

Este problema de optimización se puede reducir a uno de programación bivalente.

Se considera un grafo completo y simétrico, formado de (n+1) vértices x_o, x_1,..., x_n en que cada par de vértices (x_i, x_j) está unido por un arco al que se le asocia un valor $C_{ij} \geq 0$. Se debe buscar el circuito hamiltoniano de valor total mínimo, partiendo de x_o.

Se introducen las variables bivalentes X_{ij} con las condiciones:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & si \quad se \quad va \quad de \quad X_i \quad a \quad X_j, \quad directamente \\ o, & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

El modelo matemático del problema se expresa en la siguiente forma:

i) $$MIN\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} C_{ij}X_{ij}\right)$$

con las restricciones

ii) $$\sum_{i=0}^{n} X_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

iii) $$\sum_{j=0}^{n} X_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

iv) $U_i - U_j + n\,X_{ij} \leq n - 1$; $i,j = 1,2,\ldots n$, $i \neq j$

$U_i = r$, si el agente viajero visita la ciudad X_i en la etapa r.

v) $X_{ij} = 0$ ó 1

$U_i, U_j \in \mathbf{R}$ $\quad i, j = 1,2,\ldots,n \quad i \neq j$

El primer grupo de restricciones (ii) significa que el agente viajero llega a cada ciudad una sola vez El segundo grupo (iii) significa que el agente viajero sale de cada ciudad una sola vez

Cualquier solución que satisface (ii) y (iii), que es un circuito hamiltoniano satisface (iv) y viceversa

Se considera una solución que satisfaga (ii), (iii) y (iv) De las primeras dos condiciones resulta que esta solución consiste en uno o varios circuitos elementales Se demuestra que (iv) asegura un sólo circuito que es hamiltoniano Si existieran muchos circuitos elementales, uno sólo pasaría por X_o Se elige un circuito que no pasa por X_o y que se denota con $k(1<k<n)$ el número de sus arcos Sumando las relaciones (iv) correspondientes a los arcos (X_i,X_j) que pertenecen a este circuito (para los cuales $X_{ij}=1$), los diferentes U_i-U_j se anulan y se llega a la relación contradictoria $nk\leq(n-1)k$ Queda por demostrar que para cualquier circuito hamiltoniano que parte de X_o, se pueden encontrar números reales U_i para los cuales (iv) se satisface Se elige $U_i = r$, si el vértice X_i es extremidad terminal del r - ésimo arco del circuito, el origen considerado en X_o, (r = 1, 2, , n) Está claro que $U_i-U_j\leq n-1$ para cualquier arco (X_i,X_j), luego la condición (iv) está satisfecha para $X_{ij}=o$ Para $X_{ij} = 1$, se tiene

$$U_i-U_j+nX_{ij} = r-(r+1)+n = n-1$$

En el modelo (i) - (v) se tienen n^2 variables bivalentes y $2(n-1) + (n-1)^2 = n^2-1$ restricciones Por ejemplo, para n = 6, el número de variables bivalentes es 36 y el de las restricciones es 35

Entre los métodos que utilizan para dar soluciones al Problema de Agente Viajero está el método de Little, que se basa en una matriz de distancias entre las ciudades

Los pasos del método de Little son los siguiente

i) Reducir la matriz de distancia hasta que haya un cero en cada fila y cada columna Sumar todos los valores restados por filas y columnas para obtener un valor de reducción r

ii) Calcular la penalización de cada arco (h, k) por tener un cero en la matriz reducida

La penalización está dada por

$$P(h,k) = \min_{j} d(h,j) + \min_{i} d(i,k)$$

$$j \neq k,\ i \neq h$$

iii) Seleccionar el arco (h,k) con el mayor valor de penalización, si hay empate escoger arbitrariamente Partir el conjunto de todas las posibles rutas en el subconjunto R(h,k) que contienen el arco (h,k) y en el subconjunto R($\overline{h,k}$) que no lo contienen

iv) Calcular los límites inferiores ($\overline{h,k}$) y (h,k) de las distancias de todas las rutas en los subconjuntos R($\overline{h,k}$) y R(h,k) respectivamente

Por no contener el arco (h,k), el límite inferior está dado por

$$(\overline{h,k}) = r + P(h,k)$$

Por contener el arco (h,k) el límite inferior está dado por

(h,k) = r + r(h,k)

en donde r(h,k) es el valor obtenido al reducir la matriz después de hacer la d(k,h) = ∞ y eliminar la fila h y columna k de la matriz

v) Para particiones posteriores seleccionar aquel subconjunto que tenga el menor límite Volver a (ii), utilizando la matriz correspondiente

El procedimiento termina al llegar a una matriz 2 por 2

Ejemplo Dada la matriz de distancias entre las ciudades 1,2,3,4, y 5 de la tabla Si el agente viajero parte de la ciudad 1, determinar el orden necesario para recorrer todas las ciudades una a una y volver a la ciudad 1, de manera que el camino total recorrido sea mínimo Las distancias están dadas en kilómetros

