UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y TECNOLOGÍA

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

CONSTRUCCIÓN DEL GRADO TOPOLÓGICO POR EL MÉTODO ALGEBRAICO

POR:

JULIÁN SÁNCHEZ G0MEZ

Tesis presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática.

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2007

Título de la Tesis: **"Construcción del Grado Topológico por el Método Algebraico"**

TESIS

Sometida para optar al título de Maestría en Matemática
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología

APROBADO POR:

Dr. Rogelio Rosas
PRESIDENTE

Dr. Elmir De Carvalho
MIEMBRO

Dr. Josué Ortíz
MIEMBRO

REFRENDADO POR:

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 1 de noviembre de 2007

Dedicatoria

Hoy en día la ciencias tienen que estar actualizadas, hay crear nuevos conocimientos y sobre todo hay que escribir, ya que el matemático debe escribir sus ideas y pensamientos .El presente trabajo esta dedicado a todas aquellas personas que de una u otra forma estuvieron pendientes de los progresos científicos que han tenido la ciencias a nivel superior así como también de manera particular a todos aquellos que siempre se preocuparon por el adelanto del mismo, en primera instancia a mi esposa Vielka a mis hijos que siempre estuvieron pendientes de los progresos del mismo, también a mi padre y a mi madre que con mucho esfuerzo me inculcaron los hábitos del estudio a mis hermanos y en general a mis compañeros de trabajo.

AGRADECIMIENTO

Deseamos expresar nuestra gratitud a todas los profesores que de una u otra manera me alentaron a concluir este trabajo de tesis, especialmente a mi esposa Vielka que en todo momento me apoyo, a mi profesor asesor Rogelio Rosas quién en todo momento fue el guía principal, también es importante mencionar a la profesora María Cañenguez quién me ayudo en la traducción de los libros o documentos en ingles.

Resumen

En este trabajo presentamos la teoría de categorías y funtores con sus definiciones, propiedades y ejemplos. Seguidamente definiremos términos como caminos, homotopías de aplicaciones, y el grupo fundamental. Concluimos el primer capítulo con la construcción del Grupo fundamental de la esfera unitaria utilizando el método de A.W.TUCKER En el segundo capítulo iniciamos con la teoría de homología y con las definiciones de homología de grupo singular. Concluimos con aplicaciones del grado topológico algebraico a problemas, También demostramos dos importantes teoremas como lo son el Teorema Fundamental del algebra y el Teorema de punto fijo de Brouwer utilizando teoría de homotopía.

Abstract

In this work we present the categories and funtors theories with its definitions, properties and examples; followed by the definitions of the terms: paths, homotopy applications, and the Fundamental Group. We conclude the first chapter building the Fundamental Group of the unitary sphere, using the A.W. Tucker method. In the second chapter, we begin with the Homotopy Theory and the definitions of the Singular Group of Homology also, we demonstrate two important theorems, such as, the "Fundamental Theorem of Algebraic", and the "Brower's "**Fixed Point** theorem", using the **homotopy** theory.

INTRODUCCIÓN

En esta investigación daremos una presentación de algunos conceptos básicos de la topología algebraica desde el punto de vista de la teoría de homotopía. Definiremos la teoría de grado topológico desde un enfoque algebraico con sus propiedades .Por consiguiente, el trabajo de tesis se refiere a la **teoría de homotopía** y la **teoría de grado topológico algebraico** .El trabajo esta compuesto por dos capítulos que a continuación detallaremos: En el primer capítulo daremos las definiciones teoremas y proposiciones necesarias para desarrollar la teoría de homotopía , como lo son categorías funtores , caminos, relaciones de equivalencias entre caminos para finalizar con el Grupo Fundamental. En el segundo capítulo desarrollaremos la teoría de Homología, su definición y propiedades, el teorema de Brouwer y algunas aplicaciones a problemas .

Índice General

Capítulo1
Grupo fundamental

1.1. Categorías

En Matemática, una categoría viene dada por dos tipos de datos una clase de objetos y, para cada par de objetos X *y* Y, un conjunto de morfismos de X a Y. Los morfismos son frecuentemente representados como flechas entre esos objetos. En el caso de una categoría concreta, X *y* Y son conjuntos de cierto tipo y un morfismo f es una función de X a Y que satisface alguna condición; este ejemplo origina la notación $f\colon X \to Y$. Pero no toda categoría es concreta, por tanto estos no son los únicos tipos de morfismos.

Definición 1.1.1. Una categoría consiste en:

- una clase de cosas llamadas objetos. (Una clase es "más" que conjunto a una clase propia no le permitimos ser elemento de ella misma).
- y para cada par de objetos A y B un conjunto $Mor(A,B)$ de cosas llamada Morfismos de A a B. Si f está en dicho conjunto $Mor(A,B)$, escribiremos $f\colon A \to B$
- para cada tres objetos A, B y C hay una operación binaria Mor(A,B) x Mor(B,C) → Mor(A,C) llamada composición de morfismos.

  La composición de $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ se escribe así: $g \circ f$ o bien gf.

De tal manera que se satisfacen los siguiente axiomas

- (asociatividad) *si* $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ y $h\colon C \to D$ entonces $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f\colon A \to D$
- (identidad) para cada objeto B existe un morfismo $1_B\colon B \to B$ *llamado*

morfismo identidad en B, tal que para todo morfismo $f{:}A \to B$ se tiene $\boldsymbol{1_B} \circ f = f$, y si $h{:}\ B \to C$, entonces $h \circ \boldsymbol{1_B} = h$.

Definición 1.1.2. Dado dos morfismos $f{:}\ A \to B$ y $g{:}\ B \to A$ tales que $gof = 1_A$, g es llamado un inverso a la izquierda de f y f es un inverso a la derecha de g.

De estos axiomas se puede probar que se tiene sólo un morfismo identidad para cada objeto.Si la clase de objetos es solamente un conjunto, no una clase, se dice que la categoría es "pequeña". Existen importantes categorías que no lo son. Cada categoría es presentada en términos de sus objetos y morfismos.

Ejemplo 1.1.1. La categoría ***Top*** de todos los espacios topológico junto a las funciones continuas, que constituyen los morfismos.

Ejemplo 1.1.2. La categoría ***Set*** de todos los conjuntos junto a las funciones entre los conjuntos.

Ejemplo 1.1.3. Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ es una categoría pequeña cuyos objetos son los miembros de P, y los morfismos son las flechas desde x a y cuando ocurre que $x \leq y$

1.2. Funtores.

Definición 1.2.1. Los funtores son aplicaciones entre categorías que preservan la estructura.

Definición 1.2.2. Un funtor (covariante) F de la categoría C a la categoría D

- asocia a cada objeto X en C un objeto $F(X)$ en D;

- asocia a cada morfismo $f: X \to Y$ un morfismo $F(f): F(X) \to F(Y)$.

cumpliendo el siguiente par de propiedades

- $F(1_X) = 1_{F(x)}$ para todo objeto X en C.

- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para todos los morfismos $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$.

Definición 1.2.3. Un funtor contravariante F de C a D es un funtor que da la vuelta a los morfismos (esto es, si $f: X \to Y$ es un morfismo en C, entonces $F(f) : F(Y) \to F(X)$; la manera más rápida de definir un funtor contra variante es dar un funtor covariante entre C^{op}(categoría dual o categoría opuesta) y D.

Una consecuencia importante de los axiomas para funtores es esta: si f es un isomorfismo en C, entonces $F(f)$ también lo es en D.

Ejemplo 1.2.1. Álgebra de las funciones continuas es un funtor contravariante desde la categoría de los espacios topológicos (cuyos morfismos son las aplicaciones continuas) a la categoría de las álgebra asociativas reales, es dado asignando a cada espacio topológico X el álgebra $C(X)$ de todas las funciones reales continuas sobre tal espacio.

Cada aplicación continua $f: X \to Y$ (morfismo en la categoría de espacios topológicos) induce un homomorfismo de álgebras $C(f) : C(Y) \to C(X)$ mediante la regla $C(f)(\varphi) = \varphi \, o \, f$ para todo en $C(Y)$.

Ejemplo 1.2.2. Grupo fundamental. Considera la categoría de los espacios topológicos "puntos base", con "puntos distinguidos". Los objetos son los pares (X,x), donde X es un espacio topológico y x es un elemento de X. Un morfismo desde (X,x) hacia (Y,y) viene dado por una aplicación continua $f: X \to Y$ tal que $f(x) = y$. El cual va a ser un funtor de la categoría de los espacios topológicos con puntos base hacia la categoría de los grupos y homomorfismos de grupos.

Definición 1.2.4. Un subespacio A de X es llamado un retracto de X, si la aplicación inclusión $i: A \subset X$ tiene una inversa a la izquierda en la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas. 0 sea A es un retracto de X si y solo si existe una aplicación continua $r: X \to A$ tal que $r o i = I_A$ [Esto es $r(x) = x$ para $x \in A$]. Tal aplicación r es llamada una retracción de X a A.

1.3. Caminos

Definición 1.3.1. Denotaremos por I al intervalo $[0,1]$. Un camino de P a Q en un espacio topológico X es una aplicación contínua $f: I \to X$ tal que $f(0)=P$, $f(1)=Q$.