Tabla 2

	1	2	3	4	5
1	∞	13	18	10	7
2	13	∞	31	21	25
3	18	31	∞	11	18
4	10	21	11	∞	10
5	7	25	18	10	∞

El conjunto de todas las rutas posibles que parten de la ciudad 1, y recorren todas las ciudades una a una y regresan a la ciudad 1 es

(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)
(1,2),(2,3),(3,5),(5,4),(4,1)
(1,2),(2,4),(4,3),(3,5),(5,1)
(1,2),(2,4),(4,5),(5,3),(3,1)
(1,2),(2,5),(5,3),(3,4),(4,1)
(1,2),(2,5),(5,4),(4,3),(3,1)
(1,3),(3,2),(2,4),(4,5),(5,1)
(1,3),(3,2),(2,5),(5,4),(4,1)
(1,3),(3,4),(4,2),(2,5),(5,1)
(1,3),(3,4),(4,5),(5,2),(2,1)
(1,3),(3,5),(5,2),(2,4),(4,1)
(1,3),(3,5),(5,4),(4,2),(2,1)
(1,4),(4,2),(2,3),(3,5),(5,1)
(1,4),(4,2),(2,5),(5,3),(3,1)
(1,4),(4,3),(3,2),(2,5),(5,1)
(1,4),(4,3),(3,5),(5,2),(2,1)
(1,4),(4,5),(5,2),(2,3),(3,1)
(1,4),(4,5),(5,3),(3,2),(2,1)
(1,5),(5,2),(2,3),(3,4),(4,1)
(1,5),(5,2),(2,4),(4,3),(3,1)
(1,5),(5,3),(3,2),(2,4),(4,1)
(1,5),(5,3),(3,4),(4,2),(2,1)
(1,5),(5,4),(4,2),(2,3),(3,1)
(1,5),(5,4),(4,3),(4,2),(2,1)

Aplicando el método de Litte se obtiene

Paso i) Tabla 3

	1	2	3	4	5
1	∞	6	11	3	0
2	0	∞	18	8	12
3	7	20	∞	0	7
4	0	11	1	∞	0
5	0	18	11	3	∞

Ceros en cada fila

Tabla 4

	1	2	3	4	5
1	∞	0	10	3	0
2	0	∞	17	8	12
3	7	14	∞	0	7
4	0	5	0	∞	0
5	0	12	10	3	∞

Ceros en cada columna

Para formar ceros en cada fila se restó $7+13+11+10+7 = 48$

Para formar ceros en cada columna se restó $6+1 = 7$

El valor de reducción es $r = 48+7 = 55$

Paso ii)

$P(1,2) = 0+5 = 5$
$P(1,5) = 0+0 = 0$
$P(2,1) = 8+0 = 8$
$P(3,4) = 7+3 = 10$
$P(4,1) = 0+0 = 0$
$P(4,3) = 0+10 = 10$
$P(4,5) = 0+0 = 0$
$P(5,1) = 3+0 = 3$

Paso iii) Los arcos con el mayor valor de penalización son (3,4) y (4,3) Se selecciona el arco (3,4) (si hay empate se escoge arbitrariamente)

El subconjunto R(3,4) de todas las posibles rutas que contienen el arco (3,4) está formado por

(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)
(1,2),(2,5),(5,3),(3,4),(4,1)
(1,3),(3,4),(4,2),(2,5),(5,1)
(1,3),(3,4),(4,5),(5,2),(2,1)
(1,5),(5,2),(2,3),(3,4),(4,1)
(1,5),(5,3),(3,4),(4,2),(2,1)

El subconjunto R($\overline{3,4}$) de todas las posibles rutas que no contienen al (3,4) está formado por

(1,2),(2,3),(3,5),(5,4),(4,1)
(1,2),(2,4),(4,3),(3,5),(5,1)
(1,2),(2,4),(4,5),(5,3),(3,1)
(1,2),(2,5),(5,4),(4,3),(3,1)
(1,3),(3,2),(2,4),(4,5),(5,1)
(1,3),(3,2),(2,5),(5,4),(4,1)
(1,3),(3,5),(5,2),(2,4),(4,1)
(1,3),(3,5),(5,4),(4,2),(2,1)
(1,4),(4,2),(2,3),(3,5),(5,1)
(1,4),(4,2),(2,5),(5,3),(3,1)
(1,4),(4,3),(3,2),(2,5),(5,1)
(1,4),(4,3),(3,5),(5,2),(2,1)
(1,4),(4,5),(2,4),(4,3),(3,1)
(1,4),(4,5),(5,3),(3,2),(2,1)
(1,5),(5,2),(2,4),(4,3),(3,1)
(1,5),(5,3),(3,2),(2,4),(4,1)
(1,5),(5,4),(4,2),(2,3),(3,1)
(1,5),(5,4),(4,3),(3,2),(2,1)

Paso iv) **Cálculo de los límites inferiores**

$(\overline{3,4}) = 55+10 = 65$

Tabla 5

	1	2	3	5
1	∞	0	10	0
2	0	∞	17	12
4	0	5	∞	0
5	0	12	10	∞

matriz sin fila 3, columna 4

y con d(4,3) = ∞

(3,4) = 55 + 10 = 65

Tabla 6

	1	2	3	5
1	∞	0	0	0
2	0	∞	7	12
4	0	5	∞	0
5	0	12	0	∞

matriz reducida con r(3,4) = 10

Paso v) Se selecciona el subconjunto R(3,4) y la matriz

Tabla 7

	1	2	3	5
1	∞	0	0	0
2	0	∞	7	12
4	0	5	∞	0
5	0	12	10	∞

R(3,4)

(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)
(1,2),(2,5),(5,3),(3,4),(4,1)
(1,3),(3,4),(4,2),(2,5),(5,1)
(1,3),(3,2),(4,5),(5,2),(2,1)
(1,5),(5,2),(2,3),(3,4),(4,1)
(1,5),(5,3),(3,4),(4,2),(2,1)

En este momento se vuelve al paso ii) con la matriz de la tabla 7

Paso ii)

P(1,2) = 0+5 = 5
P(1,3) = 0+0 = 0
P(1,5) = 0+0 = 0
P(2,1) = 7+0= 7
P(4,1) = 0+0 = 0
P(4,5) = 0+0 = 0
P(5,1) = 0+0 = 0
P(5,3) = 0+0 = 0

Paso iii) Se selecciona el arco (2,1)

El subconjunto R(2,1) de R(3,4) está formado por

(1,3)(3,4),(4,5),(5,2),(2,1)
(1,5),(5,3),(3,4),(4,2),(2,1)

El subconjunto R($\overline{2,1}$) de R(3,4) está formado por

(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)
(1,2),(2,5),(5,3),(3,4),(4,1)
(1,3),(3,4),(4,2),(2,5),(5,1)
(1,5),(5,2),(2,3),(3,4),(4,1)

Paso iv) ($\overline{2,1}$)= 65 +7 =72

Tabla 8

	2	3	5
1	∞	0	0
4	5	∞	0
5	12	0	∞

matriz sin fila 2, columna 1

Tabla 9

	2	3	5
1	∞	0	0
4	0	∞	0
5	7	0	∞

matriz reducida con r(2,1) =5

y con $d(1,2) = \infty$

$(2,1) = 65 + 5 = 70$

Paso v) Se selecciona el subconjunto $R(2,1)$ y la matriz

Tabla 10

	2	3	5
1	∞	0	0
4	0	∞	0
5	7	0	∞

R(2,1)
(1,3),(3,4),(4,5),(5,2),(2,1)
(1,5),(5,3),(3,4),(4,2),(2,1)

Se vuelve al paso ii) con la matriz de la tabla 10

Paso ii)

$P(1,3) = 0+0 = 0$
$P(1,5) = 0+0 = 0$
$P(4,2) = 0+7 = 7$
$P(4,5) = 0+0 = 0$
$P(5,3) = 7+0 = 7$

Paso iii) Se selecciona el arco (5,3)

El subconjunto $R(5,3)$ de $R(2,1)$ está formado por

(1,5),(5,3),(3,4),(4,2),(2,1)

El subconjunto $R(\overline{5,3})$ de $R(2,1)$ está formado por

(1,3),(3,4),(4,5),(5,2),(2,1)

Paso iv)

$(\overline{5,3}) = 70 + 7 = 77$

Tabla 11

	2	5
1	∞	0
4	0	0

Matriz sin fila 5, columna 3 y con r(5,3) = 0, por tener ceros en cada fila y columna

$(5,3) = 70 + 0 = 70$

Paso v) Se selecciona el subconjunto R(5,3) y al llegar a una matriz 2 por 2 el procedimiento termina

La secuencia R(5,3) = (1,5),(5,3),(4,3),(4,2),(2,1) con una distancia mínima de 70 kms de recorrido es la solución del problema

La restricción del tiempo se tiene en cuenta en el Problema de Agente Viajero de la siguiente forma

$T_T = t_{carga} + t_{descarga} + t_{recorrido} \leq T_{disponible}$

T_T es el tiempo total

$T_{recorrido} = Z^*/VM$, donde Z^* es la distancia mínima recorrida y VM la velocidad media

Al adaptar la fórmula de T a la Ruta de Reparación se tiene

$$T_T = t_{reparación} + t_{recorrido} \leq T_{disponible}$$

la cual permite encontrar el número mínimo de vehículos que se necesita, mediante el cociente

$$\frac{Tiempo \quad Total}{Tiempo \quad disponible}$$

pero no precisa la ruta a seguir por cada vehículo Es decir, brinda una solución parcial al Problema de la Determinación de las Rutas de Reparaciones

b) Problema de Secuenciación de Rutas

Para solucionar este problema Clarke y Wrigth idearon un método La formulación matemática del problema es la siguiente