Los puntos P y Q son llamados extremos del camino. Y con mas precisión $f\,(0)$ es el punto inicial del camino y $f\,(1)$ el punto final del camino.

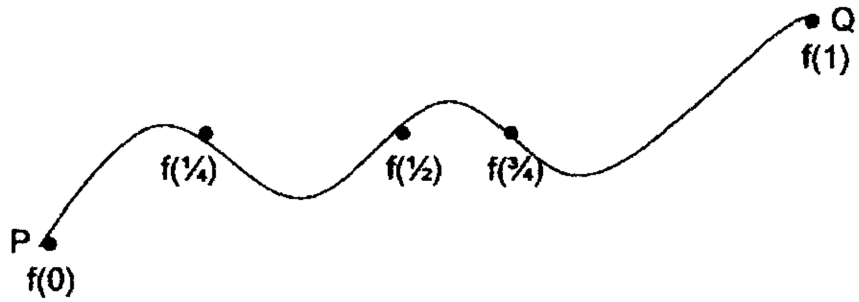

Fig. 1

El camino f es la aplicación y no la imagen $f(I)$. En general pensaremos en el parámetro t como el tiempo, con lo que $f(t)$ será la posición en X en el instante t.

Definición 1.3.2. El camino inverso, denotado por α^* es la aplicación definida por $\alpha^*(t) = \alpha(1-t)$, $t \in I$ en X. El camino inverso α^*, recorre a α en sentido contrario.

Ejemplo 1.3.1. La función continua $f(t) = e^{\pi i t}$ es un camino del punto 1 sobre el eje real al punto -1. El movimiento es uniforme alrededor del extremo izquierdo del círculo unitario. La inversa es $f^*(t) = e^{\pi i (1-t)}$

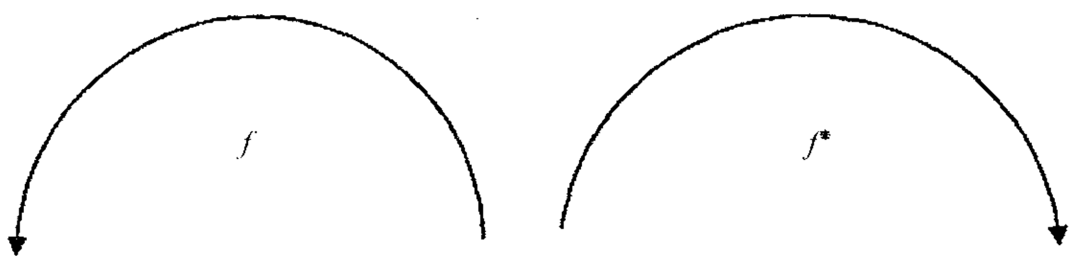

FIG.2

La siguiente definición nos presenta dos caminos tales que el punto final del primero coincide con el punto inicial de segundo, nos da un nuevo camino que consiste en unir los caminos dados.

Definición 1.3.3. (compuesta) Sean α y β dos caminos sobre X, talque $\alpha(1) = \beta(0)$ definimos una aplicación $(\alpha * \beta): I \rightarrow X$ por:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si} \quad 0 \leq \alpha \leq ½ \\ \beta(2t-1) & \text{si} \quad ½ \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

$\alpha * \beta$ es llamada la compuesta de α y β.

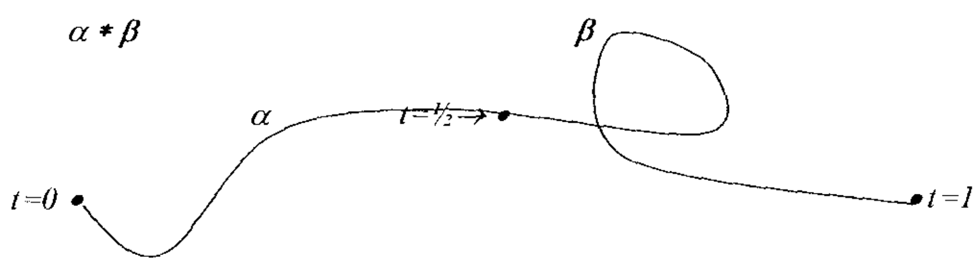

Fig.3

Nótese que hay que escribir $2t$ y $2t-1$ para que α y β se recorran el doble rápido (en el primer medio segundo y en el segundo medio segundo, respectivamente) y así $\alpha * \beta$ se recorra en el tiempo unidad. La continuidad de $\alpha * \beta$ es fácil de verificar, por el lema de pegado.

Lema 1.3.1. (pegado). Supongamos que $X= A \cup B$ donde A y B son cerrados en X. Supongamos que $f: A \rightarrow Y$ y $g: B \rightarrow Y$ continuas y $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$. Entonces existe una función continua $h: X \rightarrow Y$ talque $h(x)=g(x)$ siempre que $x \in A$ y $h(x)=g(x)$, siempre que $x \in B$.

Prueba : Supongamos que C es un subconjunto de Y. Luego

$$h^{-1}(C) = f^{1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

Dado que f y g son continuas, $f^{1}(C)$, $g^{-1}(C)$ son cerrados en X (dado que A y B Son sub-espacios cerrados en X). Así $h^{-1}(C)$ es cerrado en X. □

Ejemplo 1.3.2. Sean w, w'caminos con $w(t) = e^{2\pi i}$ y $w'(t)=2t-1$, luego:

$$(w * w')(t) = \begin{cases} e^{2\pi i} & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 4t-3 & si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

observese que $4t-3 = 2(2t-1)-1$

Definición 1.3.5. Un espacio X se llama conexo por camino si todo par de puntos distintos pueden ser unidos por un camino en X.

Definición 1.3.6. Un camino α es cerrado si $\alpha(0)=\alpha(1)$. Si $\alpha(0)= \alpha(1)=x$ decimos que α es un camino con punto base x.

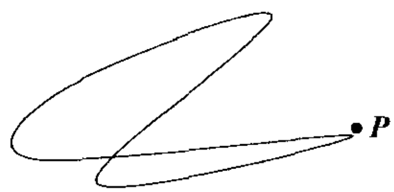

Fig.4

$$\alpha(0) = \alpha(1) = \boldsymbol{P}.$$

En otras palabras un camino es cerrado si el punto inicial y final coinciden.

Definición 1.3.7. Sea $x \in X$; el camino constante denotado por e_x, es la aplicación $e_x : I \to X$ definida por $e_x(t)= x$ para todo $t \in I$.

1.4.Homotopía de aplicaciones.

El problema central de la topología es el de decidir si dos espacios topológicos son o no homeomorfos. *En Topología Algebraica*, se usa el siguiente modelo de procedimiento para solucionar esta cuestión: dado un espacio topológico X, se le asocia un objeto algebraico $A(X)$, de modo que si Y es otro espacio homeormorfo a X, el objeto algebraico $A(Y)$ adjudicado a Y por el mismo procedimiento resulta ser isomorfo a $A(x)$. Es decir, $A(.)$ es lo que se llama un *invariante topológico*. Así, estos objetos algebraicos permiten detectar cuando estos dos espacios topológicos no son homeomorfos, si los invariantes asociados a uno y al otro no son isomorfos. Se pasa de objetos topológicos a algebraicos.

Definición 1.4.1. Una homotopía sobre un espacio topológico X es una aplicación continua $f: [0,1]x[0,1] \to X$ tal que las aplicaciones $f(s,0)$ y $f(s,1)$ son constantes.

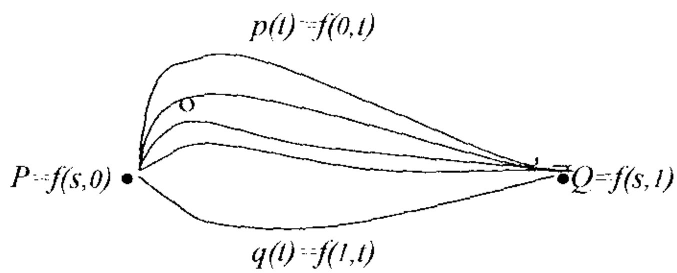

Fig.5

Definición 1.4.2. Sean f_o y f_l funciones continuas de X en Y, decimos que f_o y f_l son homotópicas si existe una función continua.

$$H: X \times I \to Y,$$

tales que para cada x en X:

$$H(x,0)=f_0(x)$$

$$H(x,1)=f_1(x)$$

es decir, si podemos unir f_0 y f_1 mediante una familia continua de funciones continuas $\{ f_t \}$ dada por $f_t(x)= H(x, t)$ la cual es una aplicación continua. De esta forma, podemos pensar en el parámetro ***t*** como el tiempo, entonces en el tiempo $t=0$ tenemos la aplicación f_o y cuando t varía la aplicación f_t varía continuamente de tal forma que al tiempo $t=1$ obtenemos la aplicación f_l.

Por esta razón se dice que una homotopía es una deformación continua de una aplicación .La aplicación H se llama una homotopía entre f_o y f_l y lo denotaremos por $f_0 \approx f_1$.