Sea N el número total de clientes a satisfacer, que están enumerados del 1 al N El cliente i, i = 1,2, , N requiere de q(i) unidades (por unidad de tiempo) del único articulo que se distribuye y la distancia entre el cliente i y el cliente j, i ≠ j, j, = 1, 2 , ,N es d(i,j) con d(i,j) = d(j,i) = $\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$

Por claridad de exposición se considera al cliente número 1 como el punto de partida en donde existe un número especificado de vehículos, todos con capacidad de carga de Q unidades Por cuestiones de tipo sindical un vehículo no puede recorrer en una ruta más de M kilómetros Sea una secuenciación específica de k rutas R_1, R_2, , R_k, tal que cada una comienza en el punto de partida, sirve un número de clientes y regresa al punto de partida El objetivo es determinar el mínimo número de rutas que satisfagan todas las restricciones, de manera que el costo total (o kilometraje total) de recorrido sea mínimo

Si la ruta R_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ tiene n_i clientes que se denotan por $r_i(1)$, $r_i(2)$, , $r_i(n_i)$ entonces el recorrido total para la ruta R_i será

$$D_i = d\,[1, r_i(1)] + \sum_{j=2}^{n_i} d[r_i(j-1), r_i(j)] + d[r_i(n_i), 1]$$

y el recorrido total para las k rutas será de

$$\sum_{i=1}^{k} D_i$$

Las variables del problema son

i) los clientes de $r_i(j)$ en una ruta

ii) el número n_i de clientes en la ruta R_i, y

iii) el número k de rutas

Se quiere minimizar el número k y el número $\sum_{i=1}^{k} D_i$, respetando las disposiciones sindicales

$$D_i \leq M \qquad i = 1, \ldots, k$$

La capacidad de carga

$$\sum_{j=1}^{n_i} q[r_i(j)] \leq Q \qquad i = 1, \ldots, k$$

Se supone que

$$Q \geq q(i) \qquad i = 1, \ldots, k$$

Para resolver este problema, Clarke y Wrigth, definen un criterio de ahorro S(i,j) dado por S(i,j) = d(1,j)+d(1,i)-d(i,j) que mide el kilometraje ahorrado si una ruta que originalmente acaba en el punto i, incluye el punto j

El algoritmo de Clarke y Wrigth se desarrolla de la siguiente forma

Paso 1 Calcule el ahorro S(i,j), para todas las parejas de clientes i, j = 1,2, N, i≠j

Paso 2 Ordene todos los ahorros S(i,j) en orden descendente de magnitud

Paso 3 Empezando con el primero de la lista se hace lo siguiente

i) Si al unirse dos clientes por un tramo de la ruta, ésta resulta ser factible y respeta todas las restricciones del problema, entonces se agrega este tramo a la solución Si no, se rechaza Para una ruta factible se eliminan todos los tramos no analizados que conectan con ese tramo

ii) Se toma la siguiente pareja de la lista del paso 2, y se repite el paso i) Se continúa con el paso ii) hasta terminar de analizar todos los elementos de la lista del paso 2

Paso 4· Se unen los tramos en orden (1,j), (j,k),(k,p), ,(m,1), a fin de formar todas las rutas posibles

Por regla general este algoritmo no presenta una solución óptima, pero sí una solución factible que está en torno al óptimo Debido a su simplicidad y rapidez la solución óptima factible que genera este algoritmo, se puede considerar aceptable para fines prácticos

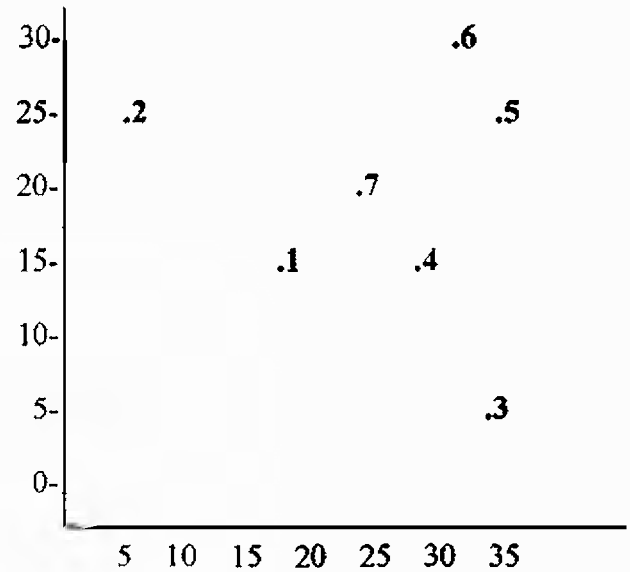
Ejemplo Supongamos 6 clientes numerados del 2 al 7 y un depósito de vehículos representado con el número 1, como aparece en la figura 2 Encontrar las rutas de distancias que no exceden los 45 kilómetros, sin tomar en cuenta las restricciones de capacidad

La tabla muestra las distancias entre el depósito y los clientes

Tabla 12

Cliente	2	3	4	5	6	7
D(1,j) en km	13	18	10	17	17	7

Figura 2



Solución

Mediante la fórmula de distancia d(i,j) = $\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$

se calcula la distancia entre los clientes

d(2,3)= 31 kilómetros	d(3,4) = 11 kilómetros
d(2,4)= 21 kilómetros	d(3,5) = 18 kilómetros
d(2,5)= 25 kilómetros	d(3,6) = 24 kilómetros
d(2,6)= 21 kilómetros	d(3,7) = 16 kilómetros
d(2,7)= 15 kilómetros	
d(4,5)= 10 kilómetros	d(5,6) = 8 kilómetros
d(4,6)= 14 kilómetros	d(5,7) = 9 kilómetros
d(4,7)= 7 kilómetros	d(6,7)= 10 kilómetros

Paso 1 Cálculo de los ahorros s(i,j) = d(l,j)+d(l,i)-d(i,j)

S(2,3) = d(1,2) + d(1,3) -d(2,3) = 13+18-31 = 0
S(2,4) = d(1,2) + d(1,4) -d(2,4) = 13+10-21 = 2
S(2,5) = d(1,2) + d(1,5) -d(2,5) = 13+17-25 = 5
S(2,6) = d(1,2) + d(1,6) -d(2,6) = 13+17-21 = 9
S(2,7) = d(1,2) + d(1,7) -d(2,7) = 13+7-15 = 5
S(3,4) = d(1,3) + d(1,4) -d(3,4) = 18+10-11 = 17
S(3,5) = d(1,3) + d(1,5) -d(3,5) = 18+17-18 = 17
S(3,6) = d(1,3) + d(1,6) -d(3,6) = 18+17-24 = 11

S(3,7) = d(1,3) + d(1,7) -d(3,7) = 18+7-16 = 9
S(4,5) = d(1,4) + d(1,5) -d(4,5) = 10+17-10 = 17
S(4,6) = d(1,4) + d(1,6) -d(4,6) = 10+17-14 = 13
S(4,7) = d(1,4) + d(1,7) -d(4,7) = 10+7-7 = 10
S(5,6) = d(1,5) + d(1,6) -d(5,6) = 17+17-8 = 26
S(5,7) = d(1,5) + d(1,7) -d(5,7) = 17+7-9 = 15
S(6,7) = d(1,6) + d(1,7) -d(6,7) = 17+17-10 = 14

Paso 2 Listado de los ahorros en orden decreciente

S(5,6) = 26	S(6,7) = 14	S(3,7) = 9
S(3,4) = 17	S(4,6) = 14	S(2,5) = 5
S(3,5) = 17	S(3,6) = 11	S(2,7) = 5
S(4,5) = 17	S(4,7) = 10	S(2,4) = 2
S(5,7) = 15	S(2,6) = 9	S(2,3) = 0

Paso 3

i) Se selecciona el tramo (5,6) que genera la ruta (1,5),(5,6),(6,1) con 17+8+17 = 42 kilómetros, menor al límite de 45 kilómetros y por lo tanto es factible

ii) Se selecciona el tramo (3,4), que genera la ruta (1,3),(3,4),(4,1) con 18+11+10 = 39 kilómetros, menor al límite de 45 kilómetros y por lo tanto es factible

iii) Se selecciona el tramo (3,5), que genera la ruta (1,5),(5,3),(3,4),(4,1) con 17+18+11+10 = 56 kilómetros, mayor que el límite de 45 kilómetros Se rechaza el tramo (3,5)

iv) El tramo (4,5) genera una ruta (1,3),(3,4),(4,5),(5,1) con 18+11+10+17 = 56 kilómetros, mayor que el límite de 45 kilómetros Se rechaza el tramo (4,5)

v) Se selecciona el tramo (5,7), que genera la ruta (1,7),(7,5),(5,6),(6,1) con 7+9+9+17 = 41 kilómetros que es menor que el límite de 45 kilómetros Por lo tanto es factible Todos los tramos conectados con el cliente 5 se rechazan

vi) Se rechaza el tramo (6,7) porque formaría un circuito cerrado

vii) Todos los demás tramos generan rutas no factibles

viii) El cliente 2 que no ha sido conectado genera la ruta (1,2),(2,1) de 26 kilómetros