Ejemplo 1.4.1. Sea $f: S^1 \to R^2$ la aplicación inclusión natural, y sea $g: S^1 \to R^2$ la aplicación constante con $g(x) = (0,0)$ para todo $x \in S^1$. Estas dos aplicaciones son homotópicas. Sea $F: S^1 x\ [0,1] \to R^2$ definida por $F((x, y), t) = ((1-t)\,x,\ (1-t)\,y)$. Entonces F es continua, porque es una composición de adiciones y multiplicaciones.

Además $F((x, y),0) = (1x, 1y) = (x, y) = f(x,y)$. y $F((x, y,1)) = (0y, 0x) = (0,0) = g(x, y)$.

Lema 1.4.1. La relación de homotopía entre caminos con los mismos extremos es una relacón de equivalencia.

Prueba

a. Sea f: $S: \to T$ una aplicación continua.

Definamos una homotopía

$$F: S \times [0, 1] \to T$$

Por $F(x, t) = f(x)$ para todo t. Entonces $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = f(x)$. Luego $f \approx f$.

b. Sean f, g dos aplicaciones continuas, $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$, además definamos

$$G: S \times [0,1] \to T$$

por $G(x,t) = F(x,1-t)$.

Entonces $G(x,0) = g(x)$ y $G(x,1) = f(x)$.

Así $F(x,t)$ es una homotopía entre f y g, y $F(x, 1-t)$ lo es entre g y f.

c. *Sea* F: $S \times [0,1] \to T$ una aplicación continua tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$, y *sea* $G: \to S \times [0,1] \to T$ una aplicación continua tal que $G(x,0) = g(x)$ y $G(x,1) = h(x)$

Definamos otra aplicación continua $H: Sx(0, 1) \rightarrow T$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & si \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía entre f y h. □

Definición 1.4.3. Se dice que dos caminos α y β son equivalentes si α y β son homotópicos relativamente a $\{ 0,1 \}$.En este caso escribiremos $\alpha \sim \beta$. Por lo tanto, los caminos α, $\beta: I \rightarrow X$ son equivalentes si existe una función continua

$F : I \times I \rightarrow X$ talque

$F(t,0) = \alpha(t)$, $F(t,1) = \beta(t)$, para $t \in I$

$F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0)$, $F(t,1) = \alpha(1) = \beta(1)$, para $t \in I$

En otras palabras dos caminos son equivalentes si se puede deformar uno en el otro de forma continua manteniendo fijos los extremos.

Definición 1.4.4. Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continúa. La clase de homotopía de g es el conjunto de aplicaciones continuas que son homotópicas a g. Esto es $[g] = \{f: X \rightarrow Y / f \approx g\}$.

Denotaremos por $[\alpha]$ la clase de equivalencia del camino α.

Definimos ahora un producto de clases de equivalencia de caminos por:

$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$.

Lema 1.4.2. Si $\alpha_o \sim \beta_1$, tales que $\alpha_o(1) = \beta_o(0)$ y $\alpha_1(1) = \beta_1(0)$

entonces:

$$\alpha_0 * \beta_0 \sim \alpha_1 * \beta_1$$

Proposición 1.4.1. Sean α, β y γ caminos en X. Entonces

(a) $([\alpha]*[\beta])*[\gamma] = [\alpha]*([\beta]*[\gamma])$

(b) $[e_x] * [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] * [e_x]$

(c) $[\alpha] * [\alpha^*] = [\alpha^*]*[\alpha] = [e_x]$

Demostración. Usando la fórmulas de productos de caminos

$$\text{(a.1)}\ ((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{(a.2)}\ (\alpha * (\beta * \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Queremos encontrar una homotopía entre (1) y (2) para ello nos auxiliamos del siguiente diagrama:

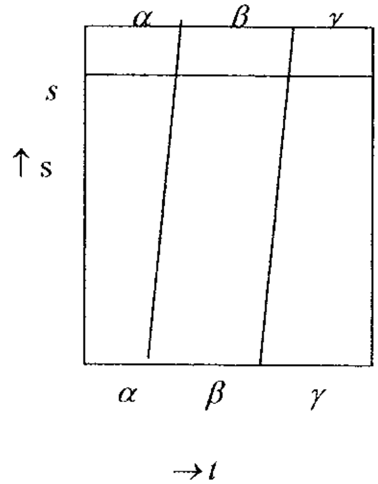

Fig.6

ya que para $s=0$ se aplica α cuando $t \in [0, \frac{1}{4}]$,

β cuando $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

γ cuando $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,

y para $s=1$ se aplica α cuando $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

β cuando $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

γ cuando $t \in [\frac{3}{4}, 1]$.

En el diagrama la recta que une al punto $(\frac{1}{4}, 0)$ con el punto $(\frac{1}{2}, 1)$ es la recta $t = \frac{s+1}{4}$ y la que une el punto $(\frac{1}{2}, 0)$ con $(\frac{3}{4}, 1)$ es la recta $t = \frac{s+2}{4}$ por lo que para un valor arbitrario de s:

α cuando $t \in [0, \frac{s+1}{4}]$

β cuando $t \in [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$

γ cuando $t \in [\frac{s+2}{4}, 1]$

Para encontrar la homotopía, tenemos que encontrar homeomorfismo lineales que manden a los intervalos $[0, \frac{s+1}{4}]$, $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}]$, $[\frac{s+2}{4}, 1]$ al $[0,1]$ y componerlos con α, β, y γ respectivamente , así

r_1: $[0, \frac{s+1}{4}] \rightarrow [0,1]$ $\qquad$ $r_1 = \frac{4t}{s+1}$

r_2: $[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}] \rightarrow [0,1]$ $\qquad$ r_2= 4t-s-1

r_3: $[\frac{s+2}{4}, 1] \rightarrow [0,1]$ $\qquad$ $r_3 = 1 - \frac{4(t-1)}{s-2}$

así tenemos

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4t}{s+1}\right) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \beta(4\text{-}s\text{-}1) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \gamma\left(1 - \frac{4(t-1)}{s-2}\right) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$F(t,0) = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$F(t,1)=\begin{cases}\alpha(2t) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \beta(4t-2) & \frac{1}{2}\le t\le \frac{3}{4}\\ \gamma(4t-3) & \frac{3}{4}\le t\le 1\end{cases}$$

$$F(0,s)=\alpha(0)$$

$$F(1,s)=\gamma(1)$$

Por lo tanto $((\alpha*\beta)*\gamma)\,(t)\sim(\alpha*(\beta*\gamma))\,(t)$.

Entonces el producto de clases de equivalencia es asociativo.

(b) Considerando

$$F(t,s)=\begin{cases}\alpha\left(\frac{2t}{(2-s)}\right) & 0\le t\le \frac{(2-s)}{2}\\ x & \frac{(2-s)}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

se tiene que α(tómese $s=0$) y $\alpha * e_x$ (tomese $s=1$) son homótopos.Un razonamiento simétrico cambiando en la fórmula anterior t por $1-t$ y α por $\alpha*$prueba que α y $e_x*\alpha$ tambien lo son.

2. Definiendo

$$F(t,s)=\begin{cases}\alpha(2ts) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \alpha(2s(1-t)) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

se tiene $F(t,0) = e_x(t)$ y $F(t,1)=(\alpha * \alpha)(t)$, de donde $[\alpha] * [\alpha^*]=[e_x]$. Cambiando t por $1-t$ se tiene $[\alpha^*]*[\alpha]=[e_x]$.

Luego hemos demostrado que el conjunto de clases de equivalencia de caminos en X tiene estructura de grupo. □

Definición1.4.5. Se dice que dos espacios X y Y son del mismo tipo de homotopías si existen aplicaciones continuas $f:X\to Y$ y $g: X \to Y$e tales que

$$g \circ f \approx 1_X : X \to X.$$

$$f \circ g \approx 1_Y : Y \to Y.$$

Las aplicaciones f y g son llamadas equivalencias homotópicas .

Ejemplo 1.4.2. La esfera de dimensión $n-1$, $S^{n-1} = \{ x \in R^n / \|x\| = 1\}$ y el espacio $R^n \setminus 0\}$ son homotópicamente equivalentes.

Sea $f: S^{n-1} \to R^n \setminus \{0\}$ la inclusión y $g: R^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ dada por $g(x)= x/\|x\|$. Tenemos que $g \circ f = 1: S^{n-1} \to S^{n-1}$ y $F: R^n \setminus \{0\}$ x $I \to R^n \setminus \{0\}$ dada por $F(x,t) = x/t(\|x\|-1)+1$ es una homotopía entre la identidad de $R^n \setminus \{0\}$ y $f \circ g$.

Definición 1.4.6. Se dice que un espacio X es contractible si es homotópicamente equivalente a un punto. Intituivamente un espacio es contráctible si puede deformarse en sí mismo a un punto.

Ejemplos 1.4.3.

- El espacio Euclideano R^n
- El n-disco cerrado $D^n=\{x\in R^n / \ \|x\| \leq 1\}$
- El n-disco abierto $E^n=\{x\in R^n/\|x\| < 1\}$

Ejemplo 1.4.4. Si S es un espacio conteniendo un solo punto, luego S y R son homotopicas equivalentes. Definamos $f: R\rightarrow S$ una función constante, y $g: S\rightarrow R$ la función que solo toma un punto en S el 0 sobre R. La compuesta $f\circ g: S\rightarrow S$ es la aplicación identidad sin embargo $g\circ f: R \rightarrow R$ es la función constante a 0. Lo que se desea es probar que todas las funciones de $R\rightarrow R$ son homotopicas y así concluir que $g\circ f$ es homotópica a la identidad .

Sean $f, g: R \rightarrow R$ dos funciones continuas . Definamos

$$F: R\, x\, [0, 1] \rightarrow R$$

$F(x,t) = (1-t)f(x)+tg(x)$. Entonces F es continua por ser la compuesta de funciones continuas, $F(x,0) =(1-0)f(x) + 0 =f(x)$ y $F(x,1) = 0 + 1\, g(x) =g(x)$. Por tanto F es una homotopía entre f y g. □

Definición 1.4.7. Sea $f: X \to Y$ una aplicación, una homotopía nula de f es una homotopía de f a una aplicación constante, se dice que es nulhomotópica y la homotopía entre ambas se dice que es una nulhomotopía. Denotado por $f \approx 0$.

Teorema 1.4.1. Sea $f \to Y$ continua y sea $p_0 \in S^n$. Las siguentes afirmaciones son equivalentes.

(a) f es null homotópica.

(b) f se puede extender continuamente al disco E^{n+1}.

(c) f es null homotópica relativa a p_0.

1.5. Grupo Fundamental

Definición 1.5.2. Sea X un espacio topológico y sea $x_o \in X$. Se llama Grupo Fundamental de X denotado por $\pi_1(X, x_o)$ al conjunto de clases de equivalencias de caminos cerrados con base en x_o, bajo la relación de homotopía , dotado de la ley de composición .Es importante señalar que el conjunto de clases de equivalencia de caminos tiene que ser cerrado con base en x_o porque el producto de estos dos caminos esta siempre definido y tiene una única identidad, el camino constante e_x.

Explícitamente $\pi_1(X, x_o) = \{[\alpha] / \alpha : [0,1] \to X$ continua, $\alpha(0) = \alpha(1) = x\}$

Teorema 1.5.1. El Grupo Fundamental de un espacio conexo H es abeliano y si w , w' son caminos cerrados en el punto base, entonces $[w]*[w'] = [\ \mu\ o\,(w,w')]$ donde μ es la aplicación multiplicación en el espacio H.

Por las propiedades demostradas anteriormente en la proposición 1.4.1 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.5.2. El conjunto $\pi_1(X, x_o)$ es un grupo bajo el producto de clases de equivalencias de caminos con punto base $x_o \in X$.

LEMA 1.5.1. Un espacio contractible es n-conexo para todo $n \geq 0$.

1.5.2. CONSTRUCCIÓN DEL GRUPO FUNDAMENTAL $\pi_1(S^1, p_0)$ SIGUIENDO EL METODO USADO POR A.W.TUCKER, CUANDO $S^1=\{e^{i\theta}\}$ y $P_0=1$.

La aplicación exponencial $exp: R \rightarrow S^1$ se define por $exp\ (t)=e^{2\pi it}$, exp es continua, $exp(t_1+t_2)=exp(t_1).ex(t_2)$ (cuando el lado derecho es la multiplicación de números complejos) y $exp(t_1)=exp(t_2)$ si y solo si t_1-t_2 es un entero . Luego $exp \mid (-½, ½)$ es un homomorfismo de el intervalo $(-½, ½)$ sobre S^1-$\{e^{\pi i}\}$.

Así, $log : S^1$-$\{e^{\pi i}\} \rightarrow (-½, ½)$ es la inversa de $exp \mid (-½, ½)$.

Definición 1.5.2.1. Un subconjunto $X \subset R^n$ se llamará estrellado con respecto a el punto $x_o \in X$, si siempre que $x \in X$, el segmento de línea cerrado $[x_0,x]$ de x_o a x esta incluido en X.

Observación: todo conjunto estrellado con respecto a un punto es conexo.

Lema 1.5.2.1. Sea X compacto y estrellado con respecto a $x_o \in X$. Dada cualquier aplicación continua $f: X \to S^I$ y cualquier $t_o \in R$ tal que $exp(t_o)=f(x_o)$, existe una aplicación continua $f': X \to R$ talque $f'(x_o)=t_o$ y $exp(f'(x)) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Prueba: Claramente podemos trasladar X que esta estrellado con respecto al origen; sin pérdidas de generalidades asumimos que $x_o=0$. Puesto que X es compacto, f es uniformemente continua y existe $\varepsilon > 0$ talque si $\|x - x'\| < \varepsilon$, luego $\|f(x) - f'(x)\| < 2$ [Esto es $f(x)$ y $f(x')$ no son antipodes en S^I]. Dado que X es vecindad, existe un entero positivo n tal que $\|x\|/n < \varepsilon$ para todo $x \in X$, luego para cada $0 \leq j < n$ y todo $x \in X$ $\quad \| (j+1)x/n - jx/n \| = \|x\|/n < \varepsilon$

también $\quad \| f(j+1)x/n) - f(jx/n) \| < 2$

Se sigue que el cociente $f((j+1)x/n) \ / \ f(jx/n)$ es un punto de $S^I - \{e^{\pi i}\}$. Sea $g_j: X \to S^I - \{e^{\pi i}\}$ para $0 \leq j \leq n$ la aplicación definida por $g_j(x) = ((j+1)x/n \ / \ f(jx/n))$. Luego para todo $x \in X$ vemos que $f(x) = f(o) g_o(x) g_1(x) \ldots g_{n-1}(x)$.

Definamos $f':X\rightarrow R$ por:

$$f'(x)=t_o+log(g_o(x))+log(g_1(x))+\ldots+log(g_{n-1}(x))$$

f' es la suma de $n+1$ funciones continuas de X a R, luego $f.'$ es continua

Claramente, $f'(0)=t_o$ y $exp(f'(x))=f(x)$.

Lema1.5.1.2. Sea X un espacio compacto y estrella y $f', g': X\rightarrow R$ aplicaciones tal que $exp_o f'=exp_o g'$ y $f'(x_0)=g'(x_o)$ para algún $x_o\in X$. Entonces $f'=g'$.

Prueba supongamos que $h=f'-g': X\rightarrow R$. Dado $exp_o f'=exp_o g'$, $exp_o h$ es la aplicación constante de X en p_o. Por lo tanto h es una aplicación continua de X a R, tomando solo valores enteros. Como X es conexo, h es constante, dado que $h(x_o)=0$ para todo $x\in X$.

1.6. Grado topológico en la esfera unitaria

Sea $\alpha:I\rightarrow S'$ un camino cerrado en p_o, como I es estrellado en el punto 0 y $\alpha(0)=p_o=exp(0)$, se sigue por lema1.5.1.1. que existe $\alpha':I\rightarrow R$ talque $\alpha'(0)$ y $exp_o \alpha'=\alpha$ por lema 1.5.1.2. α' esta caracterizado de manera única por esta propiedad, como $exp.(\alpha'(1))=p_o$ se sigue que $\alpha'(1)$ es un entero. Definimos el grado de α, por $deg\ \alpha=\alpha'(1)$

Lema 1.6.1. Sean α y β caminos cerrados homotópicos en S^1 en el punto p_o entonces $deg\ \alpha=deg\ \beta$.

Prueba Sea $F: I X I \rightarrow S^1$ una homotopía relativa en I de α a β, como $I X I$ es un conjunto estrellado de R^2 con respecto a $(0,0)$, se sigue por lema 1.5.2.1. que hay una aplicación $F': I X I \rightarrow R$ talque $F(0,0)=0$ y $ex \; o \; F'= F$. Dado que F es una homotopía relativa a , $F(0,t') = F(1,t')=P_o$ para todo $t \in I$. Por lo tanto $F(0,t')$ y $F(1,t')$ toman solo valores reales para todo $t' \in I$, luego $F'(0,t)$ y $F'(1,t)$ debe ser constante porque $F'(0,0)=0$, $F'(0,t)=0$ para todo $t \in I$. Sean α', $\beta': I \rightarrow R$ definamos por $\alpha'(t)=F'(t,0)$ y $\beta'(t)=F'(t,1)$. Luego $\alpha'(0)=0$ y $exp \circ \alpha'=\alpha$. Por lo tanto $deg \; \alpha='$ $\alpha'(1)=F'(1,0)$. De manera similar $\beta'(0) = 0$ y $exp o \beta'=\beta$, así $deg \; \beta = \beta'(1) =$ $F'(1,1)$. Porque $F'(1,t')$ es constante, $F'(1,0)=F'(1,1)$ y $deg \; \alpha = deg \; \beta$. ■

Existe una buena definición de la aplicación deg de $\pi_1(S,p_o)$ a Z definida por $deg [\alpha]=deg \; \alpha$ cuando α es un camino cerrado en S^1 a el punto p_o.

Teorema 1.6.1 La función deg es un isomorfismo $deg: \pi(S^1, p_o) \cong Z$.