Las rutas seleccionadas son

Ruta 1 (1,7),(7,5),(5,6),(6,1) con 41 kilómetros

Ruta 2 (1,3),(3,4),(4,1) con 39 kilómetros

Ruta 3 (1,2),(2,1) con 26 kilómetros

El kilometraje total es de 106 kilómetros

Al hacer la analogía entre el problema de Secuenciación de Rutas y el Problema de las Rutas de Reparaciones se observa que el de Secuenciación de Rutas concierne a un conjunto de clientes, todos con dirección y distancia entre ellos conocida, con demanda de servicio de un sólo producto y que son atendidos desde un sólo punto, de donde se despachan una serie de vehículos, con las siguientes restricciones

i) Se debe satisfacer la demanda de servicio de cada cliente

ii) No se puede exceder la capacidad de carga de cada vehículo

iii) El tiempo total de servicio o bien la distancia total de recorrido, no debe exceder una cantidad prefijada

iv) Existe un rango de tiempo en el cual el cliente debe ser atendido

En el problema de las Rutas de Reparaciones se tiene un conjunto de puntos a reparar, todos con dirección y distancia entre ellos conocida, con demanda de reparación del servicio telefónico y un Centro Telefónico, de donde se despachan una serie de vehículos para la reparación de las interrupciones, con las siguientes obligaciones

i) Se debe satisfacer cada demanda (reporte) de reparación del servicio telefónico

ii) El tiempo total de servicio, no debe exceder una cantidad prefijada En este caso el tiempo normal de la jornada laboral

iii) Existe un rango de tiempo para reparar cada interrupción ,

La restricción (ii) del problema de Secuenciación de Rutas no es adaptable al problema de Rutas de Reparaciones, ya que los vehículos de reparación no transportan productos como tal La demanda es la de reparar la interrupción del servicio telefónico y no la de un producto El dato necesario es el de la velocidad media de los vehículos

Se puede concluir entonces que el problema de Secuenciación de Rutas es útil para seleccionar las rutas de costo mínimo de las Rutas de Reparaciones

CAPÍTULO III

ALGORITMO PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE LA RUTA ÓPTIMA DE REPARACIONES TELEFÓNICAS

El objetivo del *Problema* de las *Rutas* Óptimas de las Reparaciones Telefónicas es determinar el mínimo número de rutas que no excedan el tiempo normal de la jornada laboral para completar cada una de ellas, de forma tal que la distancia total recorrida sea mínima El Centro Telefónico es el punto de partida de los vehículos, que salen a reparar cierto número de interrupciones y regresan al punto de partida.

1. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

La formulación matemática del problema es la siguiente. Sea N el número total de interrupciones a reparar La interrupción i, $i = 1,2,\ldots,N$ necesita de $t(i)$ minutos para su reparación y la distancia entre la interrupción i y la interrupción j, $i \neq j$, $i,j = 1,2,\ldots,N$ es $d(i,j) = d(j,i)$, que se recorre con una velocidad media VM(Km/h). El Centro Telefónico que se denota por 0 es el punto de partida de todos los vehículos

Por restricción laboral el tiempo total del que se dispone por cada vehículo para completar su ruta no puede durar más de un tiempo M estipulado. Una secuenciación específica de k rutas, $R_1, R_2,\ldots,R_k$ con un punto de partida en el Centro Telefónico, repara un número de interrupciones y regresa al punto de partida.

Si la ruta R_i, $i = 1,2,\ldots,k$ tiene n_i interrupciones que se denotan por $r_i(1)$, $r_i(2)$, $\ldots$, $r_i(n_i)$, la distancia total de recorrido para la ruta R_i será

$$D_i = d[0, r_i(1)] + \sum_{j=2}^{n_i} d[r_i(j-1), r_i(j)] + d[r_i(n_i), 0]$$

con una distancia total para las k rutas de

$$\sum_{i=1}^{k} D_i$$

El tiempo total de recorrido para la la ruta R_i será

$$T_i = D_i/VM$$

con un tiempo total de reparación de las interrupciones en la ruta R_i de

$$t_i = \sum_{j=1}^{n_i} t[r_i(j)]$$

El tiempo total para completar la ruta R_i será $T_{Ri} = t_i + T_i$

Las variables del problema son:

i) las interrupciones $r_i(j)$ en una ruta,

ii) el número n_i de interrupciones en la ruta R_i, y

iii) el número k de rutas.

Se quiere minimizar el número k y el número $\sum_{i=1}^{k} D_i$ tal que se cumpla con la disposición laboral

$$T_{Ri} = \frac{Di}{VM} + \sum_{j=1}^{n_i} t[r_i(j)] \leq M \qquad i = 1,2,\ldots,k.$$

Para resolver el problema se aplica el criterio de ahorro S(i,j) de Clarke y Wright dado por:

$$S(i,j) = d(0,j) + d(0,i) - d(i,j)$$

el cual mide el kilometraje ahorrado si una ruta que originalmente acaba en la interrupción i, ahora incluye la interrupción j.

El algoritmo se desarrolla de la siguiente forma:

Paso 1. Calcular el ahorro S(i,j) para todas las parejas de interrupciones i,j = 1,2, ,N, i≠j.