Prueba Sean α, β dos caminos cerrados en S^1 en el punto p_o y sea $\alpha\beta$ el camino cerrado en el grupo producto de S^1 por el teorema 1.5.1. $[\alpha] * [\beta] = [\alpha\beta]$. Sean $\alpha', \beta' \rightarrow R$ talque $\alpha'(0)=0$, $expo \; \alpha'=\alpha$, $\beta'(0)=0$ y $expo \; \beta' = \beta$. Luego $\alpha' + \beta': \rightarrow R$ es talque $(\alpha'+\beta')(0)= \alpha\beta$. Por lo tanto $deg([\alpha]*[\beta])=deg[\alpha\beta] = deg(\alpha'+\beta')(1)=deg \; \alpha + deg \; \beta = deg \; [\alpha]+deg[\beta]$. Demostrando que deg es un homomorfismo.

La aplicación deg es un epimorfismo, si n es un entero, existe un camino α_n' en R definido por $\alpha_n'(t)=tn$, así $\alpha_n=exp \; o \; \alpha_n'$. Luego claramente $deg[\alpha_n] = \alpha_n'(1)=n$.

La aplicación *deg* es un monomorfismo; sea $deg\,[\alpha]=0$ existe un camino cerrado α' en R en el punto 0 talque $exp \circ \alpha'=\alpha$.

Dado que R es simplemente conexo (como este es contractible y por el lema1.5.1.), $\alpha' \cong \varepsilon_0$. Entonces $exp \circ \alpha' \cong \varepsilon_{p_0}$. Por lo tanto $\alpha \cong \varepsilon_{p_0}$ y $[\alpha]$ es el elemento identidad de $\pi(S', p_o)$. □

LEMA 1.6.2. El homomorfismo $\gamma: [S',p_o; S',p_o] \rightarrow [S',S']$ es un isomorfismo.

Prueba Sea $f: S^1 \rightarrow S^1$ y sea $f(p_0)=e^{i\theta}$ para algún $0 \leq \theta \leq 2\pi$ Definamos una homotopía $F: S^1 \times I \rightarrow S^1$ por $F(z,t)=f(z)e^{-it\theta}$. Luego F es una homotopía de f a una aplicación f' talque $f'(p_o)=p_0$. Por lo tanto

$$\gamma[f]p_0=[f']=[f].$$

Supongamos que $f:(S^1, p_0) \rightarrow (S^1, p_0)$ es tal que $\gamma[f]_{p_0}=[f]$ es trivial. Luego $f: S^1 \rightarrow S^1$ es homotópico nulo. Por teorema 1.4.1 f es homotópico nulo relativo a p_o. Por consiguiente $[f]p_o$ es trivial.□

Definición 1.6.1 Sean x, y dos puntos sobre la n-esfera S^n. Si $x=-y$, luego x, y son llamados puntos antipodales

Definición1.6.2. La aplicación antipodal es la aplicación $A: S^n \rightarrow S^n$ definida como A(x)=-x

Capitulo 2

Teoría de Homología

2.1. HOMOLOGÍA

En esta sección introduciremos el concepto de teoría de homología lo cual es de importancia fundamental en el algebra topológica. Una teoría de homología envuelve una serie de funtores covariantes H_n a la categoría de grupos abelianos

Definición 2.1.1 Un grupo diferencial C consiste de un grupo abeliano C y un endomorfismo $\partial: C \to C$ *tal* que $\partial\partial = 0$. El edomorfismo ∂ *es llamado el diferencial* , o operador vecindad de C.

Hay una categoría cuyos objetos son grupos diferenciales y cuyos morfismos son homomorfismos que conmutan con los diferenciales. Para un grupo diferencial C existe un subgrupo de ciclos $Z/(C)=ker\ \partial$ y un subgrupo de vecindades $B(C) = im\ \partial$ Porque $\partial\partial = 0, B(C) \subset Z(C)$. La homología de grupos $H(C)$ esta definido como el grupo cociente

$$H(C) = Z(C)/B(C)$$

Los elementos de $H(C)$ son llamados homología de clases . Si z es un ciclo, esta homología de clases en $H(C)$ Es denotada por $\{z\}$

Un grupo graded $C = \{C_q\}$ consiste de una colección de de grupos abelianos C_q multiplicados por enteros. Los elementos de C_g se dicen que tienen grado q .

Definición 2.1.2. Un grupo diferencial graded es un grupo que que tiene un diferencial compatible con la estructuta graded (esto es, el diferencial es de grado r para algún r).

Definición 2.1.3. :Una cadena compleja es un grupo diferencial graded en la cual la diferencial es de grado -1. Así una cadena compleja C consiste de una sucesión de grupos abelianos C_q y homomorfismos

$$\partial_q : C_q \to C_{q-1}$$

indexed por los enteros tal que la compuesta

$$C_{q+1} \to C_q \to C_{q-1}$$

es el homomorfismo trivial. Los elementos de C_q son llamados *q-cadenas de el complejo*.La mayoría de las cadenas complejas consideradas tienen la propiedad adicional que $C_q = 0$ *para* $q < 0$. Tales cadenas *compleja se dice no negativas*

Definición 2.1.4. Una cadena compleja libre es una cadena en la cual C_q es un grupo abeliano para todo q.

Para una cadena compleja el grupo de ciclos $Z(C)$ es un grupo graded que consiste de la colección $\{Z_q(C) = ker\ \partial_q\}$, y el grupo de vecindades $B(C)$ es un grupo graded que consiste de $\{B_q(C) = im\ \partial_{q+1}\}$. El grupo de homología $H(C)$ es un grupo graded que consiste de $\{ H_q(C) = z_q(C)/B_q(C)\}$.

Definición 2.1.5. Una aplicación cadena τ:C $\to$ C´ entre cadenas complejas es un homomorfismo de grado 0 que commmuta con los diferenciales. Así τ es una colección $\{\tau_q: C_q \to C'\}$ tal que la commutatividad se cumple

$$C_q \to C_{q-1}$$

$$C'_q \to C'_{q-1}$$

Es claro que existe una categoría de cadenas complejas cuyos objetos son cadenas complejas y cuyos morfismos son aplicaciones cadenas. Es tambien claro que si C y C´ son dos objetos en esta categoría, hom(C,C´) es un grupo abeliano.

Si τ: C $\to$ C´ es una aplicación cadena, esta induce un homomorfismo

$$\tau_*: H(C) \to H(C')$$

Este es el homorfismo de grado 0, tal que $(\tau_*)_q\{z\} = \{\tau_q(z)\} para\ z \in Z_q(C)$

Definición 2.1.6. Un complejo simplicial K consiste de un conjunto $\{v\}$ de vertices y un conjunto $\{s\}$ de subconjuntos no vacios de $\{v\}$ llamados simplexes tal que

(a) Cualquier conjunto consistiendo de exactamente un vertices es un simplex.

(b) Cualquier subconto no vacio de un simplex es un simplex.

Un simplex contenjendo exactamente $n+1$ vertices es llamado un n-simple.Un simplex es una generalización de un intervalo (1-simplex), un triangulo(2-simplex) o un tetrahedro(3-simplex). Por ejemplo, la unión de dos puntos es un intervalo, la unión de tres puntos es un triángulo, la unión de cuatro puntos es un tetrahedro. En general, la unión de **n** puntos son los n vectores básicos estandares para R^n, entonces su unión es la (n-1) – dimensional simplex así

$$\Delta^{n-1} = \{(t_1,\ldots,t_n) \in R^n / t_1 + \ldots + t_n = 1 \; y \; t_i \geq 0 \}$$

En la categoría de simplicial complexes no vacío cualquier complejo simplicial P. consistiendo de un sólo vértice es on objeto terminal. Sí k es un simplicial complex no vacío, la aplicación funtorial $K \to P$ tiene inversa a la derecha. Sin embargo la aplicación homologica inducida $H(k) \to H(P)$ tiene inversa a la derecha, porque $H_q(P)=0$ si $q \neq 0$ y $H_0(P) \approx Z$ se sigue que existe un un epimorfismo $\varepsilon: C_0(K) \to Z$ tal que $\varepsilon\partial_1 = 0$.

Definición 2.1.7. Una ampliación (sobre Z) de una cadena compleja C es un epimorfismo $\varepsilon: C_0 \to Z$ talque $\varepsilon\partial_1: C_1 \to C_0 \to Z$ es trivial.

Definición 2.1.8. Una cadena compleja aumentada es una cadena compleja no negativa con ampliación.

Sin embargo ε induce un epimorfismo $\varepsilon_* : H_0(C) \to Z$

Por lo tanto una ampliación cadena compleja tiene un grupo homológico no trivial en grado cero.

La cadena compleja reducida $\hat{C}$ de una ampliación cadena compleja C esta definida como la cadena compleja definida por $\hat{C}_q = C_q$ si $q \neq 0, \hat{C}_0 = ker\ \varepsilon$, y $\hat{\partial}_q = \partial_q$.

[note que $\partial_1(\hat{C}_1) \subset \hat{C}_0$ porque $\varepsilon\partial_1 = 0$].Así $\hat{C}$ es el kernel de la aplicación cadena $\varepsilon : C \to Z$. $Si\ \tau : C \to \hat{C}$ es una aplicación preservando la augmentation, τ induce una aplicación cadena $\hat{C} \to \hat{C}'$entre su cadena reducida complejas . La homología de grupo $H(\hat{C})$ es llamado la homología de grupo reducida de C y es denotatada por $\tilde{H}(C)$.

Definición 2.1.10. Un n-simplex standar es un conjunto cuyos vertices son los vectores unitarios a lo largo del eje coordenado .El simplex estándar se denota por Δ^n con $\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in R^{n+1} / \Sigma_i t_i = 1\ y\ t_i \geq 0\ para\ todo\ i\} \subset R^{n+1}$, $n \geq 0$.

Δ^0 Δ^1 Δ^2

Fig.6

Definición 2.1.11. Un singular n-simplex en un espacio X es por definición una aplicación $\sigma : \Delta^n \to X$.

INVARIANZA HOMOTÓPICA

Para una aplicación $f: X \to Y$, un homomorfismo $f_{\#}: C_n(X) \to C_n(Y)$ esta definida por composición en la cual una plicación $\sigma: \Delta^n \to X$. A traves de f se obtiene una n-singular $f_{\#} = f\sigma : \Delta^n \to Y$, extendiendo $f_{\#}$ a traves de $f_{\#}(\Sigma_i n_i \sigma_i) = \Sigma_i n_i f_{\#}\sigma_i$.

Las aplicaiones $f_{\#}: C_n(X) \to C_n(Y)$ satisfacen $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$

Prueba : $\qquad f_{\#}\partial(\sigma) = f_{\#}(\Sigma_i(-1)^i \sigma / [v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_n])$

$$= \Sigma_i(-1)^i / [v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_n] = \partial f_{\#}(\sigma)$$

A sí tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{\#}"] & C_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{\#}"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_{\#}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_n(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Fig. 7

Tal que en cada cuadro la composición $f_{\#}\partial$ es igual a la composción $\partial f_{\#}$. Un diagrama de aplicaciones con la propiedad que cualquiera dos composiciones de aplicaciones comienzan en un punto en el diagrama y finalizan en otro y ademas son iguales es llamado un diagrama conmutativo. En el presente caso conmutativo de el diagrama es equivalente a la relación conmutativa $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ pero diagramas conmutativos pueden contener triángulos conmutativos, pentágonos. El hecho que las aplicaciones $f_{\#}: C_n(X) \to C_n(Y)$ satisfacen $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ tambien se puede decir que $f_{\#}$ define una aplicación cadena desde la cadena singular compleja X a la de Y. La relación $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ implica que $f_{\#}$ lleva ciclos a ciclos puesto que $\partial\alpha = 0$ por lo tanto $\partial(f_{\#}\alpha) = f_{\#}(\partial\alpha) = 0$. Tambien, $f_{\#}$ lleva vecindades en vecindades puesto que $f_{\#}(\partial\beta) = \partial(f_{\#}\beta)$. Por lo tanto $f_{\#}$ induce un homomorfismo $f_*: H_n(X) \to H_n(Y)$.

Propiedades básicas de un homomorfismo inducido:

(i) $(fg)_* = f_* g_*$ para una aplicación compuesta $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Esto se sigue por la asociatividad de composición $\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. $\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

(ii) $1_* = 1$ donde 1 denota la aplicación identidad de un espacio a un grupo.

Teorema 2.1.1. Si dos aplicaciones $f,g: X \to Y$ son homotópicas, entonces ellas inducen el mismo homomorfismo $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$. Esta demostración es inmediata es inmediato aplicando las propiedaes (i) y (ii).

Corolario 2.1.1. Las aplicaciones $f,g: H_n(X) \to H_n(Y)$ inducida por una homotopia equivalente $f: X \to Y$ son isomorfas para todo n.

2.2. Grado de la esfera en S^n

Para una aplicación $f: S^n \rightarrow S^n$; $n > 0$, la aplicación inducida f_* es una aplicación de $H_n(S^n)$ en $H_n(S^n)$ un grupo cíclico infinito sobre si mismo, por lo tanto es de la forma $f_* (\alpha) = d(\alpha)$ para algún entero d dependiendo solo de f. Este entero es llamado el grado de f. Denotado por $deg\,f$.

Propiedades básicas del grado

1. $deg\ Id = 1$, es obvio puesto que $I_* = I$

2. $deg\,f = 0$, si f no es suryectiva.

Prueba: *Si* $f: S^n \rightarrow S^n$ no es sobreyectiva , entonces hay algún punto x que no es imagen de f. Sea $x_o \in S^n - f(S^n)$ entonces f se puede factorizar como una composición de $S^n \rightarrow S^n - \{x_0\} \rightarrow S^n$ y $H_n(S^n - \{x_o\}) = 0$, puesto que $S^n - \{x_o\}$ es contractible. Por lo tanto $f_* = 0$.

2. $deg\,f = 0$, si f no es suryectiva.

3. $si\ f \approx g$ entonces $deg\,f = deg\ g$ Es inmediato puesto que $f_* = g_*$.

4. $deg\,fg = deg\,f.\ deg\ g$ es trivial puesto que $(f \bullet g)_* = f_* \bullet g_*$

Prueba : grado de homotopias equivalentes es ± 1 , O sea $deg\,f \pm 1$ si f es una equivalencia homotópica . Como $f\,g \approx 1$ entonces $deg\,f \bullet deg\ g = deg\ Id = 1$

5. $deg\,f = -1$ si f es una reflección de S^n. Fijando los puntos en la sub esfera S^{n-1} y intercambiando los dos hemisferios complementarios . Podemos dar a S^n una Δ-estructura compleja con estos dos hemisferios como estos dos n-simples Δ_1 y Δ_2 y la n-cadena Δ_1-Δ_2 representa un generador de $H^n(S^n)$ así intercambiando la reflección Δ_1 y Δ_2 envía este generador al negativo.

6. La aplicación antipodal tiene grado $(-1)^{n+1}$. O sea $-Id : S^n \rightarrow S^n$, $x \rightarrow -x$ tiene grado $(-1)^{n+1}$

Prueba: sea $r_i : S^n \rightarrow S$, la aplicación reflección donde $r_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_{n+1})$.

Asi la aplicación antipodal es la composición de $n+1$ reflecciones:

$-x = r_1 \circ r_2 \circ \ldots \circ r_{n+1}(x)$. Cambian cada signo de una coordenada en R^{n+1}

7. Si f no tiene puntos fijos entonces $deg\, f = (-1)^{n+1}$

Prueba Sea $f(x) \neq x$ entonces el camino desde $f(x)$ a $-x$,definida por

$T \rightarrow (1-t)f(x)-tx$ para $0 \leq t \leq 1$ no pasa a traves del origen .

Por consiguiente si f no tiene punto fijo, la fórmula :

$$f_t(x) = [(1-t)f(x) - tx] / |(1-t)f(x) - tx|$$

define una homotopia desde f a la aplicación antipodal.

Teorema 2.2.1. S^n tiene campos continuos de vectores tangentes no nulos si n es impar.

Prueba:Supongamos $x \to v(x)$ es un campo vectorial tangente sobre S^n,que asigna a un vector $x \in S^n$ el vector $v(x)$ tangente a S^n en x. En relación con $v(x)$ como un vector a el origen en vez de un x,la tangencia apenas significa que x y $v(x)$ son ortogonales en R^{n+1} Si $v(x) \neq 0$ para todo x podriamos normalizarlo de modo que $|v(x)| = 1$ para todo x reemplazando $v(x)$ por $v(x)/|v(x)|$,asumiendo que esto se ha hecho, los vectores $(cost)x+(sent)v(x)$ con respecto al plano atravesado por x y $v(x)$.Si t va de 0 a π, obtenemos una homotopía $f_t(x)=(cost)x+(sent)v(x)$ de la aplicación identidad de S^n a la aplicación antipodal -1. Esto implica que $deg(-1) = deg 1$ por lo tanto $(-1)^{n+1}=1$ y n debe ser impar.

Inversamente : si n es impar, sea $n=2k+1$ podemos definir $v(x_1,x_2,\ldots,x_{2k+1},\ldots,x_{2k}) =(-x_2,x_1,\ldots,x_{2k} \quad x_{k-1})$.Luego $v(x)$ es ortogonal a x, asi v es un campo vector tangente sobre S^n y $|v(x)| = 1$ para todo $x \in S^n$. □

♜ *Una acción* de un grupo sobre un espacio topológico X es un homomorfismo de G a el grupo Homeo(X) de homeomorfismos $X \to X$ y la *acción es libre* si en el homeomorfismo correspondiente a cada elemento trivial g de G le corresponde un homeomorfismo $f \in$ Homeo (X) que no tiene punto fijo.En el caso de S^n la aplicación antípoda $x \to -x$ genera una libre acción de Z_2. Donde $Z_2= (\{0,1\}, +)$

1	0	1
0	0	1
1	1	0

Proposición 2.2.1. Z_2 es el grupo no trivial que puede actuar libremente sobre S^n si n es par.