Paso 2. Ordenar todos los valores del Paso 1 en forma descendente de magnitud

Paso 3. Comenzar con la pareja de interrupciones de mayor S(i,j) de la lista del Paso 2 y se hace lo siguiente.

i) Si la pareja no viola las restricciones, la misma será la base generadora de la ruta Si viola la restricción del tiempo se escoge la siguiente pareja con mayor S(i,j). Esto se hace hasta encontrar una pareja de ruta.

ii) Se toma la pareja con mayor S(i,j) de la lista del paso 2 que se puede unir por un extremo de la ruta factible. Si respeta todas las restricciones del problema, se agrega este tramo a la ruta. De lo contrario se rechaza. Se elimina del análisis toda pareja (i,j) del Paso 2 que tenga tanto a i como a j en la ruta factible.

Se toma la siguiente pareja del Paso 2 que cumple con (ii) y se sigue este paso hasta que ninguna otra pareja pueda ser incorporada a la ruta

Paso 4 Toda pareja (i,j) del Paso 2 que tenga a una o ambas interrupciones i,j en alguna de las rutas factibles se elimina del análisis Se pasa a formar la siguientes ruta a partir del Paso 3

2 EJEMPLO PRÁCTICO

Se considera la situación de siete puntos con interrupción

La Tabla 13 muestra la matriz simétrica asociada a las distancias en kms que separan el Centro Telefónico de cada una de las interrupciones telefónicas y las distancias entre cada par de interrupciones

Tabla 13

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-	5	7	10	3	2	6	8
1		-	9	6	6	4	3	12
2			-	13	8	7	11	4
3				-	7	4	8	4
4					-	3	3	8
5						-	5	3
6							-	3
7								-

La Tabla 14 indica el tiempo de reparación de cada interrupción, la velocidad media de los vehículos y el tiempo máximo M del que disponen los vehículos para completar su ruta

Tabla 14

Interrupción	1	2	3	4	5	6	7
Minutos	125	65	25	65	75	200	100
VM	48 km/h				M	450 Minutos	
$T_{recorrido}$	Di/48Km•60						

$$T_{Ri} = [Di/48km] \bullet 60 + \sum_{j=i}^{n_i} t[r_i(j)] \leq 450 \quad \textit{minutos}$$

Solución

Paso 1 Cálculo de los ahorros S(i,j) = d(o,i)+d(o,j) – d(i,j) para cada par de interrupciones i, j

S(1,2) = 5+7-9 = 3
S(1,3) = 5+10-6 = 9
S(1,4) = 5+3-6 = 2
S(1,5) = 5+2-4 = 3
S(1,6) = 5+6-3 = 8
S(1,7) = 5+8-12 = 1
S(2,3) = 7+10-13 = 4

S(2,4) = 7+3-8 = 2
S(2,5) = 7+2-7 = 2
S(2,6) = 7+6-11 = 2
S(2,7) = 7+8-14 = 1
S(3,4) = 10+3-7 = 6
S(3,5) = 10+2-4 = 8
S(3,6) = 10+6-8 = 8

S(3,7) = 10+8-4 = 14
S(4,5) = 3+2-3 = 2
S(4,6) = 3+6-3 = 6
S(4,7) = 3+8-8 = 3
S(5,6) = 2+6-5 = 3
S(5,7) = 2+8-3 = 7
S(6,7) = 6+8-3 = 11

Paso 2 Ordenamiento de los ahorros en forma descendente

S(3,7) = 14
S(6,7) = 11
S(1,3) = 9
S(1,6) = 8
S(3,5) = 8
S(3,6) = 8
S(5,7) = 7

S(3,4) = 6
S(4,6) = 6
S(2,3) = 4
S(1,2) = 3
S(1,5) = 3
S(4,7) = 3
S(5,6) = 3

S(1,4) = 2
S(2,4) = 2
S(2,5) = 2
S(2,6) = 2
S(4,5) = 2
S(1,7) = 1
S(2,7) = 1

Paso 3

i) Se selecciona S(3,7), el mayor ahorro encontrado

Posible base generadora de la Ruta 1

(0,3), (3,7), (7,0)

[(10+4+8)/48] • 60 +25 + 100 = 152 5 < 450 minutos

por lo tanto es la base generadora de la Ruta 1

ii) Se analiza el ahorro S(6,7)

Posible Ruta 1 (0,3), (3,7), (7,6), (6,0)

[(10+4+3+6)/48] • 60 + 25 + 100 + 200 = 353 75 < 450 minutos

por lo tanto el tramo (6,7) se agrega a la ruta

Se analiza S(1,3)

Posible Ruta 1 (0,1), (1,3), (3,7),(7,6),(6,0)

[(5+6+4+3+6)/48] •60 +125+25+100+200 = 480 > 450 minutos

por lo tanto el tramo (1,3) se descarta

Se analiza S(1,6)