Prueba Dado que el grado de un homomorfismo puede ser ±1 una acción de un grupo G sobre S^n determina una función grado $d:G\rightarrow \{\pm 1\}$. Esto es un homomorfismo $deg\, f.g = def.degg$

Si la acción es libre, por propiedad 7 de las esferas d envía todo elemento impar trivial de G a $(-1)^{n+1}$. Así cuando n es par, d tiene kernel trivial. Por consiguiente $G \subset \boldsymbol{Z_2}$. □

Ahora describimos una técnica para computar el grado lo cual puede ser aplicado a más aplicaciones en la practica

Pongamos $f:S^n \rightarrow S^n$ $n > 0$, tiene la propiedad que para algún punto $y \in S^n$, la preimagen $f^{-1}(y)$ consiste de un número finitos de puntos $x_1, \ldots, x_m$. Sean $U_1, \ldots, U_m$ vecindades disjuntas de estos puntos, tales que para una vecindad V de y, $f(U_i) \subset V$ para $i=1$, $2 \ldots ,m$. Entonces $f(U_i - x_i) \subset V-y$ para cada i, y así tenemos un diagrama conmutativo

$$
* \quad \begin{tikzcd}
 & H_n(U_i, U_i - x_i) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "k_i"] & H_n(V, V - y) \arrow[d] \\
H_n(S^n, S^n - x_i) & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n, S^n - y) \\
 & H_n(S^n) \arrow[u, "j"] \arrow[ul, dashed] \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Fig.8

Donde todas las aplicaciones son las obvias, en particular k_i y p_i son inducidos por inclusión. Los dos isomorfismos en la mitad superior del diagrama vienen de la separación, mientras que los dos isomorfismos de parte inferior vienen de sucesiones exactas de parejas. Estos cuatro isomorfismos, los dos grupos superiores en el diagrama pueden ser identificados con $H_n(S^n) \approx Z$, y el homomorfismo superior f_* llega por el producto de un entero llamado el grado local de f a x_i denotado por $degf \mid x_i$. Por ejemplo si f es un homeomorfismo, luego y puede ser cualquier punto y hay solamente una correspondencia x_i, así todas las aplicaciones en el diagrama son isomórficas y $deg\ f|x_i = deg\ f = \pm 1$. Mas generalmente, si f aplica cada U_i homeomorficamente sobre V, luego $deg\, f = \pm 1$. para cada i.

Proposición 2.2.2. $deg\, f = \Sigma_i\, deg\, f \mid x_i$.

Prueba Por eliminación, el término central $H^n(S^n,S^n - f^1(y))$ en el diagrama (*) es la suma directa de los grupos $H_n(U_i, U_i - x_i) \approx Z$ con k_i, la inclusión del i-ésimo sumando. Puesto que el triángulo superior conmuta, las proyecciones de estas sumas directas sobre los sumandos respectivos son dados por las aplicaciónes p_i. La conmutatividad del cuadrado establece la f_* del centro $k_i(1)$ $a \deg f \mid x_i$, por lo tanto $k_i(1)=j(1)$ es llevada a $\Sigma_i \deg f \mid x_i$. □

La conmutatividad del cuadrado inferior da la fórmula $\deg f = \Sigma i \deg f \mid x_i$.

Ejemplo 2.2.1. Podemos usar este resultado para construir una aplicación $S^n \to S^n$ de cualquier grado , para cada $n \geq 1$. Sea $q:S^n \to V_K S^n$ la aplicación cociente obtenida por colapsamiento de k de bolas disjuntas B_i en S^n a un punto, y sea $P:V_k S^n \to S^n$ identificando todos los sumandos a una sola esfera. Considérese la composición $f=pq$. Para casi todos los $y \in S^n$ tenemos que $f^1(y)$ consiste de un punto x_i en cada B_i. El grado local de f a x_i es ±1 dado que f es un homeomorfismo cerca de x_i . Precomponiendo p con reflexiones de sumandos de $V_k\ S^n$ si es necesario podemos hacer cada grado local +1 o -1 cualquiera que deseamos. Así podemos producir una aplicación $S^n \to S^n$ de grado $\pm k$.

Ejemplo 2.2.2. En el caso de S^1, la aplicación $f(z)=z^k$ cuando vemos a S^1 como el círculo unitario en C, tiene grado k. Esto es evidente en el caso $k=0$ puesto que f es constante . El caso $k<0$ se reduce al caso $k>0$ por composición con $Z \to Z^{-1}$, lo cuales una reflexión, de grado -1. Para calcular el grado cuando $k>0$, obsérvese primero que para cualquier $y \in S^1$, $f^1(y)$ consiste de k puntos $x_1,..., x_k$ lo cual f es un homeomorfismo local estirado por un arco circular a un factor de k. Este local estirado puede ser eliminado por una deformación de f cerca de x_i que no cambia de grado local , así el grado es el mismo por la rotación de S^1.Una *rotación* es un homeomorfismo de manera que el grado local a cualquier punto es igual a su grado global. Lo cual es +1 puesto que una rotación es homotópica a la identidad. Por consiguiente $deg\, f \mid x_i = 1\ deg\, f = k$.

Definición 2.2.1. Dado un espacio topológico X. La suspensión de X, a menudo denotado *por* SX, *esta definido como el espacio cociente* $X\ x\ [0,1]/\sim$. *En la cual* $(x,0) \sim (y,0)\ y\ (x,1) \sim (y,1)$ para cualquier $x,y \in X$.

Proposición 2.2.3. $deg\, Sf = deg\, f$,cuando $Sf : S^{n+1} \to S^{n+1}$ es la suspensión de la aplicación $f: S^n \to S^n$.

Prueba *Si* CS^n denota el cono $(S^n x\ I)/(S^n x\ I)$ con base $S^n = S^n x\ 0 \subset S^n$, así CS^n/S^n es la suspensión de S. La aplicación f induce $CS:(CS^n,S^n) \to (CS^n,S^n)$, con cociente sf.

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(S^{n+1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "Sf_*"] & H_n(S^n) \arrow[d, "f_*"] \\
H_{n+1}(S^{n+1}) \arrow[r, "\partial"] & H_n(S^n)
\end{tikzcd}$$

Es lo natural de las aplicaciones vecindad en las largas sucesionesexacta del par (CS^n,S^n) dada por la conmutatividad del diagrama de arriba. Por consiguiente si f_* es multiplicado por d tambien Sf_* lo estan.

Observe que para $f:S^n \to S^n$, la suspensión Sf aplica solamente un punto a cada uno de los dos polos de S^{n+1}. Esto implica que el grado local de Sf en cada polo es igual al grado global de Sf. Así el grado local de una aplicación $S^n \to S^n$ puede ser cualquier entero si $n \geq 2$, justo como el grado en si mismo puede ser cualquier entero cuando n $\geq$1.

Teorema 2.2.2. Cualquier aplicación nulhomotopica $f: S^n \to S^n$ tiene grado cero.

Prueba: Por invarianza homotopica es suficiente probar que cualquier aplicación constante tiene grado cero. *Sea* $f: S^n \to S^n$ cuyo valor es $c \in S^n$; f y g tienen rangos reducidos a $\{c\}$. Claramente tenemos que la inclusión $i: \{c\} \to S^n$ y que $f= i \circ g$. Sin embargo, observando a las aplicaciones inducidas sobre la homologia tenemos que

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[rr, "Hn(f)"] \arrow[dr, "Hn(g)"'] & & H_n(S^n) \\
& H_n(\{c\}) \arrow[ur, "Hn(i)"'] &
\end{tikzcd}$$

Fig.10

y puesto que $n \geq 1$, tenemos que $H_n(\{c\}) = 0$

Es decir que $H_n(g) = 0$. Por lo tanto $H_n(\alpha)=H_n((i) \circ H_n(g))(\alpha)=H_n(i)=0$

Teorema 2.2.3. Sea $f{:}S^n \to S^n$. Supongamos que $deg\, f \neq 1$, entonces $f(x)=-x$ para algún x.

Prueba: Puesto que $deg\, f \neq 1$, $deg\; af \neq (-1)^{n+1}$, Así a tiene un punto fijo x. O sea $x=af(x)=-f(x)$. Por lo tanto $f(x) = -x$.

Problema 2.2.1. Sean f y $g : S^n \to S^n$ aplicaciones continuas talque $f(x) \neq g(x)$ para todo x. Entonces $f \approx -g = \alpha o g$ donde α: $S^n \to S^n$ es la aplicación antipodal.

Solución : Como $f(x) \neq g(x)$ también $f(x)-g(x) \neq 0$. Definamos una aplicación

$$\varphi(x) = f(x)-g(x) \;/\; \| f(x)-g(x) \|.$$

La siguiente aplicación

$$H_1(x,t) = \quad (1-t)f(x)+t(f(x)-g(x)) \;/\; \| \, l(1-t)f(x)+t(f(x)-g(x) \, \|$$

es una homotopía entre f y g.

Veamos el denominador, si $t=1$, entonces $\| f(x)-g(x) \|$ no es cero por la hipótesis $\| (1-t)f(x) \; +t(f(x)-g(x)) \| = \| f(x)-tg(x) \| \geq | \, \| f(x) \| - t \| g(x) \| \, | = | \, 1\text{-t} \, | > 0.$

Sin embargo H_1 es una homotopía $f \approx f\text{-}g$.

Pero ahora definiendo

$$H_2(x,t) = \| \; (t-1)g(x) \; +t(f(x)-g(x)) \; \| \;/\; \| \; (t-1)g(x)+ t(f(x)-g(x)) \; \|$$

Sea $\| tf(x)-g(x) \| = \| g(x)-tf(x) \| \geq | \| g(x) \| - t\| f(x) \| | = |1-t| > 0$.