Posible Ruta 1 (0,3), (3,7), (7,6), (6,1), (1,0)

[(10+4+3+3+5)/48] •60+25+100+200+125 = 481 25 > 450 minutos

por lo tanto el tramo (1,6) se descarta

Se analiza S(3,5)

Posible Ruta 1 (0,5), (5,3), (3,7), (7,6), (6,0)

[(2+4+4+3+6)/48] •60+75+25+100+200 = 423 75 < 450 minutos

por lo tanto el tramo (3,5) se agrega a la ruta

Se analiza S(4,6)

Posible Ruta 1 (0,5), (5,3), (3,7), (7,6), (6,4), (4,0)

[(2+4+4+3+3+3)/48] •60+75+25+100+200+65 = 488 75 > 450 minutos

por lo tanto el tramo (4,6) se descarta

Se analiza S(1,5)

Posible Ruta 1 (0,1), (1,5), (5,3), (3,7),(7,6), (6,0)

[(5+4+4+4+3+6)/48] •60+125+75+25+100+200 = 557 5 > 450 minutos

por lo tanto el tramo (1,5) se descarta

Se analiza S(2,5)

Posible Ruta 1 (0,2), (2,5), (5,3), (3,7), (7,6), (6,0)

[(7+7+4+4+3+6)/48] •60+ 65+75+25+100+200 = 503 75 > 450 minutos

por lo tanto el tramo (2,6) se descarta

Se analiza S(2,6)

Posible Ruta 1 (0,5), (5,3), (3,7), (7,6), (6,2), (2,0)

[(2+4+4+3+11+7)/48] •60+75+25+100+200+65 = 503 75 > 450 minutos

por lo tanto el tramo (2,6) se descarta

Se analiza S(4,5)

Posible Ruta 1 (0,4), (4,5), (5,3), (3,7), (7,6), (6,0)

[(3+3+4+4+3+6)/48] •60+65+75+25+100+200 = 493 75 > 450 mınutos

por lo tanto el tramo (4,5) se descarta.

*Se conforma la Ruta 1 (0,5), (5,3), (3,7), (7,6), (6,0)

Paso 4

Los sıguıentes ahorros se elımınan del análısıs

S(1,3)	S(4,7)
S(1,6)	S(5,6)
S(3,6)	S(2,5)
S(5,7)	S(2,6)
S(3,4)	S(4,5)
S(2,3)	S(1,7)
S(4,6)	(S2,7)
S(2,3)	
S(1,5)	

Se vuelve al Paso 3

ı) Se analıza S(1,2)

Posıble base generadora de la Ruta 2

(0,1), (1,2), (2,0)

[(5+9+7)/48] •60+125+65 = 216 25 < 450 mınutos

por lo tanto es la base generadora de la Ruta 2

ıı) Se analıza S(1,4)

Posıble Ruta 2 (0,4), (4,1), (1,2), (2,0)

$[(3+6+9+7)/48] \bullet 60+65+125+65 = 286\ 25 < 450$ minutos

por lo tanto el tramo (1,4) se agrega a la ruta

** Se conforma la Ruta 2 (0,4), (4,1), (1,2), (2,0)

Resumiendo, las dos rutas seleccionadas son

Ruta 1 (0,5), (5,3), (3,7), (7,6), (6,0) con 19 kilómetros de recorrido y 423 75 minutos para completar la ruta

Ruta 2 (0,4), (4,1), (1,2), (2,0) con 25 kilómetros de recorrido y 286 25 minutos para completar la ruta

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo es el de realizar un estudio de algunos métodos matemáticos de optimización hasta confeccionar una formulación matemática que hiciere posible la solución de Problema de la Ruta de las Reparaciones Telefónicas

Se concluyó que del Problema de Secuenciación de Vehículos, el Problema de Secuenciación de Rutas con algunas modificaciones de su algoritmo, sirve para optimizar las rutas de las reparaciones telefónicas

La profundización en el algoritmo no es tema de este trabajo, si este fuera el caso se tendría que elaborar un programa del algoritmo en un lenguaje que se adapte a la Base de Datos utilizada por el Despacho de Daños de la Compañía de Teléfonos

BIBILIOGRAFIA

1. **KAUFMANN, A. 1971.** Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones, Tomo 2 2ª Compañía Editorial Continental S A , México, D F , 576 págs

2. **PRAWDA, JUAN. 1982.** Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Vol 1 4ª Editorial Limusa, S A , México, D F , 934 págs

3. **ARZONA RUIZ, JOSÉ . 1989** Selección de Propuestas. 1ª Editorial Científico – Técnica La Habana, Cuba, 136 págs

4 **ANÓNIMO. INGENIERÍA PLANTA EXTERNA.** Diseño y Servicios de Telecomunicaciones S A San Salvador, 47 págs

5 **GARRIDO, JOSÉ.** Teoría de grafos (Apuntes de Clases, Maestría)