Así H_2: $-g \approx f\text{-}g$. Por lo tanto por transitividad $f \approx -g = \alpha \circ g$

Problema 2.2.2. Sea $f: S^n \to S^n$ nullhomotopica .Entonces f tiene un punto fijo y envía un punto a su antípode.

Solución: Si f es nullhomotópica, entonces por teorema 2.2.2. tiene gradocero. Sin embargo, $f(x) \neq x$ para todo x entonces $f \approx -Id$, pero el grado $\deg f = \deg(-Id)\,) = (-1)^{n+1} \neq 0$ por invarianza homotópica, es una contradicción. Similarmente, si f no envia puntos a su antípode entonces $f \approx Id$ así f tiene grado1.Lo cual es una contradicción.

Teorema 2.2.4. (Fundamental del Algebra) Sea $f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$ un polinomio con coeficientes complejos, donde $n > 0$. Entonces hay un número complejo x talque $f(x)=0$.

Prueba: Supongamos que $f(x) \neq 0$ para $x \in S^1$. Seguidamente definamos $f^{\wedge}: S^1 \to S^1$ $f^{\wedge}(x) = f(x)/|f(x)|$. Procedemos a calcular el grado de $f^{\wedge}$ ($\deg(f^{\wedge})$).

Supongamos primero que $f(x) \neq 0$ para $x \in S^1$ para todo x tal que $|x| \leq 1$. Y definamos h: $S^1 \times I \to S^1$ por $h(x,t) = f(tx)/|f(tx)|$. Entonces h es una homotopía de la aplicación constante $f(0)/|f(0)|$ a $f^{\wedge}$. Concluimos que $\deg(f^{\wedge}) = 0$.

Definamos j:S^1 x $I \rightarrow S^1$ por

$$j\ (x,t) = k(x,t)/\,|k(x,t)|,$$

donde $k(x,t)=t^n.f(x/t)=x^n + t(c_1x^{n-1} + tc_2x^{n-2} + ... + t^{n-1}c_n)$. Entonces j es una homotopía de f_n a f^, y concluimos que deg(f^)=n. Lo cual es una contradicción.

2.3. El teorema del punto fijo de Brouwer

A continuación plantearemos el famoso teorema de punto fijo de Brouwer´s que fue probado por éste en 1912 con un enfoque de teoría de grado topológico algebraico.

Brouwer no fue el primer en demostrar su propio teorema. Durante varios años, su nombre fue objeto de ataque debido a su inclinación filosófica e intencionista.

En 1909, Brouwer realiza la demostración de su teorema en R^3. En 1910, Hadamard, logra la demostración del teorema en R^n. Solamente en 1912 utilizando el concepto de grado topológico, Brouwer, puede demostrar su propio teorema en R^n.

Teorema 2.3.1. (De punto fijo de Brouwer).*Si* F: $D^n \rightarrow D^n$ es una aplicación continua entonces existe ξ talque $F(\xi) = \xi$.

Prueba: Supongamos $F:D^n \to D^n$ no tiene punto fijo. Consideremos la aplicación $G: D^{n+1} \to S^n$ definida por

$$G(x)=x-F(x)/\| x-F(x) \|$$

La cual es continua puesto que el denominador nunca es cero por hipótesis.

Sea $H: S^n \times I \to S^n$ definida como sigue.

$$H(x,t)=(1-t)x + t(x-F(x))/\| (1-t)x + t(x-F(x)) \|$$

El plan es hacer una homotopía de $G o\ \hat{\imath}\ a\ Id_s^n$ ($\hat{\imath}$ aplicación inclusión) lo que se quiere demostrar es que no hay aplicaciones desde D^{n+1} a S^n cuya restricción es homotópica a la identidad. En primera instancia hay que mostrar que H esta bien definida o sea que el denominador nunca es cero. Si $t=1$ entonces la expresión $\| x-F(x) \|$ no es cero por hipótesis para cualquier x. Para $t\in[0,1)$, entonces tenemos $\| (1-t)x+t(x-F(x) \| = \| x-tx+tx-tF(x) \| = |\| x-tF(x) \|| \geq |1-t| > 0$ donde en la segunda desigualdad hemos usado el hecho que $\| x \|=1$ y $\| F(x) \| \leq 1$. Así H esta bien definida y continua. Pero es claro que

$H(x,0)=x/\| x \|=x,\ x\in S^n$, y $H(x,1)=(x-F(x))/\| x-F(x) \|=G(x)=G o\ \hat{\imath}(X)$. □

CONCLUSIONES

Después de conocer la construcción del grado topológico por el método algebraico .he llegado a las siguientes conclusiones.

- Las homotopías no son únicas y pueden haber maneras diferentes de transformar un camino en otro.
- El Grupo Fundamental es el paso o medio para llegar al algebra topológico.
- La esfera es la única superficie cerrada cuyo grupo fundamental es el grupo trivial.
- Cualquier espacio topológico homeomorfo a un espacio que tiene la propiedad del punto fijo también posee esta propiedad
- El grado topológico puede construirse por el método topológico algebraico en espacio de dimensión infinita.
- La presentación del grado topológico por el método antes señalados es más adecuado para tratar una serie de apliaciones entre otras ramas de las ciencias como la física, quimica, medicina y otras.
- El concepto de grado topológico puede definirse en espacio de Banach de dimensión infinita, utilizando los resultados de el grado de Leray-Schauder.
- El grado es una función a valores enteros por esto es constante sobre las componentes conexas del domino de las funciones, esta observación sirve de fundamento para desarrollar una presentación axiomática de la teoría de grado.
- El teorema del punto fijo de Brouwer no es válido si $\mathbb{R}^n$ se sustituye por cualquier espacio de Banach de dimensión infinita.

BIBLIOGRAFÍA

[1]Hatcher Allen Algebraic Topology.(2002) Cambridge University Press.New York

[2] Hilton P.J and S.Wylie. (1960) Homology Theory. And Introduction Algebraic Topology (published by the cambrige university press)

[3]Hocking John G y Gail. S .Young (1988). Topology. Publiced Courier Duver

[4]Milnor Jhon W. (1956)Topology From The Diferentiab Viewpoint. The University Press of Virginia Charlottesville.

[5]Munkres. J. R. (2002) Topología. Prentice Hall,

[6] Morris W. Hirsch. (1976) Differencial Topology. Springer-Verlag.New York Inc.

[7] Rubiano, G. (1997) Topología General .Colombia Sección de publicaciones . Facultad de Ciencias . Universidad de Colombia.

[8] Spanier, Edwin. (1966). Algebraic topology. TATA Mc Graw-hill. Publishing Company LTD. New Delhi

[9] Wallace Andrew H. (1970). Algebraic Topology. Homology and Cohomology Copyrigts of Congress © 1970 by W.A. Benjamin, Inc. New York, New York .

BIBLIOGRAFIA ELECTRONICA

[1] Toni A. Watson. Topology Qualifyng Exam Syllabus And Notes.

www.math.umdedul~toni/syl.pdf. Unibersitatua.

[2]Minian Gabriel Elías. Departamento de Matematica FCE Y N, Universidad

de los Angeles Buenos Aires Argentina WWVV. DM.uba...

[3] Moler Jesper M. theory for Begimers.http WWW. Math.ku. ku

[4]Carlos Ivorra Castillo. Topología algebraica con aplicaciones a la Geometría

Diferencial. Htt://W-W.W.uv.es/~

[5]Marta Macho Stadler. Topología Algebraica. Facultad de Ciencias y Tecnología del País vasco - Euska Errico Unibersitatua. .http:WWW.ehu.es/.

[6] Marcelo Aguilar. La Topología y la geometría desde un punto de vista homotópico. Instituto de Matemáticas, UNAM. httl/www,smm~orqmx,/Smmp/

Lista de símbolos utilizados

R = Recta Real

$R^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \; ; \; x_i \in R, 1 \leq i \leq \}$ n-espacio euclideano

C = campo de los números complejos

I= Intervalo cerrado unitario

$S^{n-1} = \{ x \in R^n / \, \| \; x \; \| = 1 \}$

$D^n = \{ x \in R^n \, / \, \| \; x \; \| \leq 1 \}$, n disco cerrado

$E^n = \{ x \in R^n / \, \| \; x \; \| < 1$, n disco abierto

$S^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in R^n \; : \; x^2{}_1 + x^2{}_2 + \ldots + x^2{}_{n+1} = 1 \}$, esfera de dimensión n

H_n -funtor contravariante

$\Delta^n = \{ (t_0, \ldots, t_n) \in R^{n+1} / \Sigma_i t_i = 1$ y $t_i \geq 0$ para todo $i \}$, simplex standar

$\Delta^{n-1} = \{ (t_1, \ldots, t_n) \in R^n / t_1 + \ldots + t_n = 1$ y $t_i \geq 0 \}$ (n-1)- dimensional simplex

$\approx$ relación de homotopía

$\cong$ isomorfismo

$C(X)$ -grupo abeliano libre

$deg f$ = grado de f

$f_{\#}$ ***homomorfismo inducido***

$\dot{I}=\{0,1\}\subset I$ ***Sub conjunto del Intervalo Unitario***

$f|A'$ ***Restriccioón de f a A'; $A'\subset A$***

$S^1=\{x\in C:\ \|x\|=1\}$